



Casa abierta al tiempo

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA**  
**Unidad Iztapalapa**

*DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA*  
*MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS APLICADAS E*  
*INDUSTRIALES*

## **Selección de portafolios de largo plazo**

Tesis que presenta:

**María del Rosario Machuca Gutiérrez**

Para obtener el grado de:

**Maestra en Ciencias** (Matemáticas Aplicadas e Industriales)

Dirigida por:

**Dr. Erick Treviño Aguilar**

Jurado calificador:

Presidente: **Dra. Saavedra Barrera Patricia**

Secretario: **Dr. Treviño Aguilar Erick**

Vocal: **Dr. Vallejo Gutiérrez Refugio**

Ciudad de México a 25 de Julio de 2019.



*Dedicado a mis padres  
Olga y Juan Manuel*



# Agradecimientos

A la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, que me dio la oportunidad de desarrollarme y estudiar, en un marco de prestigio, calidad y confianza.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme la oportunidad de participar, como becaria, en el Programa Nacional de Posgrados de Calidad (PNPC) durante la realización de mi posgrado.

A mi director de tesis el Dr. Erick Treviño Aguilar, por la confianza que depositó en mí, por su paciencia y por todo su apoyo a lo largo de mi estancia en la Universidad de Guanajuato para la realización de mi trabajo de tesis.

A mis profesores de la maestría, en especial al Dr. Julio César García y a la Dra. Patricia Saavedra por todas sus enseñanzas. Al Dr. Gabriel Nuñez por su apoyo para salir en tiempo de la maestría.

A mis padres Olga Gutiérrez Martínez y Juan Manuel Machuca Lopez, por brindarme su comprensión, cariño y apoyo. Porque gracia a sus consejos y sacrificios logré llegar hasta este punto de culminar mis estudios de posgrado. También quiero agradecerle a mi hermana Maricruz que siempre me apoyo y me dio ánimos para lograr este objetivo.

A todos mis amigos y a todas las personas que me han acompañado y ayudado en este camino.



# Resumen

En este trabajo se demostrará como el crecimiento del mercado, que es un concepto muy intuitivo y con una formulación matemática precisa en el lenguaje de Desviaciones Largas implica la existencia de portafolios por lo que generan una riqueza y maximizan una utilidad esperada con crecimiento exponencial.

Un portafolio de inversión es aquel en el que una persona o empresa invierte en una colección de activos financieros que pueden ser bonos y/o acciones. La manera en que el capital inicial se distribuye en el portafolio nos lleva a tener diferentes estrategias de selección para tener el portafolio que nos de menor riesgo y un mejor rendimiento.

El tema de investigación es el siguiente: dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{(t \geq 0)}, \mathbb{P})$  donde  $(\mathcal{F}_t)_{(t \geq 0)}$  es la filtración aumentada por un movimiento browniano estandar  $(W_t)_{(t \geq 0)} \in \mathbb{R}^d$  y un capital inicial  $x$ , vamos a calcular la utilidad máxima esperada  $u_T(x) := \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[U(X_T)]$  que se alcanza en un horizonte de tiempo  $T > 0$  donde  $U$  es una función de utilidad HARA. Vamos a encontrar la estrategia óptima  $\xi^*$  tal que el capital generado  $X^*$  alcance la utilidad esperada máxima. Caracterizar a  $\xi^*$  es equivalente a calcular la proporción optima  $\pi_t^{*(T)}$  del capital  $X_t^{(T)}$  que se tiene que invertir en el activo financiero con riesgo.

Las estrategias óptimas se van a encontrar para el proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck y las funciones de utilidad HARA. Los resultados teóricos se ilustran numéricamente con simulaciones para visualizar cómo el crecimiento del horizonte conlleva un crecimiento exponencial de la riqueza  $X_T$ .





# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Introducción</b>	<b>IX</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
<b>2. Arbitraje Asintótico y Utilidad de Potencia</b>	<b>7</b>
<b>3. Estimaciones para el arbitraje asintótico</b>	<b>15</b>
<b>4. El proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck</b>	<b>21</b>
<b>5. Estrategias óptimas para el proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck y las utilidades HARA</b>	<b>31</b>
5.1. Utilidad Logarítmica . . . . .	32
5.2. Utilidad Exponencial . . . . .	34
5.3. Utilidad de Potencia . . . . .	38
5.4. Equivalencia de certeza y sus tasas de crecimiento . . . . .	46
5.4.1. Utilidad Logarítmica . . . . .	47
5.4.2. Utilidad Exponencial . . . . .	47
5.4.3. Utilidad de Potencia . . . . .	48
<b>6. Simulaciones</b>	<b>59</b>

<b>7. Costo promedio y crecimiento exponencial de la riqueza</b>	<b>65</b>
<b>8. Conclusiones</b>	<b>67</b>
<b>A. Resultados auxiliares</b>	<b>69</b>
<b>B. Utilidades con Aversión al Riesgo Absoluto Hiperbólico (HARA)</b>	<b>73</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>

# Introducción

La teoría de portafolio inicia con el argumento de que los inversionistas deben atender a las características de su portafolio completo y no sólo de algunos componentes individuales o de solamente un activo del portafolio. Además los inversionistas se preocupan sobre la rentabilidad así como del riesgo generado por cada activo riesgoso del portafolio.

Un portafolio de inversión es un conjunto de activos financieros como acciones, bonos, etc. que cotizan en el mercado bursátil y en los que una empresa o persona decide invertir su dinero. El cual esta compuesto por una combinación de activos de renta fija o variable, además se busca reducir el riesgo al combinar diferentes activos. A lo cual se le conoce como diversificar el portafolio de inversiones.

La clase de modelos de gran interés financiero en la actualidad son aquellos procesos que son martingalas bajo una medida de probabilidad equivalente. La razón por la cual son de gran interés es que son la clase de procesos que no permiten oportunidades de arbitraje.

Para el horizonte temporal finito, la clase de procesos estacionarios y la clase de procesos que son martingalas bajo una medida de probabilidad equivalente ya no son “ortogonales”: por ejemplo, el proceso Ornstein-Uhlenbeck admite claramente una medida martingala equivalente para cada horizonte finito fijo  $T$ . El tema interesante es analizar la situación asintótica cuando  $T \rightarrow \infty$ . En este contexto, la clase natural de procesos, que abarca como ejemplos de arco el modelo Black-Scholes, así como el proceso geométrico Ornstein-Uhlenbeck, parecen ser aquellos con un proceso de precio de mercado de riesgo no trivial  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  en el sentido de la Definición 1.5 que veremos más adelante, y en particular aquellos en los que el precio de riesgo del mercado satisface la estimación de desviaciones largas que veremos en capítulos posteriores.

## Objetivo

El objetivo de este trabajo es ver bajo que condiciones un portafolio de inversión que está compuesto de  $d$  activos riesgosos va a tener una riqueza con crecimiento exponencial dado un horizonte de tiempo. Para obtener esto vamos a definir un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{(t \geq 0)}, \mathbb{P})$  donde  $\mathbb{P}$  una medida de probabilidad con respecto a un movimiento browniano estándar (Definición A.6 Apéndice A)  $W_t$ , sea  $S \in \mathbb{R}^d$  que modela el proceso de precios que es una semimartingala local (Definición A.3 Apéndice A), tomamos un activo libre de riesgo  $B_t \equiv 1$  normalizado, lo anterior es bajo un horizonte temporal infinito.

Analizar cuidadosamente las tasas óptimas de crecimiento exponencial, las estrategias cor-

---

respondientes y las relaciones con el arbitraje asintótico y la maximización de la función de utilidad HARA.

En este trabajo nos centraremos en ver cómo la riqueza terminal  $X_T$  de nuestro portafolio va alcanzar un crecimiento exponencial cuando el horizonte de tiempo  $T$  tiende a infinito. Para lo cual nos apoyaremos en el artículo *Asymptotic arbitrage and large deviations* de Föllmer and Schachermayer [2008] el cual vamos a desarrollar en gran detalle de la siguiente manera.

## Estructura

En el Capítulo 1 veremos conceptos preliminares que utilizaremos en capítulos posteriores, como lo son arbitraje asintótico fuerte, desviaciones largas. También definiremos la medida de equivalencia  $\mathbf{Q}$  la cual vamos a ocupar a lo largo de este trabajo. Definiremos el espacio en el cual vamos a trabajar y enunciaremos dos teoremas que serán de gran importancia para llegar al resultado que nos interesa, es decir, saber que condiciones se tienen que cumplir para que se tenga un crecimiento exponencial para la riqueza terminal  $X_T$  dado un horizonte temporal.

Para el Capítulo 2 veremos que condiciones debe de cumplir el proceso de precios de los activos riesgosos  $S$  para que se admita arbitraje asintótico. Después daremos la relación entre arbitraje asintótico fuerte y la optimización del portafolio para la utilidad de potencia  $U(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$  con  $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$ .

En el Capítulo 3 veremos que un proceso de precios no trivial permite arbitraje asintótico. Aquí se demostrará el Teorema 1.6 que da las pérdidas máximas de capital que se pueden tener en el portafolio de inversión además da un estimado para que la probabilidad de que el valor del portafolio  $X_T$  tenga un crecimiento exponencial. También se relacionará arbitraje asintótico con la teoría de desviaciones largas.

Como el proceso geométrico Ornstein-Uhlenbeck es reversible a la media, es decir, si los valores del modelo están por arriba o por debajo de la media, conforme pase el tiempo estos valores van a retornar al valor medio. Además de ser un proceso estacionario, es decir, que para calcular los valores del proceso debemos suponer que estos son constantes. Entonces en el Capítulo 4 tomaremos a  $S_t = \exp(Y_t)$  donde  $Y_t$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Además vamos a definir el Principio de Desviaciones Largas, donde veremos su aplicación con un ejemplo. Lo anterior nos servirá para demostrar una versión más general del Teorema 1.7 que es el Teorema 4.8, donde veremos que condiciones se deben de cumplir para que el valor del portafolio no tenga un crecimiento exponencial. Finalmente se va hacer una comparación con el proceso de Ornstein-Uhlenbeck del Teorema 4.8 con el caso más simple del modelo de Black-Scholes.

Las funciones de utilidad HARA (para más información revisar Apéndice B), tenemos que la tolerancia al riesgo presenta un comportamiento lineal con la riqueza del portafolio. Esta familia de funciones de utilidad (HARA) incluye a las cuadráticas, logarítmicas y la de potencia, además presentan mayores cambios en el nivel de satisfacción por cambios en el nivel de riqueza. Por lo tanto en el Capítulo 5 se va hacer el cálculo de la estrategia óptima, proporción óptima y utilidad máxima esperada para cada una de las utilidades HARA, para el caso especial donde  $S$  está dado por un proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck que se describirá en el Capítulo 4.

---

También en la Observación 5.9 se vera la función de utilidad  $\tilde{u}_T(x)$  que se tiene cuando  $S$  no está generada por los precios descontados.

Introduciremos el equivalente de certeza que no es más que frente a cualquier opción riesgosa a la que se haga frente, siempre será posible especificar un valor seguro que tenga el mismo valor que la perspectiva riesgosa, a lo que llamamos Equivalente de Certeza (CE). Daremos el equivalente de certeza con sus respectivas tasa de crecimiento para cada una de las utilidades HARA. Por último, utilizando programación dinámica veremos bajo que condiciones la estrategia óptima de la utilidad exponencial está acotada.

Ya teniendo resultados importantes sobre que condiciones se deben de cumplir para que el valor del portafolio tenga un crecimiento exponencial, entonces en el Capítulo 6 se presentaran simulaciones para ilustrar los resultados del Teorema 4.8. Además como en el Capítulo 5 vimos resultados muy relevantes para las utilidades HARA, entonces también se harán simulaciones para el caso particular de la utilidad logarítmica.



# Capítulo 1

## Preliminares

Comenzaremos por definir que es una semimartingala

**Definición 1.1.** *Un proceso estocástico  $S = (S_t)$  es una semimartingala si  $S$  puede descomponerse como*

$$S = S_0 + M + A$$

*donde  $S_0$  es un valor finito,  $M$  es una martingala local (Apéndice A, Definición A.3) y  $A$  es un proceso adaptado con variación finita. ([Jacod and Shiriyayev, 2002, pag. 43]).*

Consideramos un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{(t \geq 0)}, \mathbb{P})$ , donde  $\mathbb{P}$  es una medida de probabilidad con respecto a un movimiento browniano estandar  $(W)_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^N$ , sea  $S = (S_t)_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^d$  una semimartingala que modela el proceso de precios de  $d$  activos con riesgo y un horizonte infinito  $T$  (para una exposición sistemática de la clase de procesos semimartingala consultar referencias clásicas como Jacod and Shiriyayev [2002] o Protter [2005]).

Denotemos mediante  $\mathcal{H}$  la clase de procesos estocásticos predecibles (revisar Capítulo A Definición A.1). Recordemos que dicha clase está conformada por todos los procesos estocásticos interpretados como variables aleatorias de  $\Omega \times [0, T]$  a  $\mathbb{R}^d$  que son medibles con respecto a la  $\sigma$ -álgebra predecible. Sea  $H \cdot S$  la integral estocástica de  $H$  con respecto a  $S$ .

En el modelo estocástico del mercado financiero, se supondrá incluido un bono libre de riesgo normalizado  $B_t \equiv 1$ , es decir, lo consideramos en términos de los precios descontados  $S$ . Para un horizonte finito fijo  $T$ , sea  $K_T$  el conjunto de reclamos contingentes alcanzables:

$$K_T = \{(H \cdot S)_T \mid H \in \mathcal{H}\}.$$

Para los fines de este trabajo utilizaremos el concepto de *arbitraje asintótico fuerte* introducido por Kabanov and Kramkov [1998] en el cual podemos variar el horizonte temporal  $T$ . Tenemos la siguiente definición

---

**Definición 1.2.** El proceso  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  permite un arbitraje asintótico fuerte si para  $\epsilon > 0$  existe un horizonte finito  $T$  y  $X_T \in K_T$  que satisface:

(i)  $X_T \geq -\epsilon$  casi seguramente, y

(ii)  $\mathbb{P}[X_T \geq \epsilon^{-1}] \geq 1 - \epsilon$ .

La definición anterior nos dice para la condición (i) que la pérdida máxima para la estrategia de inversión que produce la riqueza  $X_T$  en el momento  $T$ , es a lo más  $\epsilon$  y para la condición (ii) nos dice que con probabilidad  $1 - \epsilon$ , la riqueza  $X_T$  es por lo menos  $\epsilon^{-1}$ , es decir, que hay posibilidad de generar un capital considerable siempre que se alargue lo suficiente al horizonte  $T$ .

En la siguiente hipótesis vamos a definir los procesos y demás funciones que utilizaremos en adelante.

**Hipótesis 1.3.** El proceso  $S = (S_t)_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^d$  es una difusión definida en  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  tal que existe una función de volatilidad:

$$\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times N} \quad (1.1)$$

así como un precio de mercado de la función de riesgo:

$$\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^N. \quad (1.2)$$

Sea  $W$  un movimiento browniano,  $S$  satisface la siguiente dinámica

$$dS_t = \sigma(S_t) (dW_t + \varphi(S_t) dt). \quad (1.3)$$

Más aún,  $\varphi(S_t)$  toma sus valores en  $\ker(\sigma(S_t))^\perp$ , donde

$$\ker(\sigma) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sigma(x) = 0_{\mathbb{R}^{d \times N}} \right\}.$$

Por último asumimos que:

$$Z_t^{\min} = \exp \left[ - \int_0^t (\varphi_u, dW_u) - \frac{1}{2} \int_0^t \|\varphi_u\|^2 du \right] \quad (1.4)$$

es una martingala estrictamente positiva, donde  $\varphi_u = \varphi(S_u)$ ,  $(\cdot, \cdot)$  es producto interior y  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana en  $\mathbb{R}^N$ .

Como consecuencia al suponer que  $Z^{\min}$  es una martingala estrictamente positiva se tiene por el Teorema de Transformación de Girsanov [Revuz and Yor, 2005, Theorem 2.2] que para cada  $T > 0$  la medida  $Q_T^{\min} \in \mathcal{F}_T$  definida por la derivada de Radon-Nikodym:

$$\frac{dQ_T^{\min}}{d\mathbb{P}} = Z_T^{\min} \quad (1.5)$$

es una medida de probabilidad equivalente a  $\mathbb{P}$  en  $\mathcal{F}_T$  tal que  $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$  es una martingala (local) con respecto a  $Q_T^{\min}$  que es lo mismo que  $Z^{\min} S$  es una martingala (local) con respecto



a  $\mathbb{P}$ . Por lo tanto tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.4.**  $Z^{\min} S$  es una martingala con respecto a  $\mathbb{P}$  si y solo si  $S$  es una martingala local con respecto a  $Q_T^{\min}$ .

*Demostración.* Comenzamos con la implicación de ida

Dada la Regla de Bayes (Apéndice A Definición A.7) se tiene lo siguiente

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[S|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{Z_t} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[Z_t S|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{Z_t} Z_t S$$

ya que  $Z^{\min} S$  es una  $\mathbb{P}$ -martingala.

Por demostrar que  $Z^{\min} S$  es una  $\mathbb{P}$ -martingala. Aplicando integración por partes (Apéndice A, Definición A.8) a  $Z^{\min} S$  se tiene lo siguiente

$$Z^{\min} S = \overbrace{\int_0^t Z dS}^{(1)} + \overbrace{\int_0^t S dZ}^{(2)} + \overbrace{\langle Z, S \rangle_t}^{(3)} \quad (1.6)$$

desarrollando la integral (1)

$$\int_0^t Z dS = \int_0^t Z \sigma(S_u) dW_u + \int_0^t Z \sigma(S_u) \varphi(S_u) du$$

donde el primer término es una martingala. Para la integral (2), primero vamos a verificar que  $Z^{\min}$  es  $\mathbb{P}$ -martingala

$$dZ = Z \left( -\varphi dW - \frac{1}{2} \|\varphi_u\|^2 dt \right) + \frac{1}{2} Z \|\varphi_u\|^2 dt = -Z \varphi dW.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^t S dZ = - \int_0^t S Z \varphi(S_u) dW_u$$

es martingala con respecto a  $\mathbb{P}$ . Por último para (3) se tiene lo siguiente

$$\langle Z, S \rangle_t = - \int_0^t Z \varphi_u \sigma(S_u) du. \quad (1.7)$$

La ecuación (1.7) se anula con el segundo término de la integral (1). Por lo tanto la ecuación (1.6) la podemos escribir de la siguiente manera

$$Z^{\min} S = Z (\sigma(S_t) - S \varphi(S_t)) dW_t$$

es una martingala con respecto a  $\mathbb{P}$ . □

También será de gran interés conocer las probabilidades de eventos raros que son exponencialmente pequeñas y que están en función de un parámetro, las cuales son llamadas *desviaciones largas*. También hablaremos sobre el *principio de desviaciones largas*, que caracteriza el comportamiento de una familia de medidas de probabilidad  $\{\mu_\epsilon\} \in (\mathcal{X}, \mathcal{B})^1$  cuando  $\epsilon$  tiende a 0 en términos de una función de tasa  $I$ . Esta caracterización se realiza a través de límites exponenciales superiores e inferiores asintóticos en los valores que  $\mu_\epsilon$  asigna a subconjuntos medibles de  $\mathcal{X}$ . Revisar el principio de desviaciones largas en [Dembo A, 1998, p.5].

Una cuestión importante es comprender que características del modelo de la ecuación (1.5) implica que hay un crecimiento exponencial de un portafolio alcanzable bien elegido, a medida que el horizonte  $T$  converge a  $\infty$ . Por lo que debemos imponer alguna suposición sobre el precio de mercado del riesgo. De hecho, si  $\varphi$  se anula, entonces el proceso  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  es una martingala local y no podemos ganar sistemáticamente apostando a una martingala local. Por lo que tenemos la siguiente definición.

**Definición 1.5.** *Bajo la Hipótesis 1.3, decimos que el proceso de difusión  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  tiene un precio de mercado promedio al cuadrado del riesgo por encima del umbral  $c > 0$  si el proceso  $(\|\varphi_t\|)_{t \geq 0}$  satisface la siguiente estimación:*

$$\lim_{T \nearrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \|\varphi_t\|^2 dt < c \right] = 0. \quad (1.8)$$

*Si existe  $c > 0$  tal que (1.8) es verdadera, decimos que  $S$  tiene un precio de mercado del riesgo no trivial. Decimos que el precio de mercado del riesgo satisface una estimación de desviaciones largas, si hay constantes  $c_1, c_2 > 0$  tal que:*

$$\limsup_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( \mathbb{P} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \|\varphi_t\|^2 dt \leq c_1 \right] \right) < -c_2. \quad (1.9)$$

La interpretación para la ecuación (1.8) es que el precio de mercado del riesgo en promedio debería estar alejado de cero a largo plazo. Este supuesto se cumple siempre que la difusión sea ergódica con medida invariante  $\mu$  y si el precio de mercado de la función de riesgo  $\varphi$  no es 0 en  $\mu$  casi seguramente, ya que la ergodicidad implica

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|\varphi_t\|^2 dt = \int_{\mathbb{R}^d} \|\varphi(x)\|^2 \mu(dx) \quad \text{en } \mathbb{P} \text{ casi seguramente.}$$

La suposición de la ecuación (1.8) es, por supuesto, más débil que (1.9), pero es suficiente para deducir las siguientes estimaciones que se demostrarán en sección 3 del Capítulo 2.

<sup>1</sup>donde  $\mathcal{X}$  es un espacio métrico y  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de borelianos.

**Teorema 1.6.** *Sea  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  un proceso que satisface la Hipótesis 1.3 y que tenga un precio de mercado promedio al cuadrado del riesgo por encima del umbral  $c > 0$  como en (1.8). Entonces, para  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 < c/2$  y para  $T$  lo suficientemente grande, existe  $X_T \in K_T$  tal que:*

- (i)  $X_T \geq -e^{-\gamma_1 T}$
- (ii)  $\mathbb{P}[X_T \geq e^{\gamma_2 T}] \geq 1 - \epsilon$ .

El teorema anterior nos dice que, si un precio de mercado del riesgo no trivial está dado por la ecuación (1.8) significa que hay arbitraje asintótico; mas aún, obtenemos estimaciones exponenciales para la pérdida máxima que es el inciso (i), para (ii) tenemos que con probabilidad  $1 - \epsilon$  la riqueza terminal  $X_T$  es al menos  $e^{\gamma_2 T}$ .

En el Capítulo 4 ilustraremos la situación del proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck, el cual está definido por:

$$S_t = \exp(Y_t) \tag{1.10}$$

donde  $(Y_t)_{t \geq 0}$  denota un *proceso de Ornstein-Uhlenbeck* definido por:

$$dY_t = -\rho Y_t dt + \sigma dW_t, \quad Y_0 = y_0, \tag{1.11}$$

para constantes  $\sigma > 0$ ,  $\rho > 0$  y  $y_0 \in \mathbb{R}$ . El precio de mercado del riesgo  $\varphi_t = \varphi(S_t)$  está dado por

$$\varphi_t = -\frac{\rho}{\sigma} Y_t + \frac{\sigma}{2}.$$

Si tomamos a  $S_t$  como un proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck el Teorema 1.6 se podría reescribir de la siguiente manera.

**Teorema 1.7.** *Sea  $(S_t)_{t \geq 0}$  un proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck como en la ecuación (1.10). Para cualesquiera  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma_1 + \gamma_2 < \gamma \in \left(0, \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4}\right)$  existen reclamationes contingentes  $X_T \in K_T$  tal que*

- (i)  $X_T \geq -e^{-\gamma_2 T}$ ,
- (ii)  $\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}[X_T < e^{\gamma_1 T}] = -\frac{\left(\frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{4}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{2}}$ .



## Capítulo 2

# Arbitraje Asintótico y Utilidad de Potencia

En este capítulo demostraremos una serie de proposiciones en las cuales veremos cuando un proceso de precios  $(S)_{t \geq 0} \in \mathbb{R}^d$  admite arbitraje asymptótico fuerte, además de relacionar la optimización dinámica del portafolio con la utilidad de potencia.

Comenzamos con una caracterización dual de la noción de arbitraje asymptótico. En esta proposición tomamos el horizonte  $T$  como fijo.

**Proposición 2.1.** Sea  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  una semimartingala local ([Jacod and Shiriyayev, 2002, Def. 1.33, p.8]) en  $\mathbb{R}^d$  tal que:

$$\mathcal{M}_T^e(S) = \{Q \sim \mathbb{P} \mid S \text{ es una } Q\text{-martingala local}\} \neq \emptyset.$$

Para  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, 1)$  los incisos (a) y (b) son equivalentes:

(a) Existe  $X_T \in K_T$  tal que

(i)  $X_T \geq -\epsilon_2,$

(ii)  $\mathbb{P}(X_T \geq 1 - \epsilon_2) \geq 1 - \epsilon_1.$

(b) Existe  $\mathcal{A}_T \in \mathcal{F}_T$  con  $\mathbb{P}[\mathcal{A}_T] \leq \epsilon_1$  tal que, para cada  $Q \in \mathcal{M}_T^e$  tenemos que  $Q[\mathcal{A}_T] \geq 1 - \epsilon_2.$

En este caso decimos que  $S$  admite un  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ -arbitraje (hasta el tiempo  $T$ ).

*Demostración.* Comenzamos por demostrar (a)  $\Rightarrow$  (b)  
Tenemos del inciso (a) propiedad (ii) que si

$$\mathcal{B}_T = \{X_T \geq 1 - \epsilon_2\} \quad \text{entonces} \quad \mathbb{P}[\mathcal{B}_T] \geq 1 - \epsilon_1.$$

Tomamos el complemento de  $\mathcal{B}_T$ , que es el conjunto

$$\mathcal{A}_T = \{X_T < 1 - \epsilon_2\}$$

así que  $\mathbb{P}[A_T] \leq \epsilon_1$ .

