



UNIDAD IZTAPALAPA  
División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Posgrado en Ciencias (Física)

## **“Modos de fase y amplitud en el modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales”**

TESIS

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física)

PRESENTA

**Ricardo Herrera Romero**  
**Matricula: 2221801209**  
**Orcid: 0009-0008-7596-6148**  
**ricardo.h.romero@outlook.com**

Director(es):

Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani  
Dr. Román Linares Romero

Jurado:

Presidente:

Dr. Luis Alberto Hernández Rosas

Secretario:

Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani

Vocal:

Dr. Mario Alan Quiroz Juarez

Iztapalapa, Ciudad de México a 04 de noviembre de 2024



# Agradecimientos

Expreso mi profundo agradecimiento a mi querido abuelo Ricardo, cuyo apoyo ha sido fundamental para mi dedicación a la física. Estaré eternamente agradecido por su invaluable contribución a mi desarrollo personal y académico. También agradezco a mis padres Beatriz y Alejandro por su amor y apoyo a lo largo de mi vida, así como por la educación que me brindaron. A mi hermano Cesar le agradezco por enseñarme a enfrentar desafíos con determinación.

Con amor agradezco a Karina S. por su apoyo constante, tanto en lo académico como en lo personal, su presencia y amor han sido fundamentales para mí durante estos años.

Doy las gracias a mis directores de tesis, el Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani y el Dr. Román Linares Romero, por su paciencia y dedicación. Han sido una guía constante en mi camino académico.

Agradezco al Dr. Luis Alberto Hernández Rosas y al Dr. Mario Alan Quiroz Juárez por la revisión detallada de mi trabajo y por sus valiosos comentarios, los cuales fueron valiosos para la mejora de esta tesis.

Agradezco a mis amigos y al grupo de Polaritones por las agradables convivencias y por el valioso intercambio de ideas, que hicieron este camino más ameno.

Agradezco a la Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Iztapalapa, por mi formación académica. De igual manera agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías CONAHCYT por la beca proporcionada registrada bajo el CVU: 1186452.





# Resumen

La presente tesis se centra en el estudio de un modelo de Dicke que incorpora anisotropía e interacciones materiales. Se analizan las transiciones de fase superradiantes y los modos de excitación colectiva emergentes, como los modos de fase y amplitud.

En primer lugar, se revisa el modelo de Dicke estándar y se introduce de manera breve la teoría cuántica de campos, proporcionando las herramientas para investigar las transiciones de fase superradiantes y la aparición de los modos de fase y amplitud en el sistema.

En segundo lugar, para determinar las transiciones de fase superradiantes al incluir anisotropía e interacciones materiales, se emplea la aproximación de estados coherentes, cuyos resultados han sido publicados en *R. Herrera Romero, M. A. Bastarrachea-Magnani y R. Linares, “Critical Phenomena in Light–Matter Systems with Collective Matter Interactions”, Entropy 24 (2022) [1]*. Además, se utiliza la aproximación de Holstein-Primakoff para caracterizar los modos de fase y amplitud y analizar su evolución bajo las mismas condiciones, como se presenta en *R. Herrera Romero y M. A. Bastarrachea-Magnani, “Phase and Amplitude Modes in the Anisotropic Dicke Model with Matter Interactions” Entropy 26 (2024) [2]*.

Este trabajo ofrece una comprensión más profunda de cómo las interacciones materiales afectan las propiedades críticas del modelo de Dicke y la naturaleza de los modos colectivos emergentes. Contribuye al entendimiento teórico del modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales y abre nuevas perspectivas para investigaciones futuras en este campo.



# Índice General

<b>Agradecimientos</b>	I
<b>Resumen</b>	III
<b>1. Introducción</b>	1
1.1. Simetría y Rompimiento Espontáneo de Simetría	2
1.1.1. Modos de Amplitud y Fase	5
1.2. Modelo de Dicke	6
1.2.1. Hamiltoniano de Dicke Estándar	6
1.2.2. Hamiltoniano de Tavis-Cummings	7
1.2.3. Hamiltoniano de Dicke Anisotrópico	8
1.2.4. Hamiltoniano de Dicke Anisotrópico con Interacciones Mate- riales	9
1.2.5. Transiciones de Fase Superradiante	9
1.2.6. Correspondencia Clásico - Cuántica	12
1.2.7. Densidad de Estados Semiclásico	14
1.2.8. Aproximación Holstein-Primakoff	16
1.3. Conclusiones	17
<b>2. Teoría Cuántica de Campos.</b>	19
2.1. Segunda Cuantización	20
2.1.1. Número de Ocupación y Espacio de Fock	21
2.1.2. Aspectos de la Segunda Cuantización	22
2.2. Integral de Trayectoria de Feynman	23
2.2.1. Formalismo Integral de Trayectoria	23
2.2.2. Construcción de la Integral de Trayectoria	25
2.2.3. Enfoque Semiclásico desde la Integral de Trayectoria	28
2.2.4. Integral de Trayectoria y Mecánica Estadística	29
2.3. Estados Coherentes	32
2.3.1. Estados Coherentes de Bosones	33
2.3.2. Estados Coherentes de Fermiones	34
2.3.3. Construcción de la Integral de Trayectoria para $Z$	36
2.4. Conclusiones	37
<b>3. Modelo de Dicke Anisotrópico Interactuante.</b>	39
3.1. Hamiltoniano de Dicke Anisotrópico con Interacciones	39
3.2. Correspondencia Clásica	40
3.3. Superficies de Energía y sus Extremos	41
3.3.1. Deformación de la Fase Normal	42
3.3.2. Límite Tavis-Cummings	43
3.3.3. Límite de Dicke.	48

3.3.4. Dicke Anisotrópico . . . . .	53
3.4. Densidad de Estados Semiclásicos . . . . .	57
3.4.1. Dominio de Energías en el Límite Tavis-Cummings con Interacciones . . . . .	60
3.4.2. Dominio de Energías en el Límite Dicke con Interacciones . . . . .	61
3.4.3. Dominio de Energías en el Modelo Anisotrópico con Interacciones . . . . .	62
3.5. Conclusiones . . . . .	65
<b>4. Modos de Fase y Amplitud en el Modelo de Dicke Interactuante</b>	<b>67</b>
4.1. Aproximación de Holstein-Primakoff . . . . .	67
4.2. Campo Medio en el Modelo de Dicke Anisotrópico Interactuante . . . . .	68
4.2.1. Fase Normal . . . . .	68
4.2.2. Fase superradiante . . . . .	70
4.3. Análisis Espectro de Bajas Energías . . . . .	75
4.4. Conclusiones . . . . .	80
<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>81</b>
<b>Apéndices</b>	<b>83</b>
<b>A. Estados Coherentes</b>	<b>85</b>
A.1. Álgebra de Heisenberg-Weyl . . . . .	85
A.1.1. Reglas de Conmutación y el Espacio de Fock . . . . .	86
A.1.2. Estados Coherentes de Glauber . . . . .	87
A.2. Álgebra SU(2) . . . . .	89
A.2.1. Estados Coherentes de Bloch . . . . .	89
A.3. Propiedades de los Estados Coherentes de Bloch . . . . .	91
<b>B. Suplemento sobre Transiciones de Fase Superradiante</b>	<b>93</b>
B.1. Ecuaciones de Hamilton para los Límites de Dicke y Tavis-Cummings . . . . .	93
B.2. Variables para Visualizar las Superficies de Energía . . . . .	94
B.3. Matriz Hessiana . . . . .	94
B.3.1. Determinante del Hessiano en el Límite de Tavis-Cummings . . . . .	96
B.3.2. Determinante del Hessiano en el Límite de Dicke . . . . .	97
<b>C. Integral de Trayectoria en el Modelo de Dicke Anisotrópico</b>	<b>99</b>
C.1. Modelo de Dicke Fermiónico . . . . .	99
C.2. Función de Partición e Integral de Trayectoria . . . . .	101
C.3. Fase Normal $\beta < \beta_c$ . . . . .	110
C.4. Fase Superradiante $\beta > \beta_c$ . . . . .	111
C.4.1. Caso Límite Tavis-Cummings . . . . .	112
<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Las simetrías revelan patrones y regularidades que son esenciales para describir sistemas físicos. Ante la presencia de una perturbación externa, se puede producir un rompimiento espontáneo de simetría, lo que implica que el sistema adopta un estado que no conserva toda la simetría inicial, aunque la simetría del sistema en su conjunto siga presente.

El modelo de Dicke describe la interacción entre la luz y la materia y da lugar a la aparición de transiciones de fase cuánticas. Estas transiciones generan un rompimiento espontáneo de simetría al estado base. El cambio de simetría del estado base permite la emergencia de modos colectivos como los modos de fase y de amplitud.

En este trabajo, se emplean aproximaciones semiclásicas basadas en estados coherentes y el formalismo de Holstein-Primakoff para analizar el comportamiento de las transiciones de fase en el modelo de Dicke, considerando la anisotropía e interacciones materiales. Se mostrará que dichas interacciones afectan las transiciones de fase cuánticas, influyendo en la simetría del estado base y, por tanto, en el comportamiento de los modos colectivos de fase y amplitud.

En el Capítulo [1](#), se revisa el modelo de Dicke, presentando el concepto de transición de fase cuántica y las simetrías asociadas al rompimiento espontáneo, así como las densidades de estado, las transiciones de fase cuánticas de estados excitados y los modos colectivos de fase y amplitud.

En el Capítulo [2](#), se revisa el formalismo de la teoría cuántica de campos para sistemas de muchos cuerpos, con el objetivo de justificar la aproximación semiclásica basada en estados coherentes y el formalismo de Holstein-Primakoff. Este formalismo proporciona una perspectiva alternativa para identificar los modos de fase y amplitud a través del uso de la integral de trayectoria (véase el Apéndice [C](#)).

En el Capítulo [3](#), se investigan las transiciones de fase cuánticas (Quantum Phase Transition, QPT) en el modelo de Dicke, considerando la anisotropía y las interacciones materiales mediante la aproximación semiclásica de estados coherentes. Se

presentan diagramas de fase, superficies de energía de las transiciones de fase y densidades de estado y las transiciones de fase cuántica de estados excitados (Excited States Quantum Phase Transition, ESQPT), los cuales dependen de la anisotropía y de las interacciones materiales.

En el Capítulo 4, se analizan los modos colectivos de fase y amplitud en el modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales, utilizando la aproximación de Holstein-Primakoff.

Finalmente, se exponen las conclusiones del trabajo.

En el Apéndice A se muestran propiedades de los estados coherentes.

En el Apéndice B, se ofrecen detalles adicionales sobre el análisis de las superficies de energía y la determinación de sus puntos fijos utilizando el Hessiano, como se aborda en el Capítulo 3.

En el Apéndice C, se presenta un enfoque alternativo mediante el uso de la integral de trayectoria para identificar los modos de fase y amplitud en el modelo de Dicke anisotrópico, recuperando el espectro de energía de los modos colectivos sin interacciones expuesto en el Capítulo 4.

## 1.1. Simetría y Rompimiento Espontáneo de Simetría

Las simetrías son fundamentales para comprender las propiedades de los sistemas físicos. Se han utilizado desde las ecuaciones de movimiento en la mecánica clásica 3 hasta los estados cuánticos en la mecánica cuántica 4.

Se dice que un objeto posee simetría cuando se mantiene idéntico desde diferentes perspectivas. Por ejemplo, una esfera tiene simetría rotacional, ya que si rotamos la esfera, su descripción geométrica no cambia en el espacio 4, 5.

En mecánica cuántica, la noción de simetría en uno o varios estados cuánticos no difiere mucho del ejemplo de la esfera. Se menciona que un estado  $|\psi\rangle$  es simétrico si al aplicar una transformación unitaria  $\hat{U}$  el estado transformado es igual al estado original 4:

$$|\psi\rangle = \hat{U}|\psi\rangle. \quad (1.1)$$

Por otro lado, un operador  $\hat{A}$  se considera invariante bajo una transformación unitaria  $\hat{U}$ , si  $\hat{U}^\dagger \hat{A} \hat{U} = \hat{A}$ . En otras palabras, esto se puede expresar como  $[\hat{U}, \hat{A}] = 0$ . Por lo tanto, si un Hamiltoniano  $\hat{H}$  es invariante bajo una transformación unitaria  $\hat{U}$ , se puede afirmar que  $\hat{U}$  representa la simetría asociada a dicho Hamiltoniano. 4.

Ampliando esta idea, si un Hamiltoniano simétrico  $\hat{H}$  tiene un estado propio  $|\psi\rangle$  con

un valor propio  $E_\psi$ , entonces la transformación del estado  $\hat{U}|\psi\rangle$  también constituye un estado propio de  $\hat{H}$  con el mismo valor propio:

$$\hat{H}(\hat{U}|\psi\rangle) = \hat{U}\hat{H}|\psi\rangle = \hat{U}E_\psi|\psi\rangle = E_\psi(\hat{U}|\psi\rangle). \quad (1.2)$$

En efecto, si consideramos una transformación unitaria temporal  $\hat{U}(t)$  para un operador Hermitiano  $\hat{Q}$  (el cual es Hermitiano si cumple la condición  $\hat{Q}^\dagger = \hat{Q}$ ), y si se verifica que  $[\hat{Q}, \hat{U}(t)] = 0$ , entonces  $\hat{Q}$  representa una cantidad conservada. Esto implica que los eigenestados de  $\hat{Q}$  permanecen iguales bajo la evolución temporal.

Una vez establecidas las condiciones que deben cumplir los sistemas cuánticos para exhibir simetrías, procederemos a analizar dos tipos específicos de simetrías que serán abordadas en esta tesis.

El primer tipo de simetría es la simetría  $U(1)$ , que se caracteriza como una transformación de fase global, afectando a las variables del sistema de manera general. Una transformación de fase se define como  $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$ , donde  $\theta$  representa el ángulo de fase. Esta simetría también está relacionada con la invariancia en las rotaciones, ya que tanto las transformaciones de fase como las rotaciones preservan la estructura del sistema, manteniendo las propiedades físicas invariantes bajo dichas transformaciones.

El segundo tipo de simetría es la simetría de paridad, que se refiere a la invariancia bajo reflexiones espaciales. Una transformación de paridad implica cambiar las coordenadas espaciales de un sistema, como en el caso de  $x \rightarrow -x$ . Si un sistema físico conserva la simetría de paridad, sus propiedades físicas permanecen inalteradas bajo reflexiones espaciales.

Un sistema físico que es invariante bajo una transformación unitaria suele contener un estado de equilibrio. En el contexto de la mecánica cuántica, esto se traduce en la existencia de un estado base único o, alternativamente, en un conjunto degenerado de estados base. Por ello, es fundamental introducir el concepto de rompimiento espontáneo de simetría, que explica cómo los sistemas físicos pueden alcanzar configuraciones que, aunque simétricas, no corresponden necesariamente a estados invariantes.

La ruptura espontánea de simetría se produce como resultado de perturbaciones externas, lo que lleva a que un sistema seleccione un estado estable particular entre múltiples configuraciones que también presentan simetría. La singularidad de este fenómeno radica en la forma en que un estado puede cambiar cualitativamente en respuesta a una perturbación muy débil [5].

Si un estado  $|\psi\rangle$  no es invariante bajo una transformación  $\hat{U}$ , se considera que ha roto espontáneamente la simetría [5]. Es relevante señalar que, aunque  $|\psi\rangle$  y  $\hat{U}|\psi\rangle$  son estados distintos, ambos comparten la misma energía, dado que el Hamiltoniano es

simétrico bajo la transformación  $\hat{U}$ . Esto implica que existe un conjunto de estados que experimentan una ruptura espontánea de simetría al aplicar la transformación unitaria, manteniendo así la misma energía [5].

Los estados que presentan ruptura espontánea de simetría son aquellos que corresponden a un operador que no conmuta con el Hamiltoniano del sistema. Como resultado, no son considerados estados propios del Hamiltoniano. Sin embargo, al analizar estos estados en el límite termodinámico, podemos tratarlos como si fueran propios del sistema.

Para un sistema compuesto por  $N$  partículas en un volumen  $V$ , se considera el límite termodinámico en el que  $N \rightarrow \infty$  y  $V \rightarrow \infty$ , manteniendo constante la relación  $N/V$ . En este contexto, los estados que exhiben ruptura espontánea de simetría se vuelven ortogonales entre sí y se degeneran con los estados propios simétricos del Hamiltoniano. Así, en este límite, los estados que presentan ruptura espontánea de simetría pueden ser considerados como estados propios del operador  $\hat{H}$  [6, 7].

Algunos sistemas físicos pueden experimentar transiciones de fase como resultado de una perturbación externa, lo que a su vez puede llevar a un rompimiento espontáneo de simetría. Estas transiciones se caracterizan mediante un parámetro de orden que varía en función de un parámetro de control, lo cual permite identificar y distinguir entre las distintas fases que presenta el sistema.

Para ilustrar este concepto, consideremos un sistema descrito por un parámetro de orden, representado por un escalar complejo  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 = |\alpha|e^{i\phi}$ , donde  $|\alpha|$  corresponde a la amplitud y  $\phi$  a la fase. Introducimos un potencial efectivo  $V(\alpha) = r|\alpha|^2 + g|\alpha|^4$ , con  $r$  y  $g$  como coeficientes reales [8-10], como se muestra en la Fig. 1.1.

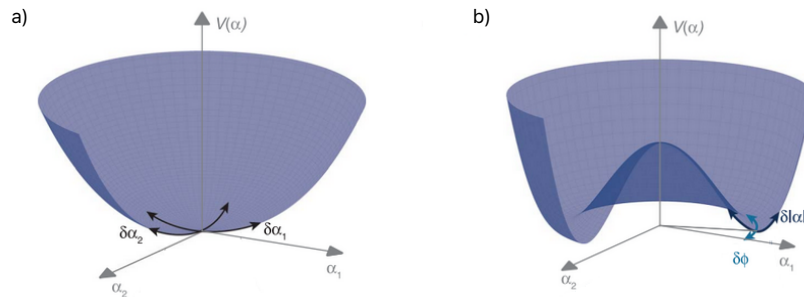


Figura 1.1: a) Cuando  $r > 0$  y  $g > 0$ , el potencial toma la forma de un pozo esférico. b) En cambio, si  $r < 0$ , el potencial experimenta una ruptura espontánea de simetría, adoptando la forma característica de un sombrero mexicano. Tomado de Ref. [10].

Si  $r > 0$  y  $g > 0$ , el potencial adopta la forma de un pozo esférico, cuyo mínimo de energía se encuentra en  $\alpha = 0$ ; véase la Fig. 1.1 (a). En cambio, cuando  $r < 0$ , el sistema experimenta una ruptura espontánea de simetría, y el potencial toma la



forma de un sombrero mexicano, lo que da lugar a un número infinito de mínimos de energía dispuestos a lo largo de un círculo de radio  $|\alpha| > 0$ ; véase la Fig. 1.1 (b). Ambos potenciales poseen simetría  $U(1)$ ; sin embargo, el rompimiento espontáneo de simetría se manifiesta en la transición de un único mínimo en  $\alpha = 0$  a un conjunto continuo de mínimos con  $|\alpha| > 0$ .