Ahora tomemos  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_T^e$ , como  $X_T \in K_T$  tenemos que  $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}\{X_T\} \leq 0$ , debido a [Delbaen and Schachermayer, 1994, Teorema 5.7].

Ya que  $X_T$  cumple la propiedad (ii) del inciso (a), la podemos escribir como:

$$X_T \mathbf{1}_{A_T} + X_T \mathbf{1}_{A_T^c} \geq -\epsilon_2 \mathbf{1}_{A_T} + (1 - \epsilon_2) \mathbf{1}_{A_T^c}.$$

Aplicando esperanza respecto a la medida  $\mathbf{Q}$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X_T] &\geq -\epsilon_2 \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\mathbf{1}_{A_T}] + (1 - \epsilon_2) \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\mathbf{1}_{A_T^c}] \\ &= -\epsilon_2 \mathbf{Q}[A_T] + (1 - \epsilon_2) \mathbf{Q}[A_T^c]. \end{aligned}$$

Lo anterior lo podemos escribir de la siguiente manera

$$(1 - \epsilon_2) \mathbf{Q}[\Omega \setminus A_T] - \epsilon_2 \mathbf{Q}[A_T] \leq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X_T] \leq 0.$$

Por lo tanto  $\mathbf{Q}[A_T] \geq 1 - \epsilon_2$ .

Ahora vamos a demostrar (b)  $\Rightarrow$  (a)

Si  $A_T$  satisface (b) entonces:

$$X_T = -\epsilon_2 \mathbf{1}_{A_T} + (1 - \epsilon_2) \mathbf{1}_{\Omega \setminus A_T},$$

tenemos que la ecuación anterior tiene las propiedades (i) y (ii) y además satisface que  $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X_T] \leq 0$  para cada  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_T^e(S)$ .

Aplicando de nuevo el teorema de la supercobertura [Delbaen and Schachermayer, 1994, Teorema 5.7], vemos que  $X_T$  está dominado por un elemento  $\tilde{X}_T \in K_T$  y  $\tilde{X}$  hereda las propiedades (i) y (ii), ya que  $\tilde{X} \geq X_T \geq -\epsilon_2$  y además  $\mathbb{P}[\tilde{X} \geq X_T \geq 1 - \epsilon_2] \geq 1 - \epsilon_1$ . Por lo tanto se obtienen (a).  $\square$

En el siguiente resultado relacionamos el arbitraje asintótico fuerte con la optimización dinámica del portafolio para una cierta clase de funciones de utilidad de potencia  $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ .

**Proposición 2.2.** Sea  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  una semimartingala localmente acotada  $\mathbb{R}^d$ -valuada tal que, para cada  $T > 0$ , el conjunto  $\mathcal{M}_T^e(S) \neq \emptyset$ . Sea  $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava estrictamente creciente tal que:

$$\lim_{x \nearrow 0} U(x) = -\infty, \quad \lim_{x \nearrow \infty} U(x) = 0.$$

Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a)  $(S_t)_{t \geq 0}$  permite un arbitraje asintótico fuerte.

(b) Definiendo el valor de la función

$$u_T = \sup_{X_T \in K_T} \mathbf{E}[U(x + X_T)],$$

tenemos

$$\lim_{T \nearrow \infty} u_T(x) = 0$$

para algunos  $x > 0$  (o equivalentemente,  $\forall x > 0$ ).

*Demostración.* Comenzamos por demostrar (a)  $\Rightarrow$  (b)

Dado  $x > 0$  y sea  $0 < \epsilon < \frac{x}{2}$ . Si  $X_T \in K_T$  satisfacen (i) y (ii) de la Definición 1.2, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_T(x) &\geq \mathbf{E}[U(x + X_T)] \\ &\geq \mathbf{E}[U(x + X_T)\mathbf{1}_{\{X_T < \frac{1}{\epsilon}\}} + U(x + X_T)\mathbf{1}_{\{X_T \geq \frac{1}{\epsilon}\}}]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ahora por la condición (i) de la Definición 1.2 tenemos que  $x + X_T \geq x - \epsilon$  y como  $\epsilon < \frac{x}{2}$  entonces  $x - \epsilon \geq \frac{x}{2}$ . Por lo tanto en el evento  $\{X_T \geq \frac{1}{\epsilon}\}$  tenemos que  $x + X_T \geq \frac{1}{\epsilon}$  ya que  $x > 0$ .

Entonces con lo anterior, en la ecuación (2.1) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} u_T(x) &\geq \mathbf{E} \left[ U \left( \frac{x}{2} \right) \mathbf{1}_{\{X_T < \frac{1}{\epsilon}\}} + U \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \mathbf{1}_{\{X_T \geq \frac{1}{\epsilon}\}} \right] \\ &= U \left( \frac{x}{2} \right) \mathbb{P} \left[ X_T < \frac{1}{\epsilon} \right] + U \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \mathbb{P} \left[ X_T \geq \frac{1}{\epsilon} \right] \\ &\geq \epsilon U \left( \frac{x}{2} \right) + U \left( \epsilon^{-1} \right). \end{aligned}$$

Ahora bien  $\lim_{\epsilon \nearrow 0} (\epsilon U \left( \frac{x}{2} \right) + U \left( \epsilon^{-1} \right)) = 0$ , por lo tanto  $\lim_{T \nearrow \infty} u_T(x) = 0$ .

Por demostrar que (b)  $\Rightarrow$  (a)

Supongamos que hay un  $x > 0$  tal que  $\lim_{T \nearrow \infty} u_T(x) = 0$ . Por lo tanto, podemos encontrar  $X_T \in K_T$  tal que

$$X_T \geq -x \quad \text{y} \quad \lim_{T \nearrow \infty} \mathbf{E}[U(x + X_T)] = 0.$$

---

Sea  $\epsilon > 0$  y aplicamos la *Desigualdad de Tschebyscheff* [A.4](#) en  $\mathbb{P} [X_T < x\epsilon^{-2}]$  obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [X_T < x\epsilon^{-2}] &= \mathbb{P} [|U(x + X_T)| > |U(x + x\epsilon^{-2})|] \\ &\leq |U(x + x\epsilon^{-2})|^{-1} |\mathbf{E}[U(x + X_T)]|. \end{aligned}$$

Tomamos un  $T_\epsilon > 0$  tal que

$$\mathbf{P} [X_T \geq x\epsilon^{-2}] \geq 1 - \epsilon.$$

Donde  $T \geq T_\epsilon$  y  $X_T \geq -x$ , por lo tanto podemos concluir que:  $\frac{\epsilon X_T}{x}$  satisface la Definición [1.2](#).  $\square$

La proposición anterior es un resultado que solo nos da las propiedades que se deben cumplir para que  $(S_t)_{t \geq 0}$  permita un arbitraje asintótico fuerte. Para obtener resultados sobre la velocidad de convergencia de  $u_T(x)$ , nos enfocaremos en el caso de la utilidad de potencia que es

$$U^{(\alpha)}(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}, \quad -\infty < \alpha < 0$$

y su función conjugada  $V(y) = \sup_{x>0} [U^{(\alpha)}(x) - xy]$ ,  $y > 0$ , está dada por

$$V(y) = V^{(\beta)}(y) = -\frac{y^\beta}{\beta}, \quad \text{con } \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \in ]0, 1[.$$

Ahora escribimos la función primitiva y dual, para la utilidad de potencia

$$u_T^{(\alpha)}(x) = \sup_{X_T \in K_T} \mathbf{E} [U^\alpha(x + X_T)], \quad x > 0$$

$$v_T^{(\beta)}(y) = \inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_T^\epsilon(S)} \mathbf{E} \left[ V^{(\beta)} \left( y \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbb{P}} \right) \right], \quad y > 0.$$

Tenemos que

$$u_T^{(\alpha)}(x) = c_T U^{(\alpha)}(x), \quad \text{para algun } 0 \leq c_T \leq 1$$

y

$$v_T^{(\beta)}(y) = c_T^* V^{(\beta)}(y), \quad \text{con } c_T^* = c_T^{\frac{1}{|\alpha|+1}}.$$

(comparar con [Kramkov and Schachermayer \[1999\]](#)).

Para la siguiente proposición tomamos el horizonte  $T$  fijo.



**Proposición 2.3.** Sea  $-\infty < \alpha < 0$ ,  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$  y una semimartingala  $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$   $\mathbb{R}^d$ -valuada, como está dada en la Proposición 2.1. Para  $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  considerar las siguientes afirmaciones:

- (i)  $S$  admite un  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ -arbitraje.
- (i') Existe  $A \in \mathcal{F}_T$ ,  $\mathbb{P}[A] \leq \epsilon_1$ , tal que, para cada  $Q \in \mathcal{M}_T^e(S)$  se tiene que  $Q[A] \geq 1 - \epsilon_2$ .
- (ii)  $\forall Q \in \mathcal{M}_T^e(S)$  hay un  $A \in \mathcal{F}_T$  tal que,  $\mathbb{P}[A] \leq \epsilon_1$  y  $Q[A] \geq 1 - \epsilon_2$ .
- (iii)  $u_T^{(\alpha)}(x) \geq \epsilon U^{(\alpha)}(x)$ , para algunas (o equivalentemente, para toda)  $x > 0$ .
- (iii')  $v_T^{(\beta)}(y) \geq \epsilon^{\frac{1}{|\alpha|+1}} V^{(\beta)}(y)$ , para algunas (o equivalentemente, para toda)  $y > 0$ .

Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- (a) (i)  $\Leftrightarrow$  (i') y (iii)  $\Leftrightarrow$  (iii').
- (b) (i')  $\Rightarrow$  (ii). La implicación de regreso (ii)  $\Rightarrow$  (i') es verdadera si el mercado es completo, es decir,  $\mathcal{M}_T^e(S) = \{Q\}$ .
- (c) (ii)  $\Rightarrow$  (iii') si  $\epsilon \geq 2^{1+|\alpha|} \max(\epsilon_1, \epsilon_2^{|\alpha|})$ .
- (d) (iii)  $\Rightarrow$  (i) si  $\epsilon \leq \epsilon_1 \epsilon_2^{|\alpha|}$ .

*Demostración.*    ■ Para (a)

$$(i) \Leftrightarrow (i')$$

De la Proposición 2.1 se tiene directo la demostración.

$$(iii) \Leftrightarrow (iii')$$

Sea  $\epsilon > 0$ ,  $u_T^{(\alpha)}(x) \geq \epsilon U^{(\alpha)}(x)$  y  $c \in [0, 1]$  entonces  $cU^\alpha(x) \geq U^\alpha(x)$ ,  $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 V(y) &= \sup_{x>0} [U^\alpha(x) - xy] \\
 &\geq \sup_{x>0} \left[ \frac{\epsilon}{c} U^\alpha(x) - xy \right] \\
 &\geq \frac{\epsilon}{c} \sup_{x>0} \left[ U^\alpha(x) - \frac{\epsilon}{c} xy \right] \\
 &= \frac{\epsilon}{c} V\left(\frac{c}{\epsilon} y\right) \\
 &= -\frac{\epsilon}{c} \frac{1}{\beta} y^\beta \left(\frac{c}{\epsilon}\right)^\beta \\
 &= \frac{\epsilon}{c} \left(\frac{c}{\epsilon}\right)^\beta V(y) \\
 &= \left(\frac{c}{\epsilon}\right)^{\beta-1} V(y)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

para lo anterior tenemos

$$\beta - 1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha - 1} \quad \text{y} \quad c^{\beta-1} c^* = c^{\frac{1}{\alpha-1}} c^{\frac{1}{|\alpha|+1}}.$$

Por definición  $\alpha \in (-\infty, 0)$  entonces

$$c^{\beta-1} c^* = c^{\frac{1}{\alpha-1}} c^{\frac{1}{-\alpha+1}} = c^{\frac{1}{\alpha-1}} c^{-\frac{1}{\alpha-1}} = 0,$$

multiplicando a (2.2) por  $c^*$  y con lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} c^* V(y) &\geq c^* \left(\frac{c}{\epsilon}\right)^{\beta-1} V(y) \\ &= \frac{1}{\epsilon^{\beta-1}} V(y) \\ &= \epsilon^{1-\beta} V(y) \\ &= \epsilon^{\frac{1}{|\alpha|+1}} V(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene (iii').

■ Para (b)

(i')  $\Rightarrow$  (ii)

De (i') tenemos que se cumple (ii). Ya que para cada  $\forall \mathbf{Q} \in \mathcal{M}_T^\epsilon(S)$  hay un  $A \in \mathcal{F}_T$  y por la Proposición 2.1 se tiene que:  $\mathbb{P}[A] \leq \epsilon_1$  y  $\mathbf{Q}[A] \geq 1 - \epsilon_2$ . Para (ii)  $\Rightarrow$  (i') sea verdadero, tenemos que pedir que  $\mathcal{M}_T^\epsilon(S) = \{\mathbf{Q}\}$

■ Para (c)

(ii)  $\Rightarrow$  (iii') si  $\epsilon \geq 2^{1+|\alpha|} \max(\epsilon_1, \epsilon_2^{|\alpha|})$ . Fijamos  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_T^\epsilon(S)$  y el conjunto correspondiente  $A \in \mathcal{F}_T$  que satisface  $\mathbb{P}[A] \leq \epsilon_1$  y  $\mathbf{Q}[A] \geq 1 - \epsilon_2$  como en (ii). Tomando valores muy pequeños para  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , podemos suponer que:  $\mathbb{P}[A] = \epsilon_1$  y  $\mathbf{Q}[A] = 1 - \epsilon_2$  entonces  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0, 1]$ . Y por lo visto en (a) es suficiente para probar (iii').

Por la desigualdad de Jensen [Williams, 1991, p. 88] se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[ V^{(\beta)} \left( \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbb{P}} \right) \right] &= -\frac{1}{\beta} \mathbf{E} \left[ \left( \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbb{P}} \right)^\beta \right] \\ &\geq -\frac{1}{\beta} \mathbf{E} \left[ \mathbf{1}_A \left( \frac{\mathbf{Q}[A]}{\mathbb{P}[A]} \right)^\beta + \mathbf{1}_{\Omega \setminus A} \left( \frac{\mathbf{Q}[\Omega \setminus A]}{\mathbb{P}[\Omega \setminus A]} \right)^\beta \right] \\ &= -\frac{1}{\beta} \left[ \epsilon_1^{1-\beta} (1 - \epsilon_2)^\beta + (1 - \epsilon_1)^{1-\beta} \epsilon_2^\beta \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

y como

$$\begin{aligned} \epsilon_1^{1-\beta} (1 - \epsilon_2)^\beta &\leq \epsilon_1^{1-\beta} \leq \max(\epsilon_1^{1-\beta}, \epsilon_2^\beta) \\ (1 - \epsilon_1)^{1-\beta} \epsilon_2^\beta &\leq \epsilon_2^\beta \leq \max(\epsilon_1^{1-\beta}, \epsilon_2^\beta) \end{aligned}$$

entonces sustituyendo lo anterior en la ecuación (2.3) obtenemos

$$\mathbf{E} \left[ V^{(\beta)} \left( \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbb{P}} \right) \right] \geq -\frac{2}{\beta} \max \left( \epsilon_1^{1-\beta}, \epsilon_2^\beta \right).$$

Como la anterior desigualdad es cierta para todo  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_T^e(S)$  entonces:

$$v_T^{(\beta)}(1) \geq 2 \max \left( \epsilon_1^{1-\beta}, \epsilon_2^\beta \right) V^{(\beta)}(1).$$

Utilizando  $\frac{1}{|\alpha|+1} = \frac{-1}{\alpha-1} = 1 - \beta$ , entonces:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\frac{1}{|\alpha|+1}} &\geq 2 \max \left( \epsilon_1^{\frac{1}{|\alpha|+1}}, \epsilon_2^{\frac{|\alpha|}{|\alpha|+1}} \right) \\ &= 2 \max \left( \epsilon_1^{1-\beta}, \epsilon_2^\beta \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$v_T^{(\beta)}(1) \geq \epsilon^{\frac{1}{|\alpha|+1}} V^{(\beta)}(1).$$

Por lo tanto, concluimos (iii').

■ Para (d)

Sean  $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_2$  que satisfacen  $\epsilon < \epsilon_1 \epsilon_2^{|\alpha|}$ . Por (iii) hay un  $X_T \in K_T$  tal que

$$\mathbf{E} \left[ U^{(\alpha)}(\epsilon_2 + X_T) \right] \geq \epsilon U^{(\alpha)}(\epsilon_2) = \epsilon \frac{\epsilon_2^\alpha}{\alpha}.$$

Claramente  $X_T \geq -\epsilon_2$  por Proposición 2.1. Para demostrar (i) falta mostrar que  $\mathbb{P}[X_T \geq 1 - \epsilon_2] \geq 1 - \epsilon_1$ . Usando la desigualdad de Tschebyscheff A.4, se tiene lo siguiente:

$$\mathbf{E} \left[ U^{(\alpha)}(\epsilon_2 + X_T) \right] \leq \mathbb{P}[X_T < 1 - \epsilon_2] U^{(\alpha)}(1),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} -\epsilon \frac{\epsilon_2^\alpha}{\alpha} &\geq \mathbb{P}[X_T < 1 - \epsilon_2] \left( -\frac{1}{\alpha} \right), \\ \epsilon_1 &> \mathbb{P}[X_T < 1 - \epsilon_2]. \end{aligned}$$

□

**Observación 2.4.** Las afirmaciones (i') y (ii) anteriores solo difieren en el orden de los cuantificadores, de modo que solo tenemos la implicación trivial (i')  $\Rightarrow$  (ii) así como (ii)  $\Rightarrow$  (i') para el caso donde  $\mathcal{M}_T^e(S)$  tenga solo un elemento.

Algo que también podemos resaltar de la Proposición 2.3 es que también se tiene que (ii)  $\Rightarrow$  (i') en el caso incompleto, siempre que se reemplacen las constantes  $\epsilon_1, \epsilon_2$  en (i') por constantes más grandes  $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2$ . Por ejemplo, podemos elegir  $\tilde{\epsilon}_1 = 2^{1+|\alpha|} \epsilon_1^{1/2}$ ,  $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_2^{1/2}$ , donde  $\alpha \in (-\infty, 0)$  satisface  $\epsilon_1 = \epsilon_2^{|\alpha|}$ . De hecho, para  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  y  $\alpha \in (-\infty, 0)$  tal que  $\epsilon_1 = \epsilon_2^{|\alpha|}$ , tenemos (ii)  $\Rightarrow$  (iii') si dejamos que  $\epsilon = 2^{1+|\alpha|} \epsilon_1$ . Entonces tenemos que  $\epsilon \leq \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2^{|\alpha|} = 2^{1+|\alpha|} \epsilon_1^{1/2} \epsilon_2^{1/2}$  tal que obtenemos (iii)  $\Rightarrow$  (i)  $\iff$  (i'), si se usan en (i) e (i') las constantes  $\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2$  en lugar de  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . En resumen, podemos revertir los cuantificadores en el enunciado (ii) provisto de constantes algo peores.



## Capítulo 3

# Estimaciones para el arbitraje asintótico

Ahora mostraremos condiciones de regularidad adecuadas para el proceso de precios con un precio de riesgo de mercado no trivial, es decir, vamos a demostrar el Teorema 1.6. También mostraremos como estas estimaciones pueden ser refinadas si el precio de mercado del riesgo satisface una estimación de desviaciones largas.

Sea  $S$  un proceso de difusión que satisface la Hipótesis 1.3 y recordemos la medida de martingala mínima  $\mathbf{Q}_T^{\min}$  para  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  definida a través de ecuación (1.4). De Föllmer and Schweizer [1991] se desprende que para una medida de probabilidad  $\mathbf{Q}_T \in \mathcal{M}_T^e(S)$  existe un proceso predecible  $(\psi_t)_{0 \leq t \leq T}$  tal que la densidad  $Z_T = \frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbb{P}}$  está dada por:

$$Z_T = \exp \left[ \int_0^T \left( -\psi_t dW_t - \frac{\|\psi_t\|^2}{2} dt \right) \right] \quad (3.1)$$

donde  $\psi_t - \varphi_t$  está en el kernel de  $\sigma(S_t)$ , es decir,  $\sigma\psi = \sigma\varphi$  entonces  $\sigma(\psi - \varphi) = 0$ ,  $\forall 0 \leq t \leq T$ . Por lo tanto,  $\varphi_t$  es ortogonal a  $\psi_t - \varphi_t$  ( $\varphi \in (\ker \sigma)^\perp$ ), entonces  $\|\psi_t\| \geq \|\varphi_t\|$ .

**Proposición 3.1.** *Supongamos que  $(S_t)_{t \geq 0}$  satisface la Hipótesis 1.3 y tiene un precio de mercado promedio al cuadrado del riesgo por encima del umbral  $c > 0$ . Para  $\epsilon > 0$  y  $0 < \gamma < \frac{c}{2}$  existe un  $T_0 > 0$  tal que, para  $T \geq 0$  la condición (ii) de la Proposición 2.3 se cumple con  $\epsilon = \epsilon_1$  y  $\epsilon_2 = e^{-\gamma T}$ , es decir, para cada  $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}_T^e(S)$  hay un  $A_T \in \mathcal{F}_T$  tal que*

$$\mathbb{P}[A_T] \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}[A_T] \geq 1 - e^{-\gamma T}.$$

*Demostración.* Fijar  $0 < \gamma < \tilde{\gamma} < \frac{c}{2}$  y encontrar  $T_0 > \frac{4\tilde{\gamma}}{(\tilde{\gamma} - \gamma)^2 \epsilon}$  tal que, para  $T \geq T_0$

$$\mathbb{P} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \|\varphi_t\|^2 dt \leq 2\tilde{\gamma} \right] \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.2)$$

Para  $\mathbf{Q}_T \in \mathcal{M}_T^e(S)$  sea un proceso  $(\psi_t)_{0 \leq t \leq T} \in \mathbb{R}^N$  como en (3.1) y así:

$$\frac{d\mathbf{Q}_T}{d\mathbb{P}} = Z_T = \exp \left[ \int_0^T \left( -\psi_t dW_t - \frac{\|\psi_t\|^2}{2} dt \right) \right].$$

Definimos el tiempo de paro  $\tau$  como:

$$\tau = \inf \left\{ t \in [0, T] \mid \int_0^t \|\psi_t\|^2 ds \geq 2\tilde{\gamma}T \right\} \wedge T.$$

Para la variable aleatoria

$$\mathbf{B}_\tau = \int_0^\tau \psi_t dW_t,$$

y por la isometría de Itô tenemos que

$$\left( \int_0^\tau \psi_t dW_t \right)^2 = \int_0^\tau \|\psi_t\|^2 dt,$$

de la ecuación (3.2) se infiere que  $\int_0^\tau \|\psi_t\|^2 dt \leq 2\tilde{\gamma}T$  entonces

$$\|\mathbf{B}_\tau\|_{L^2(\mathbb{P})}^2 \leq 2\tilde{\gamma}T,$$

entonces utilizando la desigualdad de Tschebyscheff's A.4 tenemos

$$\mathbb{P} [|\mathbf{B}_\tau| \geq (\tilde{\gamma} - \gamma)T] \leq \frac{2\tilde{\gamma}}{(\tilde{\gamma} - \gamma)^2} T^{-1} < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.3)$$

Para

$$Z_\tau = \exp \left[ \int_0^\tau \left( -\psi_t dW_t - \frac{\|\psi_t\|^2}{2} dt \right) \right]$$

se obtiene de (3.2) y (3.3) que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [Z_\tau > \exp(-\gamma T)] &= \mathbb{P} \left[ -B_\tau - \int_0^\tau \frac{\|\psi_t\|^2}{2} dt > -\gamma T \right] \\ &\leq \mathbb{P} [|\mathbf{B}_\tau| \geq (\tilde{\gamma} - \gamma)T] + \mathbb{P} \left[ \int_0^\tau \frac{\|\psi_t\|^2}{2} dt > \tilde{\gamma}T \right] \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

dejando  $A_T = \{Z_\tau > \exp(-\gamma T)\}$  entonces  $\mathbb{P}[A_T] \leq \epsilon$  y  $\mathbf{Q}_T[A_T^c] = \mathbf{E}[Z_\tau A_T^c] \leq e^{-\gamma T}$ .  $\square$

Por lo tanto ya tenemos todo listo para la demostración del Teorema 1.6 que para comodidad del lector lo enunciaremos nuevamente

**Teorema.** Sea  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  un proceso que satisface la Hipótesis 1.3 y que tenga un precio de mercado promedio al cuadrado del riesgo por encima del umbral  $c > 0$  como en (1.8). Entonces, para  $\epsilon > 0$ ,  $\gamma_1 + \gamma_2 < c/2$  y para  $T$  lo suficientemente grande, existe  $X_T \in K_T$  tal que:

- (i)  $X_T \geq -e^{-\gamma_1 T}$
- (ii)  $\mathbb{P} [X_T \geq e^{\gamma_2 T}] \geq 1 - \epsilon$ .

*Demostración.* Sea  $c > 0$  dada por la ecuación (1.8) y por la Proposición 3.1 tenemos que para cualquier  $\epsilon_1 > 0$  y  $\epsilon_2 = e^{-dT}$ , donde  $0 < d < \frac{c}{2}$ , la condición (ii) de la Proposición 2.3 se satisface para  $T$  suficientemente grande. Fijando  $\epsilon > 0$  y  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  cumplen lo siguiente  $0 < \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 < \frac{c}{2}$ . Fijamos un  $d > 0$  con  $\gamma < d < \frac{c}{2}$  y sea  $\mu = \frac{d-\gamma}{d} \in (0, 1)$ .

Procediendo como en la Observación 2.4, se escoge  $T_0$  tal que para  $T > T_0$  la condición (ii) de Proposición 2.3 cumple que:

$$\epsilon_1 = \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^{1/\mu} \quad y \quad \epsilon_2 = e^{-dT}.$$

Definiendo  $\alpha_T \in (-\infty, 0)$  para

$$\epsilon_1 = \epsilon_2^{|\alpha_T|}$$

se tiene que  $|\alpha_T| \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . Se puede suponer que  $T_0$  se elige lo suficientemente grande tal que  $2^{1+|\alpha_T|} \leq 3$ , para  $T \geq T_0$ .

Sea  $\tilde{\epsilon}_1 = 3\epsilon_1^\mu = \epsilon$  y  $\tilde{\epsilon}_2 = \epsilon_2^{1-\mu}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_1 \tilde{\epsilon}_2^{|\alpha_T|} &= 3\epsilon_1^\mu \epsilon_2^{(1-\mu)|\alpha_T|} \\ &= 3\epsilon_1 \geq 2^{1+|\alpha_T|} \max(\epsilon_1, \epsilon_2^{|\alpha_T|}). \end{aligned}$$

Por lo tanto de la Proposición 2.3 la condición (iii) que dice:  $u_T^{(\alpha)}(x) \geq \epsilon U^{(\alpha)}(x)$ , para toda  $x > 0$  se cumple cuando  $\epsilon = 3\epsilon_1$ . Por lo tanto se puede concluir que la condición (i) de la Proposición 2.3 se satisface, es decir, hay un  $(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2)$ -arbitraje para el par  $(\tilde{\epsilon}_1, \tilde{\epsilon}_2) = (\epsilon, e^{-d(1-\mu)T})$ . Notar que:  $d(1-\mu) > \gamma$  existe  $X_T \in K_T$  tal que:

- (i)  $X_T \geq -e^{-d(1-\mu)T}$
- (ii)  $\mathbb{P}[X_T \geq 1 - e^{-d(1-\mu)T}] \geq 1 - \epsilon$ .

Ya que  $d(1-\mu) - \gamma_1 > \gamma_2$ , se ve que el reclamo contingente  $\tilde{X}_T = e^{(d(1-\mu)-\gamma_1)T} X_T \in K_T$  satisface, para  $T \geq T_0$  suficientemente grande,

- (i)  $\tilde{X}_T \geq -e^{-\gamma_1 T}$
- (ii)  $\mathbb{P}[\tilde{X}_T \geq e^{\gamma_2 T}] \geq 1 - \epsilon$ .

□

Por lo tanto podemos ver que con probabilidad muy cercana a 1 nuestro portafolio  $X_T$  tiene una riqueza que crece exponencialmente siempre que el horizonte temporal  $T$  tienda a infinito. En el siguiente corolario daremos la mínima riqueza que se tendrá para un portafolio con utilidad logarítmica.

**Corolario 3.2.** Sea  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  un proceso que satisface la Hipótesis 1.3 y que tenga un precio de mercado promedio al cuadrado del riesgo por encima del umbral  $c > 0$  como en (1.8). Para cualquier capital inicial  $x > 0$ , existen reclamos contingentes  $X_T \in K_T$  tal que la riqueza mínima que se tendrá será por lo menos  $\frac{c}{2}$ , es decir:

$$\liminf_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \mathbf{E}[\log(x + X_T)] \geq \frac{c}{2}.$$

*Demostración.* Por el Teorema 1.6 se sabe que para  $\gamma_1 = 0$  y  $\gamma_2 < \frac{c}{2}$  se puede encontrar que para  $\epsilon > 0$  y  $T$  suficientemente grande  $X_T \in K_T$  con

- (i)  $X_T \geq -1$
- (ii)  $\mathbb{P}[X_T \geq e^{\gamma_2 T}] \geq 1 - \epsilon.$

Para  $0 < \alpha < x$  tenemos lo siguiente

$$\frac{1}{T} \mathbf{E}[\log(x + \alpha X_T)] \geq \frac{1}{T} \epsilon \log(x - \alpha) + \frac{1}{T} (1 - \epsilon) \log(x + \alpha e^{\gamma_2 T}).$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{T} \mathbf{E}[\log(x + \alpha X_T)] \geq (1 - \epsilon) \gamma_2 \geq \frac{c}{2},$$

para  $T$  suficientemente grande, se obtiene el resultado.  $\square$

El Teorema 1.6 es válido bajo la ecuación (1.8) de un precio de riesgo de un mercado no trivial. Si reemplazamos este supuesto por la estimación de desviaciones largas mas fuerte de la ecuación (1.9), esperamos un resultado más fuerte, es decir, el término  $\mathbb{P}[X_T < e^{\gamma_2 T}]$  en la afirmación (ii) del Teorema 1.6 debería decaer exponencialmente cuando el horizonte temporal  $T$  tienda a infinito.

Sea  $(S_t)_{t \geq 0}$  un proceso de difusión de dimensión  $d$  que cumple con la Hipótesis 1.3, y supongamos que  $S$  es ergódica (Revisar Apéndice A, Definición A.11). Así, las distribuciones empíricas

$$\rho_T(\omega) := \frac{1}{T} \int_0^T \delta_{S_t(\omega)} dt$$

convergen débilmente en  $\mathbb{P}$  casi seguramente a la única distribución invariante (Revisar Apéndice A, Definición A.12)  $\mu$  de  $S$ . Normalmente, las distribuciones empíricas satisfacen un principio de desviaciones largas de la siguiente forma

$$\frac{1}{T} \log \mathbb{P}[\rho_T \in A] \asymp - \inf_{\nu \in A} I(\nu), \quad (3.4)$$

con alguna función de tasa  $I$  definida en el conjunto convexo  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  de las medidas de probabilidad en  $\mathbb{R}^d$ , donde (3.4) debe leerse como un límite superior para el  $\limsup$  del lado izquierdo si  $A$  es un subconjunto cerrado de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  y como límite inferior para el  $\liminf$  si  $A$  es un conjunto abierto. En algunas condiciones de regularidad, el precio de riesgo del mercado satisface las desviaciones largas estimadas en (1.9)

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \|\varphi_t\|^2 dt \leq c_1 \right] \leq -c_2,$$



para algún  $c_1 < \int \|\varphi(x)\|^2 \mu dx$  con

$$c_2 := \inf \left\{ I(\nu) \mid \int_0^T \|\varphi(x)\|^2 d\nu(x) \leq c_1 \right\} > 0,$$

debido al principio de contracción (ver [Dembo A, 1998, p.126]). En tal situación, uno debe esperar una caída exponencial de las probabilidades

$$\mathbb{P} [Z_T \geq e^{-\gamma T}]$$

y una correspondiente versión exponencial de las estimaciones en el Teorema 1.6, asumiendo ahora la singularidad de la medida martingala localmente equivalente  $\mathbf{Q}$ . Sin embargo, esto implicará un ligero refinamiento del principio de desviaciones largas en su forma clásica (3.4). Hagamos el argumento para el caso unidimensional. En efecto,

$$\mathbb{P} [Z_T \geq e^{-\gamma T}] = \mathbb{P} \left[ \int_0^T \varphi_t dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T \varphi_t^2 dt \leq \gamma T \right].$$

Por la Fórmula de Itô se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi_t dW_t &:= \int_0^T \varphi_t \left( \frac{dS_t}{\sigma(S_t)} - \varphi_t dt \right) \\ &= \int_0^T f(S_t) dS_t - \int_0^T \varphi_t^2 dt \\ &= F(S_T) - F(S_0) - \frac{1}{2} \int_0^T f'(S_t) \sigma^2(S_t) dt - \int_0^T \varphi^2(S_t) dt, \end{aligned}$$

donde,  $f(x) := \frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$ , asumiendo que  $f \in C^1$  y tomamos a  $F \in C^2$  tal que  $F' = f$ . Así

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [Z_T \geq e^{-\gamma T}] &= \mathbb{P} \left[ (F(S_T) - F(S_0)) - \frac{1}{2} \int_0^T h(S_t) dt \leq \gamma T \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \frac{1}{T} (F(S_T) - F(S_0)) - \frac{1}{2} \int_0^T h(x) d\rho_T(x) \leq \gamma \right], \end{aligned}$$

definimos  $h(x) := f'(x)\sigma^2(x) + \varphi^2(x)$ . Con una estimación exponencial de la forma

$$\limsup_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} [Z_T \geq e^{-\gamma T}] < 0.$$

Para  $\gamma < -\frac{1}{2} \int h d\mu$  si tenemos un principio de desviación larga conjunta para las variables aleatorias  $(\frac{1}{T}(F(S_T) - F(S_0)), \rho_T) \in \mathbb{R}^1 \times \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  donde  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$  es un conjunto convexo de las medidas de probabilidad en  $\mathbb{R}^d$ . Más concretamente, para las variables aleatorias

$$\frac{1}{T}(F(S_T) - F(S_0)) - \frac{1}{2} \int_0^T h(x) d\rho_T(x).$$

Ilustraremos este enfoque mediante la demostración de estimaciones exponenciales explícitas para el proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck.



## Capítulo 4

# El proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck

En el presente capítulo consideraremos el proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck y daremos una versión más fuerte para las estimaciones del Teorema 1.6. comenzamos con el caso más simple

$$S_t = \exp(Y_t), \quad (4.1)$$

donde  $(Y_t)_{t \geq 0}$  es el proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck definido por

$$dY_t = -\rho Y_t dt + \sigma dW_t \quad Y_0 = y_0,$$

con parámetros  $\rho, \sigma > 0$  y condición inicial  $y_0 \in \mathbb{R}$ .

El proceso  $S = (S_t)_{t \geq 0}$  definido por la ecuación (4.1) satisface la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t[-\rho Y_t dt + \sigma dW_t] + S_t \frac{\sigma^2}{2} dt \\ &= S_t \sigma \left[ dW_t - \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Para un horizonte temporal fijo  $T$ , la única medida martingala equivalente  $\mathbf{Q}$  en  $\mathcal{F}_T$  para el proceso  $S$  está definida por

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = Z_T$$

donde

$$Z_T := \exp \left( \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 dt \right). \quad (4.3)$$

En otras palabras la dinámica de  $S$  bajo  $\mathbf{Q}$  toma la forma

$$dS_t = \sigma S_t dW_t^{\mathbf{Q}},$$

con  $W_t^{\mathbf{Q}}$  un movimiento browniano bajo  $\mathbf{Q}$ , definido por

$$\begin{aligned} W_t^{\mathbf{Q}} &:= W_t - \int_0^t \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_s - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds \\ &= \frac{1}{\sigma} \left( Y_t - y_0 + \frac{\sigma^2}{2} t \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

## Desviaciones largas

En este modelo específico podemos describir las desviaciones largas de una manera más explícita. Primeramente necesitamos ver que debe de cumplir la función de tasa, lo cual definimos a continuación.

**Definición 4.1.** Una función de tasa  $I$  es un mapeo semicontinuo inferior  $I : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$  (tal que  $\forall \alpha [0, \infty)$ , el nivel establecido  $\Psi_I(\alpha) := \{x : I(x) \leq \alpha\}$  es un subconjunto cerrado de  $\mathcal{X}$ ). Una buena función de tasa es una función de tasa para la cual todos los conjuntos de niveles  $\Psi_I(\alpha)$  son subconjuntos compactos de  $\mathcal{X}$ . El dominio efectivo de  $I$ , denotado por  $\mathcal{D}_I$ , es el conjunto de puntos en  $\mathcal{X}$  de tasa finita, es decir,  $\mathcal{D}_I := \{x : I(x) < \infty\}$ . Cuando no se produce confusión, nos referimos a  $\mathcal{D}_I$  como el dominio de  $I$  [Dembo A, 1998, p.4].

Ahora enunciaremos que se debe de cumplir para que una función de tasa cumpla el Principio de Desviaciones Largas en la siguiente definición.

**Definición 4.2. Principio de desviaciones largas.**

$\{\mu_\epsilon\}$  satisface el Principio de Desviaciones Largas si para todo conjunto  $F \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$-\inf_{x \in F^\circ} I(x) \leq \liminf_{\epsilon \nearrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(F) \leq \limsup_{\epsilon \nearrow 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(F) \leq -\inf_{x \in \bar{F}} I(x). \quad (4.5)$$

Donde  $F^\circ$  conjunto abierto y  $\bar{F}$  conjunto cerrado.

Para entender mejor lo anterior, veremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.3.** Sean  $X_1, X_2, \dots, X_T$  una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas, que se distribuyen como una normal estándar y consideramos la media dada como  $\hat{S}_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X_i$ .

Para cualquier  $\delta > 0$  tenemos que

$$\lim_{T \nearrow \infty} \mathbb{P}[|\hat{S}_T| \geq \delta] = 0.$$

Para algún conjunto cerrado  $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\limsup_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \sqrt{T} \hat{S}_T \in A \right] \leq -\inf_{y \in A} I(y)$$

y para algún conjunto abierto  $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\liminf_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \sqrt{T} \hat{S}_T \in B \right] \geq - \inf_{y \in B} I(y).$$

Sea  $\epsilon > 0$ ,  $A_\epsilon := \{y | d(y, A) \leq \epsilon\}$ , para  $T$  lo suficientemente grande. Así

$$\overline{\lim}_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \sqrt{T} \hat{S}_T \in A \right] \leq - \inf_{y \in A_\epsilon} I(y),$$

para  $A$  cerrado y  $\epsilon > 0$  arbitrario, por lo tanto

$$\overline{\lim}_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \sqrt{T} \hat{S}_T \in A \right] \leq - \inf_{y \in A} I(y). \quad (4.6)$$

Para el límite inferior tenemos que para algún  $\epsilon > 0$ ,  $B_\epsilon := \{y | d(y, B) < \epsilon\}$ , para  $T$  lo suficientemente grande. Así

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \sqrt{T} \hat{S}_T \in B \right] \geq - \inf_{y \in B_\epsilon} I(y),$$

para  $B$  abierto y  $\epsilon > 0$  arbitrario, entonces

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \sqrt{T} \hat{S}_T \in B \right] \geq - \inf_{y \in B} I(y). \quad (4.7)$$

Para  $y_0 > -\frac{\sigma^2}{4}$  y  $A := [y_0, \infty)$  y los límites (4.6), (4.7) implican que

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \sqrt{T} \hat{S}_T \geq y_0 \right] = -I(y_0).$$

por la igualdad anterior tenemos lo siguiente

$$\lim_{T \nearrow \infty} \mathbb{P}[|\hat{S}_T| \geq \delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right] dx.$$

Entonces

$$\mathbb{P}[|\hat{S}_T| \geq \delta] = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta\sqrt{T}}^{\delta\sqrt{T}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2} \right] dx$$

por lo tanto

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}[|\hat{S}_T| \geq \delta] = -\frac{\delta^2}{2}.$$

Ahora vamos a poder definir explícitamente para el proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck el principio de desviaciones largas, en la siguiente proposición.

**Proposición 4.4.** Para algún  $\gamma \in \left(0, \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4}\right)$ , el conjunto  $A_T := \{Z_T \geq e^{-\gamma T}\}$  satisface

$$\mathbf{Q}[A_T] \geq 1 - e^{-\gamma T} \quad (4.8)$$

y

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}[A_T] = -\frac{\left(\frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{4}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{2}}. \quad (4.9)$$

*Demostración.* Claramente

$$\mathbf{Q}[A_T^c] = \mathbf{Q}[Z_T \leq e^{-\gamma T}] = \int_{\{Z_T \leq e^{-\gamma T}\}} Z_T d\mathbb{P} \leq e^{-\gamma T},$$

entonces

$$\mathbf{Q}[A_T] \geq 1 - e^{-\gamma T}.$$

queda demostrada la ecuación (4.8). Para demostrar la ecuación (4.9), utilizamos (4.3) y la reescribimos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \log Z_T &= \frac{1}{\sigma} \int_0^T \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left( \frac{1}{\sigma} dY_t + \frac{\rho}{\sigma} Y_t dt \right) - \frac{\rho^2}{2\sigma^2} \int_0^T Y_t^2 dt - \frac{\sigma^2}{8} T + \frac{\rho}{2} \int_0^T Y_t dt \\ &= \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) dY_t + \int_0^T \frac{\rho}{\sigma^2} Y_t \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt - \frac{\rho^2}{2\sigma^2} \int_0^T Y_t^2 dt \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{8} T + \frac{\rho}{2} \int_0^T Y_t dt \\ &= \frac{\rho}{\sigma^2} \int_0^T Y_t dY_t - \frac{1}{2} (Y_T - Y_0) + \frac{\rho^2}{2\sigma^2} \int_0^T Y_t^2 dt - \frac{\sigma^2}{8} T \\ &= \frac{\rho}{\sigma^2} \xi_T - \frac{\sigma^2}{8} T, \end{aligned} \tag{4.10}$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_T &:= \eta_T + \zeta_T, \\ \eta_T &:= \int_0^T Y_t dY_t + \frac{\rho}{2} \int_0^T Y_t^2 dt \\ &= \frac{1}{2} (Y_T^2 - Y_0^2 - \sigma^2 T) + \frac{\rho}{2} \int_0^T Y_t^2 dt \\ \zeta_T &:= \frac{\sigma^2}{2\rho} (Y_0 - Y_T). \end{aligned}$$

Además hay que recordar que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck es ergódico con distribución invariante, es decir,  $Y \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\rho}\right)$  esto implica que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\xi_T}{T} = \lim_{T \nearrow \infty} \frac{\eta_T}{T} = -\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\rho \sigma^2}{2 \cdot 2\rho} = -\frac{\sigma^2}{4} \mathbb{P} - c.s. \tag{4.11}$$

Para las desviaciones largas aplicamos [Florens-Landais and Pham, 1999, Teorema 2.2] (con  $\theta_0 = -\rho$ ,  $\theta = -\frac{\rho}{2}$ , y la extensión directa al caso  $\sigma \neq 1$ ) y vemos que las variables aleatorias  $\frac{\eta_T}{T}$  satisfacen el principio de desviación largas, donde su función de tasa es:

$$I(y) = \begin{cases} \frac{2\rho \left(\frac{y}{\sigma^2} + \frac{1}{4}\right)^2}{2\frac{y}{\sigma^2} + 1} & \text{Para } y > -\frac{\sigma^2}{2} \\ \infty & \text{Para } y \leq -\frac{\sigma^2}{2} \end{cases}$$

es decir,

$$\limsup_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{\eta_T}{T} \in F \right] \leq - \inf_{y \in F} I(y)$$

para algún conjunto cerrado  $F \subseteq \mathbb{R}$  y

$$\liminf_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{\eta_T}{T} \in G \right] \geq - \inf_{y \in G} I(y)$$

para algún conjunto abierto  $G \subseteq \mathbb{R}$ .

El principio de desviaciones largas anterior con función de tasa  $I$ , puede aplicarse a las variables aleatorias  $\frac{\xi_T}{T}$ . Además el término adicional  $\zeta_T$  se distribuye normalmente con media  $m_T$  que converge a  $m_\infty \in \mathbb{R}$  y las varianzas  $\sigma_T^2$  que converge a  $\sigma_\infty^2 \in (0, \infty)$ , implica que

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^2} \log \mathbb{P} \left[ \frac{|\zeta_T|}{T} > \epsilon \sigma_T^{-1} \right] &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^2} \log \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\epsilon T \sigma_T^{-1}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^2} \log \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon T \sigma_T^{-1} - w)^2} dw \\ &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^2} \log e^{-\frac{1}{2} \epsilon T^2 \sigma_T^{-2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(-2w \epsilon T \sigma_T^{-1} + w^2)} dw \\ &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^2} \log e^{-\frac{1}{2} \epsilon T^2 \sigma_T^{-2}} \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2\sigma_\infty^2}. \end{aligned}$$

Para  $\xi_T$  tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \frac{\xi_T}{T} \in F \right] &\leq \mathbb{P} \left[ \frac{|\xi_T|}{T} > \epsilon \right] + \mathbb{P} \left[ \frac{\eta_T}{T} \in F_\epsilon \right] \\ &\leq 2\mathbb{P} \left[ \frac{\eta_T}{T} \in F_\epsilon \right] \end{aligned}$$

para algún  $\epsilon > 0$ ,  $F_\epsilon := \{y | d(y, F) \leq \epsilon\}$ , para  $T$  lo suficientemente grande. Así

$$\overline{\lim}_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{\xi_T}{T} \in F \right] \leq - \inf_{y \in F_\epsilon} I(y),$$

para  $F$  cerrado y  $\epsilon > 0$  arbitrario, por lo tanto

$$\overline{\lim}_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{\xi_T}{T} \in F \right] \leq - \inf_{y \in F} I(y). \quad (4.12)$$

Para el límite inferior tenemos que para algún  $\epsilon > 0$ ,  $G_\epsilon := \{y | d(y, G) < \epsilon\}$ , para  $T$  lo suficientemente grande. Así

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{\xi_T}{T} \in G \right] \geq - \inf_{y \in G_\epsilon} I(y),$$

para  $G$  abierto y  $\epsilon > 0$  arbitrario, entonces

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{\xi_T}{T} \in G \right] \geq - \inf_{y \in G} I(y). \quad (4.13)$$

Para  $y_0 > -\frac{\sigma^2}{4}$  y  $F := [y_0, \infty)$  y los límites (4.12), (4.13) implican que

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{\xi_T}{T} \geq y_0 \right] = -I(y_0).$$

Con la igualdad anterior ya podemos calcular (4.9) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [Z_T \geq e^{-\gamma T}] &= \mathbb{P} \left[ \frac{\rho}{\sigma^2} \xi_T - \frac{1}{8} \sigma^2 T \geq -\gamma T \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \frac{\xi_T}{T} \geq \frac{\sigma^2}{\rho} \left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma \right) \right] \end{aligned}$$

para  $\gamma \in \left(0, \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4}\right)$  entonces

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} [Z_T \geq e^{-\gamma T}] &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{\xi_T}{T} \geq \frac{\sigma^2}{\rho} \left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma \right) \right] \\ &= -I \left( \frac{\sigma^2}{\rho} \left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma \right) \right) \\ &= 2\rho \left( \frac{\frac{\sigma^2}{\rho} \left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma \right)}{\sigma^2} + \frac{1}{4} \right)^2 \\ &= -\frac{\frac{\sigma^2}{\rho} \left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma \right)}{2 \frac{\sigma^2}{\rho} \left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma \right) + 1} \\ &= -\frac{\frac{2}{\rho} \left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{4} \right)^2}{\frac{2}{\rho} \left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma \right) + 1} \\ &= -\frac{\left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{4} \right)^2}{\frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{2}}. \end{aligned}$$

□

Ahora ya podemos demostrar el Teorema 1.7, más aún demostraremos la siguiente versión más fuerte.

**Teorema 4.5.** *Sea  $(S_t)_{t \geq 0}$  un proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck como en la ecuación (1.10). Tomamos  $\gamma \in \left(0, \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4}\right)$  y algún  $\gamma_1 < \gamma$ . Entonces existen reclamos contingentes  $X_T \in K_T$  tal que para algún  $\gamma_2 < \gamma - \gamma_1$ ,*

(i)  $X_T \geq -e^{-\gamma_2 T}$  para  $T$  grande,

(ii)  $\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}[X_T < e^{\gamma_1 T}] = -\frac{\left(\frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{4}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{2}}$

Más precisamente, podemos alcanzar los límites más estrechos

(iii)  $X_T \geq -\alpha_T := -e^{\gamma_1 T} \frac{Q[A_T^c]}{Q[A_T]}$

donde  $A_T := \{Z_T \geq e^{-\gamma T}\}$ , y la tasa de caída en (ii) para las probabilidades de déficit  $\mathbb{P}[X_T < e^{\gamma_1 T}]$  es de hecho óptima bajo la restricción (iii).