### 1.1.1. Modos de Amplitud y Fase

El potencial de la Fig. 1.1 modela la energía del sistema en función del parámetro de orden  $\alpha$ . Sin embargo, además del comportamiento descrito por el potencial, el parámetro de orden  $\alpha$  puede experimentar fluctuaciones, que se clasifican en dos tipos: fluctuaciones de amplitud y fluctuaciones de fase.

- Fluctuaciones de amplitud: Estas fluctuaciones se refieren a variaciones en la magnitud de la amplitud de  $|\alpha|$ . Cuando el potencial adopta la forma de un sombrero mexicano, las fluctuaciones de amplitud se manifiestan como desviaciones radiales ubicados en el mínimo del potencial. Estas fluctuaciones requieren una energía de excitación finita.
- Fluctuaciones de fase: Las fluctuaciones de fase implican cambios en el ángulo  $\phi$  del parámetro de orden, manteniendo constante su magnitud  $|\alpha|$ . Cuando el potencial adopta la forma de un sombrero mexicano, las fluctuaciones de fase corresponden a cambios en la orientación angular ubicados en el mínimo del potencial. Estas fluctuaciones no requieren energía de excitación, ya que al desplazarse en la dirección de la fase, no enfrentan barreras energéticas.

Al considerar un sistema físico gobernado por el potencial de la Fig. 1.1, este puede exhibir comportamientos específicos debido a las fluctuaciones de fase y amplitud. Estos comportamientos caracterizan las excitaciones propias del sistema, a las cuales nos referiremos como modos de fase y modos de amplitud.

Por último, se presentan los estudios realizados en los últimos años sobre los modos de fase y amplitud. Los modos de amplitud han sido propuestos teóricamente en una variedad de sistemas físicos, como superconductores [11], átomos fríos [12], redes periódicas [13] y sistemas antiferromagnéticos [14]. Experimentalmente, su existencia ha sido confirmada en diferentes contextos, por ejemplo, en superconductores [15, 16], gases cuánticos supersólidos [10] y estructuras cristalinas [17, 18]. Por otro lado, los modos de fase han sido estudiados en sistemas superfluidos [19-22], durante transiciones de fase ferromagnéticas [23], en el modelo de Heisenberg-spin [23-25], en condensados de espinores de Bose-Einstein [21, 26-28], y en el análisis de cristales bidimensionales [29]. Además, han sido objeto de estudio en el ámbito de la física de partículas, particularmente en el mecanismo de Higgs [9, 30-33].

## 1.2. Modelo de Dicke

El modelo de Dicke fue propuesto por Robert H. Dicke en 1954 [34]. Describe un sistema compuesto por  $N$  átomos, cada uno aproximado como un sistema de dos niveles (qubits), que interactúan con un único modo de radiación electromagnética dentro de una cavidad óptica [34]. Este modelo es de gran interés, ya que exhibe transiciones de fase superradiantes. En estas transiciones, los átomos interactúan de manera coherente con el campo de radiación electromagnética, lo que da lugar a un valor esperado distinto de cero para el número de fotones en el sistema cuando el acoplamiento entre la luz y la materia supera un valor crítico [35]. Este fenómeno se ilustra en la Fig. 1.2.

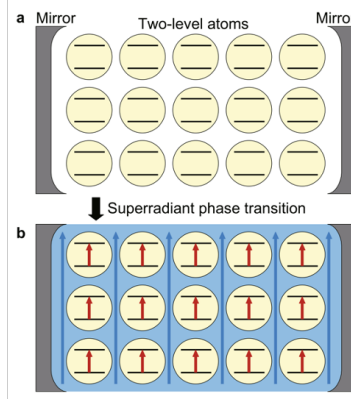


Figura 1.2: Ilustración del modelo de Dicke. (a) Un conjunto de  $N$  átomos de dos niveles interactúa con un modo de radiación en una cavidad óptica. Para que la interacción luz-materia sea coherente y colectiva, se requiere una longitud de onda lo suficientemente grande. (b) Al superar el valor crítico del acoplamiento luz-materia, el sistema entra en la fase superradiante, caracterizada por el comportamiento colectivo de los átomos. Tomado de Ref. [36].

### 1.2.1. Hamiltoniano de Dicke Estándar

Presentamos el Hamiltoniano de Dicke estándar:

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[ (\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-) + (\hat{a} \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger \hat{J}_+) \right]. \quad (1.3)$$

El primer término,  $\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z$ , representa la energía del sistema en ausencia de interacción, correspondiente tanto al campo electromagnético como a los átomos. Aquí,  $\omega$  es la frecuencia del modo de radiación electromagnética,  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  es el operador de número fónico,  $\omega_0$  es la frecuencia característica de los átomos y  $\hat{J}_z$  representa la diferencia entre el número de átomos en el estado base y estado excitado.

El segundo término,  $\frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[ (\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-) + (\hat{a} \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger \hat{J}_+) \right]$ , describe la interacción entre el campo electromagnético y el colectivo de átomos. Aquí,  $\gamma$  representa el aco-

plamiento luz-materia y  $N$  es el número de partículas. Los términos  $\hat{a}\hat{J}_+$  y  $\hat{a}^\dagger\hat{J}_-$  mantienen el número de excitaciones constante:  $\hat{a}\hat{J}_+$  excita el colectivo atómico al emitir un fotón, mientras que  $\hat{a}^\dagger\hat{J}_-$  desexcita el colectivo atómico al absorber un fotón. Estos términos son conocidos como rotantes. En contraste, los términos  $\hat{a}\hat{J}_-$  y  $\hat{a}^\dagger\hat{J}_+$  no conservan el número de excitaciones:  $\hat{a}\hat{J}_-$  desexcita el colectivo atómico al emitir un fotón, y  $\hat{a}^\dagger\hat{J}_+$  lo excita al absorber uno. Estos últimos se denominan términos no contrarrotantes [37-39].

Los operadores  $\hat{J}_z$  y  $\hat{J}_\pm$  se conocen como los operadores de pseudoespín colectivos. Se les denomina de esta forma debido a la coherencia colectiva de los átomos bajo la aproximación de onda larga (véase la Fig. 1.2), es decir, el sistema se trata como un conjunto de  $N$  átomos que actúan de manera coherente, en lugar de analizar el comportamiento individual de cada átomo [40]. Esto permite describir el sistema de la siguiente forma:

$$\hat{J}_\pm = \sum_{i=1}^N \hat{J}_\pm^i \quad \text{y} \quad \hat{J}_z = \sum_{i=1}^N \hat{J}_z^i. \quad (1.4)$$

Estos operadores obedecen el álgebra  $SU(2)$ , la cual describe átomos con espín  $1/2$ . Esto implica que satisfacen las siguientes relaciones:  $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ , lo que a su vez resulta en  $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_z$  y  $[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm$  [41]. Dado que los operadores  $\hat{J}_\pm^i$  describen átomos en la aproximación de dos niveles, estos pueden representarse con estados correspondientes a la base y el estado excitado:

$$\hat{J}_-^i = |g_i\rangle\langle e_i|, \quad \hat{J}_+^i = |e_i\rangle\langle g_i| \quad \text{y} \quad \hat{J}_z^i = \frac{1}{2}(|e_i\rangle\langle e_i| - |g_i\rangle\langle g_i|), \quad (1.5)$$

donde  $|g_i\rangle$  y  $|e_i\rangle$  representan los estados base y excitado, respectivamente, de cada átomo  $i$ . Además, se considera que existen  $2J + 1$  posibles estados de espín, y las combinaciones de estos estados, tanto excitados ( $e$ ) como base ( $g$ ), son  $2^N$  (esto se debe a que los  $N$  átomos se pueden describir mediante estados de espín  $J/2, J/2 - 1, J/2 - 2, \dots$ ). Finalmente, cabe destacar que los eigenvalores del modelo de Dicke se expresan en la base  $\{|n\rangle \otimes |j, m\rangle\}$ , donde  $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$ ,  $\hat{J}_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle$ , y  $\mathbf{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ , cuyo eigenvalor es  $j(j + 1)$  con  $j = N/2$  [42].

### 1.2.2. Hamiltoniano de Tavis-Cummings

Después de introducir el Hamiltoniano de Dicke estándar, ahora discutiremos un Hamiltoniano simplificado que excluye los términos no contrarrotantes, conocido como el Hamiltoniano de Tavis-Cummings (TC):

$$\hat{H}_{\text{TC}} = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_0\hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}}(\hat{a}\hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{J}_-). \quad (1.6)$$

El Hamiltoniano de Tavis-Cummings fue propuesto por Jaynes y Cummings en la década de 1960 [43]. Este enfoque surge al promediar en el tiempo las oscilaciones de los términos de interacción, un procedimiento conocido como la aproximación de onda rotante (Rotating Wave Aproximation, RWA). Como resultado, se obtiene un Hamiltoniano que conserva únicamente los términos rotantes. La aplicación de la RWA está justificada en ciertos regímenes, especialmente en condiciones de resonancia ( $\omega_0 \approx \omega$ ) y acoplamientos débiles ( $\gamma \ll \omega_0, \omega$ ). Este modelo ha sido ampliamente utilizado para describir experimentos en cavidades ópticas [44-47].

### 1.2.3. Hamiltoniano de Dicke Anisotrópico

Al modular los términos no contrarotantes del Hamiltoniano de Dicke estándar Ec. [1.3], denominaremos a este modelo el Hamiltoniano de Dicke anisotrópico [48-51]. En este contexto,  $\xi$  es un parámetro adimensional que controla la modulación de los términos contrarotantes, y toma valores en el rango  $\xi \in [0, 1]$ . Cuando  $\xi = 1$ , se recupera el Hamiltoniano de Dicke estándar Ec. [1.3], mientras que  $\xi = 0$  nos lleva al Hamiltoniano de Tavis-Cummings Ec. [1.6]. Se presenta el Hamiltoniano de Dicke anisotrópico:

$$\hat{H}_A = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[ (\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-) + \xi (\hat{a} \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger \hat{J}_+) \right]. \quad (1.7)$$

Dado que el modelo de Dicke anisotrópico integra la información del modelo de Dicke estándar y del modelo de Tavis-Cummings, identificaremos los tipos de simetría que emergen del Hamiltoniano Ec. [1.7] en función del valor de  $\xi$ .

Para ello, definimos dos operadores: el primero es el operador de número  $\hat{N}$ , que se representa como:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{i=1}^N \hat{J}_z^i, \quad (1.8)$$

y el segundo es el operador de paridad  $\hat{\Pi}$ :

$$\hat{\Pi} = e^{i\pi \hat{N}}. \quad (1.9)$$

Recordemos que las simetrías son fundamentales para identificar las cantidades conservadas en un sistema. El Hamiltoniano de Tavis-Cummings Ec. [1.6] es simétrico bajo el operador  $\hat{N}$ , dado que se cumple la relación  $[\hat{H}_{TC}, \hat{N}] = 0$ . Esta simetría implica la conservación del número de excitaciones y establece una simetría U(1) ya que  $e^{i\theta \hat{N}} \hat{H}_{TC} e^{-i\theta \hat{N}} = \hat{H}_{TC}$  para cualquier dirección de  $\theta$ . Por lo tanto, la evolución de un estado  $|n\rangle \otimes |jm\rangle$  a otro estado  $|n'\rangle \otimes |jm'\rangle$  preserva la suma de las excitaciones, es decir,  $n + m = n' + m'$ .

Por otro lado, el Hamiltoniano de Dicke estándar Ec. 1.3 es simétrico bajo el operador de paridad  $\hat{\Pi}$ , ya que  $[\hat{H}_D, \hat{\Pi}] = 0$  y  $e^{i\pi\hat{N}}\hat{H}_De^{-i\pi\hat{N}} = \hat{H}_D$ . Esta relación indica la presencia de una simetría de paridad en el sistema, lo que implica que la evolución de un estado  $|n\rangle \otimes |jm\rangle$  a otro estado  $|n'\rangle \otimes |jm'\rangle$  conserva la paridad de las sumas  $n + m$  y  $n' + m'$ . Así, estas sumas pueden ser pares o impares [38].

Modelo	Términos Contrarotantes	Simetría
Tavis-Cummings $\xi = 0$	No	$U(1)$
Dicke estándar $\xi = 1$	Si	$\mathcal{P}$

Tabla 1.1: Tomado de [52]

#### 1.2.4. Hamiltoniano de Dicke Anisotrópico con Interacciones Materiales

Finalmente, se presenta el Hamiltoniano de Dicke anisotrópico, que incluye las interacciones atómicas y que será el objeto de estudio de este trabajo:

$$\hat{H}_I = \omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \omega_0\hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[ (\hat{a}\hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{J}_-) + \xi(\hat{a}\hat{J}_- + \hat{a}^\dagger\hat{J}_+) \right] + \frac{1}{N} \left( \eta_x\hat{J}_x^2 + \eta_y\hat{J}_y^2 + \eta_z\hat{J}_z^2 \right). \quad (1.10)$$

Los parámetros  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  y  $\eta_z$  representan la fuerza de interacción colectiva entre los átomos, a la que denominaremos interacciones materiales. Estas interacciones varían espacialmente según  $r_{ij}^{-3}$ , donde  $r_{ij}$  es la distancia entre el átomo  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo [53]. El estudio de este tipo de sistemas permite explorar diversas áreas, como sistemas de estado sólido [54, 55], resonancias de Feshbach [56], acoplamientos dipolares [57, 58] e interacciones en qubits superconductores [59-61]. En particular, se han realizado investigaciones sobre el modelo de Dicke estándar, centrándose en la interacción  $\eta_z$  [62].

El modelo de Dicke también ha sido una herramienta fundamental para estudiar la construcción de interacciones materiales en diferentes contextos. Estudios previos han analizado sistemas atómicos con interacciones dipolares [57], desplazamientos debidos al efecto Stark en arreglos optomecánicos [63, 64], así como fenómenos de caos cuántico [62, 65]. Estos trabajos han ampliado la comprensión de cómo las interacciones colectivas pueden influir en la dinámica de sistemas cuánticos complejos.

#### 1.2.5. Transiciones de Fase Superradiante

Hemos mencionado que el modelo de Dicke presenta transiciones de fase cuánticas. Para entender este concepto, primero exploraremos el de transiciones de fase en general. Pensemos en una transición de fase térmica, en la cual un sistema experimenta cambios abruptos en sus propiedades macroscópicas al variar alguna de sus

variables termodinámicas, como la temperatura  $T$  [66]. Este cambio súbito en el comportamiento del sistema indica que ha atravesado una transición de fase.

Existen dos tipos principales de transiciones de fase térmicas. El primer tipo son las transiciones de fase de primer orden o discontinuas, en las que dos o más fases pueden coexistir en la línea de transición. Estas transiciones se caracterizan por la aparición de discontinuidades en la primera derivada de la energía libre. Ejemplos de estas transiciones incluyen la fusión y la ebullición, donde el sistema experimenta un cambio abrupto entre dos estados distintos.

El segundo tipo son las transiciones de fase de segundo orden o continuas, donde las diferencias entre las fases desaparecen de manera gradual a medida que el sistema se aproxima al punto crítico. Las transiciones de fase de segundo orden son continuas en la primera derivada, lo que significa que el parámetro de orden (que es la primera derivada de la energía libre con respecto al campo externo) es continuo a lo largo de la transición. Sin embargo, exhiben discontinuidades en una segunda derivada de la energía libre. Un ejemplo de una transición de segundo orden es la superconductividad, donde un material puede cambiar de un estado normal a un estado superconductor al alcanzar una temperatura crítica. En este estado, la resistividad eléctrica del material se vuelve cero, y aunque no hay un cambio abrupto en las propiedades termodinámicas, sí se observan cambios significativos en la capacidad calorífica y otras propiedades a medida que se aproxima a la temperatura crítica. Al alcanzar el punto crítico, el sistema se encuentra en una fase única y muestra comportamientos críticos, como la divergencia de la longitud de correlación y la compresibilidad [67].

Es importante destacar que las transiciones de fase térmicas se analizan en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ , donde  $N$  es el número de partículas del sistema. Este límite permite despreciar los efectos de las fluctuaciones y garantiza que las propiedades de las fases y las transiciones sean bien definidas.

Al considerar  $T = 0$ , se pueden observar transiciones de fase que no son térmicas, sino que se originan a partir de efectos cuánticos. Estas transiciones se conocen como transiciones de fase cuánticas (Quantum Phase Transitions, QPT). En mecánica estadística, es común analizar la competencia entre dos unidades energéticas [7]: la unidad energética intrínseca del sistema  $E_Q$ , como en el caso de los osciladores  $\hbar\omega$ , y la unidad de energía térmica  $k_B T$ .

A altas temperaturas, los efectos térmicos dominan el sistema cuántico, permitiendo el acceso a todos los niveles energéticos, ya que la energía térmica supera a la energía intrínseca. Sin embargo, a temperaturas suficientemente bajas, la energía del sistema se vuelve considerablemente mayor que la energía térmica, lo que implica que no es posible utilizar la energía térmica para excitar los niveles de energía. En  $T = 0$ , la energía térmica es tan baja que el sistema cuántico se encuentra en su estado base

y en los primeros estados excitados, sin energía térmica disponible para acceder a niveles energéticos adicionales. Cuando ocurre una transición de fase a  $T = 0$ , esta se debe a un cambio en las propiedades del estado base, impulsada por fluctuaciones cuánticas responsables de la transición, y no por fluctuaciones térmicas.

El modelo de Dicke está asociado a transiciones de fase cuánticas, conocidas como transiciones de fase superradiantes. En 1954, R. H Dicke fue el primero en observar la superradiancia [34, 39]. Notó que, al describir la emisión de luz de átomos preparados inicialmente en su estado excitado (en la aproximación de dos niveles), después de un cierto tiempo, uno de los átomos experimentaba un decaimiento, emitiendo un fotón. Este evento desencadena una reacción en cadena, donde los  $N$  átomos decaen y emiten un total de  $N$  fotones.

Dicke descubrió que, si todos los átomos están atrapados dentro de una fracción de longitud de onda (en la aproximación de onda larga), los fotones emitidos se vuelven indistinguibles. En este contexto, los procesos de emisión interfieren constructivamente, lo que resulta en un campo electromagnético cuya amplitud es proporcional a  $N$  y cuya densidad de energía es proporcional a  $N^2$  [68]. Por tanto, la fase superradiante su población de fotones ( $\bar{n} = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle / N \neq 0$ ), mientras que en la fase normal ( $\bar{n} = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle / N = 0$ ). Por esta razón, Dicke denominó a este fenómeno como fase superradiante.

Es importante destacar que la superradiancia no había sido observada experimentalmente hasta hace poco debido a las dificultades técnicas. Esta transición requiere un acoplamiento fuerte entre los átomos y la cavidad, de tal manera que la interacción luz-materia se asemeje a las frecuencias atómicas y de la cavidad. No obstante, se han llevado a cabo experimentos que evidencian la transición de fase superradiante. Una de las propuestas experimentales fue realizada por F. Dimer [69], quien diseñó una configuración que combina el acoplamiento entre átomos y fotones inducidos por una estimulación de emisión Raman.

La realización de tales experimentos no puede describirse utilizando un modelo de Dicke en equilibrio, ya que es necesario considerar factores como el impulso y la disipación. Por lo tanto, el acoplamiento entre átomos y fotones debe lograrse mediante un bombeo externo y dependiente del tiempo. Esto permite establecer fuerzas de acoplamiento efectivas entre la luz y la materia de manera arbitrariamente fuerte, lo que facilita la transición.

A pesar de los desafíos experimentales, la superradiancia ha sido observada en diversas plataformas, especialmente en el contexto de la información cuántica y en sistemas ajustables. Investigaciones previas han evidenciado la existencia de transiciones de fase cuánticas de primer y segundo orden [57, 62, 70-73]. En diversos contextos se ha encontrado en condensados de Bose-Einstein en redes ópticas [74-78], así como en qubits superconductores [79-81] y en transiciones Raman en cavidades asistidas [69,

[82]. Además, se han derivado formalmente modelos de Dicke en estudios de átomos ultrafríos en redes ópticas [83-85] y en qubits superconductores [59-61, 86]. También se han propuesto efectos superradiantes en el ámbito de la física nuclear [87], la física del estado sólido [88], materiales bidimensionales [89, 90] y puntos cuánticos [91].

### 1.2.6. Correspondencia Clásico - Cuántica

La transición de fase cuántica superradiante en el modelo de Dicke se puede analizar utilizando técnicas semiclásicas. Este enfoque consiste en derivar un Hamiltoniano efectivo que representa el límite clásico del Hamiltoniano original, empleando una aproximación de estados coherentes. Este método nos permite identificar la energía del estado base y localizar puntos fijos estables, inestables o silla en la superficie de energía.

La utilización de una aproximación semiclásica implica aplicar una aproximación de orden cero, que se basa en una función de onda variacional en la que se utiliza el enfoque de campo medio [7]. Esta aproximación es viable al considerar el límite clásico donde  $\hbar \rightarrow 0$ , lo que implica que  $N \rightarrow \infty$ , siempre y cuando el producto  $\hbar N$  se mantenga constante. Esto nos permite despreciar las fluctuaciones cuánticas al considerar solo el estado medio del sistema, asumiendo que estas fluctuaciones son pequeñas y, por lo tanto, despreciables. En este contexto, buscamos una solución que minimice la energía del sistema, representando el estado más bajo de energía posible.

Esta aproximación nos permite simplificar las interacciones entre los átomos al tratar a todos los átomos como un único sistema promedio. Al calcular el valor esperado del Hamiltoniano respecto a los estados coherentes (véase el Apéndice A), utilizamos la superficie de energía semiclásica resultante en un espacio de parámetros para identificar los puntos estables, inestables o puntos silla.

A partir de estos puntos estables, se puede identificar la transición de fase del sistema al variar el parámetro que controla dichas transiciones, específicamente, el acoplamiento luz-materia. La correspondencia semiclásica ha sido objeto de investigación en diversos estudios, incluyendo [6, 62, 92-94].

Para proporcionar una visión general y una representación visual del proceso relacionado con la aproximación de estados coherentes, mostramos en la Fig. 1.3 los espacios semiclásicos de la radiación electromagnética y de los átomos. El espacio semiclásico de la luz se representa mediante las variables  $(p, q)$  (espacio de Glauber), mientras que la materia se describe a través de la coordenada  $j_z$ , que representa el radio de la esfera, y el ángulo azimutal  $\phi$  (esfera de Bloch).



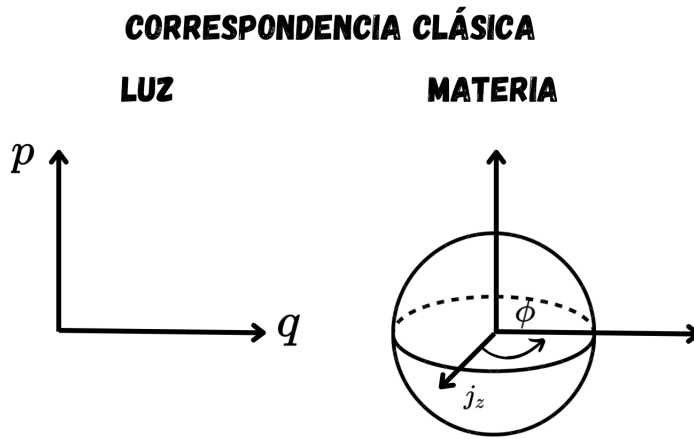


Figura 1.3: Guía visual de los espacios semiclásicos de la radiación electromagnética (luz) y atómica (materia).

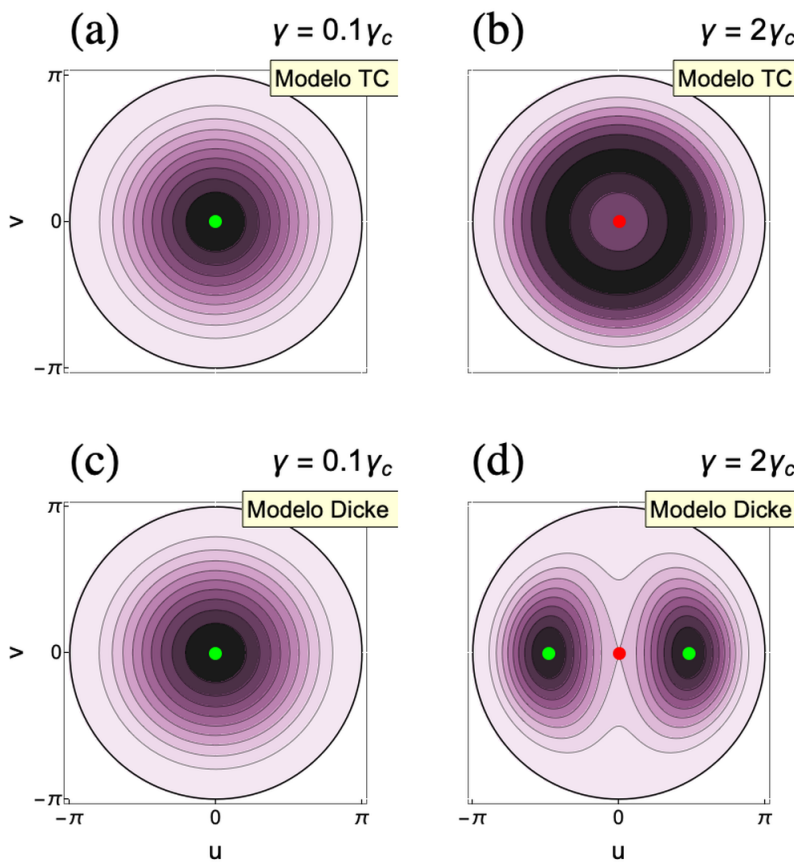


Figura 1.4: Superficies de energía para los Hamiltonianos de Tavis-Cummings y Dicke estándar, donde  $\gamma$  representa el acoplamiento luz-materia. Las figuras (a) y (c) ilustran la fase normal, mientras que las figuras (b) y (d) corresponden a la fase superradiante. Los ejes  $u$  y  $v$  se definen en el apéndice [B.2](#). Los puntos verdes indican puntos fijos estables, y el punto rojo representa un punto fijo inestable.

Al aplicar la aproximación semiclásica de estados coherentes al modelo de Dicke Ec. [1.3](#) y al modelo de Tavis-Cummings Ec. [1.6](#), obtenemos superficies de energía representadas en la esfera de Bloch, observadas desde arriba para identificar fácilmente los puntos estables e inestables del sistema ver Fig. [1.4](#).

En el modelo de Tavis-Cummings Ec. [1.6](#), cuando la fase es normal ( $\gamma < \gamma_{cTC}$ ), la superficie de energía adopta la forma de un pozo esférico, con un punto estable (indicado por el punto verde) que representa el mínimo de energía y presenta simetría  $U(1)$ , Fig. [1.4](#) (a). En la fase superradiante ( $\gamma > \gamma_{cTC}$ ), la superficie de energía asume la forma de un sombrero mexicano, Fig. [1.4](#) (b). En este caso, observamos un punto inestable (punto rojo) y un área sombreada que representa todos los puntos estables degenerados, también en el mínimo de energía y con simetría  $U(1)$ . Aquí,  $\gamma_{cTC} = \sqrt{\omega\omega_0}$  es el acoplamiento de transición que delimita la transición entre las fases normal y superradiante. Ambas fases exhiben un rompimiento espontáneo de simetría en el estado base, donde pasamos de un punto estable a un anillo de puntos estables degenerados.

En el modelo de Dicke Ec. [1.3](#), la superficie de energía en la fase normal ( $\gamma < \gamma_{cD}$ ) adopta la forma de un pozo esférico, con un punto estable (indicado por el punto verde) que representa el mínimo de energía y presenta simetría  $U(1)$  ver Fig. [1.4](#) (c). En la fase superradiante ( $\gamma > \gamma_{cD}$ ), la superficie de energía presenta dos puntos estables (punto verde) y un punto inestable (punto rojo), como se muestra en la Fig. [1.4](#) (d). A diferencia del sombrero mexicano mostrado en la Fig. [1.4](#) (b), donde se observa un continuo degenerado, en el modelo de Dicke la fase superradiante exhibe simetría de paridad y un cambio en la estructura del estado base. Aquí,  $\gamma_{cD} = \sqrt{\omega\omega_0}/2$  es el acoplamiento de transición que delimita la transición entre la fase normal y la fase superradiante.

### 1.2.7. Densidad de Estados Semiclásico

El modelo de Dicke, en su aproximación semiclásica, ofrece una perspectiva valiosa sobre la densidad de estados (Density of States, DoS), que describe la distribución de los estados cuánticos del sistema para un valor fijo del acoplamiento luz-materia  $\gamma$ . La densidad de estados se refiere a la cantidad de niveles de energía disponibles para los sistemas cuánticos en un rango específico de energía. Para obtener la densidad de estados se calcula el volumen del espacio de fases disponible para una energía dada  $E$ , esto es integrando sobre el espacio fase [95](#):

$$\nu(E) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq dp d\phi dj_z \delta(E - H(q, p, \phi, j_z)). \quad (1.11)$$

Se han llevado a cabo estudios exhaustivos sobre la densidad de estados en el modelo de Dicke y Tavis-Cummings [96](#) y en Dicke con interacciones materiales representadas por  $\eta_z$  [62](#). La motivación detrás de estudiar las densidades de estados es extender el estudio del espectro de energías clásico del sistema.

Al analizar las densidades de estados en los modelos de Dicke y Tavis-Cummings,

pueden surgir transiciones de fase de estados excitados, (Excited State Quantum Phase Transitions, ESQPT). Las transiciones de fase de estados excitados representan un cambio en las propiedades del sistema cuando se considera la excitación de sus niveles cuánticos. A diferencia de las transiciones de fase, que ocurren en el estado fundamental, las ESQPT ocurren entre los estados excitados del sistema [49]. La identificación de estas transiciones se basa en la presencia de singularidades en la densidad de estados, lo que tiene un impacto significativo en las propiedades de la función de onda y el flujo de niveles [97].

Las ESQPT son de gran relevancia debido a sus efectos decoherentes, que se traducen en evoluciones temporales no adiabáticas bajo la acción del Hamiltoniano [98]. Este fenómeno ha sido estudiado en modelos de física nuclear [49] y en sistemas de espín [99]. Las primeras observaciones de ESQPT se realizaron en el modelo de Dicke por Pérez [100].

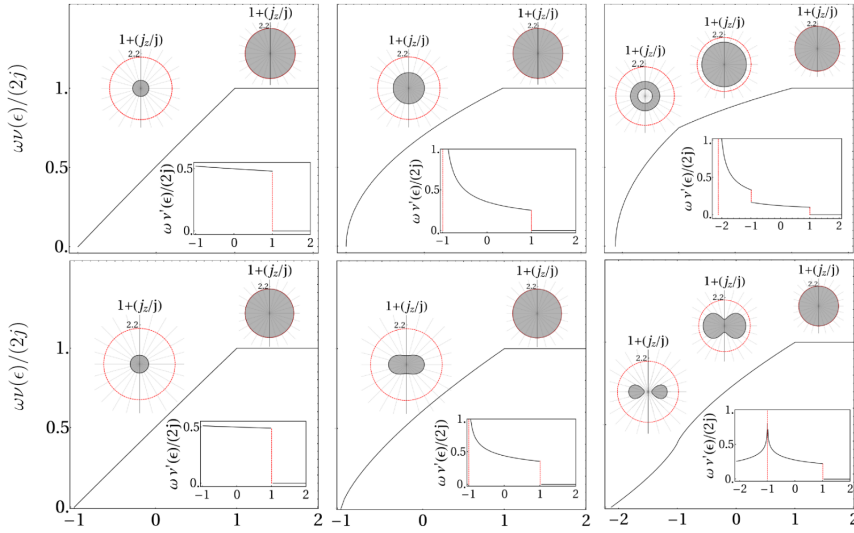


Figura 1.5: Densidades de estado como función de la energía del sistema  $\epsilon = E/\omega_0 j$ . En la fila superior se muestra el caso de TC, mientras que en la inferior se ilustra el caso del modelo estándar de Dicke. La columna de la izquierda corresponde a un acoplamiento  $\gamma = 0,2\gamma_c$ , caracterizando en ambos casos la fase normal. En la columna central,  $\gamma = \gamma_c$ , y en la columna derecha,  $\gamma = 2\gamma_c$ , representando la fase superradiante. Las figuras ubicadas en la parte superior muestran el volumen disponible del espacio fase, mientras que las inferiores presentan las derivadas de las densidades de estado. Tomado de Ref. [96]

En la Fig. [1.5], se presentan el volumen del espacio fase, la densidad de estados y sus derivadas para el modelo de Tavis-Cummings en la fila superior y el modelo de Dicke estándar en la fila inferior. A medida que aumenta la energía  $\epsilon$  (que representa la energía sobre las superficies de energía), se observa un cambio en la densidad de estados, donde los círculos sombreados indican la disponibilidad de estados. Es importante notar que, al aumentar  $\epsilon$ , el volumen del espacio fase disponible se satura completamente.

La diferencia más notable entre los dos modelos se manifiesta en la fase superradiante. En el modelo de TC, las derivadas de las densidades de estados presentan saltos singulares, mientras que en el modelo de Dicke estándar se observa un salto logarítmico en la derivada para  $\epsilon = -1$ . La presencia de discontinuidades en el modelo de TC se debe a que el espacio fase disponible es independiente de  $\phi$ . En contraste, en el modelo de Dicke estándar, el espacio fase se deforma en la fase superradiante, lo que provoca que dependa de  $\phi$ .

Además, tanto en el modelo TC como en el modelo de Dicke, se destacan dos tipos de Transiciones Cuánticas de Fase en Estados Excitados (ESQPT) [6, 101-103]. La ESQPT dinámica ocurre en  $\epsilon = -1$  y la ESQPT estática en  $\epsilon = 1$ . Desde una perspectiva semiclásica, las ESQPT representan puntos de inestabilidad en el espacio fase que indican cambios en el volumen disponible.

Las ESQPT estáticas están asociadas a la saturación del espacio atómico a partir de  $\epsilon = 1$ , momento en el que todo el espacio de pseudoespín se vuelve accesible. Aumentar la energía en este punto solo es posible mediante la adición de fotones al sistema. La presencia de la ESQPT estática es independiente del acoplamiento y siempre se manifiesta, ya que eventualmente el espacio de pseudoespín se vuelve completamente accesible.

Por otro lado, las ESQPT dinámicas, que ocurren en  $\epsilon = -1$ . En este punto, la densidad de estados presenta singularidades que indican la aparición de saltos discontinuos o logarítmicos. Estas transiciones reflejan una inestabilidad en el sistema que provoca que los niveles energéticos se reorganicen de manera abrupta.

### 1.2.8. Aproximación Holstein-Primakoff

La aproximación de Holstein-Primakoff resulta especialmente valiosa para el análisis de los modos de excitación colectiva (modo de fase y amplitud) en el modelo de Dicke, ya que proporciona información sobre el espectro a bajas energías en el límite termodinámico. Esto nos permite identificar los modos de fase y amplitud en ambas fases, normal y superradiante [2, 7, 41, 104]. Además, gracias a las simetrías generadas en las superficies de energía utilizando estados coherentes, podemos asociar el tipo de modo de excitación con la simetría característica de cada fase. Para llevar a cabo este análisis, es necesario construir una representación bosónica del modelo de Dicke:

$$\hat{J}_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - j, \quad \hat{J}_+ = \hat{b}^\dagger \sqrt{2j} \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}}, \quad \text{y} \quad \hat{J}_- = \sqrt{2j} \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \hat{b}. \quad (1.12)$$

Este esquema nos permite expresar el Hamiltoniano de Dicke como dos osciladores desacoplados, lo que facilita la determinación del espectro de energías y la identi-

cación de los modos de fase y amplitud emergentes.

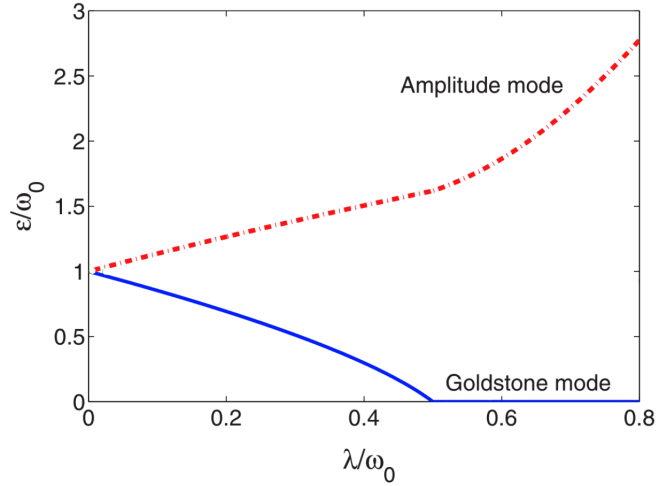


Figura 1.6: Análisis del espectro de energía en función del acoplamiento de transición para el modelo de TC, donde  $\epsilon$  es el espectro de energía,  $\omega = \omega_0$  es la frecuencia bosónica y  $\lambda = \gamma$  es el acoplamiento luz-materia. Tomado de la Ref. [105].

La Fig. 1.6, tomada de [105], muestra el espectro de energías de un modelo de Tavis-Cummings con un acoplamiento de transición de 0,5. En la fase superradiante, debido a la naturaleza del modelo de Tavis-Cummings, la superficie de energía adopta la forma característica de un sombrero mexicano. El modo de fase, también conocido como modo de Goldstone, representa las excitaciones a lo largo del conjunto continuo de puntos estables de la fase, lo que explica por qué su energía es cero en el estado base. Por otro lado, el modo de amplitud o modo de Higgs está asociado a variaciones en la amplitud de la fase y presenta una energía que aumenta con el acoplamiento luz-materia.