*Demostración.* Ya que  $\mathbf{Q}[A_T^c] \leq e^{-\gamma T}$  y por (4.8) la constante  $\alpha_T$  definida por (iii) satisface

$$\alpha_T \leq e^{-(\gamma-\gamma_1)T} \frac{1}{\mathbf{Q}[A_T]},$$

por lo tanto  $\alpha_T \leq e^{-\gamma_2 T}$  para  $T$  grande si  $\gamma_2 \leq \gamma - \gamma_1$ . Ahora consideramos los reclamos contingentes

$$X_T := e^{\gamma_1 T} \mathbf{1}_{A_T^c} - \alpha_T \mathbf{1}_{A_T}.$$

Claramente  $X_T \geq -\alpha_T$  y

$$E_{\mathbf{Q}}[X_T] = e^{\gamma_1 T} \mathbf{Q}[A_T^c] - \alpha_T \mathbf{Q}[A_T] \quad (4.14)$$

sustituyendo  $\alpha_T$  como en (iii) se tiene que

$$E_{\mathbf{Q}}[X_T] = e^{\gamma_1 T} \mathbf{Q}[A_T^c] - e^{\gamma_1 T} \frac{\mathbf{Q}[A_T^c]}{\mathbf{Q}[A_T]} \mathbf{Q}[A_T] = 0$$

entonces  $X_T \in K_T$ . además que

$$\{X_T < e^{\gamma_1 T}\} = A_T$$

para  $T$  suficientemente grande, la parte (ii) del Teorema 4.5 se deduce de ecuación (4.9). Para verificar la optimalidad de la tasa de convergencia en (ii) bajo la restricción (iii), se toma una sucesión de reclamos contingentes  $\tilde{X}_T \in K_T$  tal que  $\tilde{X}_T \geq -\alpha_T$ , por lo que el correspondiente conjunto  $\tilde{A}_T := \{\tilde{X}_T < e^{\gamma_1 T}\}$  satisface que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[\tilde{A}_T^c] (e^{\gamma_1 T} + \alpha_T) - \alpha_T &= e^{\gamma_1 T} \mathbf{Q}[\tilde{A}_T^c] - \alpha_T (1 - \mathbf{Q}[\tilde{A}_T^c]) \\ &= e^{\gamma_1 T} \mathbf{Q}[\tilde{A}_T^c] + (-\alpha_T) \mathbf{Q}[\tilde{A}_T] \\ &\leq \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\tilde{X}_T] \leq 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

para hacer una comparación de  $\mathbf{Q}[\tilde{A}_T^c]$  y  $\mathbf{Q}[A_T^c]$ , de la ecuación (4.14) se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= e^{\gamma_1 T} \mathbf{Q}[A_T^c] - \alpha_T \mathbf{Q}[A_T] \\ &= e^{\gamma_1 T} \mathbf{Q}[A_T^c] - \alpha_T (1 - \mathbf{Q}[A_T^c]) \\ &= e^{\gamma_1 T} \mathbf{Q}[A_T^c] - \alpha_T + \alpha_T \mathbf{Q}[A_T^c] \end{aligned}$$

entonces despejando  $\mathbf{Q}[A_T^c]$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[A_T^c](\alpha_T + e^{\gamma_1 T}) &= \alpha_T \\ \mathbf{Q}[A_T^c] &= \frac{\alpha_T}{\alpha_T + e^{\gamma_1 T}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

y de las ecuaciones (4.15) y (4.16) obtenemos lo siguiente

$$\mathbf{Q}[\tilde{A}_T^c] \leq \frac{\alpha_T}{\alpha_T + e^{\gamma_1 T}} = \mathbf{Q}[A_T^c].$$

El lema de Neyman-Pearson A.5 nos permite concluir que

$$\mathbb{P}[\tilde{A}_T^c] \leq \mathbb{P}[A_T^c].$$

En particular, las probabilidades de deficit (en inglés shortfall probabilities)  $\mathbb{P}[\tilde{X}_T < e^{\gamma_1 T}] = \mathbb{P}[\tilde{A}_T]$  no puede decaer a una velocidad mayor que la descrita por (ii).  $\square$

**Observación 4.6.** Haciendo un análisis del Teorema 4.5 podemos notar lo siguiente: Para la constante  $\alpha_T$  definida en el inciso (iii) vemos que satisface

$$\overline{\lim}_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \alpha_T = \gamma_1 + \overline{\lim}_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{Q}[A_T^c],$$

como  $\mathbf{Q}[A_T^c] \leq e^{-\gamma T}$  entonces tenemos que

$$\overline{\lim}_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \alpha_T \leq -(\gamma - \gamma_1). \quad (4.17)$$

Ahora si refinando más las estimaciones de desviaciones largas para  $\mathbf{Q}[A_T^c]$  producen mejores tasas para la convergencia de  $\alpha_T$  a 0. De hecho,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}[A_T^c] &= \mathbf{Q}[Z_T < e^{-\gamma T}] \\ &\leq e^{-\eta T} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Z_T^{-\eta}] \\ &= e^{-\eta T} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[Z_T^{1-\eta}] \end{aligned}$$

para algún  $\eta > 0$ . El término  $\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[Z_T^{1-\eta}]$  pueden calcularse explícitamente, como lo veremos en la Proposición 5.6, que establece

$$\overline{\lim}_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{Q}[A_T^c] \leq -(\gamma + f(\eta))$$

con

$$f(\eta) := \frac{\rho}{2}(\sqrt{\eta} - \eta) + (1 - \eta) \left( \frac{\sigma^2}{8} - \gamma \right).$$

Ya que hemos asumido  $\gamma \leq \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4}$ , la función  $f$  alcanza su valor máximo

$$f(\eta(\gamma)) = \left( \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4} - \gamma \right)^2 \left( \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4} - \gamma \right)^{-1} > 0$$

en  $\eta(\gamma) = \frac{\rho^2}{16} \left( \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4} - \gamma \right)^{-2}$  y entonces podemos reemplazar la tasa  $\gamma - \gamma_1$  en la ecuación (4.17) por la mejor tasa  $\gamma - \gamma_1 + f(\eta(\gamma))$ .

**Observación 4.7.** Para versiones más generales del proceso geométrico Ornstein-Uhlenbeck, supongamos que el proceso de precio descontado es de la forma

$$S_t = e^{Y_t + \mu t}$$

con algún parámetro de deriva constante  $\mu$ . En este caso, la densidad  $Z_t$  de la medida martingala equivalente está dada nuevamente por la ecuación (4.3), pero con parámetros modificados

$$\tilde{\sigma} = \sigma + \frac{2\mu}{\sigma}, \quad \tilde{\rho} = \rho \left( 1 + \frac{2\mu}{\sigma^2} \right).$$

Como resultado, la ecuación (4.9) en la Proposición 4.4 sigue siendo válido, pero con  $\tilde{\sigma}$  en lugar de  $\sigma$ . La densidad  $Z_T$  toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} Z_T &= \exp \left[ \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \left( \frac{\sigma^2}{2} + \mu \right) \right) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \left( \frac{\sigma^2}{2} + \mu \right) \right)^2 dt \right] \\ &= \exp \left[ \frac{\rho}{\sigma^2} \tilde{\xi}_T - \frac{\sigma^2}{8} T \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_T &= \eta_T + \tilde{\zeta}_T \\ \tilde{\zeta}_T &= \frac{\sigma\tilde{\sigma}}{2\rho}(Y_0 - Y_T).\end{aligned}$$

La ley de los grandes números de la ecuación (4.11) sigue siendo válida para  $\tilde{\xi}$ , y el principio de desviaciones largas para  $\eta$  también se puede transferir a  $\tilde{\xi}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} [Z_T \geq e^{-\gamma T}] &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} \left[ \frac{\eta_T}{T} \geq \frac{\sigma^2}{\rho} \left( \frac{\tilde{\sigma}^2}{8} - \gamma \right) \right] \\ &= -I \left( \frac{\sigma^2}{\rho} \left( \frac{\tilde{\sigma}^2}{8} - \gamma \right) \right)\end{aligned}$$

para  $\gamma \in \left(0, \frac{\tilde{\sigma}^2}{8} + \frac{\rho}{4}\right)$ .

Concluiremos este capítulo haciendo una comparación del proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck descrito en el Teorema 4.5 y la Observación 4.7 con el caso más simple del modelo de Black-Scholes.

**Teorema 4.8.** Sea  $\mu \neq 0$ ,  $\sigma > 0$  y definimos el modelo Black-Scholes como

$$S_t = S_0 \exp \left[ \sigma W_t + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right].$$

Tomando  $\gamma \in \left(0, \frac{\rho^2}{2}\right)$ , donde  $\varphi_t \equiv \varphi \equiv \frac{\mu}{\sigma}$ . Para algún  $\gamma_1 < \gamma$ , existe  $X_T \in K_T$  tal que para algún  $\gamma_2 < \gamma - \gamma_1$ ,

- (i)  $X_T \geq -e^{-\gamma_2 T}$  para  $T$  grande,
- (ii)  $\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} [X_T \geq e^{\gamma_1 T}] = -\frac{1}{2} \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{\gamma}{\varphi} \right)^2$ .

Más precisamente, podemos lograr los límites más ajustados

- (iii)  $X_T \geq -\alpha_T := -e^{\gamma_1 T} \frac{Q[A_T^c]}{Q[A_T]}$ ,  
donde  $A_T = \{Z_T \geq e^{-\gamma T}\}$ . Entonces

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \alpha_T = \gamma_1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\varphi} + \frac{\varphi}{2} \right)^2,$$

y la tasa de decaimiento para las probabilidades de déficit en (ii) es óptima bajo la restricción (iii).

*Demostración.* Para  $T > 0$ , la medida martingala equivalente  $Z_T$  viene dada por

$$Z_T = \exp \left[ -\varphi W_T - \frac{\varphi^2}{2} T \right].$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[A_T^c] &= \mathbb{P}\left[-\varphi W_T - \frac{\varphi^2}{2}T < -\gamma T\right] \\
&= \mathbb{P}\left[-W_T < \frac{\left(\frac{\varphi^2}{2} - \gamma\right)T}{\varphi}\right] \\
&= \Phi\left(\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\gamma}{\varphi}\right)T^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

para  $\varphi > 0$  donde  $\Phi$  denota la función de distribución para una variable aleatoria normal estándar. Dado que  $W_t^{\mathbf{Q}} := W_t + \varphi t$  define un movimiento browniano bajo  $\mathbf{Q}$  tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}[A_T^c] &= \mathbf{Q}\left[-\varphi W_T^{\mathbf{Q}} < -\gamma T - \frac{\varphi^2}{2}T\right] \\
&= \Phi\left(-\left(\frac{\gamma}{\varphi} + \frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{T}\right).
\end{aligned}$$

Nuevamente consideramos un reclamo contingente de la siguiente manera

$$X_T := e^{\gamma_1 T} \mathbf{1}_{A_T^c} - \alpha_T \mathbf{1}_{A_T}.$$

Claramente,  $X_T \geq -\alpha_T$  y  $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X_T] = 0$  por lo tanto  $X_T \in K_T$ . Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_T < e^{\gamma_2 T}] &= \mathbb{P}[A_T] \\
&= \mathbb{P}\left[-\varphi W_T^{\mathbf{Q}} + \frac{\varphi^2}{2}T < \gamma T\right] \\
&= \mathbb{P}\left[-\varphi W_T^{\mathbf{Q}} < -\frac{\varphi^2}{2}T + \gamma T\right] \\
&= \mathbb{P}\left[-W_T^{\mathbf{Q}} < -\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\gamma}{\varphi}\right)T\right] \\
&= \Phi\left(-\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\gamma}{\varphi}\right)T^{1/2}\right).
\end{aligned}$$

Ya que  $\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \Phi(-\eta T^{1/2}) = -\frac{\eta^2}{2}$  para algún  $\eta \in \mathbb{R}$ , por lo tanto obtenemos

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P}[X_T < e^{\gamma_1 T}] = -\frac{\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\gamma}{\varphi}\right)^2}{2}.$$

Para  $\alpha$  tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \alpha_T &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( e^{\gamma_1 T} \frac{\mathbf{Q}[A_T^c]}{\mathbf{Q}[A_T]} \right) \\
&= \gamma_1 + \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{Q}[A_T^c] \\
&= \gamma_1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma}{\varphi} + \frac{\varphi}{2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Aplicamos el lema Neyman-Pearson [A.5](#) como en la demostración del Teorema [4.5](#) por lo tanto la tasa de decaimiento en (ii) es óptima bajo la restricción (iii).  $\square$

## Capítulo 5

# Estrategias óptimas para el proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck y las utilidades HARA

En este capítulo vamos a calcular la utilidad máxima esperada

$$u_T(x) := \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [U(X_T)]$$

alcanzable al tiempo  $T > 0$  para las funciones de utilidad HARA  $U$ , usando alguna estrategia de inversión autofinanciable y un capital inicial  $x > 0$ . Recordemos (ver, Karatzas et al. [1987, 1991]) que el reclamo contingente óptimo  $X_T$  es de la forma

$$X_T = (U')^{-1}(yZ_T) \tag{5.1}$$

donde el multiplicador de Lagrange  $y > 0$  está dado por

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [(U')^{-1}(yZ_T)] = x. \tag{5.2}$$

Por lo tanto  $X_T - x \in K_T$ . Debemos tener en cuenta que mientras en las secciones anteriores  $X_T \in K_T$ , ahora maximizamos la utilidad, donde fijamos un capital inicial  $x \in \mathbb{R}$  y dejamos que  $X_T$  denote una variable aleatoria tal que  $X_T - x \in K_T$ .

También vamos a identificar la estrategia óptima, es decir, el proceso predecible  $(\xi_t^{(T)})_{0 \leq t \leq T}$  tal que

$$\begin{aligned} X_t^T &:= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [X_T | \mathcal{F}_t] \\ &= x + \int_0^t \xi_s^{(T)} dS_s \end{aligned} \tag{5.3}$$

para cualquier  $t \in [0, T]$ . Es claramente equivalente a calcular la proporción óptima

$$\pi_t^{(T)} := \frac{\xi_t^{(T)} \cdot S_t}{X_t^{(T)}} \tag{5.4}$$

del capital  $X_t^{(T)}$  generado hasta el tiempo  $t$  que debe invertirse en el activo financiero.

Además, vamos a describir el crecimiento de  $u_T(x)$  y la estrategia óptima  $\xi_T$  a medida que  $T$  tiende a  $\infty$ , y dar una interpretación financiera en términos de la equivalencia de certeza.

## 5.1. Utilidad Logarítmica

Para la función de utilidad logarítmica  $U(x) = \log x$  se deduce de la ecuación (5.1) y (5.2) que se da el reclamo contingente óptimo en el momento  $T$  y está dado por

$$X_T = x Z_T^{-1}. \quad (5.5)$$

Así, la utilidad máxima esperada toma la forma

$$u_T(x) = \log x + H_T(\mathbb{P}|\mathbf{Q}) \quad (5.6)$$

donde

$$H_T(\mathbb{P}|\mathbf{Q}) := \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ \log \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbf{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} \right] = \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [\log Z_T^{-1}]$$

denota la entropía relativa de  $\mathbb{P}$  con respecto a  $\mathbf{Q}$  en  $\mathcal{F}_T$ .

**Proposición 5.1.** *La utilidad máxima esperada en el momento  $T$  está dada por*

$$\begin{aligned} u_T(x) &= \log x + \frac{1}{4}\rho T - \frac{1}{8}(1 - e^{-2\rho T}) + \frac{1}{4}\frac{\rho}{\sigma^2}y_0^2(1 - e^{-2\rho T}) \\ &\quad - \frac{1}{2}y_0(1 - e^{-\rho T}) + \frac{1}{8}\sigma^2 T. \end{aligned} \quad (5.7)$$

En particular  $u_T(x)$  crece linealmente a la tasa

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{u_T(x)}{T} = \frac{1}{4}\rho + \frac{1}{8}\sigma^2. \quad (5.8)$$

*Demostración.* Por lo visto en (5.6) es suficiente calcular la entropía relativa

$$\begin{aligned} H_T(\mathbb{P}|\mathbf{Q}) &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [\log Z_T^{-1}] = -\mathbf{E}_{\mathbb{P}} [\log Z_T] \\ &= -\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dW_t \right] + \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)^2 dt \right]. \end{aligned}$$

El primer término es 0 ya que  $Z_T$  es una  $\mathbf{Q}$ -martingala y los dos primeros momentos del proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $(Y_t)_{t \geq 0}$  están dados por

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[Y_t] = y_0 e^{-\rho t} \quad (5.9)$$

y

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[Y_t^2] = \frac{\sigma^2}{2\rho} (1 - e^{-2\rho t}) + y_0^2 e^{-2\rho t}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_T(\mathbb{P}|\mathbf{Q}) &= \frac{\rho^2}{2\sigma^2} \int_0^T \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[Y_t^2] dt - \frac{\rho}{2} \int_0^T \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[Y_t] dt + \frac{1}{8} \sigma^2 T \\ &= \frac{\rho^2}{4\sigma^2} y_0^2 (1 - e^{-2\rho T}) - \frac{1}{2} y_0 (1 - e^{-\rho T}) - \frac{1}{8} (1 - e^{-2\rho T}) + \frac{1}{4} \rho T + \frac{1}{8} \sigma^2 T. \end{aligned}$$

□

En el caso logarítmico, la estrategia óptima no depende del horizonte  $T$ .

**Proposición 5.2.** *La proporción óptima definida por (5.4) está dada por*

$$\pi_t^{(T)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma^2} \rho Y_t. \quad (5.10)$$

*Demostración.* Por lo visto en (4.3), (4.4) y (5.5) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} dW_t^{\mathbf{Q}} &= dW_t - \int_0^t \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_s - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds \\ dW_t &= dW_t^{\mathbf{Q}} + \int_0^t \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_s - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds, \end{aligned}$$

entonces el reclamo contingente óptimo está dada por

$$\begin{aligned} X_T &= x \exp \left( - \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dW_t + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 dt \right) \\ &= x \exp \left( - \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left( dW_t^{\mathbf{Q}} + \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 dt \right) \\ &= x \exp \left( - \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dW_t^{\mathbf{Q}} - \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 dt \right) \\ &= x \exp \left( - \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dW_t^{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 dt \right). \end{aligned}$$

Así la  $\mathbf{Q}$ -martingala

$$\begin{aligned} X_t^{(T)} &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X_T | \mathcal{F}_t] \\ &= x \exp \left( - \int_0^t \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dW_s^{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 ds \right) \end{aligned}$$

como la dinámica  $S$  satisface la forma

$$dS_t = \sigma S_t dW_t^{\mathbf{Q}}$$

entonces

$$\begin{aligned} dX_t^{(T)} &= X_t^{(T)} \left( -\frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right) dW_s^{\mathbf{Q}} \\ &= X_t^{(T)} \left( -\frac{1}{\sigma^2} \rho Y_s + \frac{1}{2} \right) S_t^{-1} dS_t \\ &= X_t^{(T)} \pi_t S_t^{-1} dS_t \end{aligned}$$

y así, la proporción  $\pi_t^{(T)}$  definida por (5.4) viene dada por (5.10).  $\square$

**Observación 5.3.** *Se sabe que, para la utilidad logarítmica, el valor del portafolio óptimo está dada por el “portafolio efectivo”*

$$X_T = x \left( Z_T^{\min} \right)^{-1} = x + \int_0^T X_t \left( \frac{\varphi}{\sigma} \right)_t dS_t, \quad (5.11)$$

es decir, la estrategia óptima es proporcional a la riqueza actual  $X_t$  así como al cociente  $\frac{\varphi}{\sigma}$ . Tenga en cuenta que estos resultados también son ciertos en el caso general incompleto. En nuestro caso especial del proceso geométrico Ornstein-Uhlenbeck, esto es, por supuesto, consistente con la fórmula explícita (5.10) para la proporción óptima. La fórmula (5.11) implica en particular que cualquier estimación (desde abajo) en  $-\mathbf{E}[\log(Z^{\min})]$  produce una estimación (por abajo) en  $\mathbf{E}[\log(X_T)]$ .

## 5.2. Utilidad Exponencial

Para la función de utilidad exponencial  $U(x) = -\exp(-\lambda x)$  con parámetro  $\lambda > 0$  se tiene  $(U')^{-1}(y) = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{\lambda}{y}\right)$ , entonces el reclamo contingente óptimo en (5.1) está dado por

$$X_T = x + \frac{1}{\lambda} (H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P}) - \log Z_T),$$

donde

$$H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P}) := \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\log Z_T]$$

denota la entropía relativa de  $\mathbf{Q}$  por respecto a  $\mathbb{P}$  en  $\mathcal{F}_T$ .



**Proposición 5.4.** *La utilidad máxima esperada está dada por*

$$u_T(x) = -\exp(-\lambda x - H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P})) \quad (5.12)$$

donde

$$H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P}) = \left( \frac{\rho^2}{2\sigma^2} y_0^2 - \frac{\rho}{2} y_0 + \frac{1}{8} \sigma^2 \right) T + \left( \frac{1}{4} \rho^2 (1 - y_0) + \frac{1}{8} \rho \sigma^2 \right) T^2 + \frac{1}{24} \rho^2 \sigma^2 T^3. \quad (5.13)$$

En particular,  $u_T(x)$  crece hasta su límite superior 0 a la siguiente velocidad

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^3} \log(-u_T(x)) = -\frac{1}{24} \rho^2 \sigma^2.$$

*Demostración.* Ya que por (5.1)

$$\begin{aligned} u_T(x) &= -\mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\exp(-\lambda X_T)] \\ &= -\exp(-\lambda x - H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P})), \end{aligned}$$

Queda por calcular la entropía relativa en el entorno especial. Por lo visto en las ecuaciones (4.3) y (4.4) se tiene

$$\begin{aligned} H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P}) &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 dt \right] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dW_t^{\mathbf{Q}} + \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 dt \right] \\ &= \frac{\rho^2}{2\sigma^2} \int_0^T \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Y_t^2] dt - \frac{\rho}{2} \int_0^T \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Y_t] dt + \frac{1}{8} \sigma^2 T. \end{aligned}$$

Ya que  $Y_t = \sigma W_t^{\mathbf{Q}} + y_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 t$  por la ecuación (4.4), el primer y segundo momento están dados por

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Y_t] = y_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 t,$$

y

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Y_t^2] = \sigma^2 t + y_0^2 - y_0 \sigma^2 t + \frac{1}{4} \sigma^4 t^2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P}) &= \frac{\rho^2}{2\sigma^2} \int_0^T \left( \sigma^2 t + y_0^2 - y_0 \sigma^2 t + \frac{1}{4} \sigma^4 t^2 \right) dt - \frac{\rho}{2} \int_0^T \left( y_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 t \right) dt + \frac{1}{8} \sigma^2 T \\ &= \frac{\rho^2}{2\sigma^2} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 T^2 + y_0^2 T - \frac{1}{2} y_0 \sigma^2 T^2 + \frac{1}{12} \sigma^4 T^3 \right) - \frac{\rho}{2} \left( y_0 T - \frac{1}{4} \sigma^2 T^2 \right) + \frac{1}{8} \sigma^2 T \\ &= \left( \frac{\rho^2}{2\sigma^2} y_0^2 - \frac{\rho}{2} y_0 + \frac{1}{8} \sigma^2 \right) T + \left( \frac{1}{4} \rho^2 (1 - y_0) + \frac{1}{8} \rho \sigma^2 \right) T^2 + \frac{1}{24} \rho^2 \sigma^2 T^3, \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación (5.13). □

Identifiquemos ahora la estrategia óptima para un horizonte fijo  $T > 0$ .

**Proposición 5.5.** La cantidad óptima  $\xi_t^{(T)}$  definida por (5.3) está dada por

$$\xi_t^{(T)} = \frac{1}{\lambda S_t} \left[ -\frac{1}{\sigma^2} (\rho + \rho^2(T-t)) Y_t + \frac{1}{4} (1 + \rho(T-t))^2 + \frac{1}{4} \right]. \quad (5.14)$$

*Demostración.* Considerar la  $\mathbf{Q}$ -martingala

$$\begin{aligned} X_t^{(T)} &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X_T | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ x + \frac{1}{\lambda} (H_T(\mathbf{Q} | \mathbb{P}) - \log Z_T) \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= x + \frac{1}{\lambda} H_T(\mathbf{Q} | \mathbb{P}) - \frac{1}{\lambda} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[\log Z_T | \mathcal{F}_t] \\ &= x + \frac{1}{\lambda} H_T(\mathbf{Q} | \mathbb{P}) - \frac{1}{\lambda} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 dt \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= x + \frac{1}{\lambda} H_T(\mathbf{Q} | \mathbb{P}) - \frac{1}{\lambda} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \int_0^T \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right) dW_t^{\mathbf{Q}} + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 dt \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_t^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_t - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 dt \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= x + \frac{1}{\lambda} H_T(\mathbf{Q} | \mathbb{P}) - \frac{1}{\lambda \sigma} \int_0^t \left( \rho Y_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dW_s^{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2\lambda} \int_0^t \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 ds \\ &\quad - \frac{1}{2\lambda} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} \left[ \int_t^T \frac{1}{\sigma^2} \left( \rho Y_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right)^2 ds \mid \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

El último término se puede calcular explícitamente usando los momentos condicionales

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Y_s | \mathcal{F}_t] = \sigma W_t^{\mathbf{Q}} + y_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 s$$

y

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[Y_s^2 | \mathcal{F}_t] = \sigma^2 (s-t) + \sigma^2 \left( W_t^{\mathbf{Q}} \right)^2 + \left( y_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 s \right)^2 + 2\sigma W_t^{\mathbf{Q}} \left( y_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 s \right).$$

Definamos

$$k := \frac{1}{\sigma} \left( \rho Y_s - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \quad (5.15)$$

$$H_t := \int_0^t k_s dW_s^{\mathbf{Q}} - \frac{1}{2} \int_0^t k_s^2 ds. \quad (5.16)$$

Entonces tenemos que

$$X_t^T = x + \frac{1}{\lambda} E_{\mathbf{Q}}[H_T] - \frac{1}{\lambda} E_{\mathbf{Q}}[H_T | \mathcal{F}_t].$$

Como  $X^T$  es una martingala entonces al escribir explícitamente la dinámica de  $E_Q[\int_0^T k_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t]$  tendremos que la parte de variación finita deben sumar la constante  $x$ . Para determinar la dinámica tenemos

$$\begin{aligned} E_Q \left[ \int_0^T k_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t \right] &= \int_0^t k_s^2 ds + E_Q \left[ \int_t^T k_s^2 ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_0^t k_s^2 ds + \frac{1}{\sigma^2} E_Q \left[ \int_t^T (\rho Y_s - \frac{1}{2} \sigma^2)^2 ds \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \int_0^t k_s^2 ds + \frac{1}{\sigma^2} \int_t^T E_Q \left[ (\rho Y_s - \frac{1}{2} \sigma^2)^2 \mid \mathcal{F}_t \right] ds \\ &= \int_0^t k_s^2 ds + \frac{1}{\sigma^2} \int_t^T E_Q \left[ \rho^2 Y_s^2 - \rho \sigma^2 Y_s + \frac{1}{4} \sigma^4 \mid \mathcal{F}_t \right] ds. \end{aligned}$$

Ahora trabajemos el segundo término de la ultima igualdad. Tenemos

$$\begin{aligned} &\int_t^T E_Q \left[ \rho^2 Y_s^2 - \rho \sigma^2 Y_s + \frac{1}{4} \sigma^4 \mid \mathcal{F}_t \right] ds \\ &= \rho^2 \int_t^T ds \left[ \sigma^2 (s-t) + \sigma^2 (W_t^Q)^2 + (y - \frac{1}{2} \sigma^2 s)^2 + 2\sigma W_t^Q (y - \frac{1}{2} \sigma^2 s) \right] \\ &\quad - \rho \sigma^2 \int_t^T ds \left[ \sigma W_t^Q + y - \frac{1}{2} \sigma^2 s \right] + \frac{\sigma^4}{4} (T-t) \\ &= \rho^2 \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 (s-t)^2 + \sigma^2 (W_t^Q)^2 s - \frac{2}{3\sigma^2} (y - \frac{1}{2} \sigma^2 s)^3 - \frac{2}{\sigma} W_t^Q (y - \frac{1}{2} \sigma^2 s)^2 \right]_t^T \\ &\quad - \rho \sigma^2 \left[ \sigma W_t^Q s - \frac{1}{\sigma^2} (y - \frac{1}{2} \sigma^2 s)^2 \right]_t^T + \frac{\sigma^4}{4} (T-t). \end{aligned}$$

Todos aquellos términos en donde no aparezca explícitamente  $W^Q$  darán origen a procesos o funciones de variación acotada y por ello no serán importantes ya que se deben anular con todos los demás términos de variación acotada. Luego entonces nos enfocamos en la siguiente expresión

$$Z_t := \rho^2 \left[ \sigma^2 (W_t^Q)^2 s - \frac{2}{\sigma} W_t^Q (y - \frac{1}{2} \sigma^2 s)^2 \right]_t^T - \rho \sigma^2 \left[ \sigma W_t^Q s \right]_t^T. \quad (5.17)$$

Dados dos procesos  $x, y$  el símbolo  $x \equiv y$  significará que la diferencia  $x - y$  es un proceso de variación finita. Observemos que para cualquier función  $f$  determinista haciendo integración por partes

$$\begin{aligned} (W_t^Q)^2 f(t) &\equiv 2 \int_0^t f(s) W_s^Q dW_s^Q \\ W_t^Q f(t) &\equiv \int_0^t f(s) dW_s^Q. \end{aligned}$$

Luego  $Z$  definido en (5.17) satisface  $Z \equiv \int_0^T \xi_s dW_s^Q$  en donde

$$\xi_s := 2\rho^2 \sigma^2 (T-s) W_s - \frac{2\rho^2}{\sigma} \left[ (y - \frac{1}{2} \sigma^2 s)^2 \right]_s^T - \rho \sigma^3 (T-s). \quad (5.18)$$

finalmente obtenemos

$$\begin{aligned} X_t^{(T)} &= x + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \left[ \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 - \rho Y_s \right) - \frac{\rho^2}{\sigma} (T-s) Y_s - \frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma}{4\rho^2} (\rho + \rho^2(T-s))^2 \right] dW_s^{\mathbf{Q}} \\ &= x + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \frac{1}{S_s} \left[ \left( -\frac{\rho}{\sigma^2} - \frac{\rho^2}{\sigma^2} (T-s) \right) Y_s + \frac{1}{4} (1 + \rho(T-s))^2 + \frac{1}{4} \right] dS_s. \end{aligned}$$

Esto muestra que el integrando  $(\xi_t^{(T)})$  definido por la ecuación (5.3) viene dado por (5.14).  $\square$

### 5.3. Utilidad de Potencia

Considérese la función de utilidad de potencia que está dada por  $U(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha$  con parámetro  $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$ . Donde  $(U')^{-1}(y) = y^\gamma$  con  $\gamma = \frac{1}{\alpha-1} \in (-\infty, 0)$ , el reclamo contingente óptimo para  $T > 0$  está dado por

$$X_T = x Z_T^\gamma \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [Z_T^\gamma]^{-1} = x Z_T^\gamma \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [Z_T^\beta]^{-1}, \quad (5.19)$$

y la máxima utilidad esperada es

$$u_T(x) = \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [U(X_T)] \quad (5.20)$$

sustituyendo  $U(x)$ , obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} u_T(x) &= \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ \frac{1}{\alpha} x^\alpha Z_T^{\gamma\alpha} \right] \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [Z_T^{-\beta}]^\alpha \\ &= \frac{1}{\alpha} x^\alpha \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [Z_T^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}] \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [Z_T^\beta]^\alpha \\ &= \frac{x^\alpha}{\alpha} \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [Z_T^\beta]^{1-\alpha} \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde

$$\beta := \frac{\alpha}{\alpha-1} \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}.$$

La siguiente proposición presenta una fórmula explícita para  $u_T(x)$ . En particular, nos permite calcular su tasa de crecimiento cuando  $T \rightarrow \infty$ . Tenga en cuenta que para  $\alpha > 0$  la ecuación (5.23) describe el crecimiento exponencial de  $u_T(x)$  al infinito, mientras que para  $\alpha < 0$  especifica la disminución exponencial de la distancia entre  $u_T(x)$  y su valor máximo 0.

**Proposición 5.6.** *Tenemos*

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right] = (A_T^-)^{-1/2} \exp \left( B_T + (A_T^-)^{-1} C_T \right), \quad (5.22)$$

donde

$$\begin{aligned} A_T^\pm &:= 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \beta} \right) \left( 1 \pm \exp \left( -2\rho\sqrt{1 - \beta}T \right) \right), \\ B_T &:= \frac{1}{2}\beta y_0 - \frac{\rho}{2\sigma} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) y_0^2 - \left[ \frac{1}{8}\beta\sigma^2 + \frac{\rho}{2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) \right] T, \\ C_T &:= -\frac{1}{2}\beta y_0 \exp \left( -\rho\sqrt{1 - \beta}T \right) + \frac{1}{2}y_0^2 \frac{\rho}{\sigma^2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) \exp \left( -2\rho\sqrt{1 - \beta}T \right) \\ &\quad + \frac{\beta^2\sigma^2}{16\rho} (1 - \beta)^{-1/2} \left( 1 - \exp \left( -2\rho\sqrt{1 - \beta}T \right) \right). \end{aligned}$$

En particular, la utilidad máxima esperada crece a la tasa

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log(|u_T(x)|) = \frac{1}{8}\alpha\sigma^2 + \frac{1}{2}\rho(1 - \sqrt{1 - \alpha}). \quad (5.23)$$

*Demostración.* Para calcular la esperanza de

$$Z_T^\beta = \exp \left( \frac{\rho\beta}{\sigma^2} \int_0^T Y_s dY_s + \frac{1}{2} \frac{\beta\rho^2}{\sigma^2} \int_0^T Y_s^2 ds - \frac{1}{2}\beta(Y_T - y_0) - \frac{1}{8}\beta\sigma^2 T \right),$$

primero eliminaremos el término de  $\int_0^T Y_s^2$  que aparece en el exponente por medio de una transformación adecuada de Girsanov. Para  $\delta > 0$  denotamos por  $\mathbb{P}^\delta$  la medida de probabilidad en  $\mathcal{F}_T$  con densidad

$$\varphi_T^\delta := \exp \left( \int_0^T \frac{\rho - \delta}{\sigma} Y_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\rho - \delta}{\sigma} Y_s \right)^2 ds \right).$$

Definimos un movimiento browniano bajo  $\mathbb{P}^\delta$

$$W_t^\delta := W_t - \int_0^t \frac{\rho - \delta}{\sigma} Y_s ds,$$

entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_T^\delta &= \exp \left( \int_0^T \frac{\rho - \delta}{\sigma} Y_s \left[ dW_s^\delta + \int_0^T \frac{\rho - \delta}{\sigma} Y_s ds \right] - \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\rho - \delta}{\sigma} Y_s \right)^2 ds \right) \\
&= \exp \left( \int_0^T \frac{\rho - \delta}{\sigma} Y_s dW_s^\delta + \int_0^T \left( \frac{\rho - \delta}{\sigma} \right)^2 Y_s^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\rho - \delta}{\sigma} \right)^2 Y_s^2 ds \right) \\
&= \exp \left( \int_0^T \frac{\rho - \delta}{\sigma} Y_s \left[ \frac{dY_s + \delta Y_s ds}{\sigma} \right] + \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\rho - \delta}{\sigma} \right)^2 Y_s^2 ds \right) \\
&= \exp \left( \int_0^T \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} Y_s dY_s + \int_0^T \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} \delta Y_s^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{\rho - \delta}{\sigma} \right)^2 Y_s^2 ds \right) \\
&= \exp \left( \int_0^T \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} Y_s dY_s + \left[ \frac{(\rho - \delta)^2}{2\sigma^2} + \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} \delta \right] \int_0^T Y_s^2 ds \right) \\
&= \exp \left( \int_0^T \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} Y_s dY_s + \left[ \frac{\rho^2}{2} - \rho\delta + \frac{\delta^2}{2} + \rho\delta - \delta^2 \right] \int_0^T Y_s^2 ds \right) \\
&= \exp \left( \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} \int_0^T Y_s dY_s + \frac{1}{2} \frac{\rho^2 - \delta^2}{\sigma^2} \int_0^T Y_s^2 ds \right) \tag{5.24}
\end{aligned}$$

con respecto a  $\mathbb{P}$ .  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  se convierte en un proceso Ornstein-Uhlenbeck con respecto a  $\mathbb{P}^\delta$  con parámetro  $\delta$ , es decir,

$$dY_t = -\delta Y_t dt + \sigma dW_t^\delta. \tag{5.25}$$

Tomando a  $\delta := \rho\sqrt{1 - \beta}$  y usando la formula de Itô, donde  $f(Y) = Y^2$  se tiene lo siguiente

$$\int_0^T \left[ f_t + \frac{1}{2} \sigma^2 f_{yy} \right] dt + \int_0^T f_y dY_s = f(Y_T) - f(y_0)$$

sustituyendo las derivadas de la función f se tiene

$$\sigma^2 T + 2 \int_0^T Y_s dY_s = Y_T^2 - y_0^2$$

despejando la integral

$$\int_0^T Y_s dY_s = \frac{1}{2} (Y_T^2 - y_0^2) - \frac{1}{2} \sigma^2 T. \tag{5.26}$$

Podemos calcular  $\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right]$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right] &= \mathbf{E}^\delta \left[ Z_T^\beta \left( \varphi_T^\delta \right)^{-1} \right] \\
&= \mathbf{E}^\delta \exp \left( \frac{\rho\beta}{\sigma^2} \int_0^T Y_s dY_s + \frac{1}{2} \frac{\beta\rho^2}{\sigma^2} \int_0^T Y_s^2 ds - \frac{1}{2} \beta(Y_T - y_0) - \frac{1}{8} \beta\sigma^2 T \right. \\
&\quad \left. - \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} \int_0^T Y_s dY_s - \frac{1}{2} \frac{\rho^2 - \delta^2}{\sigma^2} \int_0^T Y_s^2 ds \right) \\
&= \mathbf{E}^\delta \exp \left( \left( \frac{\rho\beta}{\sigma^2} - \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} \right) \int_0^T Y_s dY_s + \left( \frac{1}{2} \frac{\beta\rho^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \frac{\rho^2 - \delta^2}{\sigma^2} \right) \int_0^T Y_s^2 ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \beta(Y_T - y_0) - \frac{1}{8} \beta\sigma^2 T \right) \\
&= \mathbf{E}^\delta \exp \left( \left( \frac{\rho(\beta - 1 + \sqrt{1 - \beta})}{\sigma^2} \right) \int_0^T Y_s dY_s + \left( \frac{\rho^2(\beta - 1 + 1 - \beta)}{2\sigma^2} \right) \int_0^T Y_s^2 ds \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \beta(Y_T - y_0) - \frac{1}{8} \beta\sigma^2 T \right) \\
&= \mathbf{E}^\delta \left[ \exp \left( \frac{\rho}{\sigma^2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) \int_0^T Y_s dY_s - \frac{1}{2} \beta(Y_T - y_0) - \frac{1}{8} \beta\sigma^2 T \right) \right]. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

En la ecuación (5.27) podemos sustituir la ecuación (5.26) y obtenemos lo siguiente

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right] = \mathbf{E}^\delta \left[ \exp \left( \frac{\rho}{\sigma^2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) \left[ \frac{1}{2} (Y_T^2 - y_0^2) - \frac{1}{2} \sigma^2 T \right] - \frac{1}{2} \beta(Y_T - y_0) - \frac{1}{8} \beta\sigma^2 T \right) \right]$$

de la anterior ecuación podemos definir una variable que tenga todos los términos que no dependen de  $Y_T$  que son

$$B_T := -\frac{\rho}{\sigma^2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) Y_0^2 + \frac{1}{2} \beta y_0 - \frac{\rho}{\sigma^2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) T - \frac{1}{8} \beta\sigma^2 T$$

por lo tanto tenemos

$$\mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right] = \exp(B_T) \mathbf{E}^\delta \left[ \exp \left( \frac{\rho}{2\sigma^2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) Y_T^2 - \frac{1}{2} \beta Y_T \right) \right]. \quad (5.28)$$

Por lo visto en la ecuación (5.25),  $Y_T$  es una variable aleatoria normal con media  $m := e^{-\delta T} y_0$  y varianza  $\nu^2 := \frac{\sigma^2}{2\delta} (1 - e^{-2\delta T})$ . Usando el hecho de que

$$\mathbf{E} \left[ \exp(\lambda Y^2 + \eta Y) \right] = (1 - 2\lambda\nu^2)^{-1/2} \exp \left( (1 - 2\lambda\nu^2)^{-1} \left( \lambda m^2 + \eta m + \frac{1}{2} \eta^2 \nu^2 \right) \right), \quad (5.29)$$

entonces calculamos la esperanza de (5.28) donde  $\lambda = \frac{\rho}{2\sigma^2} (\sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta))$ ,  $\eta = -\frac{1}{2} \beta$  y

$\delta = \rho\sqrt{1-\beta}$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 (1 - 2\lambda\nu^2)^{-1/2} &= \left(1 - 2 \left[ \frac{\rho}{2\sigma^2} \left( \sqrt{1-\beta} - (1-\beta) \right) \right] \left( \frac{\sigma^2}{2\delta} \left( 1 - e^{-2\delta T} \right) \right) \right)^{-1/2} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho\sqrt{1-\beta}} \left( \sqrt{1-\beta} - (1-\beta) \right) \left( 1 - e^{-2\delta T} \right) \right)^{-1/2} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(1-\beta)}{\sqrt{1-\beta}} \right) \left( 1 - e^{-2\delta T} \right) \right)^{-1/2} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1-\beta} \right) \left( 1 \pm e^{-2\rho\sqrt{1-\beta}T} \right) \right)^{-1/2} \\
 &= A_T^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

Más aún

$$\begin{aligned}
 \lambda m^2 + \eta m + \frac{1}{2}\eta^2\nu^2 &= \frac{\rho}{2\sigma^2} \left( \sqrt{1-\beta} - (1-\beta) \right) e^{-2\delta T} y_0^2 - \frac{1}{2}\beta e^{-\delta T} y_0 \\
 &\quad + \frac{1}{8}\beta^2 \left( \frac{\sigma^2}{2\delta} \left( 1 - e^{-2\delta T} \right) \right) \\
 &= \frac{\rho}{2\sigma^2} \left( \sqrt{1-\beta} - (1-\beta) \right) \exp \left[ -2\rho\sqrt{1-\beta}T \right] y_0^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2}\beta y_0 \exp \left[ -\rho\sqrt{1-\beta}T \right] + \frac{1}{16}\beta^2 \frac{\sigma^2}{\rho\sqrt{1-\beta}} \left( 1 - \exp \left[ -2\rho\sqrt{1-\beta}T \right] \right).
 \end{aligned}$$

Al término de la ecuación anterior lo definimos como

$$\begin{aligned}
 C_T &:= \frac{\rho}{2\sigma^2} \left( \sqrt{1-\beta} - (1-\beta) \right) \exp \left[ -2\rho\sqrt{1-\beta}T \right] y_0^2 - \frac{1}{2}\beta y_0 \exp \left[ -\rho\sqrt{1-\beta}T \right] \\
 &\quad + \frac{1}{16}\beta^2 \frac{\sigma^2}{\rho\sqrt{1-\beta}} \left( 1 - \exp \left[ -2\rho\sqrt{1-\beta}T \right] \right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto para cualquier variable aleatoria  $Y$  que se distribuya como una normal  $N(m, \nu^2)$  y  $\lambda\nu^2 < \frac{1}{2}$  finalmente obtenemos la ecuación (5.22).

Combinando (5.21) con (5.22), vemos que

$$\log |u_T(x)| = \alpha \log x - \log |\alpha| + (1-\alpha) (B_T + (A_T^-)^{-1} C_T) - \frac{1}{2}(1-\alpha) \log A_T^-.$$

Ya que  $A_T^-$  y  $C_T$  convergen a un límite finito cuando  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log |u_T(x)| &= (1-\alpha) \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} B_T \\
 &= (1-\alpha) \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \left[ -\frac{\rho}{\sigma^2} \left( \sqrt{1-\beta} - (1-\beta) \right) y_0^2 + \frac{1}{2}\beta y_0 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho}{\sigma^2} \left( \sqrt{1-\beta} - (1-\beta) \right) T - \frac{1}{8}\beta\sigma^2 T \right] \\
 &= (\alpha-1) \left[ \frac{1}{8}\beta\sigma^2 + \frac{\rho}{2} \left( \sqrt{1-\beta} - (1-\beta) \right) \right]
 \end{aligned}$$



ya que  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log |u_T(x)| &= (\alpha - 1) \left[ \frac{1}{8} \frac{\alpha}{\alpha - 1} \sigma^2 + \frac{\rho}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha}} - \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \alpha \sigma^2 + \frac{1}{2} \rho (1 - \sqrt{1 - \alpha}). \end{aligned}$$

□

El siguiente objetivo es identificar la estrategia óptima  $(\xi_t^{(T)})_{0 \leq t \leq T}$  definida por la ecuación (5.3). La cual será descrita en términos de la proporción óptima  $\pi_t^{(T)}$  del capital

$$X_t^{(T)} = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}}[X_T | \mathcal{F}_t],$$

el cual debe invertirse en el activo financiero en el momento  $t$  para cualquier  $t \in [0, T]$ , ver ecuación (5.4).

**Proposición 5.7.** *La proporción óptima  $\pi_t^{(T)}$  es una función afín del precio de stock logarítmico dado por*

$$\pi_t^{(T)} = a(T - t)Y_t + b(T - t), \quad (5.30)$$

donde

$$a(T - t) := -\frac{\rho}{\sigma^2} \sqrt{1 - \beta} A_{T-1}^+ (A_{T-1}^-)^{-1}$$

y

$$b(T - t) := \frac{1}{2} \left[ 1 - (A_{T-t}^-)^{-1} \beta \exp \left( -\rho \sqrt{1 - \beta} (T - t) \right) \right].$$

En particular, la forma asintótica de la estrategia óptima cuando  $T \rightarrow \infty$  está dado por

$$\pi_t := \lim_{T \nearrow \infty} \pi_t^{(T)} = -\frac{\rho}{\sigma^2 \sqrt{1 - \alpha}} Y_t + \frac{1}{2}. \quad (5.31)$$

*Demostración.* Considerar la  $\mathbf{Q}$ -martingala  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  definida por

$$M_t := \mathbf{E}_{\mathbf{Q}} [Z_T^\gamma | \mathcal{F}_t],$$

recordar la medida  $\mathbb{P}^\delta$  introducida en la prueba de la Proposición 5.6 para  $\delta := \rho \sqrt{1 - \beta}$ . En términos de sus densidades

$$\varphi_t^\delta := \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [\varphi_T^\delta | \mathcal{F}_t]$$

con respecto a  $\mathbb{P}^\delta$  donde  $\varphi_t^\delta$  está dado por la ecuación (5.24). Entonces  $M_t$  toma la forma

$$\begin{aligned}
 M_t &= Z_t^{-1} \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= Z_t^{-1} \varphi_t^\delta \mathbf{E}^\delta \left[ Z_t^\beta \left( \varphi_T^\delta \right)^{-1} | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \exp \left[ -\frac{\rho}{\sigma^2} \int_0^t Y_s dY_s - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\sigma^2} \int_0^t Y_s^2 ds + \frac{1}{2} (Y_t - y_0) + \frac{1}{8} \sigma^2 t \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\rho - \delta}{\sigma^2} \int_0^t Y_s dY_s + \frac{1}{2} \frac{\rho^2 - \delta^2}{\sigma^2} \int_0^t Y_s ds \right] \mathbf{E}^\delta \left[ Z_t^\beta \left( \varphi_T^\delta \right)^{-1} | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \exp \left[ -\frac{\delta}{\sigma^2} \int_0^t Y_s dY_s - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\sigma^2} \int_0^t Y_s^2 ds + \frac{1}{2} (Y_t - y_0) + \frac{1}{8} \sigma^2 t \right] \mathbf{E}^\delta \left[ Z_t^\beta \left( \varphi_T^\delta \right)^{-1} | \mathcal{F}_t \right] \\
 &= L_t \mathbf{E}^\delta \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\rho}{\sigma^2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) Y_T^2 - \frac{1}{2} \beta Y_T \right) | \mathcal{F}_t \right]
 \end{aligned}$$

con

$$\log L_t := -\frac{\delta}{\sigma^2} \int_0^t Y_s dY_s - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\sigma^2} \int_0^t Y_s^2 ds + \frac{1}{2} (Y_t - y_0) + \frac{1}{8} \sigma^2 t + B_T$$

donde  $B_T$  está definido en la Proposición 5.6.

Por lo visto en la ecuación (5.25) la variable aleatoria  $Y_t$  es una normal bajo la distribución condicional  $\mathbb{P}^\delta[\cdot | \mathcal{F}_t]$ , con media condicional  $m := Y_t \exp(-\delta(T-t))$  y varianza condicional  $\rho^2 := \frac{\sigma^2}{2\delta}(1 - \exp(-2\delta(T-t)))$ . Usando nuevamente la ecuación (5.29) finalmente obtenemos una expresión de la forma

$$M_t = \exp(N_t) D_t$$

donde

$$N_t := \int_0^t \pi_t^{(T)} \sigma dW_s^{\mathbf{Q}}$$

es una  $\mathbf{Q}$ -martingala,  $\pi_t^{(T)}$  viene dado por la ecuación (5.30) y  $(D_t)_{0 \leq t \leq T}$  es un proceso adaptado con trayectorias continuas de variación acotada. Pero  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  es una  $\mathbf{Q}$ -martingala, y esto implica

$$M_t = M_0 \exp \left( N_t - \frac{1}{2} \langle N \rangle_t \right),$$

por lo tanto

$$dM_t = M_t dN_t$$

y

$$\begin{aligned}
 dX_t^{(T)} &= X_t^{(T)} dN_t \\
 &= X_t^{(T)} \pi_t^{(T)} \sigma dW_t^{\mathbf{Q}} \\
 &= X_t^{(T)} \pi_t^{(T)} S_t^{-1} dS_t.
 \end{aligned}$$

Así, hemos demostrado que la estrategia de inversión  $(\xi_t^{(T)})$  en la ecuación (5.3) está dada por

$$\xi_t^{(T)} = X_t^{(T)} \pi_t^{(T)} S_t^{-1},$$

y así, la cantidad  $\pi_t^{(T)}$  definida por la ecuación (5.30) es, de hecho, la proporción óptima del capital disponible  $X_t^{(T)}$  que debe invertirse en el activo financiero en el momento  $t$ .

Ya que

$$\lim_{T \nearrow \infty} A_T^\pm = 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \beta} \right)$$

obtenemos

$$\lim_{T \nearrow \infty} a(T - 1) = -\frac{\rho}{\sigma^2} \sqrt{1 - \beta} = \frac{\rho}{\sigma^2 \sqrt{1 - \alpha}}$$

y

$$\lim_{T \nearrow \infty} b(T - 1) = \frac{1}{2},$$

y así, la forma asintótica de la estrategia cuando  $T \rightarrow \infty$  es dada por la ecuación (5.31).  $\square$

**Observación 5.8.** En Fleming W.H. [1999] se utilizan métodos de programación dinámica para calcular directamente la tasa de crecimiento óptima

$$\Lambda = \sup \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{E}_{\mathbb{P}} [U(X_T^\pi)]$$

para la utilidad de potencia  $U$ , donde el supremo toma todas las posibles estrategias de inversión admisibles; ver también Pham [2003]. Las Proposiciones 5.6 y 5.7 proporcionan, además, resultados explícitos para cualquier horizonte  $T$  finito y pueden verse como un complemento probabilista del método analítico en Fleming W.H. [1999].