En años recientes, se han logrado avances significativos en el estudio de los modos de fase y amplitud en el modelo de Dicke, proporcionando un marco relevante para investigar estos modos en presencia de interacciones materiales. Estos modos se han identificado en distintos contextos, como en un modelo de Dicke con dos cavidades ópticas bajo la aproximación de onda rotante [105], en un modelo de Dicke con átomos ultrafríos acoplados a tres cavidades ópticas y bombeo láser transversal [106], y en un modelo de Jaynes-Cummings en redes finitas [107]. Además, se han explorado en sistemas abiertos, basándose en las teorías de Kirton [108], y en estudios de supersólidos [109].

### 1.3. Conclusiones

En esta introducción, hemos presentado los conceptos fundamentales para el análisis de los modos de fase y amplitud en el modelo de Dicke, incorporando anisotropía e interacciones materiales. A lo largo del capítulo, destacamos la importancia de

las simetrías en la caracterización de la física de los sistemas estudiados, mostrando cómo las simetrías juegan un papel crucial en la estructura y comportamiento de estos modelos. También discutimos cómo las perturbaciones externas pueden inducir rompimientos espontáneos de simetría, lo cual tiene un impacto significativo en las propiedades de los sistemas físicos, como la aparición de nuevos modos de excitación de baja energía y cambios en la dinámica del sistema.

El enfoque principal de esta tesis es la aplicación de aproximaciones semiclásicas al modelo de Dicke, que nos permiten obtener una descripción más accesible del comportamiento del sistema en el límite termodinámico. Estas aproximaciones de campo medio simplifican el análisis del modelo al reducir su complejidad matemática, proporcionando un marco adecuado para identificar y caracterizar los modos de fase y amplitud en la fase superradiante. Esta metodología no solo facilita la interpretación física de los resultados, sino que también sienta las bases para explorar las implicaciones de las interacciones materiales en el comportamiento colectivo del sistema.

# Capítulo 2

## Teoría Cuántica de Campos.

El objetivo de este trabajo es identificar los modos de fase y amplitud en el modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales. En este capítulo, se presentará una breve introducción a la teoría cuántica de campos, que servirá como base para desarrollar la aproximación de campo medio a través de estados coherentes y la representación de Holstein-Primakoff. Además, aunque no constituye la herramienta principal de nuestra metodología, se incluirá una referencia al enfoque de la integral de trayectoria como una alternativa para identificar los modos de fase y amplitud; para más detalles, véase el Apéndice [C](#).

La teoría cuántica de campos (Quantum Field Theory, QFT) permite describir la interacción de muchas partículas. A diferencia de la mecánica cuántica estándar, que se centra en la descripción de partículas puntuales [\[4\]](#), la QFT permite tratar tanto las partículas como los campos que las generan de manera unificada. Esto es crucial para describir fenómenos como la creación y aniquilación de partículas.

Un campo puede entenderse como una entidad que asigna un valor a cada punto del espacio y el tiempo. Por ejemplo, el campo eléctrico asigna un valor de la fuerza eléctrica a cada punto del espacio, indicando la dirección y la magnitud de la fuerza que experimentaría una carga en ese lugar. De manera similar, en la QFT, los campos cuánticos son entidades que asignan valores a cada punto del espacio-tiempo, y las fluctuaciones de estos campos pueden interpretarse como partículas.

Para entender el concepto de un campo, imaginemos una cadena infinita de resortes conectados entre sí. Cada resorte representa un punto en el espacio, y su estado de compresión o estiramiento indica el valor del campo en ese punto. Al considerar una cadena infinita, pasamos de un conjunto discreto de estados de compresión o estiramiento a una descripción continua mediante una función. Esta función es lo que denominamos el campo del sistema [\[110\]](#).

En este ejemplo, el desplazamiento de cada resorte corresponde al valor del campo en un punto específico del espacio. El campo nos permite resumir la información

de todos los desplazamientos de los resortes en una sola descripción continua. Las oscilaciones de los resortes son análogas a las fluctuaciones de un campo cuántico, donde las ondas que se propagan a lo largo de la cadena se asocian a las partículas del campo (como los fotones en un campo electromagnético). Así, cuando hablamos de un campo en la teoría cuántica de campos QFT, nos referimos a una entidad capaz de vibrar y transmitir energía a través del espacio, de manera similar a cómo una perturbación se propaga a lo largo de nuestra cadena de resortes.

Este concepto de campo es fundamental para entender sistemas con un número  $N$  de partículas, como sucede en el modelo de Dicke. En el contexto del modelo de Dicke, donde se estudia la interacción entre un conjunto de átomos y un campo electromagnético dentro de una cavidad, podemos utilizar una representación que nos permita tratar tanto al campo electromagnético como a los átomos de manera uniforme, describiendo cómo se crean y aniquilan fotones (las partículas del campo) y cómo interactúan con los estados atómicos. Al pensar en términos de campos, se facilita la descripción de los modos de excitación del sistema, como los modos de fase y de amplitud, proporcionando una manera más completa y flexible de entender las transiciones y los fenómenos colectivos presentes en el sistema.

## 2.1. Segunda Cuantización

La segunda cuantización es un enfoque que nos permite describir las partículas a través de estados cuánticos. En lugar de describir cada partícula individualmente, la segunda cuantización introduce la idea de operadores de creación y aniquilación. Estos operadores nos permiten cambiar el número de partículas en un estado dado, lo que resulta particularmente útil para describir sistemas donde las partículas pueden ser creadas o destruidas [110-112].

Para entender este concepto, pensemos en el operador de número, que cuenta cuántas partículas ocupan un cierto estado. En la segunda cuantización, cada estado del sistema se describe mediante un número de ocupación, que indica cuántas partículas se encuentran en ese estado específico. Esto nos permite construir una descripción sencilla del espacio de estados de un sistema de muchas partículas. Por ejemplo, un estado podría ser descrito como  $|n\rangle$ , donde  $n$  indica el número de partículas presentes.

Este enfoque tiene varias ventajas. Primero, permite representar de manera concisa el espacio de excitaciones de sistemas con muchas partículas. Esto significa que podemos describir de forma eficiente el número de partículas en cada estado, lo cual es fundamental para estudiar las excitaciones del sistema. Segundo, los operadores de creación y aniquilación que se utilizan en la segunda cuantización obedecen a un conjunto de reglas simples de conmutación (en el caso de bosones) o anticommuta-



ción (en el caso de fermiones). Estas reglas facilitan la manipulación matemática de los estados de ocupación y la descripción de la dinámica del sistema.

Primero, consideremos las funciones de onda simétricas y antisimétricas. Partimos de un conjunto normalizado de funciones de onda  $|\lambda\rangle$ , que corresponden a los estados propios de un Hamiltoniano de una sola partícula, es decir,  $\hat{H}|\lambda\rangle = \epsilon_\lambda|\lambda\rangle$ , donde  $\epsilon_\lambda$  son los eigenvalores asociados a cada estado  $\lambda$ . A partir de esta base, podemos construir las funciones de onda para sistemas de dos partículas:  $\psi_F$  (correspondiente a fermiones) y  $\psi_B$  (correspondiente a bosones), que ocupan los niveles  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , respectivamente:

$$\psi_F(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x_1|\lambda_1\rangle\langle x_2|\lambda_2\rangle - \langle x_1|\lambda_2\rangle\langle x_2|\lambda_1\rangle), \quad \text{Función Antisimétrica,} \quad (2.1)$$

$$\psi_B(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x_1|\lambda_1\rangle\langle x_2|\lambda_2\rangle + \langle x_1|\lambda_2\rangle\langle x_2|\lambda_1\rangle), \quad \text{Función Simétrica.} \quad (2.2)$$

Combinamos las funciones de onda de las dos partículas en el espacio de posiciones  $x$  y los niveles de energía  $\lambda$ :

$$\psi_{F(B)}(x_1, x_2) = (\langle x_1| \otimes \langle x_2|) |\lambda_1, \lambda_2\rangle_{F(B)}, \quad y \quad |\lambda_1, \lambda_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\lambda_1\rangle \otimes |\lambda_2\rangle + \zeta |\lambda_2\rangle \otimes |\lambda_1\rangle), \quad (2.3)$$

donde  $\zeta = -1$  corresponde a fermiones y  $\zeta = +1$  a bosones. De manera más general, la función de onda para un sistema de  $N$  partículas se puede expresar como:

$$|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\rangle \equiv \frac{1}{N! \prod_{\lambda=0}^{\infty} n_\lambda!} \sum_P \zeta^{1-\text{sgn}P} |\lambda_{P1}\rangle \otimes |\lambda_{P2}\rangle \otimes \dots \otimes |\lambda_{PN}\rangle. \quad (2.4)$$

donde  $n_\lambda$  representa el número total de partículas en el estado  $\lambda$ . En el caso de fermiones, se debe cumplir con el principio de exclusión de Pauli, lo que impone la restricción  $n_\lambda \leq 1$ . La sumatoria se extiende sobre todas las  $N!$  permutaciones posibles de los números cuánticos, donde  $\text{sgn}(P)$  indica el signo de la permutación  $P$ . El factor  $1/\sqrt{N! \prod_{\lambda} n_\lambda!}$  asegura la normalización adecuada de la función de onda de muchos cuerpos.

### 2.1.1. Número de Ocupación y Espacio de Fock

Para ilustrar el concepto de número de ocupación, consideremos la Ec. 2.4, que involucra  $N$  partículas. Supongamos un estado representado como  $|1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots\rangle$ , donde hay 3 partículas en el estado 1, 2 en el estado 2, y así sucesivamente. Este estado se puede simplificar a  $|3, 2, 3, \dots\rangle$ , que indica el número de partículas en cada estado. Para los fermiones, el número de ocupación puede ser únicamente cero o uno.

Podemos emplear una representación basada en el número de ocupación en una nueva base para  $N$  partículas, especificando el estado como  $|n_1, n_2, \dots\rangle$ , donde

$\sum_i n_i = N$ . Cualquier estado  $|\psi\rangle$  en esta base puede expresarse mediante una superposición lineal:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots} c_{n_1, n_2} |n_1, n_2\rangle. \quad (2.5)$$

Debemos imponer la condición de un número fijo de partículas para asegurar un espacio de Hilbert que contenga estados con un número bien definido de partículas:

$$F \equiv \sum_{N=0}^{\infty} F^N. \quad (2.6)$$

El espacio  $F$  se conoce como el espacio de Fock, donde  $F^0$  representa el espacio vacío correspondiente al estado  $|0\rangle$ . Para construir una base del espacio  $F$ , consideramos los estados  $|n_1, n_2, \dots\rangle$  y aplicamos la condición de número de ocupación, que se expresa como  $\sum_i n_i = N$ .

### 2.1.2. Aspectos de la Segunda Cuantización

La representación del número de ocupación implica la simetrización y antisimetrización de un amplio conjunto de estados en cada operación cuántica. Para ello, introduciremos un conjunto de operadores lineales que actúan en el espacio de Fock,  $F \rightarrow F$ :

$$\hat{a}_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle \equiv \sqrt{n_i + 1} \zeta^{s_i} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots\rangle, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Debido al principio de exclusión de Pauli, en el caso fermiónico, la aplicación del operador  $\hat{a}_i^\dagger$  en un estado donde  $n_i = 1$  aniquila dicho estado. Esta característica nos permite generar el estado base del espacio de Fock  $F$  al aplicar repetidamente los operadores  $\hat{a}_i^\dagger$  al estado de vacío  $|0\rangle$ . La aplicación de la ecuación (2.7) conduce a:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \prod_i \frac{1}{\sqrt{n_i!}} (\hat{a}_i^\dagger)^{n_i} |0\rangle. \quad (2.8)$$

A diferencia de la expresión (2.4), los estados de Fock se generan mediante la aplicación de un conjunto de operadores lineales. Desde una perspectiva física, al aplicar  $N$  operadores  $\hat{a}^\dagger$  al estado vacío, se obtiene un estado en su  $N$ -ésimo nivel. Por esta razón, es común referirse al operador  $\hat{a}^\dagger$  como operador de creación.

Por otro lado, al considerar los operadores  $\hat{a}_i^\dagger$  y  $\hat{a}_j^\dagger$  con  $i \neq j$ , y aplicando la relación (2.8), se obtiene

$$\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger - \zeta \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_i^\dagger |n_1, n_2, \dots\rangle = 0.$$

Para cada vector base, esta relación implica que

$$[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger]_\zeta = 0 \quad \text{y} \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j]_\zeta = 0,$$

es decir:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \zeta\hat{A}\hat{B}, \quad (2.9)$$

siendo  $\zeta = 1$  el conmutador y  $\zeta = -1$  el anticonmutador. Notamos que los operadores deben ser Hermitianos, por tanto, analizando los elementos de matriz:

$$\langle n_1, \dots, n_i, \dots | \hat{a}_i^\dagger | n'_1, \dots, n'_i, \dots \rangle = \sqrt{n'_i + 1} \zeta^{s'_i} \delta_{n_1 n'_1} \dots \delta_{n_i, n_i+1}, \quad (2.10)$$

$$\langle n'_1, \dots, n'_i, \dots | \hat{a}_i | n_1, \dots, n_i, \dots \rangle^* = \sqrt{n_i} \zeta^{s_i} \delta_{n'_1 n_1} \dots \delta_{n'_i, n_i-1}. \quad (2.11)$$

Los operadores de creación  $\hat{a}^\dagger: F^N \rightarrow F^{N+1}$  incrementan el número de partículas por uno, mientras que los operadores de aniquilación  $F^N \rightarrow F^{N-1}$  lo bajan en uno. Resumiendo se tiene

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]_\zeta = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j]_\zeta = 0 \quad \text{y} \quad [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger]_\zeta = 0. \quad (2.12)$$

## 2.2. Integral de Trayectoria de Feynman

Con los fundamentos de la segunda cuantización establecidos, es crucial reconocer cómo este formalismo se interrelaciona con otras técnicas dentro de la teoría cuántica. Una de estas herramientas es la integral de trayectoria, que proporciona un enfoque complementario para describir sistemas cuánticos. Este método nos permite visualizar el comportamiento de las partículas como trayectorias en el espacio de configuración, ofreciendo un marco intuitivo para comprender las dinámicas cuánticas.

En esta sección, desarrollaremos el enfoque de la integral de trayectoria de Feynman, explorando su construcción general y estableciendo las conexiones entre la mecánica cuántica y clásica. Además, examinaremos el análisis de fase estacionaria, que resulta fundamental para comprender el comportamiento cuántico en diferentes contextos.

### 2.2.1. Formalismo Integral de Trayectoria

La formulación de la integral de trayectoria presenta varias ventajas significativas [110]:

- A diferencia de la formulación canónica de la mecánica cuántica, que puede dificultar la recuperación del límite clásico, la integral de trayectoria permite

observar este límite de manera más clara y directa.

- Sirve como un prototipo para integrales de campo en dimensiones superiores. De hecho, incluso la integral de trayectoria en dimensión cero resulta relevante para diversas aplicaciones en la física de muchos cuerpos.
- Es especialmente útil en sistemas físicos donde los elementos están fuertemente correlacionados y donde existe un número macroscópicamente grande de grados de libertad, lo que puede dar lugar a la formación de variables colectivas.

El formalismo de la integral de trayectoria se basa en un enfoque variacional. Este enfoque consiste en que las trayectorias clásicas permitidas en el espacio de configuración minimizan una acción funcional, que se expresa como una integral de camino sobre un conjunto de funciones de campo definidas en dicho espacio. Además, se postula que la conservación de la energía es una restricción inherente al sistema.

En el contexto de la mecánica cuántica, el principio de incertidumbre de Heisenberg establece que no es posible conocer simultáneamente con precisión pares de variables conjugadas, como la posición y el momento, o la energía y el tiempo. Esto implica que la energía puede experimentar variaciones dentro de ciertos límites durante intervalos cortos sin que se viole la conservación de la energía a nivel macroscópico. Como resultado, no se pueden definir trayectorias precisas de posición y momento como en la mecánica clásica. En este contexto cuántico, el principio de mínima acción se sustituye por la integral de camino de Feynman, que suma las contribuciones de todas las trayectorias posibles.

Un fenómeno relacionado es el tunelaje cuántico, donde una partícula puede atravesar una barrera de potencial que no podría superar clásicamente. Al cuantificar este proceso, introducimos un factor de amortiguamiento que representa la probabilidad de que ocurra el efecto túnel a medida que la barrera potencial se vuelve más ancha o más alta [110]:

$$\sim e^{-\int dx p/\hbar}, \quad p = \sqrt{2m(E - V)}. \quad (2.13)$$

Para examinar la probabilidad de que un sistema experimente (ejemplo efecto túnel) y evolucione de un estado a otro, es necesario considerar todas las posibles trayectorias o caminos que conectan ambos estados. Para este propósito, utilizaremos el propagador, que describe la amplitud de transición de una partícula de un estado a otro.

¿Podemos relacionar la amplitud  $A$  para la propagación entre dos puntos cualesquiera en el espacio de coordenadas no solo a lo largo de una trayectoria clásica, sino a través de una variedad de rutas cercanas? Para ello, consideramos una amplitud cuántica de la forma  $A \sim \sum_{x(t)} e^{iS(x)/\hbar}$ , donde  $\sum_{x(t)}$  denota la suma sobre todas las

posibles trayectorias con las condiciones iniciales del sistema, y  $S$  es la acción clásica asociada a cada trayectoria. Esta expresión nos permite recuperar la información cuántica completa del sistema, al tener en cuenta todas las trayectorias posibles.

En el límite clásico, cuando  $\hbar \rightarrow 0$ , la amplitud cuántica se ve cada vez más dominada por la contribución de la trayectoria clásica  $x_{cl}(t)$ . Esto se debe a que las trayectorias no extremales están acompañadas por oscilaciones rápidas de la fase  $e^{iS/\hbar}$ . Estas oscilaciones, debido a su variación rápida, tienden a cancelarse entre sí al promediarse, resultando en una contribución neta cercana a cero. Por otro lado, las trayectorias clásicas, que son soluciones de las ecuaciones clásicas del movimiento, minimizan la acción  $S$  y, por lo tanto, tienen fases que varían más lentamente, haciendo que su contribución a la suma sea significativa.

La fase  $S(x)/\hbar$  permite la superposición coherente de las diferentes trayectorias posibles del sistema. Esta superposición de fases es la que permite la interferencia cuántica entre distintas trayectorias [4]. A diferencia del comportamiento clásico, donde solo una trayectoria es relevante, en el contexto cuántico todas las trayectorias contribuyen al proceso de transición, y la interferencia constructiva o destructiva entre sus fases determina la probabilidad final de que el sistema pase de un estado a otro.