**Observación 5.9.** Hemos considerado los precios y los reclamos contingentes en forma descontada, ya que se asumió que el bono se normalizaba a  $B_t \equiv 1$ . Para una tasa de interés constante sin riesgo  $r > 0$ , el reclamo contingente no descontado generado por una estrategia comercial autofinanciada de la forma  $\tilde{X}_T = X_T e^{rT}$ , y parece natural aplicar una función de utilidad dada  $U$  a  $\tilde{X}_T$  en lugar que a  $X_T$ . Además, uno puede querer introducir una tasa subjetiva de descuento  $\delta > 0$ . Denotemos con  $\tilde{u}_T(x)$  el valor óptimo obtenido al maximizar

$$\mathbf{E} \left[ U \left( \tilde{X}_T \right) \right] e^{-\delta T}.$$

Para una utilidad de potencia  $U(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha$  el reclamo contingente óptimo es claramente el mismo que antes, es decir,  $\tilde{X}_T = X_T e^{rT}$  donde  $X_T$  está dado por la ecuación (5.19). Hay que tener en cuenta que  $Z_T$  ahora depende de  $r$  y está dado por la ecuación (4.18). El valor óptimo toma la forma

$$\tilde{u}_T = u_T(x) e^{(\alpha r - \delta)T}$$

donde  $u_T(x)$  está dado por la ecuación (5.20) y análogamente a la Proposición 5.6 tenemos lo siguiente.

$$\log |u_T(x)| = \alpha \log x - \log |\alpha| + (1 - \alpha) (B_T + (A_T^-)^{-1} C_T) - \frac{1}{2} (1 - \alpha) \log A_T^-.$$

Ya que  $A_T^-$  y  $C_T$  convergen a un límite finito cuando  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log |u_T(x)| &= (1 - \alpha) \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} B_T \\ &= (1 - \alpha) \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \left[ -\frac{\rho}{\tilde{\sigma}^2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) Y_0^2 + \frac{1}{2} \beta y_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho}{\tilde{\sigma}^2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) T - \frac{1}{8} \beta \tilde{\sigma}^2 T \right] \\ &= (\alpha - 1) \left[ \frac{1}{8} \beta \tilde{\sigma}^2 + \frac{\rho}{2} \left( \sqrt{1 - \beta} - (1 - \beta) \right) \right] \end{aligned}$$

ya que  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$  y  $\tilde{\sigma} = \sigma - \frac{2r}{\sigma}$  tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log |u_T(x)| &= (\alpha - 1) \left[ \frac{1}{8} \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left( \sigma - \frac{2r}{\sigma} \right)^2 + \frac{\rho}{2} \left( \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha}} - \frac{1}{1 - \alpha} \right) \right] \\ &= \frac{1}{8} \frac{\alpha}{\sigma^2} (\sigma^2 - 2r)^2 + \frac{1}{2} \rho (1 - \sqrt{1 - \alpha}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right)^2 + \frac{1}{2} \rho (1 - \sqrt{1 - \alpha}). \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log (|\tilde{u}_T(x)|) &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( |u_T(x)| e^{(\alpha r - \delta)T} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right)^2 + \frac{1}{2} \rho (1 - \sqrt{1 - \alpha}) + \alpha r - \delta \\ &= \alpha \left( r + \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \rho (1 - \sqrt{1 - \alpha}) - \delta. \end{aligned}$$

obtenemos un crecimiento exponencial a la tasa

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log (|\tilde{u}_T(x)|) = \alpha \left( r + \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{1}{2} \sigma^2 - r \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \rho (1 - \sqrt{1 - \alpha}) - \delta;$$

referirse a [Thomas \[2008\]](#) para cálculos detallados y para extensiones a procesos más generales de Ornstein-Uhlenbeck.

## 5.4. Equivalencia de certeza y sus tasas de crecimiento

Ahora interpretaremos en términos financieros los resultados anteriores sobre la inversión óptima con respecto al proceso geométrico Ornstein-Uhlenbeck para las funciones de utilidad consideradas anteriormente. También analizaremos en qué medida la utilidad logarítmica  $U(x) = \log(x)$  y la utilidad exponencial  $U(x) = -\exp(-x)$  corresponden a los casos límites  $\alpha \rightarrow 0$  y  $\alpha \rightarrow -\infty$  para las utilidades de potencia  $U^{(\alpha)}(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ .

Para que los resultados anteriores sean comparables, los transformaremos de la escala de utilidad a la escala de dinero, utilizando el concepto de “*equivalencia de certeza*”, debido a De Finetti (compárese, por ejemplo, [Delbaen F. [2006], Ejemplo 3.3.5]).

Fijamos una riqueza inicial  $x$  de un agente económico, que eventualmente normalizaremos por  $x = 1$ , así como la función de valor  $u_T(x)$ . La equivalencia de certeza  $CE_T(x)$  entonces es la solución para

$$U(x + CE_T(x)) = u_T(x) \quad (5.32)$$

La interpretación de esta fórmula es que un agente cuyas preferencias son modeladas por la utilidad esperada  $U$  al tiempo  $T$  es indiferente entre tener una riqueza inicial  $x + CE_T(x)$  sin la posibilidad de invertir en el mercado financiero  $S$  (para que su riqueza permanezca constante durante  $[0, T]$ ), en comparación con tener una riqueza inicial  $x$  así como la posibilidad de invertir (de manera óptima) en el mercado  $S$  durante  $[0, T]$ .

Al escalar tenemos  $CE_T(x) = xCE_T(1)$  en el caso de la utilidad logarítmica y de potencia, mientras que  $CE_T(x)$  es independiente de  $x$  en el caso de la utilidad exponencial. Por lo tanto, simplemente escribiremos  $CE_T$  para  $CE_T(1)$ ; si queremos enfatizar el rol de la función de utilidad  $U$ , también indicaremos esta cantidad por  $CE_T^U$ .

Las Proposiciones 5.1, 5.4 y 5.6 determinan una descripción explícita del crecimiento de las equivalencias de certeza cuando  $T \rightarrow \infty$ .

### 5.4.1. Utilidad Logarítmica

Tenemos

$$CE_T^{(\log)}(x) = x(\exp H_T(\mathbb{P}|\mathbf{Q}) - 1).$$

La ecuación (5.8) produce un crecimiento exponencial a la tasa

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log CE_T^{(\log)}(x) = \frac{\rho}{4} + \frac{\sigma^2}{8}. \quad (5.33)$$

### 5.4.2. Utilidad Exponencial

Tenemos

$$CE_T^{(\exp)}(x) = \frac{1}{\lambda} H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P})$$

y la ecuación (5.13) produce un crecimiento cúbico a la tasa

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^3} CE_T^{(\exp)}(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho^2 \sigma^2}{24}. \quad (5.34)$$

### 5.4.3. Utilidad de Potencia

Para  $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$  y  $U(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ , la equivalencia de certeza se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned} U(x + CE_T(x)) &= \frac{1}{\alpha}(x + CE_T(x))^\alpha = u_T(x) \\ x + CE_T(x) &= U^{-1}(u_T(x)) \\ x + CE_T(x) &= (\alpha u_T(x))^{1/\alpha} \\ CE_T(x) &= \left(\alpha \frac{x^\alpha}{\alpha} \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right]^{1-\alpha}\right)^{1/\alpha} - x \\ CE_T(x) &= x \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - x \end{aligned}$$

por lo tanto obtenemos

$$CE_T^{(\alpha)}(x) = x \left( \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right]^{-1/\beta} - 1 \right)$$

y la ecuación (5.23) produce un crecimiento exponencial a la tasa

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( x + CE_T^{(\alpha)}(x) \right) &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{\alpha T} \log (\alpha u_T(x))^{1/\alpha} \\ &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{\alpha T} [\log \alpha + \log u_T(x)] \\ &= \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho(1 - \sqrt{1 - \alpha})}{2\alpha}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

**Observación 5.10.** Para optimizar el problema formulado en la Observación 5.9 la correspondiente equivalencia de certeza  $\widetilde{CE}_T(x)$  está dado por

$$U(x + \widetilde{CE}_T(x)) = \widetilde{u}_T(x).$$

Para la utilidad de potencia  $U(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$  obtenemos

$$\begin{aligned} U(x + \widetilde{CE}_T^{(\alpha)}(x)) &= \frac{1}{\alpha} \left( x + \widetilde{CE}_T^{(\alpha)}(x) \right)^\alpha = \widetilde{u}_T(x) \\ x + \widetilde{CE}_T^{(\alpha)}(x) &= (\alpha \widetilde{u}_T(x))^{1/\alpha} \\ &= (\alpha u_T(x))^{1/\alpha} \exp \left[ \frac{1}{\alpha} (\alpha r - \delta) T \right], \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x + \widetilde{CE}_T^{(\alpha)}(x) = \left( x + CE_T^{(\alpha)}(x) \right) e^{(r - \frac{\delta}{\alpha})T},$$

la ecuación (5.35) implica un crecimiento exponencial a la tasa

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( x + \widetilde{CE}_T^{(\alpha)}(x) \right) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log (\alpha \tilde{u}_T)^{1/\alpha} \\
 &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{\alpha T} \log \alpha + \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{\alpha T} \log \tilde{u}_T \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left( \alpha \left( r + \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{1}{2}\sigma^2 - r \right)^2 \right) + \frac{1}{2}\rho(1 - \sqrt{1-\alpha}) - \delta \right) \\
 &= \frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{\sigma^2}{2} - r \right)^2 + \frac{\rho(1 - \sqrt{1-\alpha})}{2\alpha} + r - \frac{\delta}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

Ahora discutiremos el comportamiento de  $\alpha$  cuando  $\alpha \rightarrow 0$  y  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Comenzamos con el primer caso que es más fácil.

Notar que el  $\lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{x^\alpha - 1}{\alpha} = \log x$  y  $\lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-\alpha}}{2\alpha} = \frac{1}{4}$  tenemos que la ecuación (5.35) tiende a (5.33) cuando  $\alpha \rightarrow 0$ . De hecho, podemos verificar usando (5.7), (5.21), (5.22) que para un horizonte de tiempo fijo  $T$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \nearrow 0} \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right]^{-1/\beta} &= \lim_{\alpha \nearrow 0} \exp \log \left( \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right]^{-1/\beta} \right) \\
 &= \lim_{\alpha \nearrow 0} \exp \left( -\frac{1}{\beta} \log \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right] \right) \\
 &= \exp \left( -\lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \log \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right] \right) \\
 &= \exp \left( -\lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \log \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right] \right) \\
 &= \exp \left( -\lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \log \left[ A_T^{-1/2} \exp (B_T + (A_T^{-1} C_T)) \right] \right) \\
 &= \exp \left( \lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{1}{2} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \log A_T - \lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{\alpha - 1}{\alpha} B_T - \lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{\alpha - 1}{\alpha} (A_T^{-1} C_T) \right) \\
 &= \exp \left( -\frac{1}{8} e^{-2\rho T} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left( T(2\rho + \sigma^2) - \frac{2\rho y_0^2}{\sigma^2} - 4y_0 \right) - \frac{\rho y_0^2}{4\sigma^2} e^{2\rho T} + \frac{y_0}{2} e^{-\rho T} \right) \\
 &= \exp H_T(\mathbb{P}|\mathbf{Q}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \nearrow 0} CE_T^{(\alpha)} &= \lim_{\alpha \nearrow 0} x \left( \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right]^{-1/\beta} - 1 \right) \\
 &= x (\exp H_T(\mathbb{P}|\mathbf{Q}) - 1) \\
 &= CE^{\log}.
 \end{aligned}$$

Así vemos que

$$\lim_{\alpha \nearrow 0} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( CE_T^{(\alpha)} \right) = \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( CE_T^{(\log)} \right) = \lim_{T \nearrow \infty} \lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{1}{T} \log \left( CE_T^{(\alpha)} \right)$$

#### 5.4. Equivalencia de certeza y sus tasas de crecimiento

Esta fórmula indica que en el caso de la utilidad logarítmica corresponde efectivamente al límite  $\alpha \rightarrow 0$  para la utilidad de potencia.

Observamos que la velocidad de crecimiento del  $\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( CE_T^{(\alpha)} \right)$  de la equivalencia de certeza es una función monótona en  $\alpha \in (-\infty, 1)$  que va desde

$$\lim_{\alpha \nearrow -\infty} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( CE_T^{(\alpha)} \right) = \frac{\sigma^2}{8}$$

vía

$$\lim_{\alpha \nearrow 0} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( CE_T^{(\alpha)} \right) = \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( CE_T^{(\log)} \right) = \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4}$$

a

$$\lim_{\alpha \nearrow 1} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( CE_T^{(\alpha)} \right) = \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{2}$$

Esto refleja la intuición financiera de que un agente con menor aversión al riesgo puede aprovechar mejor (medido en términos de equivalencia de certeza) las oportunidades de inversión.

El análisis del comportamiento para  $\alpha \rightarrow -\infty$  es más sutil que el caso  $\alpha \rightarrow 0$ . Recuerde que la utilidad exponencial representa el límite de  $U^{(\alpha)}(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ , cuando  $\alpha \rightarrow -\infty$ , después de la normalización afín adecuada:

$$-\exp(-x) = - \lim_{\alpha \nearrow -\infty} \left( 1 - \frac{x}{\alpha} \right)^\alpha = \lim_{\alpha \nearrow -\infty} \frac{(x - \alpha)^\alpha}{\alpha} |\alpha|^{-\alpha+1}.$$

Por lo tanto, hasta el factor multiplicativo  $|\alpha|^{-\alpha+1}$ , que es irrelevante para la equivalencia de certeza, la utilidad exponencial  $-\exp(-x)$  está cerca de la utilidad de potencia desplazada  $U^\alpha(x - \alpha)$ , cuando  $\alpha \rightarrow -\infty$ .

Para mostrar que  $\lim_{\alpha \nearrow -\infty} CE_T^{(\alpha)} \left( \frac{1}{\lambda} |\alpha| \right) = \frac{1}{\lambda} CE_T^{(\exp)}$  vamos a demostrar lo siguiente

**Lema 5.11.** *Suponga que  $Z$  es una variable aleatoria no negativa con  $E[Z] = 1$ . Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por*

$$f(x) := E[Z^x].$$

*Supongase que existe  $h_0 > 0$  tal que  $E[(Z^{x+h_0} \log Z)^+] < \infty$ . Entonces  $f$  es diferenciable en  $x$  y su derivada está dada por*

$$\frac{df}{dx} \Big|_x = E[Z^x \log(Z)].$$

*Mas aún, la derivada es continua por la izquierda.*

*Demostración.* Primero se demostrará que  $f$  es derivable por la derecha.

Comenzamos con desigualdades básicas asociadas al logaritmo. Para  $p > 0$  se tiene la cota inferior

$$z^p \log z \geq \frac{-e^{-1}}{p}. \quad (5.36)$$



La siguiente cota superior es elemental

$$z^p \log z \leq (z^p \log z)^+. \quad (5.37)$$

Observese que  $(z^x \log z)^+ = 1_{\{z \geq 1\}} z^x \log z$  de donde se sigue para  $h > 0$

$$(z^x \log z)^+ \leq (z^{x+h} \log z)^+. \quad (5.38)$$

Análogamente

$$(z^x \log z)^- \leq (z^{x+h} \log z)^-. \quad (5.39)$$

Para  $h > 0$  tenemos

$$\frac{Z^{x+h} - Z^x}{h} = Z^{x+\xi} \log Z \geq \frac{-e^{-1}}{x+\xi} \geq \frac{-e^{-1}}{x}, \quad h \geq \xi \geq 0, \quad (5.40)$$

la igualdad es cierta por el teorema del valor medio de la derivada y la primera desigualdad se sigue de (5.36). Por el lema de Fatou

$$\liminf_{h \searrow 0} E_P \left[ Z^x \left( \frac{Z^h - 1}{h} \right) \right] \geq E[Z^x \log Z].$$

Ahora bien utilizando la desigualdad (5.37) tenemos para  $h \in (0, h_0)$

$$\frac{Z^{x+h} - Z^x}{h} = Z^{x+\xi} \log Z \leq (Z^{x+h_0} \log Z)^+. \quad (5.41)$$

Ahora por el lema de Fatou

$$\limsup_{h \searrow 0} E_P \left[ \frac{Z^{x+h} - Z^x}{h} \right] \leq E[Z^x \log Z].$$

Hemos entonces demostrado lo siguiente

$$\frac{df^+}{dx} = E[Z^x \log Z].$$

Ahora debemos demostrar que  $f$  es derivable por la izquierda. El límite

$$\liminf_{h \nearrow 0} \left( \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \geq E[Z^x \log Z], \quad (5.42)$$

se demuestra de manera análoga utilizando la estimación de la cota inferior (5.36). El límite

$$\limsup_{h \nearrow 0} E_P \left[ Z^x \left( \frac{Z^h - 1}{h} \right) \right] \leq E[Z^x \log Z].$$

se sigue del lema de Fatou al observar que se sigue satisfaciendo la desigualdad (5.41).

Solo falta demostrar la continuidad por la izquierda de la derivada. Esto es consecuencia de las desigualdades (5.38) (5.39) y el teorema de convergencia monótona. En efecto, se tiene

$$\lim_{h \nearrow 0} E[(Z^{x+h} \log Z)^+] = E[(Z^x \log Z)^+] \text{ y } \lim_{h \nearrow 0} E[(Z^{x+h} \log Z)^-] = E[(Z^x \log Z)^-].$$

□

#### 5.4. Equivalencia de certeza y sus tasas de crecimiento

---

Para  $\alpha < 0$  sea  $\beta(\alpha) := \frac{\alpha}{\alpha-1}$ . Definamos

$$CE^\alpha(x) = x(E[Z^{\beta(\alpha)}]^{-\frac{1}{\beta(\alpha)}} - 1).$$

**Proposición 5.12.** *Supongase las hipótesis del Lema 5.11. Tenemos*

$$\lim_{\alpha \nearrow -\infty} CE^\alpha(|\alpha|) = E[Z \log Z].$$

*Demostración.* Sea  $H(x) := f^{-\frac{1}{x}}(x)$  con  $f$  la función definida en el Lema 5.11. La función  $\beta(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha-1}$  es claramente diferenciable y  $H$  es diferenciable por el Lema 5.11. Sus derivadas son

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= H \left( \frac{\log f}{x^2} - \frac{1}{x} \frac{f'}{f} \right) \\ \frac{d\beta}{d\alpha} &= -\frac{1}{(\alpha-1)^2}. \end{aligned}$$

Por la regla de L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \nearrow -\infty} CE^\alpha(|\alpha|) &= \lim_{\alpha \nearrow -\infty} -\alpha(H \circ \beta(\alpha) - 1) \\ &= \lim_{\alpha \nearrow -\infty} \frac{\frac{d(H \circ \beta)}{d\alpha}}{\frac{d\alpha}{d\alpha}}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{d}{d\alpha}(H \circ \beta(\alpha)) &= \alpha^2 \frac{-H \circ \beta(\alpha)}{(\alpha-1)^2} \left( \frac{1}{\beta^2(\alpha)} \log f(\beta(\alpha)) - \frac{1}{\beta(\alpha)} \frac{f'(\beta(\alpha))}{f(\beta(\alpha))} \right) \\ &= -\beta^2(\alpha) H \circ \beta(\alpha) \left( \frac{1}{\beta^2(\alpha)} \log f(\beta(\alpha)) - \frac{1}{\beta(\alpha)} \frac{f'(\beta(\alpha))}{f(\beta(\alpha))} \right) \\ &= H \circ \beta(\alpha) \left( -\log f(\beta(\alpha)) + \beta(\alpha) \frac{f'(\beta(\alpha))}{f(\beta(\alpha))} \right). \end{aligned}$$

Luego al observar que  $0 < \beta(\alpha) < 1$  para  $\alpha < 0$  y que  $\lim_{\alpha \nearrow -\infty} \beta(\alpha) = 1$ , el límite se reduce a

$$\lim_{\beta \nearrow 1} f'(\beta).$$

□

Usando las ecuaciones (5.13), (5.21), (5.22), el Lema 5.11 y la Proposición 5.12 podemos verificar que para el horizonte fijo  $T$ , obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \nearrow -\infty} CE_T^{(\alpha)} \left( \frac{1}{\lambda} |\alpha| \right) &= \frac{1}{\lambda} |\alpha| \left( \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right]^{-1/\beta} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} |\alpha| \left( \left( (A_T^-)^{-1/2} \exp [B_T + (A_T^-)^{-1} C_T] \right)^{-1/\beta} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\rho \sigma^2}{24} T^3 - \frac{1}{4} \rho^2 y_0 T^2 + \frac{1}{4} \rho^2 T^2 + \frac{1}{8} \sigma^2 \rho T^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2 y_0^2}{\sigma^2} T \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \rho y_0 T + \frac{1}{8} \sigma^2 T \right) \\
&= \frac{1}{\lambda} CE_T^{(\text{exp})}. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Sin embargo, la relación anterior no se aplica al límite cuando  $T \rightarrow \infty$ , ya que no se pueden intercambiar los límites para  $\alpha$  y  $T$  como en el caso logarítmico.

Ahora vamos a enfocarnos más en las *estrategias de mercado óptimas*.

I. Utilidad Logarítmica. La estrategia de mercado óptima está dada par

$$\pi_t^{(\log, T)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma^2} \rho Y_t,$$

como en la ecuación (5.10), vemos que es independiente de  $T$ , entonces la podemos escribir de la siguiente manera

$$\pi_t^{(\log)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma^2} \rho Y_t \quad \forall T > 0.$$

II. Utilidad de Potencia. La estrategia de mercado óptima  $\pi_t^{(\alpha, T)}$  dada en la ecuación (5.30), vemos que depende del horizonte de tiempo  $T$ ; sin embargo, el límite  $\pi_t^{(\alpha)}$  cuando  $T \rightarrow \infty$  existe para cada  $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$  como en la ecuación (5.31) y uno verifica fácilmente que

$$\lim_{\alpha \nearrow 0} \pi_t^{(\alpha)} = \lim_{\alpha \nearrow 0} -\frac{\rho}{\sigma^2 \sqrt{1-\alpha}} Y_t + \frac{1}{2} = -\frac{\rho}{\sigma^2} Y_t + \frac{1}{2} = \pi_t^{(\log)},$$

lo cual quiere decir que la estrategia de inversión logarítmica óptima es el límite de la estrategia de potencia óptima  $\pi^{(\alpha)}$ , cuando  $\alpha \rightarrow 0$ .

III. Utilidad Exponencial. En este caso la estrategia óptima  $\xi_t^{(\text{exp}, T)}$ , dada por la ecuación (5.14), depende del horizonte  $T$  de tal manera que no es posible pasar al límite cuando  $T \rightarrow \infty$  cuando el término principal es  $\frac{\rho^2}{4\lambda S_t} (T - t)^2$ .

Para encontrar la razón por la cual el máximo de la utilidad exponencial muestra este comportamiento bastante extraño, reescribamos los valores de las funciones (5.6), (5.12) y (5.21) en una forma apropiada para argumentar con la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$u_T^{(\log)}(x, y, t) = \log x + \frac{1}{4}\rho(T-t) - \frac{1}{8}\left(1 - e^{-2\rho(T-t)}\right) + \frac{1}{4}\frac{\rho}{\sigma^2}y^2\left(1 - e^{-2\rho(T-t)}\right) - \frac{1}{2}y\left(1 - e^{-\rho(T-t)}\right) + \frac{1}{8}\sigma^2(T-t), \quad (5.44)$$

$$u_T^{(\exp)}(x, y, t) = -\exp\left[-\lambda x - \left(\frac{1}{2}\frac{\rho}{\sigma^2}y^2 - \frac{\rho}{2}y + \frac{1}{8}\sigma^2\right)(T-t) - \left(\frac{1}{4}\rho^2(1-y) + \frac{1}{8}\rho\sigma^2\right)(T-t)^2 - \frac{1}{24}\rho^2\sigma^2(T-t)^3\right], \quad (5.45)$$

$$u_T^{(\alpha)}(x, y, t) = \frac{x^\alpha}{\alpha}\left[(A_{T-t}^-)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(B_{T-t} + (A_{T-t}^-)^{-1}C_{T-t}\right)\right]^{1-\alpha} \quad (5.46)$$

donde

$$\begin{aligned} A_T^\pm &:= 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-\beta}\right)\left(1 \pm \exp\left(-2\rho\sqrt{1-\beta}(T-t)\right)\right), \\ B_T &:= \frac{1}{2}\beta y_0 - \frac{\rho}{2\sigma}\left(\sqrt{1-\beta} - (1-\beta)\right)y_0^2 - \left[\frac{1}{8}\beta\sigma^2 + \frac{\rho}{2}\left(\sqrt{1-\beta} - (1-\beta)\right)\right](T-t), \\ C_T &:= -\frac{1}{2}\beta y_0 \exp\left(-\rho\sqrt{1-\beta}(T-t)\right) + \frac{1}{2}y_0^2\frac{\rho}{\sigma^2}\left(\sqrt{1-\beta} - (1-\beta)\right) * \\ &\quad \exp\left(-2\rho\sqrt{1-\beta}(T-t)\right) + \frac{\beta^2\sigma^2}{16\rho}(1-\beta)^{-1/2}\left(1 - \exp\left(-2\rho\sqrt{1-\beta}(T-t)\right)\right). \end{aligned}$$

Una característica básica de la programación dinámica es que, al fijar  $T$  y conectar al optimizador  $(X_t^{(T)})_{0 \leq t \leq T}$  así como al proceso  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$  en la función de valor anterior, se obtiene una martingala (local)

$$\left(u_T\left(\hat{X}_t^{(T)}, Y_t, t\right)\right)_{0 \leq t \leq T}.$$

No vamos a demostrar esto rigurosamente, solo vamos a argumentar formalmente que es lo que está pasando con la estrategia óptima de la utilidad exponencial. Además utilizaremos las identidades  $\mathbf{E}[dW_t] = 0$  y  $(dW_t)^2 = dt$ .

Como  $u_T\left(\hat{X}_t^{(T)}, Y_t, t\right)_{0 \leq t \leq T}$  es una martingala (local), tenemos la siguiente ecuación

$$\mathbf{E}\left[d\left(u_T\left(\hat{X}_t^{(T)}, Y_t, t\right)\right)\right] = 0, \quad (5.47)$$

donde por la formula de Itô [A.9](#) la podemos escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[d\left(u_T\left(\hat{X}_t^{(T)}, Y_t, t\right)\right)\right] &= \frac{\partial u_T}{\partial t}dt + \frac{\partial u_T}{\partial x}\mathbf{E}\left[d\hat{X}_t^{(T)}\right] + \frac{\partial u_T}{\partial y}\mathbf{E}\left[dY_t\right] + \frac{\partial^2 u_T}{2\partial x^2}\left(d\hat{X}_t^{(T)}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 u_T}{2\partial y^2}(dY_t)^2 + \frac{\partial^2 u_T}{\partial x\partial y}d\hat{X}_t^{(T)}dY_t. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Al analizar la ecuación anterior, resulta que la derivada mixta  $\frac{\partial^2 u_T}{\partial x\partial y}(x, y, t)$  toma un papel muy importante ya que: mientras este término desaparece en el caso de la utilidad logarítmica (5.44), no se comporta de la misma manera para la utilidad exponencial y la utilidad de potencia

dadas por las ecuaciones (5.45) y (5.46).