### 2.2.2. Construcción de la Integral de Trayectoria

La información de un sistema cuántico está contenida en el operador de evolución, que describe cómo el estado del sistema cambia a lo largo del tiempo:

$$|\Psi(t')\rangle = \hat{U}(t', t)|\Psi(t)\rangle, \quad \hat{U}(t', t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t'-t)}\theta(t' - t), \quad (2.14)$$

La evolución temporal de un sistema cuántico se describe mediante el operador de evolución  $\hat{U}(t' - t)$ , que gobierna la dinámica del sistema desde un tiempo inicial  $t$  hasta un tiempo final  $t'$ . Este operador actúa sobre los estados del sistema y está determinado por el Hamiltoniano  $\hat{H}$ , que encierra toda la información sobre la energía y las interacciones presentes en el sistema.

Para garantizar la causalidad, es fundamental que los efectos en el sistema no puedan preceder a sus causas. Esto se introduce matemáticamente mediante la función de Heaviside,  $\Theta(t' - t)$ , que impone la condición de que  $t' > t$ , asegurando que el sistema evoluciona de manera consistente con el orden temporal. En la representación espacial, esta causalidad se manifiesta en cómo se integran las trayectorias posibles entre dos puntos en el espacio-tiempo. Cada camino que contribuye a la integral de trayectoria está influenciado por el hecho de que la propagación solo puede ocurrir hacia adelante en el tiempo.

La causalidad en la evolución temporal está estrechamente relacionada con el teo-

rema de Wick [110, 113], que permite evaluar integrales de camino y funciones de correlación en la teoría cuántica de campos. Este teorema reorganiza productos de operadores cuánticos en términos de sumas de sus contracciones, lo que facilita el cálculo de las amplitudes de transición. Una contracción se refiere a la forma simplificada de un par de operadores cuando se consideran sus propiedades de conmutación o anticonmutación, capturando la correlación entre ellos. Las contracciones que respetan el orden temporal aseguran que las contribuciones provengan de eventos donde la causa precede al efecto, lo cual es fundamental para una evolución física coherente. Las demás contribuciones, que no respetan este orden, tienden a cancelarse debido a las oscilaciones rápidas en su fase, por lo que no se consideran relevantes en el cálculo final. Esto garantiza que solo las trayectorias compatibles con la causalidad contribuyan de manera significativa a la integral de trayectoria.

Siendo de esta forma podemos expresar la representación espacial de la siguiente forma:

$$\Psi(q', t') = \langle q' | \Psi(t') \rangle = \langle q' | \hat{U}(t', t) \Psi(t) \rangle = \int dq U(q', t'; q, t) \Psi(q, t), \quad (2.15)$$

$$U(q', t'; q, t) = \langle q' | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t'-t)} | q \rangle \theta(t' - t), \quad (2.16)$$

La expresión  $U(q', t'; q, t)$  define la componente  $(q', q)$  del operador de evolución temporal. Este elemento de la matriz representa la amplitud de probabilidad de que una partícula se propague desde el punto  $q$  hasta el punto  $q'$  en el espacio de fase durante un intervalo de tiempo  $t' - t$ , y se conoce como el propagador. En lugar de abordar directamente el problema de la ecuación de Schrödinger, que describe la evolución del sistema en un tiempo  $t$ , es más conveniente analizar primero la evolución temporal en intervalos infinitesimales:

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \left[ e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} \right]^N. \quad (2.17)$$

Si  $\Delta t$  es mucho menor que los valores esperados, el valor de los exponentes se hacen eventualmente pequeños y se pueden tratar perturbativamente:

$$e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar} = e^{-i\hat{T}\Delta t/\hbar} e^{-i\hat{V}\Delta t/\hbar} + \mathcal{O}(\Delta t^2), \quad (2.18)$$

donde  $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ ,  $\hat{T} = \hat{p}^2/2m$  es el operador de energía cinética y  $\hat{V}$  es el operador potencial de un cuerpo. Desarrollando el operador de evolución en la Ec. [2.16]:

$$\langle q_f | \left[ e^{-i\hat{H}\Delta t/N} \right]^N | q_i \rangle \simeq \langle q_f | e^{-i\hat{T}\Delta t/\hbar} e^{-i\hat{V}\Delta t/\hbar} \dots e^{-i\hat{T}\Delta t/\hbar} e^{-i\hat{V}\Delta t/\hbar} | q_i \rangle, \quad (2.19)$$

considerando la identidad del operador de evolución:

$$\mathbb{I} = \int dq_n \int dp_n |q_n\rangle \langle q_n| p_n\rangle \langle p_n|, \quad (2.20)$$

donde  $|q_n\rangle$  y  $|p_n\rangle$  representan el conjunto de estados propios de la posición y el momento y  $n = 1, \dots, N$  son los segmentos a través del tiempo del operador de evolución. Y considerando la definición de onda plana:

$$\langle q|p\rangle = \langle p|q\rangle^* = \frac{e^{iqp/\hbar}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (2.21)$$

el operador de evolución Ec. 2.19, toma la forma:

$$\langle q_f|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q_i\rangle \simeq \int \prod_{\substack{n=1 \\ q_N=q_f \\ q_0=q_i}}^{N-1} dq_n \prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{-i\frac{t}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \left( V(q_n + T(p_{n+1}) - p_{n+1} \frac{q_{n+1} - q_n}{t}) \right)}. \quad (2.22)$$

En cada paso del tiempo  $t_n = n\Delta t$ , integramos sobre el par de coordenadas  $(q_n, p_n)$ , parametrizando el espacio fase clásico y así formando una discretización de  $N$  puntos en una trayectoria de ese espacio. Al considerar  $N \rightarrow \infty$  manteniendo fijo  $t = N\Delta t$ , tendremos un intervalo de tiempo total  $[0, t]$ . Por lo tanto:

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \mapsto \int_0^t dt', \quad \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t} \mapsto \partial_{t'} q|_{t'=t_n} \equiv \dot{q}|_{t'=t_n}, \quad (2.23)$$

$$[V(q_n) + T(p_{n+1})] \mapsto [T(p|_{t'=t_n} + V(q|_{t'=t_n}))] \equiv H(x_{t'=t_n}), \quad (2.24)$$

y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{\substack{n=1 \\ q_N=q_f \\ q_0=q_i}}^{N-1} dq_n \prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \equiv \int_{q(0)=q_i}^{q(t)=q_f} Dx, \quad (2.25)$$

por lo tanto, el operador de evolución Ec. 2.22:

$$\langle q_f|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q_i\rangle = \int_{q(0)=q_i}^{q(t)=q_f} Dx e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' (p\dot{q} - H(pq))}. \quad (2.26)$$

La Ec. 2.26 representa el propagador entre dos estados  $q_i$  y  $q_f$ . Procedamos a desarrollar el Hamiltoniano de la integral de trayectoria con el fin de demostrar que puede ser representado en términos de un Lagrangiano:

$$\langle q_f|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q_i\rangle = \int_{q(0)=q_i}^{q(t)=q_f} Dq e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' V(q)} \int Dp e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left( \frac{p^2}{2m} - pq \right)},$$

$$\langle q_f|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q_i\rangle = \int_{q(0)=q_i}^{q(t)=q_f} Dq e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' L(q, \dot{q})}, \quad (2.27)$$

donde  $Dq = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{Nm}{it2\pi\hbar}} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n$  denota la medida funcional de la integral en  $q$ , y  $L(q, \dot{q}) = m\dot{q}^2/2m - V(q)$  representa el lagrangiano clásico. Al final, con [2.27](#) podemos conseguir el propagador que evoluciona a través del tiempo de un estado inicial  $q_i$  a un estado final  $q_f$ .

### 2.2.3. Enfoque Semiclásico desde la Integral de Trayectoria

El enfoque semiclásico que utiliza la integral de trayectoria combina elementos de la mecánica clásica y cuántica, permitiéndonos establecer una conexión entre ambos campos. Al aplicar esta integral, podemos recuperar los resultados clásicos en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ , lo cual es esencial para comprender la naturaleza de los sistemas físicos. En este contexto, las trayectorias clásicas emergen como soluciones a las ecuaciones de movimiento del sistema, ofreciendo una interpretación intuitiva de los fenómenos cuánticos a partir de comportamientos clásicos bien establecidos.

Este enfoque semiclásico también se utiliza en la mecánica estadística para analizar sistemas térmicos y calcular propiedades termodinámicas, como la función de partición y la energía libre, todo ello a través de las trayectorias clásicas. Dado que las integrales de trayectoria son funcionales de la acción clásica, las configuraciones extremales son soluciones a las ecuaciones clásicas de movimiento [\[110\]](#). Las condiciones de frontera, como  $q(0) = q_i$  y  $q(t) = q_f$ , son esenciales para garantizar una evolución coherente del sistema desde un estado inicial hasta un estado final.

Un aspecto relevante del enfoque semiclásico es el análisis de fase estacionaria, que nos permite identificar y comprender el comportamiento de los sistemas alrededor de puntos críticos. Es crucial destacar que el cumplimiento de ciertas condiciones por las configuraciones de fase estacionarias clásicas no implica que la mecánica cuántica sea irrelevante. Por el contrario, el estudio del comportamiento local en torno a un punto crítico es esencial para entender las fluctuaciones en su vecindad.

Este análisis implica investigar el entorno del punto de fase estacionaria, lo que nos ayuda a discernir la naturaleza del sistema y a determinar si el punto crítico representa un máximo, un mínimo o un punto de silla. El análisis de fase estacionaria consta del siguiente procedimiento [\[110\]](#):

1. Identificar los puntos de fase estacionaria, asegurando que la derivada funcional sea igual a cero:

$$DF_x = 0 \leftrightarrow \forall : \left. \frac{\delta F[x]}{\delta x(t)} \right|_{x=\bar{x}} = 0. \quad (2.28)$$

2. Expandir la funcional en una serie de Taylor alrededor de  $\bar{x}$

$$F[x] = F[\bar{x} + y] = F[\bar{x}] + \frac{1}{2} \int dt \int dt' y(t') A(t, t') y(t) + \dots, \quad (2.29)$$



donde  $A(t', t) = \frac{\delta^2 F[x]}{\delta x(t) \delta x(t')} \Big|_{x=\bar{x}}$  representa la segunda derivada funcional.

3. Verificar que el operador  $\hat{A} \equiv \{A(t', t)\}$  sea positivo definido.

4. Cuando existen varias configuraciones de fase estacionaria,  $\bar{x}_i$ , la integral sobre todas las trayectorias puede aproximarse de la siguiente manera:

$$\int Dx e^{-F[x]} \simeq \sum_i e^{-F[\bar{x}_i]} \det \left( \frac{\hat{A}_i}{2\pi} \right)^{-1/2}. \quad (2.30)$$

En esta expresión, cada término de la suma representa una contribución de las diferentes configuraciones de fase estacionaria al valor total de la integral. La presencia de la función  $-F[\bar{x}_i]$  indica que las configuraciones que minimizan la funcional  $F$  son las más significativas en términos de su contribución al valor de la integral.

La aplicación del lagrangiano a la integral de trayectoria se realiza de manera directa. En este contexto, el campo de configuración extremal  $\bar{q}(t)$  se asocia con una solución clásica del lagrangiano, lo que nos lleva a identificar  $\bar{q}(t) \equiv q_{\text{cl}}(t)$ . Consideramos ahora la desviación  $r(t) = q(t) - q_{\text{cl}}(t)$ , que representa la diferencia entre la trayectoria general  $q(t)$  y la trayectoria clásica  $q_{\text{cl}}(t)$ . Utilizando esta notación, la amplitud de transición puede ser expresada como:

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | q_i \rangle \simeq e^{iS[q_{\text{cl}}]/\hbar} \int Dr e^{\frac{i}{2\hbar} \int_0^t dt' \int dt'' r(t') \frac{\delta^2 S[q]}{\delta q(t') \delta q(t'')}} \Big|_{q=q_{\text{cl}}r(t'')}, \quad (2.31)$$

que representa la aproximación gaussiana de la integral de trayectoria. En esta aproximación, la integral sobre  $r$  captura las fluctuaciones alrededor de la trayectoria clásica, y su forma gaussiana indica que las desviaciones pequeñas alrededor de la solución clásica son las que contribuyen de manera significativa al resultado final de la integral. Este análisis revela cómo las trayectorias que respetan la dinámica clásica dominan el comportamiento del sistema, incluso cuando se consideran múltiples configuraciones de fase estacionaria.

## 2.2.4. Integral de Trayectoria y Mecánica Estadística

En esta sección, exploraremos el concepto de la integral de trayectoria desde la perspectiva de un modelo continuo unidimensional clásico, tomando como ejemplo una cuerda flexible. Imaginemos que la cuerda está sometida a una tensión constante y confinada dentro de un potencial, como se ilustra en la Fig. [2.1](#):

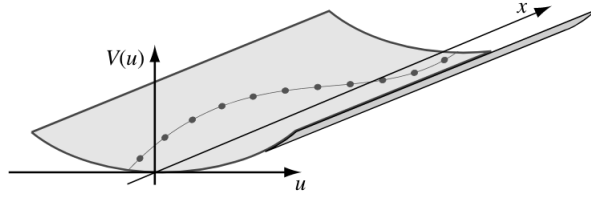


Figura 2.1: Ilustración de una cuerda flexible en un potencial  $V(u)$ . Recuperado de Ref [110].

Supongamos que la densidad de masa de la cuerda es alta, lo que implica que las fluctuaciones son asintóticamente lentas. Estas fluctuaciones transversales están influenciadas tanto por la tensión de la cuerda como por el potencial externo que la rodea. Cuando el desplazamiento transversal  $u(x)$  es pequeño, la energía potencial almacenada en la cuerda se puede descomponer en dos componentes: una correspondiente a la tensión de la cuerda y otra asociada al potencial externo.

Para analizar la fluctuación transversal  $dx$  y  $du$  en relación con la tensión de la cuerda, consideremos la proyección de una porción específica de la cuerda en función de su longitud:

$$\delta V_{\text{tensión}} = \sigma \left[ \sqrt{dx^2 + du^2} - dx \right] = \sigma \left[ \sqrt{dx^2 \left( 1 + \frac{du^2}{dx^2} \right)} - dx \right],$$

donde  $\sigma$  representa la tensión de la cuerda. Utilizando la aproximación en serie de Taylor, podemos simplificar esta expresión:

$$\delta V_{\text{tensión}} = \sigma dx \frac{(\partial_x u)^2}{2}. \quad (2.32)$$

A continuación, integramos sobre la longitud de la cuerda para obtener la contribución total de la energía debida a la tensión:

$$V_{\text{tensión}}[\partial_x u] \equiv \int \delta V_{\text{tensión}} = \frac{1}{2} \int_0^L dx \sigma (\partial_x u(x))^2. \quad (2.33)$$

Ahora, consideremos el potencial externo, que se define como:

$$V_{\text{externo}}[u] \equiv \int_0^L dx V(u(x)). \quad (2.34)$$

La energía total del sistema se puede expresar como la suma de las energías de tensión y externa:

$$V = \int_0^L dx \left[ \frac{\sigma}{2} (\partial_x u)^2 + V(u) \right]. \quad (2.35)$$

En mecánica estadística, las propiedades de equilibrio de un sistema pueden determinarse a través de una función de partición en la distribución canónica, que se expresa como:

$$Z = \text{tr}[e^{-\beta V}],$$

donde  $\text{tr}$  denota la suma sobre todas las configuraciones posibles del sistema y  $V$  es la energía potencial del funcional. Al aplicar la transformación  $\text{tr} \rightarrow \int Du$ , reemplazamos la traza de los operadores por una integral funcional que recorre todas las configuraciones posibles de la cuerda  $u(x)$  en el intervalo  $x \in [0, L]$ . Esto implica sumar sobre todas las trayectorias posibles de la cuerda, lo que da lugar a la siguiente expresión para la función de partición de la cuerda:

$$Z = \int Du e^{-\beta \int_0^L dx \left[ \frac{\sigma}{2} (\partial_x u)^2 + V(u) \right]}. \quad (2.36)$$

Es importante destacar que la función de partición del sistema clásico coincide con la amplitud en mecánica cuántica, dada por:

$$Z = \int dq \langle q | e^{-it\hat{H}/\hbar} | q \rangle \Big|_{\substack{\hbar=1/\beta \\ t=-iL}}. \quad (2.37)$$

La introducción de tiempos imaginarios en el contexto de la mecánica estadística simplifica los cálculos. En particular, aplicaremos la aproximación de Wick, que consiste en realizar una transformación de tiempos reales a tiempos imaginarios mediante la relación  $t' \rightarrow -i\tau' \in [0, -i\tau]$ , donde  $\tau$  representa un tiempo imaginario. Bajo esta transformación, la energía cinética se reescribe como:

$$(\partial t' q)^2 \rightarrow -(\partial \tau q)^2.$$

La adopción de tiempos imaginarios establece un puente entre la mecánica estadística clásica y cuántica, y es fundamental para entender fenómenos cuánticos. Por ejemplo, en el contexto de la función de partición de una sola partícula en un sistema cuántico, se puede expresar como:

$$Z = \text{tr} [e^{-\beta \hat{H}}] = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle. \quad (2.38)$$

En este caso, la función de partición se interpreta como una traza sobre la amplitud de transición, que es el promedio del operador de evolución  $\langle q|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|q\rangle$ , evaluado en tiempos imaginarios  $t = -i\hbar\beta$ . Notamos que la traza suma sobre todas las configuraciones posibles de los estados cuánticos, garantizando la conservación de la probabilidad, ya que la suma de todas las probabilidades de los estados debe ser igual a 1 [114].

Por otro lado, estudiar la función de partición de muchos cuerpos, nos proporciona una descripción cuantitativa de cómo se distribuyen las partículas en los distintos estados de un sistema, siendo clave para comprender las interacciones entre partículas y el comportamiento del sistema en equilibrio térmico con su entorno. Hemos discutido previamente la consideración de una partícula con un solo grado de libertad, representado por la coordenada  $q$ . Mediante la integral de trayectoria, integramos sobre todas las configuraciones posibles dependientes del tiempo,  $q(t)$ , lo que nos lleva a la amplitud de transición entre estados cuánticos [4], es decir, la evolución de la coordenada  $q$ .

En la teoría cuántica de campos, se consideran grados de libertad continuos  $\phi(x)$ , donde  $x$  parametriza alguna variedad base. En este contexto, la trayectoria implica la integración sobre una copia única de estos objetos en cada instante de tiempo, lo que se traduce en la integración sobre superficies generalizadas, mapeando el espacio-tiempo  $(d + 1)$  hacia la variedad de campos, donde  $(x, t) \mapsto \phi(x, t)$  [110], siendo  $d$  el número de dimensiones espaciales y  $t$  el tiempo.

Para calcular la traza del operador de evolución en una base adecuada, es conveniente expresar los estados del sistema en términos de los operadores de creación y aniquilación. Los estados propios de estos operadores se conocen como estados coherentes [115]. Este enfoque nos permite definir una base adecuada para realizar la traza. En particular, al expresar la acción en términos de la segunda cuantización y aplicar la aproximación de fase estacionaria, los estados coherentes emergen como la base natural para el análisis.