*Caso Utilidad Exponencial*

De la ecuación (5.45) obtenemos la derivada mixta  $\frac{\partial^2 u_T^{(\text{exp})}}{\partial x \partial y}$  y viene dado por

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_T^{(\text{exp})}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_T^{(\text{exp})}}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( u_T^{(\text{exp})} \left( -\frac{\rho^2}{\sigma^2} y(T-t) + \frac{1}{4} \rho^2 (T-t)^2 \right) \right) \\
 &= u_T^{(\text{exp})} \left( -\frac{\rho^2}{\sigma^2} y(T-t) + \frac{1}{4} \rho^2 (T-t)^2 \right) (-\lambda) \\
 &= u_T^{(\text{exp})} \left( \frac{\rho^2}{\sigma^2} \lambda y(T-t) - \frac{1}{4} \rho^2 \lambda (T-t)^2 \right) \\
 &\approx -\frac{1}{4} \rho^2 \lambda (T-t)^2 u_T^{(\text{exp})}.
 \end{aligned}$$

El término  $-\frac{1}{4} \rho^2 \lambda (T-t)^2 u_T^{(\text{exp})}$  domina cuando  $(T-t)$  es grande. Además tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_T^{(\text{exp})}}{\partial x} &= -\lambda u_T^{(\text{exp})}, \\
 \frac{\partial^2 u_T^{(\text{exp})}}{\partial x^2} &= \lambda^2 u_T^{(\text{exp})}.
 \end{aligned}$$

Entonces para la estrategia óptima dada por la ecuación (5.14), nos damos cuenta que el término principal es el siguiente

$$\xi_t^{(T)} \approx \frac{\rho^2}{4\lambda S_t} (T-t)^2. \tag{5.49}$$

Damos una interpretación a la ecuación de programación dinámica (5.47) de la siguiente manera:

El máximo de la utilidad exponencial elige en el tiempo  $t$ , la inversión  $\xi_t^{(T)}$  de tal manera que cuando sustituimos  $d\hat{X}_t^{(T)} = \xi_t^{(T)}$  en las ecuaciones (5.47) y (5.48), el término  $\frac{\partial u_T}{\partial t}$  se vuelve mínimo.

De hecho, en este caso, la función  $u_T(0, \dots, 0)$  se vuelve máxima para la condición de límite dada  $u_T(x, y, T) = -\exp(-\lambda x)$ , ya que la caída en la coordenada de tiempo es más pronunciada.

La elección de la variable de control  $\xi_t^{(T)}$  en  $d\hat{X}_t^{(T)} = \xi_t^{(T)} dS_t$  no afecta el comportamiento de  $\mathbf{E}[dY_t]$  o  $(dY_t)^2$ ; por lo tanto, vemos en la ecuación (5.48) que tenemos que resolver el siguiente problema para maximizar la variable  $\xi \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\partial u_T}{\partial x} \xi \mathbf{E}[dS_t] + \frac{\partial^2 u_T}{2\partial x^2} \xi^2 (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 u_T}{\partial x \partial y} \xi dS_t dY_t \rightarrow \text{máx!}$$

usando

$$\frac{\partial u_T}{\partial x} = -\lambda u_T, \quad \frac{\partial^2 u_T}{\partial x^2} = \lambda^2 u_T, \quad \frac{\partial^2 u_T}{\partial x \partial y} \approx -\frac{1}{4} \rho^2 \lambda (T-t)^2 u_T$$

y

$$\mathbf{E}[dS_t] = e^y \left( \frac{\sigma^2}{2} - \rho y \right) dt, \quad (dS_t)^2 = e^{2y} \sigma^2 dt, \quad dS_t dY_t = \sigma^2 e^y dt,$$

dejando a  $S_t = e^y$  y manteniendo solo los términos principales de  $(T-t)^2$  se tiene

$$\lambda^2 u_T \xi^2 e^{2y} \sigma^2 dt - \frac{\lambda \rho^2}{4} (T-t)^2 \xi \sigma^2 e^y dt \rightarrow \text{máx!}$$

Resumiendo, vemos que en el caso exponencial, la “oscilación conjunta”  $d\hat{X}_t^{(T)} dY_t$  y la derivada mixta  $\frac{\partial^2 u_T}{2\partial x \partial y}$  son los términos cruciales que hacen que el valor óptimo  $\xi_t^{(T)} S_t = \frac{\rho^2}{4\lambda} (T-t)^2$  sea del orden  $(T-t)^2$ , independientemente del valor actual del proceso  $Y_t$  que determina el precio de mercado del riesgo.

Ya podemos ver porque el doble límite  $\alpha \rightarrow -\infty$  y  $T \rightarrow \infty$  no se pueden intercambiar.

- *Horizonte T finito*

Tenemos que

$$u_T^{(\alpha)}(x - \alpha) \rightarrow u_T^{(\text{exp})}(x),$$

cuando  $\alpha \rightarrow -\infty$  para  $x \in \mathbb{R}$ . El mismo comportamiento del límite es válido para las estrategias de mercado correspondientes.

- *Horizonte T tiende a infinito*

Las estrategias exponenciales óptimas  $\xi_t^{(T)}$  de la ecuación (5.49) no convergen, cuando  $T \rightarrow \infty$ , mientras que hemos visto que, para  $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$  fija, las estrategias de potencia óptimas  $\pi_t^{(\alpha, T)}$  convergen a  $\pi_t^{(\alpha)}$ .

## Caso Utilidad Logarítmica

La proporción de inversión óptima  $\pi_t^{(\log)}$  dada en la ecuación (5.10) es proporcional al precio de mercado del riesgo  $-\frac{\rho}{\sigma} Y_t + \frac{\sigma}{2}$  del proceso  $S$  (ver la ecuación (4.2)). Cuando  $Y_t = \frac{\sigma^2}{2\rho}$  no hay oportunidades de inversión rentables en este caso, ya que el precio de riesgo del mercado se hace 0 y esta es la estrategia óptima que optimiza a la utilidad logarítmica, por lo tanto, no hay que invertir en el activo de riesgo en esta situación.

Ahora veamos la función de valor (5.44) para la utilidad logarítmica

$$\begin{aligned} u_T^{(\log)}(x, y, t) &= \log x + \frac{1}{4} \rho (T-t) - \frac{1}{8} \left( 1 - e^{-2\rho(T-t)} \right) + \frac{1}{4} \frac{\rho}{\sigma^2} y^2 \left( 1 - e^{-2\rho(T-t)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} y \left( 1 - e^{-\rho(T-t)} \right) + \frac{1}{8} \sigma^2 (T-t). \end{aligned}$$

Si en la ecuación anterior fijamos  $x$  y  $t$ , observamos que el valor mínimo se alcanza en  $y_{\min} \approx \frac{\sigma^2}{\rho}$  para  $T$  grande. Por lo tanto, la situación es peor para el inversionista que lleva como función de utilidad la logarítmica (si se mide por la utilidad esperada al tiempo  $T$ ) si  $Y_t = \frac{\sigma^2}{\rho}$  que en el caso  $Y_t = \frac{\sigma^2}{2\rho}$ , cuando el precio del mercado de riesgo se hace 0.

La deriva de  $Y$  que es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck hace que el proceso vuelva a  $Y = 0$ . entonces un camino típico de  $Y$ , para el cual al tiempo  $t$  tengamos  $Y_t = \frac{\sigma^2}{\rho}$ , va a tender a 0 y de está manera tendrá que pasar a través de la región alrededor de  $\frac{\sigma^2}{2\rho}$  en donde el inversionista con función de utilidad logarítmica no encontrará oportunidades de inversión rentables. Esta situación es peor que comenzar en  $Y_t = \frac{\sigma^2}{2\rho}$ .

Finalmente, veamos el crecimiento de  $X_T$  generado por la estrategia óptima hasta el tiempo  $T$ . Notemos que

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log Z_T = - \left( \frac{\rho}{4} + \frac{\sigma^2}{8} \right) \quad \mathbb{P} \text{ casi seguramente,} \quad (5.50)$$

por (4.10) y (4.11).

Para la utilidad de potencia con parámetro  $\alpha(-\infty, 1) \setminus \{0\}$  tenemos

$$X_T = x Z_T^\gamma \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right]^{-1}$$

con  $\gamma = \frac{1}{\alpha-1}$  y  $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ . Por (5.21) y (5.23)

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right] = \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{8} \alpha \sigma^2 + \frac{1}{2} \rho (1 - \sqrt{1-\alpha}) \right).$$

Junto con (5.49), esto produce un crecimiento exponencial de  $X_T$  a la tasa

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log X_T &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{\log x}{T} + \frac{1}{\alpha-1} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{\log Z_T}{T} - \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbf{E}_{\mathbb{P}} \left[ Z_T^\beta \right] \\ &= -\frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{\rho}{4} + \frac{\sigma^2}{8} \right) - \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{8} \alpha \sigma^2 + \frac{1}{2} \rho (1 - \sqrt{1-\alpha}) \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{8} \sigma^2 + \frac{1}{4} \rho - \frac{1}{8} \alpha \sigma^2 - \frac{1}{2} \rho (1 - \sqrt{1-\alpha}) \right) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{8} \sigma^2 (1-\alpha) - \frac{1}{4} \rho + \frac{1}{2} \rho \sqrt{1-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{8} \sigma^2 + \frac{1}{4} \rho h(\alpha) \quad \mathbb{P} \text{ casi seguramente,} \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde

$$h(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} (2\sqrt{1-\alpha} - 1)$$

además podemos notar lo siguiente

$$\lim_{\alpha \nearrow 0} h(\alpha) = \lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{1}{1-\alpha} (2\sqrt{1-\alpha} - 1) = 1.$$

#### 5.4. Equivalencia de certeza y sus tasas de crecimiento

---

Esto corresponde al caso logarítmico donde  $X_T = xZ_T^{-1}$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log X_T &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log x - \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log Z_T \\ &= \frac{\rho}{4} + \frac{\sigma^2}{8} \quad \mathbb{P} \text{ casi seguramente.} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Esto se esperaba, ya que la utilidad logarítmica optimiza la tasa de crecimiento monetaria esperada. Tengamos en cuenta que  $h(\alpha)$  decrece a 0 cuando  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Por otro lado, la tasa de crecimiento se vuelve negativa cuando  $\alpha > \frac{3}{4}$ , y decrece a  $-\infty$  cuando  $\alpha \rightarrow 1$ , acercándose así al caso neutral al riesgo.

Además si  $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$ , el inversionista eventualmente pierde toda su riqueza inicial  $x$  a largo plazo, a una velocidad que se vuelve arbitrariamente grande cuando  $\alpha \rightarrow 1$ .

Para la utilidad exponencial con parámetro  $\lambda > 0$  tenemos

$$X_T = x + \frac{1}{\lambda} (H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P}) - \log Z_T).$$

Combinando (5.50) y (5.13), vemos que  $X_T$  crece cuanto  $T^3$  a la siguiente tasa

$$\begin{aligned} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^3} X_T &= \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^3} \left( x + \frac{1}{\lambda} (H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P}) - \log Z_T) \right) \\ &= \frac{1}{\lambda} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^3} (H_T(\mathbf{Q}|\mathbb{P}) - \frac{1}{\lambda} \lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T^3} \log Z_T) \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\rho^2 \sigma^2}{24}. \end{aligned}$$

Tengamos en cuenta que la tasa cúbica anterior aumenta a  $\infty$  a medida que  $\lambda$  disminuye a 0, lo que corresponde al caso neutral al riesgo.



## Capítulo 6

# Simulaciones

En el Capítulo 4 demostramos el Teorema 4.5, el cual nos dice que la probabilidad de que no hay crecimiento exponencial en periodos de tiempo largos decae exponencialmente con el tiempo. Este hecho, se mostrará gráficamente mediante simulaciones. Recordemos el Teorema 4.5, dado un proceso de Ornstein-Uhlenbeck  $(S_t)_{t \geq 0}$  y constantes fijas  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  donde  $\gamma \in \left(0, \frac{\sigma^2}{8} + \frac{\rho}{4}\right)$ ,  $\gamma_1 < \gamma$  y  $\gamma_2 < \gamma - \gamma_1$  entonces para cada  $T$  lo suficientemente grande existe un reclamo contingente  $X_T \in K_T$  tal que

$$\lim_{T \nearrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathbb{P} [X_T < e^{\gamma_1 T}] = -\frac{\left(\frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{4}\right)^2}{\frac{\sigma^2}{8} - \gamma + \frac{\rho}{2}} = k. \quad (6.1)$$

Para ver cómo se comporta el límite anterior a lo largo del tiempo, vamos a hacer simulaciones en el programa *R* a lo largo de 100 años. Utilizamos la paquetería “*Sim.DiffProc*<sup>1</sup>”, también se trabajó en paralelo y el programa terminó en ejecutarse 24 horas. Vamos a describir lo que hicimos en el programa.

1. Se inició por declarar las variables

```
1 PARAMETROS
2 Rho=1
3 Sigma=1
4 PARAMETROS DEL SISTEMA SDE QUE DEFINE PROCESO ORNSTEIN UHLENBECK.
5 Y0=1
6 fx <- expression(-Rho*x)
7 gx <- expression(Sigma)
8 HORIZONTE
9 Tiempo = 100
10 NUMERO DE DIVISIONES EN EL PERIODO
11 no. parti=100*Tiempo
12 NUMERO DE TRAYECTORIAS EN CADA INSTANCIA
13 no. paths=50
```

<sup>1</sup>Para más información acerca de la paquetería revisar <https://cran.r-project.org/web/packages/Sim.DiffProc/Sim.DiffProc.pdf>.

---

2. Le damos solución al proceso de Ornstein-Uhlenbeck definido por

$$dY_t = -\rho Y_t dt + \sigma dW_t, \quad Y_0 = y_0$$

```
1 sde <- snssde1d(no.parti, M=no.paths, x0=Y0, t0=0, T=Tiempo,
2 drift=fx, diffusion=gx)
```

3. Por último hacemos la respectiva simulación para calcular los valores del portafolio, la estrategia y la proporción óptima de la siguiente manera.

```
1
2 SE RECUPERA Y, EL VALOR DEL PORTAFOLIO, ESTRATEGIA, PROPORCION.
3
4 AL TIEMPO INICIAL EL PORTAFOLIO COMIENZA CON CAPITAL UNITARIO
5 S=matrix(1, dim(sde$X)[1], dim(sde$X)[2])
6 portafolio=matrix(1, dim(sde$X)[1], dim(sde$X)[2])
7 estrategia=matrix(1, dim(sde$X)[1], dim(sde$X)[2])
8 proporcion=matrix(1, dim(sde$X)[1], dim(sde$X)[2])
9
10 INICIO CICLO FOR
11
12 for(path in 1:no.paths)
13 {
14   Y=sde$X[, path]
15   N=length(Y)-1
16   proporcion[, path]=-Y*Rho/Sigma^2 + 0.5
17   S[, path]=exp(Y)
18   for(t in 1: N)
19     {
20       DS=S[t+1, path]-S[t, path]
21       portafolio[t+1, path]= portafolio[t, path] +
22       (portafolio[t, path]/S[t, path]) * proporcion[t, path]*DS
23     }
24   for(t in 1: N)
25     {
26       estrategia[t, path]=proporcion[t, path]*portafolio[t, path]/S[t, path]
27     }
28 }
29
30 FIN CICLO FOR
31
```

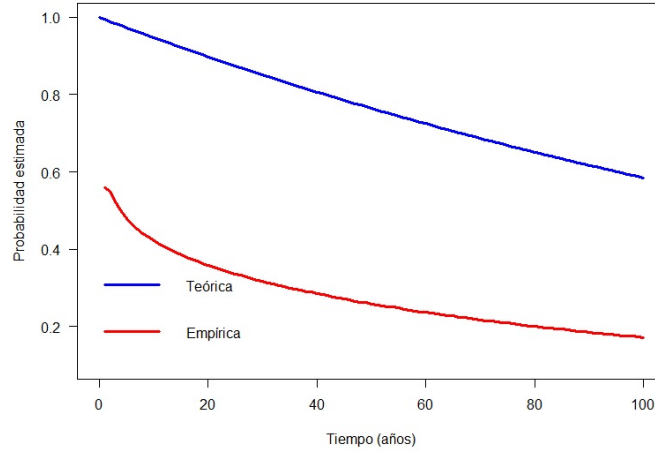


Figura 6.1: Simulación a 100 años para la probabilidad de no tener crecimiento exponencial para la riqueza terminal  $X_T$ . Se hace una comparación de las simulaciones y la constante  $k$  de la ecuación (6.1). Para valores de parámetros del Proceso de Ornstein-Uhlenbeck son  $\rho = \sigma = 1$  y condición inicial  $Y_0 = 1$ .

Con el procedimiento anterior podemos ver el comportamiento de la probabilidad cuando el horizonte es  $T = 100$ , lo cual vemos en la Figura 6.1, donde la línea azul es la dada por la constante  $k$  y la línea roja es el resultado de los datos de la simulación. En la Figura 6.1 se ve por ejemplo que cuando  $T = 20$  la probabilidad con la que existe ese portafolio que no tiene crecimiento exponencial es muy cercana a 20 %, por lo tanto con probabilidad casi del 80 % vemos que muy seguramente el valor del portafolio tiene un crecimiento exponencial. En el Capítulo 5 vimos la estrategia óptima y la riqueza terminal para las utilidades HARA. En lo que sigue haremos las respectivas simulaciones para la utilidad logarítmica.

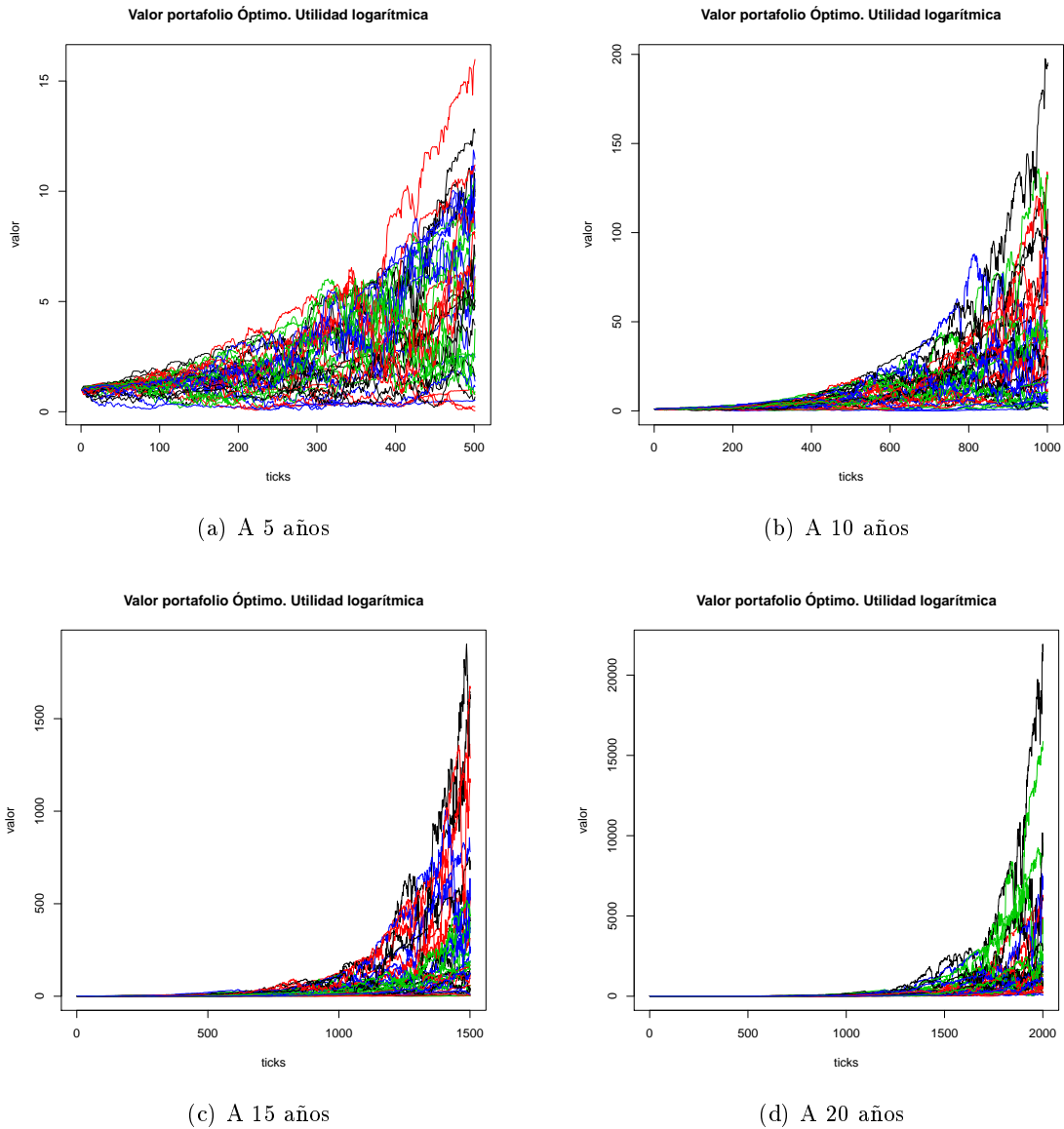


Figura 6.2: La gráfica corresponde a un período de tiempo de 20 años con un refinamiento de 100 divisiones por año para la Utilidad Logarítmica. En el cual se ve el valor del portafolio óptimo. Para las simulaciones se tomaron 500 divisiones por cada año.

En la Figura 6.2 gráfico (c) podemos ver que a partir de 15 años se va viendo un crecimiento exponencial para la riqueza del portafolio óptimo. Entonces para tiempos mayores, se tendrá un crecimiento en el valor del portafolio  $X_T$  de manera exponencial.

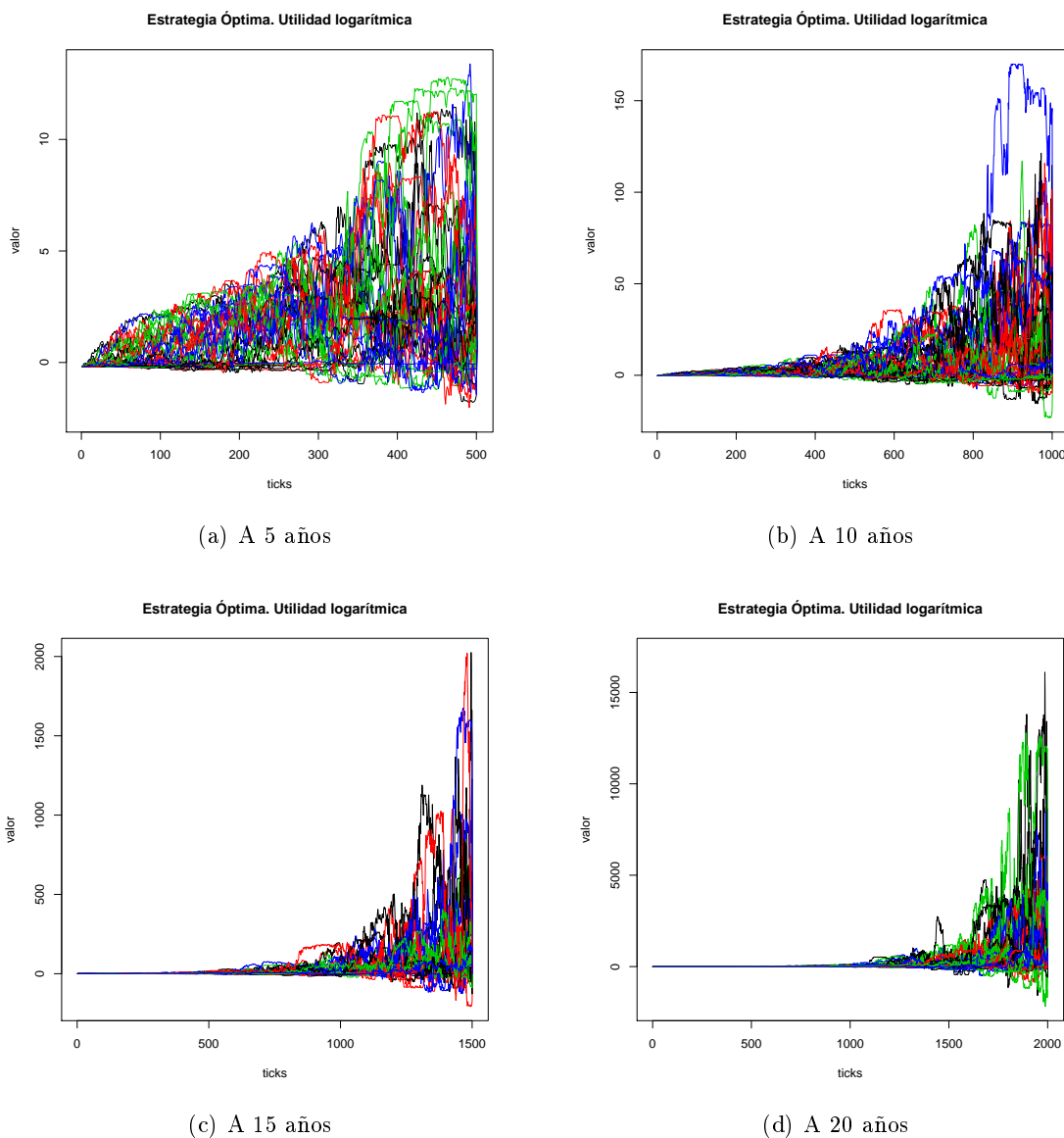
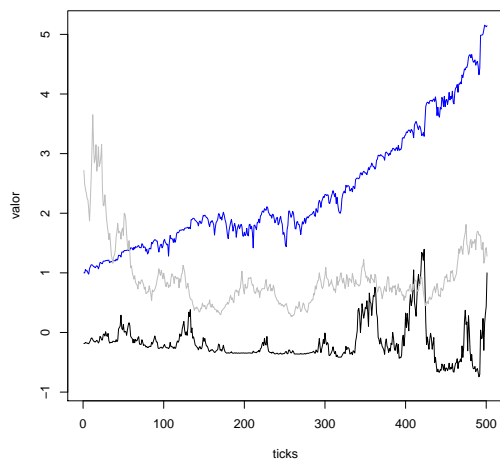
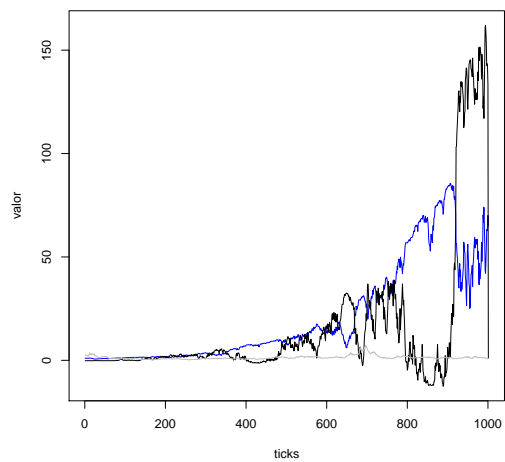


Figura 6.3: En las gráficas se puede ver la evolución de la estrategia en un período de tiempo de 20 años con un refinamiento de 100 divisiones por año para la Utilidad Logarítmica. En las cuales podemos ver el valor de la estrategia óptima para cada tiempo.