## 2.3. Estados Coherentes

Los estados coherentes son un tipo especial de estados cuánticos que se encuentran en la mecánica cuántica y en la teoría cuántica de campos. Se definen como los estados que minimizan la relación de incertidumbre de Heisenberg y se caracterizan por tener propiedades similares a las de las ondas clásicas. Matemáticamente, un estado coherente se puede expresar como una superposición de estados del oscilador armónico, lo que significa que su comportamiento se asemeja al de una partícula clásica en movimiento.

La utilidad de los estados coherentes radica en su capacidad para describir siste-

mas cuánticos en situaciones donde se requiere un tratamiento semiclassical, como en la integral de trayectoria. En este contexto, los estados coherentes permiten representar trayectorias en el espacio de fases y facilitan el cálculo de amplitudes de transición. Al considerar trayectorias que se asemejan a las trayectorias clásicas, los estados coherentes simplifican los cálculos en la formulación de la mecánica cuántica, especialmente cuando se analizan sistemas con muchos grados de libertad.

### 2.3.1. Estados Coherentes de Bosones

¿Cómo son los eigenestados bosónicos  $|\phi\rangle$  en la base de Fock generada por los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ ?

En el espacio de Fock, un eigenestado bosónico  $|\phi\rangle$ , se puede expandir de la siguiente manera:

$$|\phi\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots} C_{n_1, n_2, \dots} |n_1, n_2, \dots\rangle, \quad (2.39)$$

donde

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_1} (\hat{a}_2^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}} \dots |0\rangle. \quad (2.40)$$

En esta expresión,  $\hat{a}_i^\dagger$  crea un bosón en un estado  $i$ ,  $C_{n_1, n_2, \dots}$  son los coeficientes de expansión y  $|0\rangle$  representa el estado de vacío. El estado de muchos cuerpos  $|n_1, n_2, \dots\rangle$ , está asociado al conjunto de números de ocupación:  $n_1$  partículas están en el estado  $|1\rangle$ ,  $n_2$  partículas en el estado  $|2\rangle$ , etc. En general,  $|\phi\rangle$  puede contener una superposición de estados base que tienen diferentes números de partículas. Si el número de partículas mínimo en el estado  $|\phi\rangle$  es  $n_0$  en consecuencia al actuar  $\hat{a}_i^\dagger$  sobre ese estado el número de partículas será  $n_0 + 1$ .

Los estados coherentes se expresan como:

$$|\phi\rangle \equiv \exp\left(\sum_i \phi_i \hat{a}_i^\dagger\right) |0\rangle. \quad (2.41)$$

Estos estados son eigenestados de la siguiente manera:

$$\hat{a}_i |\phi\rangle = \phi_i |\phi\rangle. \quad (2.42)$$

A continuación, se presentan algunas propiedades de los estados coherentes bosónicos que son relevantes para la construcción de la integral de trayectoria:

- A partir del Hermitiano conjugado de la ecuación anterior, se obtiene un conjunto de operadores de creación:

$$\langle \phi | \hat{a}_i^\dagger = \langle \phi | \bar{\phi}_i, \quad (2.43)$$

siendo  $\bar{\phi}_i$  el complejo conjugado de  $\phi_i$ .

- La expansión de Taylor de la Ec. (2.41) muestra que el operador de creación actuando sobre  $|\phi\rangle$  es:

$$\hat{a}_i^\dagger |\phi\rangle = \partial_{\phi_i} |\phi\rangle. \quad (2.44)$$

- La superposición entre dos estados coherentes está dado por:

$$\langle \theta | \phi \rangle = \exp \left( \sum_i \bar{\theta}_i \phi_i \right). \quad (2.45)$$

Esto implica que la norma de un estado coherente se expresa como:

$$\langle \phi | \phi \rangle = \exp \left( \sum_i \bar{\phi}_i \phi_i \right). \quad (2.46)$$

- Los estados coherentes forman un conjunto sobrecompleto en el espacio de Fock, lo que significa que son más numerosos de lo necesario para describir cualquier estado en dicho espacio:

$$\int \prod_i \frac{d\bar{\phi}_i d\phi_i}{\pi} e^{-\sum_i \bar{\phi}_i \phi_i} |\phi\rangle \langle \phi| = \mathbb{I}_F, \quad (2.47)$$

siendo  $d\bar{\phi}_i d\phi_i = d\text{Re}\phi_i d\text{Im}\phi_i$  y  $\mathbb{I}_F$  siendo una forma de representar el elemento diferencial en términos de las partes real e imaginaria de los números complejos y  $\mathbb{I}_F$  representa el operador unidad en el espacio de Fock.

Para más detalles sobre las propiedades de los estados coherentes bosónicos, ver Apéndice [A](#).

### 2.3.2. Estados Coherentes de Fermiones

En sistemas fermiónicos, los operadores de aniquilación están caracterizados por un conjunto de estados coherentes que satisfacen la relación:

$$a_i |\eta\rangle = \eta_i |\eta\rangle, \quad (2.48)$$

donde  $\eta_i$  es el eigenvalor correspondiente. Aunque la estructura es similar a la expresada en la Ec. (2.42), la principal distinción radica en la anticonmutación de los operadores. Esto se manifiesta en la relación:  $[\hat{a}_i, \hat{a}_j]_+ = 0$ ,  $i \neq j$ , lo que implica

que los valores propios  $\eta_i$  también anticonmutan, siendo tratados como variables de Grassmann, que son números complejos no conmutativos [110]:

$$\eta_i \eta_j = -\eta_j \eta_i. \quad (2.49)$$

Para ello, construiremos un álgebra  $\mathcal{A}$  considerando un conjunto de elementos u operadores  $\eta_i \in \mathcal{A}$ , donde  $i = 1, \dots, N$ , y se imponen las siguientes reglas:

- Los elementos  $\eta_i$  pueden sumarse y multiplicarse por números complejos:

$$c_0 + c_i \eta_i + c_j \eta_j \in \mathcal{A}, \quad c_0, c_i, c_j \in \mathbb{C}, \quad (2.50)$$

donde  $\mathcal{A}$  representa un vector en el espacio complejo.

- El producto  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es asociativo y anticonmutativo, además de obedecer las reglas de anticonmutación dadas en la Ec. (2.49).

Utilizando estas propiedades, el conjunto de todas las combinaciones lineales de  $\mathcal{A}$ :

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N c_{i_1, \dots, i_n} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_n}, \quad c_0, c_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{C}, \quad (2.51)$$

completa un álgebra asociativa de dimensión finita, conocida como álgebra de Grassmann.

- La función de los números de Grassmann se define mediante una expansión de Taylor:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^k \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial \xi_{i_1} \cdots \partial \xi_{i_n}} \Big|_{\xi=0} \xi_{i_n} \cdots \xi_{i_1}, \quad \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{A}, \quad (2.52)$$

donde  $f$  es una función analítica.

- La integración sobre las variables de Grassmann se define como:

$$\int d\eta_i = 0, \quad \int d\eta_i \eta_i = \mathbb{I}. \quad (2.53)$$

Tomando en cuenta las propiedades del álgebra  $\mathcal{A}$ , procederemos a la construcción de los estados coherentes fermiónicos. Consideramos que los operadores fermiónicos y los generadores de Grassmann anticonmutan, lo que se expresa como:

$$[\eta_i, \hat{a}_j]_+ = \eta_i \hat{a}_j + \hat{a}_j \eta_i = 0. \quad (2.54)$$

Los estados coherentes fermiónicos se definen de la siguiente manera:

$$|\eta\rangle = \exp\left(-\sum_i \eta_i \hat{a}_i^\dagger\right) |0\rangle. \quad (2.55)$$

En el contexto de las variables de Grassmann, el adjunto del estado coherente fermiónico está dado por:

$$\langle\eta| = \langle 0| \exp\left(-\sum_i \hat{a}_i \bar{\eta}_i\right) = \langle 0| \exp\left(\sum_i \bar{\eta}_i \hat{a}_i\right). \quad (2.56)$$

En términos generales, al sintetizar los estados coherentes, se observa que, para los bosones ( $\zeta = 1, \psi_i \in \mathbb{C}$ ) y los fermiones ( $\zeta = -1, \psi_i \in \mathcal{A}$ ), la medida de integración se expresa como:

$$d(\bar{\psi}, \psi) \equiv \prod_i \frac{d\bar{\psi}_i d\psi_i}{\pi^{(1+\zeta)/2}}. \quad (2.57)$$

Definición	$ \psi\rangle = \exp\left(\zeta \sum_i \psi_i \hat{a}_i^\dagger\right)  0\rangle$
Acción de $\hat{a}_i$	$\hat{a}_i  \psi\rangle = \psi_i  \psi\rangle, \quad \langle\psi  \hat{a}_i = \partial_i \langle\psi $
Acción de $\hat{a}_i^\dagger$	$\hat{a}_i^\dagger  \psi\rangle = \zeta \partial_i  \psi\rangle, \quad \langle\psi  \hat{a}_i^\dagger = \langle\psi  \bar{\psi}_i$
Superposición	$\langle\psi'  \psi\rangle = \exp\left(\sum_i \bar{\psi}'_i \psi_i\right)$
Completud	$\int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i  \psi\rangle \langle\psi } = \mathbb{I}_F.$

### 2.3.3. Construcción de la Integral de Trayectoria para $Z$

Partiendo de la definición de los estados coherentes tanto bosónicos como fermiónicos, podemos llevar a cabo la construcción general de la integral de trayectoria.

En un sistema a temperatura finita, el promedio de la función de correlación se verá ponderado por la distribución de Gibbs, que se define como

$$\hat{\rho} \equiv \frac{e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}}{Z}.$$



Esta distribución caracteriza la función de partición cuántica:

$$Z = \text{tr} e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \sum_n \langle n | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n \rangle, \quad (2.58)$$

donde  $\beta \equiv \frac{1}{T}$  y  $\mu$  denota el potencial químico, la suma se extiende sobre un conjunto completo de estados  $\{|n\rangle\}$  en el espacio de Fock.

Para expresar la función de partición en términos de los estados coherentes, incorporamos la identidad utilizada en la Ec. (2.47), utilizando  $\bar{\psi}$  y  $\psi$  como los estados coherentes. Así, se obtiene la siguiente expresión para la función de partición:

$$Z = \int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i} \sum_n \langle n | \psi \rangle \langle \psi | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n \rangle. \quad (2.59)$$

Dado que  $\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{I}_F$ , podemos conmutar el factor  $\langle n | \psi \rangle$ , respetando el signo de la estructura fermiónica. Para bosones, se tiene que  $\langle n | \psi \rangle \langle \psi | n \rangle = \langle \psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle$ , mientras que para fermiones se da que  $\langle n | \psi \rangle \langle \psi | n \rangle = \langle -\psi | n \rangle \langle n | \psi \rangle$ . Considerando el signo como  $\zeta$ , la función de partición se define como:

$$\begin{aligned} Z &= \int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i} \sum_n \langle \zeta \psi | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n \rangle \langle n | \psi \rangle \\ &= \int d(\bar{\psi}, \psi) e^{-\sum_i \bar{\psi}_i \psi_i} \langle \zeta \psi | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.60)$$

con lo cual se ha establecido un esquema general para la integral de trayectoria.

## 2.4. Conclusiones

Con esto hemos ampliado la perspectiva sobre las herramientas que podemos utilizar para realizar las aproximaciones semiclásicas en el modelo de Dicke y poder identificar los modos de fase y amplitud cuando se considera la anisotropía y las interacciones materiales. Al aplicar técnicas semiclásicas, podemos investigar no solo los estados de equilibrio, sino que además, utilizando la integral de trayectoria nos permite analizar las trayectorias y las fluctuaciones en el espacio de fases, lo que nos brinda una visión más completa sobre el comportamiento del modelo de Dicke.



# Capítulo 3

## Modelo de Dicke Anisotrópico Interactuante.

En este capítulo, analizaremos el modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales, utilizando la aproximación de estados coherentes en el límite clásico. Este enfoque nos permite explorar la transición de fase superradiante través del análisis de los puntos de estabilidad en las superficies de energía.

Además, caracterizaremos las densidades de estado para identificar las transiciones de fase cuánticas de estados excitados. Estas transiciones emergen al estudiar los estados excitados del sistema en el modelo de Dicke, proporcionando una visión más detallada de la estructura y el comportamiento del sistema cuando se consideran las interacciones materiales.

### 3.1. Hamiltoniano de Dicke Anisotrópico con Interacciones

En el Capítulo (1.2.4), se presentó de manera general el Hamiltoniano del modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales. En este capítulo, profundizaremos en su análisis, desarrollando su aproximación semiclásica mediante estados coherentes, y examinaremos con mayor detalle cada uno de sus componentes. Recordemos el Hamiltoniano de Dicke anisotrópico con interacciones materiales Ec. 1.10:

$$\hat{H}_I = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[ (\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-) + \xi (\hat{a} \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger \hat{J}_+) \right] + \frac{1}{N} \left( \eta_x \hat{J}_x^2 + \eta_y \hat{J}_y^2 + \eta_z \hat{J}_z^2 \right). \quad (3.1)$$

El primer término,  $\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z$ , representa la energía del sistema en ausencia de interacción, correspondiente tanto al campo electromagnético como a los átomos. Aquí,  $\omega$  es la frecuencia del modo de radiación electromagnética,  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  es el operador de número fónico,  $\omega_0$  es la frecuencia característica de los átomos y  $\hat{J}_z$  representa

la diferencia entre el número de átomos en el estado base y estado excitado.

El segundo término,  $\frac{\gamma}{\sqrt{N}} [(\hat{a}\hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger\hat{J}_-) + \xi(\hat{a}\hat{J}_- + \hat{a}^\dagger\hat{J}_+)]$ , describe la interacción entre el campo electromagnético y el colectivo de átomos. Aquí,  $\gamma$  representa el acoplamiento luz-materia y  $N$  es el número de partículas. Los términos  $\hat{a}\hat{J}_+$  y  $\hat{a}^\dagger\hat{J}_-$  mantienen el número de excitaciones constante:  $\hat{a}\hat{J}_+$  excita el colectivo atómico al emitir un fotón, mientras que  $\hat{a}^\dagger\hat{J}_-$  desexcita el colectivo atómico al absorber un fotón. Estos términos son conocidos como rotantes. El término  $\xi$  representa la modulación de los los términos  $\hat{a}\hat{J}_-$  y  $\hat{a}^\dagger\hat{J}_+$  no conservan el número de excitaciones:  $\hat{a}\hat{J}_-$  desexcita el colectivo atómico al emitir un fotón, y  $\hat{a}^\dagger\hat{J}_+$  lo excita al absorber uno. Estos últimos se denominan términos no contrarrotantes. Modular los términos no contrarrotantes es lo que denominamos modelo de Dicke anisotrópico [37-39].

Los parámetros  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  y  $\eta_z$  representan la intensidad de la interacción colectiva entre los átomos, las cuales denominaremos interacciones materiales.

## 3.2. Correspondencia Clásica

Analizaremos la aproximación semiclásica utilizando estados coherentes al Hamiltoniano del modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales Ec. 3.1. Para ello se calcula el valor esperado del Hamiltoniano respecto a estados coherentes. El resultado es tener un Hamiltoniano en su correspondencia semiclásica.

Para ello se utiliza el producto tensorial de los estados coherentes de Glauber (radiación electromagnética)  $|z\rangle$  y Bloch  $|w\rangle$  (atómica) [6, 95, 103, 116, 117]:

$$|z\rangle \otimes |w\rangle = \frac{e^{-|z|^2/2}}{(1 + |w|^2)^j} e^{z\hat{a}^\dagger} e^{z^*\hat{a}} e^{w\hat{J}_+} |0\rangle \otimes |j, -j\rangle. \quad (3.2)$$

siendo  $|0\rangle$  el estado vacío del bosón y  $|j, -j\rangle$  los estados de pseudo-espín [118]. Utilizando las propiedades de los estados coherentes, el valor esperado del Hamiltoniano es:

$$H_{\text{cl}}^\xi(z, w) = j^{-1} \langle z, w | \hat{H}_D | z, w \rangle = \omega |z|^2 - \left( \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2} \right) \left[ \omega_0 - \frac{\eta_z}{2} \left( \frac{1 - |w|^2}{1 + |w|^2} \right) \right] + \frac{1}{2(1 + |w|^2)^2} [(\eta_x - \eta_y)(w^2 + \bar{w}^2) + (\eta_x + \eta_y)2w\bar{w}] + \frac{\gamma(z + \bar{z})(w + \bar{w})}{\sqrt{2}(1 + |w|^2)}. \quad (3.3)$$

Definimos las variables  $z = \sqrt{j/2}(q + ip)$  y  $w = \sqrt{(1 + j_z)/(1 - j_z)}e^{-i\phi}$ , donde  $z$  y  $w$  se expresan en términos de las variables canónicas clásicas  $(q, p)$  y  $(j, \phi)$ , respectivamente. En la descripción atómica, las componentes clásicas del momento angular  $j_x$ ,  $j_y$  y  $j_z$  satisfacen la condición de normalización  $j^2 = j_x^2 + j_y^2 + j_z^2$ , con  $N = 2j$ . Esto nos permite definir las siguientes relaciones:  $j_x = \sqrt{1 - j_z^2} \cos \phi$ ,  $j_y = \sqrt{1 - j_z^2} \sin \phi$  y  $j_z = -\cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo polar y  $\phi$  el ángulo azimutal.