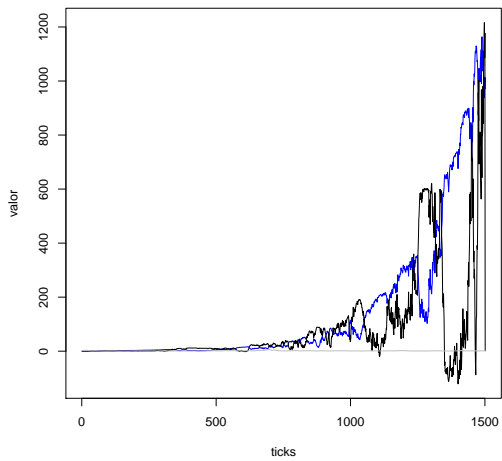
Para la Figura 6.3 se ve que en efecto la estrategia óptima nos da una riqueza que va creciendo exponencialmente conforme el tiempo es mayor a 15 años. En la Figura 6.4 podemos ver el comportamiento del proceso de precios  $S$ , la estrategia óptima y la proporción óptima del valor del portafolio. En el gráfico (d) de la Figura 6.4 podemos ver que el comportamiento del proceso de precios (color gris) y la estrategia óptima (color negro) tienen un comportamiento inverso, es decir, mientras una sube la otra baja. Esto se debe a que



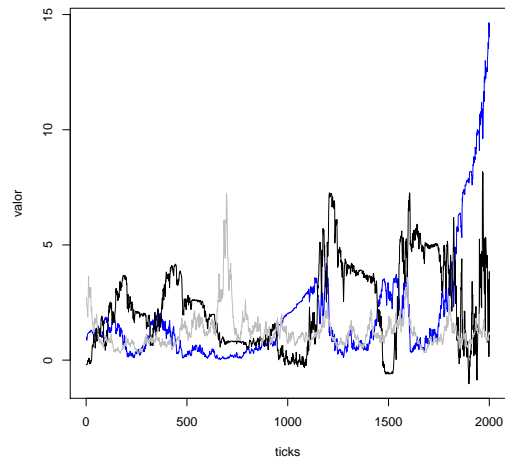
(a) Proporción óptima a 5 años



(b) Proporción óptima a 10 años



(c) Proporción óptima a 15 años



(d) Proporción óptima a 20 años

Figura 6.4: la línea gris corresponde al proceso de precios, la azul al portafolio y la negra es la estrategia para la utilidad logarítmica, podemos ver el comportamiento de estas 3 en período de tiempo de 20 años con un refinamiento de 100 divisiones por año.

## Capítulo 7

# Costo promedio y crecimiento exponencial de la riqueza

Comenzaremos por dar una definición para el costo promedio

**Definición 7.1.** *El costo promedio es invertir la misma cantidad fija de dinero en acciones de un activo de riesgo en intervalos de tiempo regulares [Scherer and Ebertz \[2003\]](#).*

Por lo tanto, el inversionista siempre va a comprar más acciones cuando los precios sean bajos y menos acciones cuando los precios sean altos. En consecuencia, el costo promedio por acción siempre es más bajo que el promedio de los precios de las acciones durante el marco de tiempo de la inversión.

**Proposición 7.2.** *Sean  $A$  y  $B$  estrategias de inversión y dada la Definición 7.1 implica que al menos una estrategia no es admisible.*

*Demostración.* Tenemos las siguientes estrategias:

1. Estrategia  $A$  en la cual invertimos 1 en cada tiempo  $t \in \{0, \dots, T-1\}$  en una acción con proceso de precio  $(S_t)_{t=0}^T$  de modo que se adquieran acciones  $S_t^{-1}$  en cada tiempo  $t$ . Finalmente, se tienen  $\sum_{t=0}^{T-1} S_t^{-1}$  acciones al tiempo  $T$ .
2. Estrategia  $B$  invertimos la suma total de  $T$  pesos de manera que uno compre en cada tiempo  $t$  la cantidad de  $x$  acciones. Al igualar la inversión total con  $x$  tenemos lo siguientes

$$x = \left( \sum_{t=0}^{T-1} \frac{S_t}{T} \right)^{-1}$$

finalmente se tienen  $T \left( \sum_{t=0}^{T-1} \frac{S_t}{T} \right)^{-1}$  acciones.

Además sabemos que la media armónica siempre es menor o igual a la media aritmética, es decir, dado  $S_t \geq 0$

$$T \left( \sum_{t=0}^{T-1} \frac{S_t}{T} \right)^{-1} \leq T \sum_{t=0}^{T-1} S_t^{-1}.$$

---

Por lo tanto, la estrategia  $A$  domina a la estrategia  $B$ , pero la estrategia  $B$  no es predecible ya que la inversión de  $x = \left(\sum_{t=0}^{T-1} \frac{S_t}{T}\right)^{-1}$  en cada tiempo  $t$  implica el conocimiento del proceso  $(S_t)_{t=0}^{T-1}$  en  $T_1$ .  $\square$

Por supuesto, una estrategia no predecible no tiene sentido económicamente, por lo que la proposición anterior no nos muestra nada.

**Definición 7.3.** Sea  $\{X_t\}$  un proceso estocástico y  $F_X = (x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau})$  representa la función de distribución acumulada de una incondicional (es decir, con ninguna referencia a un valor inicial particular) de una distribución conjunta de  $\{X_t\}$  a los tiempos  $t_1 + \tau \dots t_n + \tau$ . Entonces  $\forall \tau, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$   $\{X_t\}$  se dice que es un proceso estacionario si

$$F_X = (x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau}) = F_X = (x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$$

[Park, 2018, p.152-161].

Por la Definición anterior tenemos que las únicas martingalas que son procesos estacionarios son los procesos constantes, es decir los procesos estacionarios y los que son martingalas son “ortogonales”. Aunque tienen mucho en común, pues “en promedio” no se mueven hacia arriba o hacia abajo (pensando en el caso unidimensional). Pero, desde luego, lo hacen de dos maneras completamente diferentes.



## Capítulo 8

# Conclusiones

Retomando el promedio de costos, existe una larga línea de investigación, que se remonta al trabajo de [Constantinides \[1979\]](#) y [Dybvig \[1988\]](#), que trata sobre la suboptimalidad y lo ineficiente de la política de inversión de promedio de costos y esquemas similares. En el último artículo, Ph. Dybvig muestra que para un agente económico descrito como un maximizador de la utilidad esperada de la riqueza terminal para una función de utilidad arbitraria  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-\infty\}$ , el resultado final de un portafolio óptimo es una variable aleatoria que es necesariamente anticomonótona (revisar [Definición A.10](#), [Apéndice A](#)) para el derivado de Radon-Nikodym  $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbb{P}}$ , si  $\mathbf{Q}$  es la única medida de martingala equivalente para el proceso del precio de las acciones (descontados). También muestra que, en el modelo Black-Scholes, la política de promedios de costos (así como muchos otros esquemas populares) simplemente no tiene esta propiedad, por lo que dicha política puede ser dominada por una mejor estrategia (en el sentido de segundo orden de dominancia estocástica).

El crecimiento exponencial de la riqueza del portafolio de inversión puede lograrse muy bien mediante estrategias subóptimas como el promedio de costos. El tema crucial es la tasa óptima de crecimiento exponencial. Por lo cual el objetivo del presente trabajo que fue analizar cuidadosamente estas tasas óptimas, las estrategias correspondientes y las relaciones con el arbitraje asintótico y la maximización de la función de utilidad HARA se pudo lograr.

Además vimos para la función de utilidad logarítmica en el [Capítulo 6](#) que bajo las condiciones del [Teorema 4.8](#) se va a tener con una alta probabilidad que la riqueza del portafolio crece exponencialmente con una probabilidad muy alta.

Todos los resultados obtenidos siempre tendrá sentido bajo los supuestos de la [Hipótesis A.4](#) y que el proceso de precios  $S$  es un proceso geométrico de Ornstein-Uhlenbeck, ya que este tiende a regresar a su media. Lo cual nos lleva a pensar en la aplicación de toda esta maquinaria que se desarrollo, que son los bonos, los cuales tiene una gran importancia en los fondos de retiro. En un futuro trabajo se podrían aplicar a datos reales los resultados obtenidos y ver que con una probabilidad alta la riqueza del portafolio a lo largo de un cierto tiempo, crecerá exponencialmente.



# Apéndice A

## Resultados auxiliares

### Definición A.1. *Proceso Predecible*

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad entonces una sucesión de variables aleatorias  $(C_n)_{n=0}^{\infty}$  se llama proceso predecible respecto a la filtración  $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$  si  $\forall n \geq 1$   $C_n$  es  $\mathbb{F}_{n-1}$ -medible [*Lamberton Damien, 1996, p.5*].

### Definición A.2. *Martingala*

Sea un proceso  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es llamado martingala con respecto a una filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  si

(i)  $M_t$  es  $\mathbb{F}_t$  medible para toda  $t$ ,

(ii)  $\mathbf{E}[|M_t|] < \infty$  para toda  $t$  y

(iii)  $\mathbf{E}[M_s | \mathcal{F}_t] = M_t$  para toda  $s \geq t$

[*Bernt, 2000, p.31*].

### Definición A.3. *Martingala local*

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  un proceso en la filtración  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , con  $M_0 = 0$ . Si existe una sucesión no decreciente  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  de tiempos de paro en  $\{\mathcal{F}_t\}$  tal que

$$\{M_t^{(n)} = M_{t \wedge T_n}, \{\mathcal{F}_t\} \quad 0 \leq t \leq \infty\} \quad \text{es una martingala} \quad \forall n \geq 1$$

y si  $\mathbb{P}[\lim_{n \nearrow \infty} T_n = \infty] = 1$  entonces se dice que  $M$  es una martingala local [*Karatzas and Shreve, 1991, p.36*].

### Proposición A.4. *Desigualdad de Tschebyscheff*

Sea  $X$  una variable aleatoria con momentos de orden  $k$  finito entonces se da la desigualdad siguiente

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^k]}{a^k} \quad \text{siendo} \quad a > 0 \quad \text{y} \quad f(X) = |X|^k$$

[*Jean-Marie, 2003, p.3*].

### Teorema A.5. *Lema de Neyman-Pearson*

Supongamos que se está realizando una prueba de hipótesis entre dos hipótesis simples  $H_0 : \theta =$

$\theta_0$  y  $H_1 : \theta = \theta_1$ . El criterio consiste en rechazar la hipótesis  $\theta = \theta_0$  tras observar  $x$  cuando la razón de la función verosimilitud cumpla

$$\Lambda(x) = \frac{L(\theta_0|x)}{L(\theta_1|x)} \leq k$$

y  $k$  sea tal que

$$P(\Lambda(x) \leq k | H_0) = \alpha$$

donde  $\alpha$  es el nivel de significancia elegido **Neyman** [1933].

**Definición A.6. Movimiento Browniano**

Un proceso estocástico  $B = (B_t \in [0, \infty))$  se llama Movimiento Browniano si satisface las siguientes condiciones:

1.  $B_0 = 0$ ,
2.  $B_t$  tiene incrementos estacionarios independientes  $B_t - B_s$
3.  $B_t$  es continuo
4.  $\forall t > 0 B_t \sim N(0, t)$

[Thomas, 1998, p.33].

**Proposición A.7. Regla de Bayes**

Sean  $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$  medidas de probabilidad equivalentes en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$  donde  $\mathcal{F}$  es la filtración con  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$  entonces

$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}}[X | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{\Lambda_t} \mathbf{E}_{\mathbb{P}}[\Lambda_t X | \mathcal{F}_t]$$

para todas las variable aleatoria  $X$   $\mathcal{F}_t$ -medibles [Karatzas and Shreve, 1991, p. 193].

**Proposición A.8. Formula integración por partes**

Sean  $X_t$  y  $Y_t$  dos procesos de itô,  $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$  y  $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$ . Entonces

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

donde

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds$$

[Lamberton Damien, 1996, p.46].

**Teorema A.9. Formula general de Itô**

Sea

$$dX_t = u dt + v dB_t$$

un proceso de Itô  $n$ -dimensional, donde

$$X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^n \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}, \quad dB_t = \begin{pmatrix} dB_t^1 \\ \vdots \\ dB_t^m \end{pmatrix}.$$

Y sea  $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$  un mapeo de  $C^2$  de  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^p$ . Entonces el proceso

$$Y(t, \omega) = g(t, X_t)$$

es de nuevo un proceso de Itô, cuyo número de componentes  $k$ ,  $Y_k$  están dados por

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X)dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X)dX_i dX_j$$

donde  $dB_t^i dB_t^j = \delta_{ij}dt$ ,  $dB_t^i dt = dt dB_t^i = 0$

[[Bert, 2000](#), p.48].

**Definición A.10.** Dos variables  $x$  y  $y$  son anticomonótonas si

$$\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad (x(a) - x(b))(y(a) - y(b)) \leq 0$$

[Dana \[2003\]](#).

**Definición A.11.** Sea  $(Y, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad. Una transformación que preserva la medida del espacio de probabilidad  $T$  se dice ergódica si  $\forall F \in \mathcal{F}$  con  $T^{-1}(F) = F$  satisface  $\mathbb{P}[F] = 0$  o  $\mathbb{P}[F] = 1$  [[Walters, 2002](#), pp. 427-442].

**Definición A.12.** Sea  $(Y, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y sea  $f$  una función de medida bajo  $Y$ .  $\mu$  se dice que es invariante o estacionaria bajo  $f$  si para cada conjunto medible  $A \in \mathcal{F}$

$$\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$$

[Neumann \[1999\]](#).



## Apéndice B

# Utilidades con Aversión al Riesgo Absoluto Hiperbólico (HARA)

El desarrollo de las funciones de utilidad se desarrolla en la teoría de la elección en condiciones de incertidumbre. Bernoulli (en 1738) fue el primero en plantear que el inversionista decide a partir de la utilidad y no del valor esperado o del precio; además que esa utilidad tiene una función de tipo logarítmica, es decir, que la utilidad marginal es decreciente, llegando a un punto donde una unidad más de riqueza no aporta más utilidad. En 1944 Von Neumann y Morgenstern desarrollaron la Teoría de la Utilidad Esperada, en la cual no presentan una forma funcional de utilidad, sino que establecen la forma de calcular la utilidad  $U(x)$  esperada de un activo riesgo.

En teoría, podemos definir la función de utilidad de un individuo por extrapolación de las utilidades que expresa en cada alternativa de elección de diversos activos riesgosos. A su vez, estos autores definen los comportamientos frente al riesgo, a partir de la comparación de la utilidad derivada del valor esperado (VE) de un activo riesgoso, comparada con la utilidad derivada del equivalente de certeza (CE) de ese activo riesgoso. De esta manera, si la primera utilidad mencionada es menor a la segunda, el agente es adverso al riesgo, si es igual es neutral y si es mayor es afecto o propenso al riesgo. Así, las personas adversas al riesgo tendrían una función de utilidad cóncava, las afectas convexa y las neutrales lineal. Lo cual podemos ver en la siguiente tabla.

Forma función de Utilidad	Actitud hacia el riesgo	VE-CE	Utilidad Marginal $\frac{dU}{dX}$
concava	aversión $VE > CE$	positiva	decreciente $\frac{d^2U}{dX^2} < 0$
lineal	neutral $VE = CE$	cero	constante $\frac{d^2U}{dX^2} = 0$
convexa	preferencia $VE < CE$	negativa	creciente $\frac{d^2U}{dX^2} > 0$

Cuadro B.1: Tabla donde vemos la relación de la concavidad de la función utilidad y la aversión al riesgo del inversionista.

Una de las primeras definiciones de funciones que permiten cuantificar el nivel de utilidad, se tiene en el trabajo de Arrow (1965-1971) y de Pratt (1964). Estos autores presentan la familia de funciones CARA (Constant Absolute Risk Aversion), la cual presenta aversión al riesgo constante respecto del nivel de riqueza total del individuo.

---

Arrow y Pratt proponen que el nivel de aversión al riesgo absoluta de una función de utilidad se calcula como el ratio entre la derivada segunda y la derivada primera de la función con relación a la riqueza, tal como se ve en la siguiente ecuación.

$$A(X) = -\frac{U''(X)}{U'(X)}$$

donde  $X$  es la riqueza,  $A(X)$  mide la tasa a la cual la utilidad marginal decrece cuando la riqueza aumenta en una unidad.

También Arrow y Pratt presentan la familia de funciones de utilidad con aversión relativa al riesgo constante (CRRA por las siglas de la expresión Constant Relative Risk Aversion), es ampliamente utilizada en estudios empíricos que tratan de determinar el grado de aversión al riesgo de diferentes inversionistas. Asimismo, la función CRRA implica que el inversionista no solo exhibe un valor constante de aversión al riesgo relativa para las ganancias, sino también ante pérdidas de riqueza.

Posteriormente, en 1971, Merton propone la función HARA (Aversión absoluta al riesgo hiperbólico). Para el caso de la aversión al riesgo hiperbólico, la tolerancia al riesgo presenta un comportamiento lineal con la riqueza. Las funciones de utilidad HARA es un medio para medir la aversión al riesgos mediante una ecuación matemática conveniente que predice que cada inversionista posee la cantidad de activos de riesgo en las mismas proporciones que todos los demás, y que los inversionistas difieren entre sí en su comportamiento de cartera solo con respecto a la fracción de sus carteras mantenidas en el activo libre de riesgo en lugar de en los activos con riesgo. Las cuales se dividen en las siguientes

1. Utilidad Logarítmica. Si  $x > 0$  entonces

$$U(x) = \log(x),$$

2. Utilidad Exponencial. Sea  $\lambda > 0$  entonces

$$U(x) = -\exp(-\lambda x)$$

3. Utilidad de Potencia. Sea  $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$  entonces

$$U(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha.$$

La forma de las funciones de utilidad HARA, satisface los principios económicos básicos en un contexto de optimización. Por lo tanto, el uso de las funciones de utilidad HARA no es solo una cuestión de conveniencia o manejabilidad, sino que surge del razonamiento económico, es decir, es inherente al problema de optimización económica. Por lo cual son utilizadas en este trabajo.



# Bibliografía

- Oksendal Bernt. *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, fifth edition, May 2000.
- George Constantinides. A note on the suboptimality of dollar-cost averaging as an investment policy. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14(02):443–450, 1979. URL [https://EconPapers.repec.org/RePEc:cup:jfinqa:v:14:y:1979:i:02:p:443-450\\_00](https://EconPapers.repec.org/RePEc:cup:jfinqa:v:14:y:1979:i:02:p:443-450_00).
- R.A. Dana. Market behavior when preferences are generated by second order stochastic dominance. 2003.
- Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Math. Ann.*, 300(3):463–520, 1994. ISSN 0025-5831. URL <https://doi.org/10.1007/BF01450498>.
- Schachermayer W. Delbaen F. *The Mathematics of Arbitrage*. Springer Heidelberg, 2006.
- Zeitouni O. Dembo A. *Large Deviations Techniques and Applications*. Springer Heidelberg, 1998.
- Philip Dybvig. Inefficient dynamic portfolio strategies or how to throw away a million dollars in the stock market. *Review of Financial Studies*, 1(1):67–88, 1988. URL <https://EconPapers.repec.org/RePEc:oup:rfinst:v:1:y:1988:i:1:p:67-88>.
- Sheu S.-J. Fleming W.H. Optimal long term growth rate of expected utility of wealth. *Ann. Appl. Probab.*, 9(3):871–903, 1999.
- Danielle Florens-Landais and Huyên Pham. Large deviations in estimation of an ornstein-uhlenbeck model. *Journal of Applied Probability*, 36(1):60–77, 1999. ISSN 00219002. URL <http://www.jstor.org/stable/3215402>.
- H. Föllmer and W. Schachermayer. Asymptotic arbitrage and large deviations. *Mathematics and Financial Economics*, 1(3):213–249, Jun 2008. ISSN 1862-9660. doi: 10.1007/s11579-008-0009-3. URL <https://doi.org/10.1007/s11579-008-0009-3>.
- H. Föllmer and M. Schweizer. Hedging of contingent claims under incomplete information. In Elliot R.J. Davis M., editor, *Applied Stochastic Analysis*, pages 389–414. Gordon and Breach, 1991.
- J. Jacod and A. N. Shiriyayev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *A comprehensive studies in mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Honk Kong, London, Milan, Paris, Tokyo, 2nd edition, 2002.

- Dufour Jean-Marie. Properties of moments of random variables. Technical report, University Montreal, 2003. URL [http://www2.cirano.qc.ca/~dufourj/Web\\_Site/ResE/Dufour\\_1999\\_C\\_TS\\_Moments.pdf](http://www2.cirano.qc.ca/~dufourj/Web_Site/ResE/Dufour_1999_C_TS_Moments.pdf).
- Y.M. Kabanov and D.O. Kramkov. Asymptotic arbitrage in large financial markets. *Finance and Stochastics*, 2(2):143–172, Feb 1998. ISSN 0949-2984. doi: 10.1007/s007800050036. URL <https://doi.org/10.1007/s007800050036>.
- I. Karatzas, J. Lehoczky, and S. Shreve. Optimal portfolio and consumption decisions for a “small investor” on a finite horizon. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(6): 1557–1586, 1987. doi: 10.1137/0325086. URL <https://doi.org/10.1137/0325086>.
- I. Karatzas, J. Lehoczky, S. Shreve, and G. Xu. Martingale and duality methods for utility maximization in an incomplete market. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29(3): 702–730, 1991. doi: 10.1137/0329039. URL <https://doi.org/10.1137/0329039>.
- Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. ISBN 0-387-97655-8. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0949-2>.
- D. O. Kramkov and W. Schachermayer. The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. *Annals of Applied probability*, 9(3):904–950, 1999.
- Lapeyre Bernard Lambertson Damien. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Number First Edition. Chapman and Hall, 1996.
- John Von Neumann. *Invariant measures*. AMS Bookstore, 1999.
- E. S. Neyman, J.; Pearson. Ix. on the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Soc. Lond. A.*, page 289–337, 1933.
- Kun II Park. *Fundamentals of Probability and Stochastic Processes with Applications to Communications*. Springer, 2018.
- H. Pham. A large deviation approach to optimal long term investment. *Financ. Stoch.*, 7(3): 169–195, 2003.
- P. Protter. Stochastic integration and differential equations. In *Stochastic modelling and applied probability*, volume 21. Springer, Berlin Heidelberg New York, version 2.1, second edition, 2005.
- D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Springer, 3 edition, 2005.
- Bernd Scherer and Thomas Ebertz. Cost averaging: An expensive strategy for maximising terminal wealth. *Financial Markets and Portfolio Management*, 17:186–193, 06 2003. doi: 10.1007/s11408-003-0202-6.
- Knispel Thomas. Asymptotics of robust utility maximization. *Working Paper HU.*, 2008. Berlin.
- Mikosch Thomas. *Elementary Stochastic Calculus*, volume 6. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1998.
- Peter Walters. *Una introducción a la teoría ergódica*. Springer, 2002.
- D. Williams. *Probability with Martingales*. Cambridge University Press, 1991.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00186

Matricula: 2173802298

SELECCIÓN DE PORTAFOLIOS DE LARGO PLAZO.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 14:00 horas del día 25 del mes de julio del año 2019 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA  
DR. JOSE REFUGIO VALLEJO GUTIERREZ  
DR. ERICK TREVIÑO AGUILAR

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

DE: MARIA DEL ROSARIO MACHUCA GUTIERREZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTA

DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

VOCAL

DR. JOSE REFUGIO VALLEJO GUTIERREZ

SECRETARIO

DR. ERICK TREVIÑO AGUILAR