De esta manera, obtenemos el Hamiltoniano del modelo de Dicke anisotrópico con interacciones colectivas en su forma semiclásica:

$$H_{cl}^{\xi} = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + j_z \left( \omega_0 + \frac{\eta_z j_z}{2} \right) + \frac{1}{2} (1 - j_z^2) (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) + \gamma \sqrt{1 - j_z^2} [(1 + \xi)q \cos \phi - (1 - \xi)p \sin \phi]. \quad (3.4)$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton de la Ec. [3.4](#), es posible determinar los puntos de estabilidad, inestabilidad o puntos de silla de la energía asociada al sistema [119](#). Tal como se mencionó en el Capítulo [1](#), la identificación de estos puntos es fundamental para diferenciar entre la fase normal y la fase superradiante, lo cual se logra a través del rompimiento espontáneo de simetría en los puntos estables. Las ecuaciones de Hamilton son, por tanto, las siguientes:

$$\dot{q} = \frac{\partial H_{cl}^{\xi}}{\partial p} = \omega p - \gamma \sqrt{1 - j_z^2} (1 - \xi) \sin \phi, \quad (3.5)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_{cl}^{\xi}}{\partial q} = -\omega q - \gamma \sqrt{1 - j_z^2} (1 + \xi) \cos \phi, \quad (3.6)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H_{cl}^{\xi}}{\partial j_z} = \omega_0 + \eta_z j_z - j_z (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) - \frac{\gamma j_z}{\sqrt{1 - j_z^2}} \times [(1 + \xi)q \cos \phi - (1 - \xi)p \sin \phi], \quad (3.7)$$

$$\dot{j}_z = -\frac{\partial H_{cl}^{\xi}}{\partial \phi} = (1 - j_z^2) (\eta_x - \eta_y) \cos \phi \sin \phi + \gamma \sqrt{1 - j_z^2} \times [(1 + \xi)q \sin \phi + (1 - \xi)p \cos \phi]. \quad (3.8)$$

### 3.3. Superficies de Energía y sus Extremos

A partir de las ecuaciones de movimiento, calculamos los puntos de equilibrio, que pueden ser estables, inestables o de silla (también conocidos como puntos fijos o estacionarios)  $(q_s, p_s, j_{zs}, \phi_s)$ . Utilizando las ecuaciones [\(3.5\)](#) y [\(3.6\)](#), definimos estos puntos a través de cuadraturas de la siguiente manera:

$$p_s = \frac{\gamma}{\omega} \sqrt{1 - j_{zs}^2} (1 - \xi) \sin \phi_s, \quad \text{y} \quad q_s = -\frac{\gamma}{\omega} \sqrt{1 - j_{zs}^2} (1 + \xi) \cos \phi_s. \quad (3.9)$$

Sustituyendo la Ec. [\(3.9\)](#) en [\(3.7\)](#) y [\(3.8\)](#), obtenemos un par de ecuaciones que relacionan el conjunto de variables atómicas  $(j_z, \phi)$ :

$$\omega_0 + j_{zs} \left\{ \eta_z - (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) + \frac{\gamma^2}{\omega} [(1 + \xi)^2 \cos^2 \phi_s + (1 - \xi)^2 \sin^2 \phi_s] \right\} = 0, \quad (3.10)$$

$$(1 - j_{zs}^2) \left\{ (\eta_x - \eta_y) - \frac{\gamma^2}{\omega} [(1 + \xi)^2 - (1 - \xi)^2] \right\} \cos \phi_s \sin \phi_s = 0. \quad (3.11)$$

Las Ecs. [3.10](#) y [3.11](#) nos permiten determinar los puntos fijos del sistema, lo que facilita la representación gráfica de las superficies de energía (véase la Fig. [1.4](#)). La expresión para la energía es la siguiente:

$$\begin{aligned} \epsilon(\xi, u, v) = \sin^2 \sqrt{u^2 + v^2} \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \left[ u^2 \left( \frac{\eta_x}{\omega_0} - f_{\xi+} \right) + v^2 \left( \frac{\eta_y}{\omega_0} - f_{\xi-} \right) \right] \\ - \cos \sqrt{u^2 + v^2} \left( 1 - \frac{\eta_z}{2\omega_0} \cos \sqrt{u^2 + v^2} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para más detalles sobre la determinación de los cambios de variable  $u$  y  $v$ , véase el Apéndice. [B.2](#).

### 3.3.1. Deformación de la Fase Normal

Uno de los puntos fijos que se pueden determinar a partir de la Ec. [3.11](#) ocurre cuando  $j_{zs} = \pm 1$ , lo cual define el tamaño de la esfera de Bloch. En este caso, la Ec. [3.9](#) nos da que  $p_s = q_s = 0$ , mientras que  $\phi_s$  permanece indeterminado, ya que puede tomar cualquier valor dentro del intervalo  $[0, 2\pi]$ . En resumen:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = (0, 0, \pm 1, \text{indeterminado}), \quad (3.13)$$

Al sustituir la Ec. [3.13](#) en la Ec. [3.4](#), la energía del sistema queda expresada como:

$$\epsilon_{\pm} = \pm 1 + \frac{\eta_z}{2\omega_0}, \quad (3.14)$$

considerando la escala de energía  $\epsilon = H_{\text{cl}}(q_s, p_s, j_{zs}, \phi_s)/\omega_0$ .

La condición  $j_{zs} = \pm 1$  es fundamental, ya que delimita el dominio accesible en el espacio de Bloch para las variables atómicas y determina la energía  $\epsilon$  del sistema.

El punto estacionario  $j_{zs} = -1$  es estable, lo que significa que representa un mínimo absoluto [6](#) y corresponde al nivel más bajo de energía del sistema. En este estado, se cumple que  $q_s = p_s = 0$ , lo que indica la ausencia de fotones, por lo que lo denominamos fase normal.

Por otro lado,  $j_{zs} = +1$  representa la energía más alta y se clasifica como un punto fijo inestable [120](#). Los puntos inestables suelen ser indicativos de cambios abruptos en el espacio fase, los cuales se analizarán en detalle al calcular la aproximación semiclásica de la densidad de estados.

Es importante señalar que la determinación de esta fase es invariante ante la presencia de interacciones materiales  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  y  $\eta_z$  y en los límites de Tavis-Cummings, Dicke estándar y Dicke anisotrópico.

### 3.3.2. Límite Tavis-Cummings

Recordemos que en el modelo de Tavis-Cummings no se consideran los términos no conservativos, es decir, aquellos que no preservan el número de excitaciones, lo que implica que  $\xi = 0$ , Ec [1.6](#). Por lo tanto, el Hamiltoniano semiclásico correspondiente al modelo de Tavis-Cummings es:

$$H_{cl}^{(0)} = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + j_z \left( \omega_0 + \frac{\eta_z j_z}{2} \right) + \frac{1}{2} (1 - j_z^2) (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) + \gamma \sqrt{1 - j_z^2} (q \cos \phi - p \sin \phi). \quad (3.15)$$

De acuerdo con las Ecs. [3.10](#) y [3.11](#), se transforman en:

$$\omega_0 + j_{zs} \left( \eta_z - (\eta_x \cos^2 \phi_s + \eta_y \sin^2 \phi_s) + \frac{\gamma^2}{\omega} \right) = 0, \quad (3.16)$$

$$(1 - j_{zs}^2)(\eta_x - \eta_y) \cos \phi_s \sin \phi_s = 0. \quad (3.17)$$

Encontramos cinco soluciones diferentes para los puntos estacionarios:  $\cos \phi_s = 0$  ( $\sin \phi_s = \pm 1$ ),  $\sin \phi_s = 0$  ( $\cos \phi_s = \pm 1$ ) y  $\eta_x = \eta_y$  (incluyendo  $j_{zs} = \pm 1$ ). En consecuencia, analizaremos la dinámica de cada uno de estos puntos estacionarios.

**Fase Simétrica Superradiante:** Primero consideraremos el caso en el que las interacciones sean  $\eta_x = \eta_y = \eta$ , donde  $\eta$  es un nuevo parámetro que no incluye la componente  $\eta_z$ . La Ec. [3.16](#) se transforma en:

$$\omega_0 + j_{zs}(\eta_z - \eta) + \frac{\gamma^2}{\omega} = 0. \quad (3.18)$$

Las soluciones para  $j_{zs}$  son:

$$j_{zs} = -\frac{\omega_0}{\eta_z - \eta + \frac{\gamma^2}{\omega}} = -\frac{1}{f_0}, \quad f_0 = \frac{\Delta\eta_{zs}}{\omega_0} + f_{0+},$$

donde  $f_{0+} = \frac{\gamma^2}{\gamma_{0+}^2}$  y  $\gamma_{0+} = \sqrt{\omega\omega_0}$ , que corresponde al acoplamiento de transición de la fase superradiante en el límite del modelo de Tavis-Cummings. Además, se define  $\Delta\eta_{zs} = \eta_z - \eta$ . Al sustituir  $j_{zs}$  en la Ec. [3.9](#), obtenemos los siguientes puntos estacionarios:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = \left( \frac{\gamma}{\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{f_0^2}} \sin \phi_s, -\frac{\gamma}{\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{f_0^2}} \cos \phi_s, -\frac{1}{f_0}, \text{indeterminado} \right). \quad (3.19)$$

Si  $j_{zs} = 0$ , podemos determinar el acoplamiento de transición dado por:

$$\gamma_0^c = \gamma_{0+} \sqrt{1 - \frac{\Delta\eta_{zs}}{\omega_0}}, \quad (3.20)$$

Notamos que el acoplamiento de transición experimenta un corrimiento dependiente de las interacciones materiales, a diferencia del modelo de Tavis-Cummings, donde el acoplamiento de transición es  $\gamma_{TC}^c = \sqrt{\omega\omega_0}$ . Este efecto ha sido observado antes en trabajos previos para interacciones en las direcciones  $x-$  [59, 60] y  $z-$  [72, 73, 121, 122], y una combinación de las direcciones  $x-$  y  $y-$  [57]. Al sustituir los puntos estacionarios en el Hamiltoniano [3.15], obtenemos la expresión para la energía:

$$\epsilon_{s0\phi} = -\frac{1}{2} \left( f_0 + \frac{1}{f_0} \right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}, \quad (3.21)$$

**Fase Superradiante  $x-$ :** Cuando  $\eta_x \neq \eta_y$  (es decir,  $\Delta\eta_{zx} \neq \Delta\eta_{zy}$ ), se pueden obtener diferentes soluciones para el ángulo azimutal  $\phi$ . Por lo tanto, analicemos el caso en el que  $\cos\phi_s = \pm 1$ , lo que implica que  $\sin\phi_s = 0$ . Como resultado de la Ec. [3.9], tenemos que  $p_s = 0$ , y la Ec. [3.16] es:

$$j_{zs} = - \left( \frac{\eta_z - \eta_x}{\omega_0} + \frac{\gamma^2}{\omega\omega_0} \right)^{-1} = -\frac{1}{f_{0x}}, \quad f_{0x} = \frac{\Delta\eta_{zx}}{\omega_0} + f_{0+}. \quad (3.22)$$

Por lo tanto, los puntos fijos están dados por:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = - \left( 0, \pm \frac{\gamma}{\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{f_{0x}^2}}, -\frac{1}{f_{0x}}, \pi \text{ o } 0 \right). \quad (3.23)$$

En consecuencia, el acoplamiento de transición es:

$$\gamma_{0x}^c = \gamma_{0+} \sqrt{1 - \frac{\Delta\eta_{zx}}{\omega_0}}. \quad (3.24)$$

Sustituyendo [3.23] en [3.15], la energía es:

$$\epsilon_{s0x} = -\frac{1}{2} \left( f_{0x} + \frac{1}{f_{0x}} \right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}. \quad (3.25)$$

La transición de la fase normal a la superradiante está determinada por la interacción en  $\eta_x$ . Por esta razón, la denominamos transición de fase superradiante en la dirección



$x-$ .

**Fase Superradiante  $y-$ :** Tomando en cuenta  $\eta_x \neq \eta_y$  ( $\Delta\eta_{zx} \neq \Delta\eta_{zy}$ ) pero usando el caso  $\cos \phi_s = 0$  ( $\sin \phi_s = \pm 1$ ). La Ec. [3.9](#) es  $q_s = 0$  y la Ec. [3.16](#) es:

$$j_{zs} = - \left( \frac{\eta_z - \eta - y}{\omega_0} + \frac{\gamma^2}{\omega\omega_0} \right)^{-1} = -\frac{1}{f_{0y}}, \quad \text{donde} \quad f_{0y} = \frac{\Delta\eta_{zy}}{\omega_0} + f_{0+}. \quad (3.26)$$

Los puntos fijos están dados por:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = \left( \pm \frac{\gamma}{\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{f_{0y}^2}}, 0, -\frac{1}{f_{0y}}, \pm \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.27)$$

El acoplamiento de transición está dado por:

$$\gamma_{0y}^c = \gamma_{0+} \sqrt{1 - \frac{\eta_z - \eta_y}{\omega_0}}. \quad (3.28)$$

Sustituyendo [3.27](#) en [3.15](#), la energía es:

$$\epsilon_{s0y} = -\frac{1}{2} \left( f_{0y} + \frac{1}{f_{0y}} \right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}. \quad (3.29)$$

La transición de la fase normal a la superradiante está determinada por la interacción en  $\eta_y$ . Por esta razón, la denominamos transición de fase superradiante en la dirección  $y-$ .

**Fases Cuánticas en el Límite de Tavis-Cummings:** En la Fig. [3.1](#), se presentan los diagramas de fase correspondientes a las transiciones de fase superradiante, de acuerdo con los valores de los parámetros de interacción. Además, se ilustran las transiciones entre las superficies de energía en las fases normal y superradiante, considerando distintos valores de las interacciones atómicas.

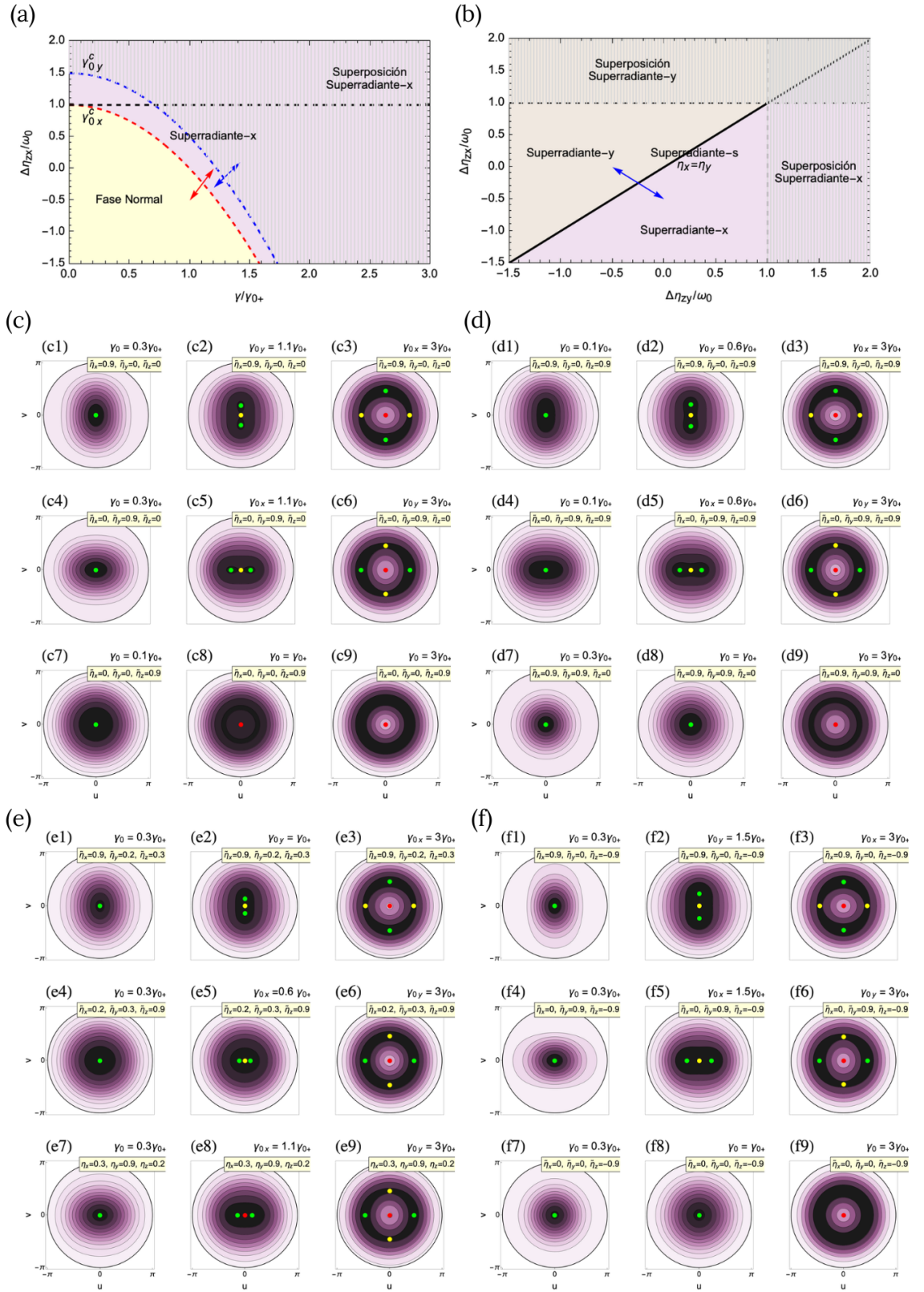


Figura 3.1: Las Figs. (a) y (b) muestran los diagramas de las transiciones de fase, donde se grafican  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$  vs.  $\gamma/\gamma_{0+}$  y  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$  vs.  $\Delta\eta_{zy}/\omega_0$ , respectivamente. Por otro lado, las Figs. (c-f) detallan la transición de las superficies de energía para distintos valores de las interacciones materiales, donde  $\bar{\eta}_i = \eta_i/\omega_0$

En la Fig. 3.1 (a), se muestra el diagrama de fases de  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$  vs.  $\gamma/\gamma_{0+}$  bajo la condición  $\eta_x < \eta_y$ . La línea punteada roja indica la transición de la fase normal a la fase superradiante  $x-$ , marcada por  $\gamma_{0x}^c$ , mientras que la línea punteada azul señala la transición de la fase superradiante  $x-$  a la fase superradiante superpuesta, determinada por  $\gamma_{0y}^c$ . Llamamos a esta fase "superpuesta" porque combina características de las fases superradiantes  $x-$  y  $y-$ . La línea punteada negra marca el límite de validez de la fase superradiante, definido por  $1 < \Delta\eta_{zy}/\omega_0$ .

La Fig. 3.1 (b) muestra un diagrama de fases de  $\Delta\eta_{zy}/\omega_0$  vs.  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$ , considerando un valor fijo del acoplamiento luz-materia. Este diagrama revela que las transiciones superradiantes dependen de las configuraciones de  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  y  $\eta_z$ .

Las Figs. 3.1 (c-f) ilustran la transición de las superficies de energía desde la fase normal a la superradiante para distintos valores de las interacciones materiales  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  y  $\eta_z$ . Las líneas verdes representan los puntos de mínima energía, que muestran una ruptura espontánea de simetría al pasar entre fases. Los puntos rojos corresponden a inestables, y los amarillos a puntos silla.

A modo de ejemplo, la Fig. 3.1 (c) se detalla para facilitar la comprensión de las Figs. 3.1 (d-f). Las Figs. 3.1 (c1-c3) muestran la evolución cuando  $\eta_x = 0,9$ ,  $\eta_y = 0$  y  $\eta_z = 0$ , lo que implica que  $\gamma_{0x}^c < \gamma_{0y}^c$ . La Fig. 3.1 (c1) representa la fase normal deformada, con un único punto estable y una superficie de energía en forma de pozo. La Fig. 3.1 (c2) muestra la fase superradiante  $x-$ , donde aparecen dos puntos estables y un punto silla, indicando una ruptura de simetría. La Fig. 3.1 (c3) ilustra la fase superradiante superpuesta, donde aparecen dos puntos estables, dos puntos silla y un punto inestable.

En las Figs. 3.1 (c4-c6), cuando  $\eta_z = 0$ ,  $\eta_y = 0,9$  y  $\eta_x = 0$ , se tiene  $\gamma_{0y}^c < \gamma_{0x}^c$ . Las transiciones de las superficies de energía son similares a las de las Figs. 3.1 (c1-c3), pero con una rotación de  $\pi/2$  en los puntos estables y silla.

Finalmente, las Figs. 3.1 (c7-c9) corresponden al caso  $\eta_x = 0$ ,  $\eta_y = 0$  y  $\eta_z = 0,9$ , donde  $\gamma_{0x}^c = \gamma_{0y}^c$ , y la simetría de las superficies de energía es  $U(1)$ . Aquí, la transición de fase se da entre las Figs. 3.1 (c7) y (c8), pasando de un pozo esférico a un sombrero mexicano. En la Fig. 3.1 (c9), el área sombreada representa el conjunto continuo de puntos estables. La interacción en  $\eta_x$  modifica el tamaño de la esfera de Bloch [62]

Por último, la energía del estado base (ground state, gs) del modelo de Tavis-Cummings se puede resumir a partir de las Ecs. 3.21, 3.25 y 3.29:

$$\epsilon_0^{g.s} = -\frac{1}{2} \left( F_0 + F_0^{-1} \right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}, \quad (3.30)$$

donde

$$F_0 = \begin{cases} f_0 & \text{para } \eta_x = \eta_z & \text{y } \gamma \neq \gamma_0^c, \\ f_{0x} & \text{para } \eta_x \neq \eta_z & \text{y } \gamma \neq \gamma_{0x}^c, \\ f_{0y} & \text{para } \eta_y \neq \eta_z & \text{y } \gamma \neq \gamma_{0y}^c, \\ 1 & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (3.31)$$

Observamos que la energía del estado base es continua para los valores críticos a medida que aumentamos el acoplamiento luz-materia  $\gamma$ . Sin embargo, las derivadas son discontinuas. El orden de la discontinuidad nos permite clasificar al tipo de transición de fase cuántica que el sistema describe de acuerdo con la clasificación de Ehrenfest de las transiciones de fase [123]. Calculamos el gradiente de la energía del estado base como función de las interacciones:

$$\begin{aligned} \nabla \epsilon_0^{\text{g.s.}} &= \left( \frac{\partial \epsilon_0^{\text{g.s.}}}{\partial \gamma}, \frac{\partial \epsilon_0^{\text{g.s.}}}{\partial \eta_x}, \frac{\partial \epsilon_0^{\text{g.s.}}}{\partial \eta_y}, \frac{\partial \epsilon_0^{\text{g.s.}}}{\partial \eta_z} \right) \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \begin{cases} \frac{1-f_{0x}^2}{f_{0x}^2} \left( \frac{2\omega_0}{\gamma} f_{0x}, -1, 0, 1 \right) + (0, 0, 0, 1) & \text{para } \gamma \leq \gamma_{0x}^c, \\ \frac{1-f_{0y}^2}{f_{0y}^2} \left( \frac{2\omega_0}{\gamma_{0+}} f_{0y}, 0, -1, 1 \right) + (0, 0, 0, 1) & \text{para } \gamma \leq \gamma_{0y}^c, \\ (0, 0, 0, 1) & \text{de otra manera.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Evaluaremos las derivadas de tres combinaciones de parámetros específicos  $F_0 = 1$ ,  $\Delta\eta_{zx} = \omega_0$  ( $\Delta\eta_{zy} = \omega_0$ ) y  $\Delta\eta_{zx} = \Delta\eta_{zy}$ . Cuando  $F_0 = 1$ , la energía (como función de  $\gamma$ ) de la fase normal a la fase superradiante es continua, sin embargo, en la segunda derivada de la energía con respecto al acoplamiento se hace discontinua, por lo tanto, se observa que pasar de la fase normal a la fase superradiante es una transición de segundo orden. En el caso  $\Delta\eta_{zx} = \Delta\eta_{zy}$  y  $\Delta\eta_{zx} = \omega_0$  la energía del estado base descrita por [3.25] y [3.29] es de primer orden. La transición de fase de primer orden fue identificada en [70, 122].

### 3.3.3. Límite de Dicke.

El modelo de Dicke estándar considera los términos no conservativos, es decir, aquellos que no preservan el número de excitaciones, lo que implica que  $\xi = 1$ , ver Ec. [1.3]. Por lo tanto, el Hamiltoniano semiclásico correspondiente al modelo de Dicke estándar es:

$$\begin{aligned} H_{cl}^{(1)} &= \frac{\omega}{2} (q^2 + p^2) + j_z \left( \omega_0 + \frac{\eta_z j_z}{2} \right) + \frac{1}{2} (1 - j_z^2) (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) \\ &\quad + 2\gamma \sqrt{1 - j_z^2} q \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

De acuerdo con las Ecs. [3.10](#) y [3.11](#) se transforman en:

$$\omega_0 + j_{zs} \left( \eta_z - \left( \eta_x \cos^2 \phi_s \right) \right) = 0, \quad (3.34)$$

$$\left( 1 - j_{zs}^2 \right) \left[ \left( \eta_x - \eta_y \right) - \frac{4\gamma^2}{\omega} \right] \cos \phi_s \sin \phi_s = 0. \quad (3.35)$$

Encontramos cinco soluciones diferentes para los puntos estacionarios:  $\cos \phi_s = 0$  ( $\sin \phi_s = \pm 1$ ),  $\sin \phi_s = 0$  ( $\cos \phi_s = \pm 1$ ) y  $\eta_x = \eta_y$  (incluyendo  $j_{zs} = \pm 1$ ). En consecuencia, analizaremos la dinámica de cada uno de estos puntos estacionarios.

**Fase Superradiante-x:** Cuando  $\eta_x \neq \eta_y$  (es decir,  $\Delta\eta_{zx} \neq \Delta\eta_{zy}$ ), se pueden obtener diferentes soluciones para el ángulo azimutal  $\phi$ . Por lo tanto, analicemos el caso en el que  $\cos \phi_s = \pm 1$ , lo que implica que  $\sin \phi_s = 0$ . En consecuencia la Ec. [3.16](#) es:

$$j_{zs} = -\frac{1}{f_{1x}}, \quad \text{donde} \quad f_{1x} = \frac{\Delta\eta_{zx}}{\omega_0} + f_{1+}, \quad (3.36)$$

y  $f_{1x} = \gamma^2/\gamma_{1+}^2$  y  $\gamma_{1+} = \sqrt{\omega\omega_0}/2$ . Por lo tanto, los puntos fijos están dados por:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = \left( 0, \pm \frac{2\gamma}{\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{f_{1x}^2}}, -\frac{1}{f_{1x}}, 0 \text{ o } \pi \right). \quad (3.37)$$

En consecuencia, el acoplamiento de transición es:

$$\gamma_{1x}^c = \gamma_{1+} \sqrt{1 - \frac{\Delta\eta_{zx}}{\omega_0}}. \quad (3.38)$$

Sustituyendo [3.37](#) en [3.32](#), la energía es:

$$\epsilon_{s1x} = -\frac{1}{2} \left( f_{1x} + \frac{1}{f_{1x}} \right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}. \quad (3.39)$$

**Fase Deformada:** Tomando en cuenta  $\eta_x \neq \eta_y$  ( $\Delta\eta_{zx} \neq \Delta\eta_{zy}$ ) pero usando el caso  $\cos \phi_s = 0$  ( $\sin \phi_s = \pm 1$ ). En consecuencia, la Ec. [3.16](#) es:

$$j_{zs} = -\frac{\omega_0}{\Delta\eta_{zy}} = -\frac{1}{f_{1y}}. \quad (3.40)$$

Los puntos fijos están dados por:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = \left( 0, 0, -\frac{1}{f_{1y}}, \pm \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.41)$$

Sustituyendo [3.41](#) en [3.32](#), la energía es:

$$\epsilon_{s1y} = -\frac{1}{2} \left( f_{1y} + \frac{1}{f_{1y}} \right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}. \quad (3.42)$$

Denominamos a esta fase como superradiante deformada porque no presenta un acoplamiento de transición definido, y persiste para cualquier valor de  $\Delta\eta_{zy} \leq \omega_0$ . En esta fase, el valor esperado del número de fotones es cero, ya que  $q_s = p_s = 0$ . Por ello, no se clasifica estrictamente como una fase normal o superradiante, sino como una fase deformada [1](#).

**Fases Cuánticas en el Límite de Dicke:** En la Fig. [3.2](#), se presentan los diagramas de fase correspondientes a las transiciones de fase superradiante, de acuerdo con los valores de los parámetros de interacción. Además, se ilustran las transiciones entre las superficies de energía en las fases normal y superradiante, considerando distintos valores de las interacciones atómicas.



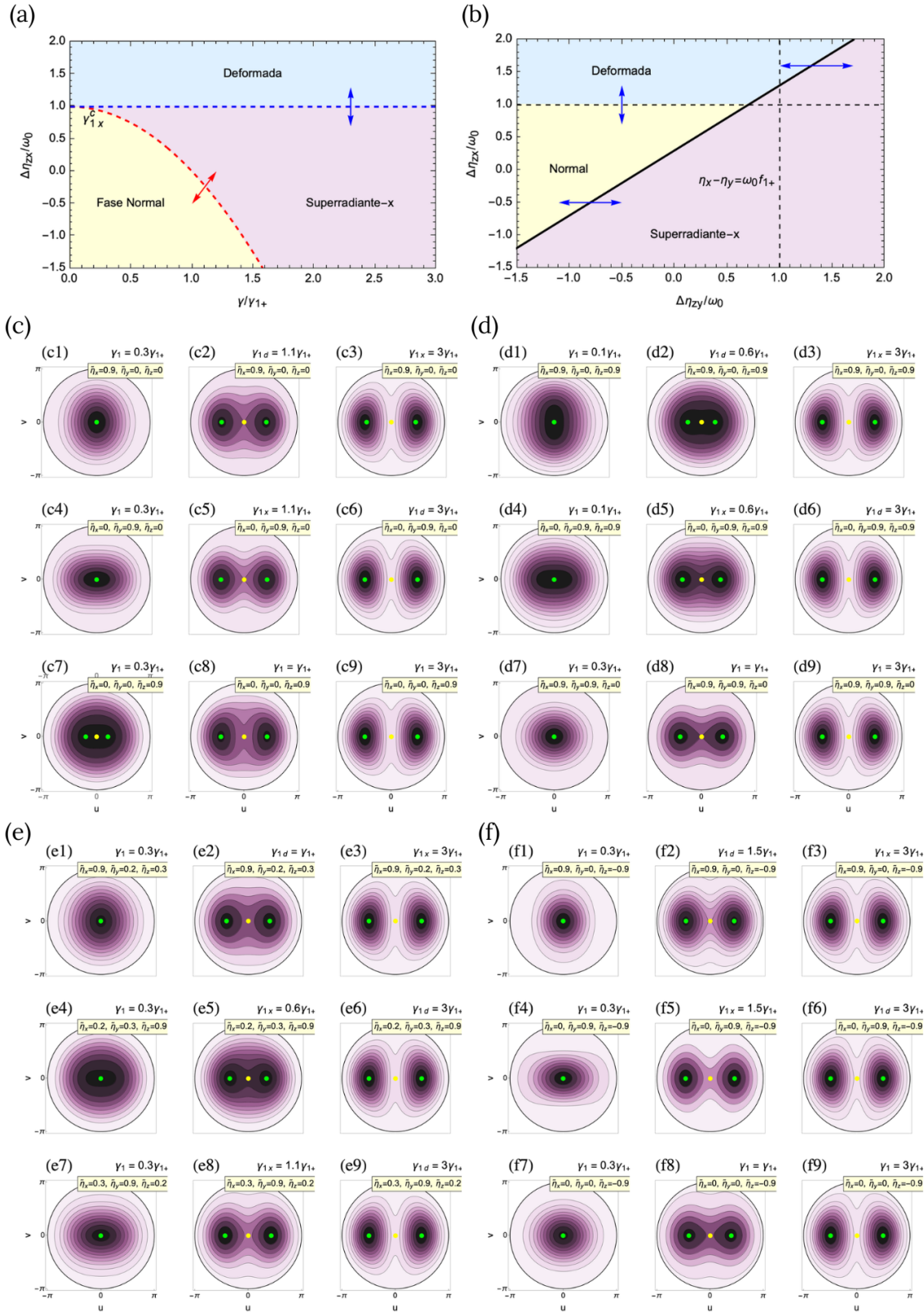


Figura 3.2: Las Figs. (a) y (b) muestran los diagramas de las transiciones de fase, donde se grafican  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$  vs.  $\gamma/\gamma_{1+}$  y  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$  vs.  $\Delta\eta_{zy}/\omega_0$ , respectivamente. Por otro lado, las Figs. (c-f) detallan la transición de las superficies de energía para distintos valores de las interacciones materiales, donde  $\bar{\eta}_i = \eta_i/\omega_0$

En la Fig. 3.2 (a), se muestra el diagrama de fases de  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$  vs.  $\gamma/\gamma_{0+}$  bajo la condición  $\eta_x < \eta_y$ . La línea punteada roja indica la transición de la fase normal a la fase superradiante  $x-$ , marcada por  $\gamma_{0x}^c$ , mientras que la línea punteada azul señala la transición de la fase deformada.

La Fig. 3.2 (b) muestra un diagrama de fases de  $\Delta\eta_{zy}/\omega_0$  vs.  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$ , considerando un valor fijo del acoplamiento luz-materia. Este diagrama revela que las transiciones superradiantes dependen de las configuraciones de  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  y  $\eta_z$ .

Las Figs. 3.2 (c-f) ilustran la transición de las superficies de energía desde la fase normal a la superradiante para distintos valores de las interacciones materiales  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  y  $\eta_z$ . Las líneas verdes representan los puntos de mínima energía, que muestran una ruptura espontánea de simetría al pasar entre fases. Los puntos rojos corresponden a inestables, y los amarillos a puntos silla.

A modo de ejemplo, la Fig. 3.2 (c) se detalla para facilitar la comprensión de las Figs. 3.2 (d-f). Las Figs. 3.2 (c1-c3) muestran la evolución cuando  $\eta_x = 0,9$ ,  $\eta_y = 0$  y  $\eta_z = 0$ , lo que implica que un acoplamiento de transición en  $\gamma_{0x}^c$ . La Fig. 3.2 (c1) representa la fase normal deformada, con un único punto estable y una superficie de energía en forma de pozo. La Fig. 3.2 (c2-c3) muestra la fase superradiante  $x-$ , donde aparecen dos puntos estables y un punto silla, indicando una ruptura de simetría.

En las Figs. 3.2 (c4-c6), cuando  $\eta_z = 0$ ,  $\eta_y = 0,9$  y  $\eta_x = 0$ , y se tiene un acoplamiento de transición  $\gamma_{0y}^c$ . Las transiciones de las superficies de energía son similares a las de las Figs. 3.2 (c1-c3).

Finalmente, las Figs. 3.2 (c7-c9) corresponden al caso  $\eta_x = 0$ ,  $\eta_y = 0$  y  $\eta_z = 0,9$ , donde  $\gamma_{0z}^c$ . Las transiciones de las superficies de energía son similares a las de las Figs. 3.2 (c1-c3) y (c4-c5). Cabe resumir que las Figs. 3.2 (c) en la fase superradiante mantienen simetría de paridad.

Por último, la energía del estado base del modelo de Dicke estándar se puede resumir a partir de las Ecs 3.39 y 3.42:

$$\epsilon_1^{\text{g.s.}} = -\frac{1}{2} (F_1 + F_1^{-1}) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}, \quad (3.43)$$

siendo

$$F_1 = \begin{cases} f_{1x} & \text{para } \gamma \leq \gamma_{1x}^c \text{ y } \Delta\eta_{zx} \leq \omega_0 \\ f_{1y} & \text{para } \Delta\eta_{zy} \leq \omega_0 \\ 1 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (3.44)$$

Calculamos el gradiente de la energía del estado base como función de las interac-



ciones:

$$\nabla_{\epsilon_1}^{\text{g.s}} = \frac{1}{2\omega_0} \begin{cases} \frac{1-f_{1x}^2}{f_{1x}^2} \left( \frac{2\omega_0}{\gamma} f_{1x}, -1, 0, 1 \right) (0, 0, 0, 1) & \text{para } \gamma \leq \gamma_{1x}^c \\ & \text{y } \Delta\eta_{zx} \leq \omega_0, \\ \frac{1-f_{1y}^2}{f_{1y}^2} (0, 0, -1, -1) + (0, 0, 0, 1) & \text{para } \Delta\eta_{zy} \leq \omega_0 \\ (0, 0, 0, 1) & \text{De otra forma.} \end{cases} \quad (3.45)$$

Evaluaremos las derivadas de tres combinaciones de parámetros específicos  $F_1 = 1$ ,  $\Delta\eta_{zx} = \omega_0$  ( $\Delta\eta_{zy} = \omega_0$ ) y  $\Delta\eta_{zx} = \Delta\eta_{zy}$ . Cuando  $F_1 = 1$ , la energía (como función de  $\gamma$ ) de la fase normal a la fase superradiante  $x$ - es continua, sin embargo, en la segunda derivada de la energía con respecto al acoplamiento se hace discontinua, por lo tanto, se observa que pasar de la fase normal a la fase superradiante es una transición de segundo orden. En el caso  $\Delta\eta_{zx} = \Delta\eta_{zy}$  y  $\Delta\eta_{zx} = \omega_0$  la energía del estado base descrita por [3.39](#)) y [3.42](#)) es de primer orden.

### 3.3.4. Dicke Anisotrópico

El modelo de Dicke anisotrópico puede modular los términos no conservativos, aquellos que no preservan el número de excitaciones, lo que implica que  $\xi \in [0, 1]$ , ver Ec. [1.10](#). Por lo tanto, el Hamiltoniano semiclásico correspondiente al modelo de Dicke anisotrópico es:

$$H_{cl}^\xi = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) + j_z \left( \omega_0 + \frac{\eta_z j_z}{2} \right) + \frac{1}{2} (1 - j_z^2) (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) + \gamma \sqrt{1 - j_z^2} [(1 + \xi)q \cos \phi - (1 - \xi)p \sin \phi]. \quad (3.46)$$

Consideramos las Ecs. [3.10](#) y [3.11](#), por lo tanto,

Encontramos cinco soluciones diferentes para los puntos estacionarios:  $\cos \phi_s = 0$  ( $\sin \phi_s = \pm 1$ ),  $\sin \phi_s = 0$  ( $\cos \phi_s = \pm 1$ ) y  $\eta_x = \eta_y$  (incluyendo  $j_{zs} = \pm 1$ ). En consecuencia, analizaremos la dinámica de cada uno de estos puntos estacionarios.

**Fase Superradiante x- y y-:** Cuando  $\eta_x \neq \eta_y$  (es decir,  $\Delta\eta_{zx} \neq \Delta\eta_{zy}$ ), se pueden obtener diferentes soluciones para el ángulo azimutal  $\phi$ . Por lo tanto, analicemos el caso en el que  $\cos \phi_s = \pm 1$ , lo que implica que  $\sin \phi_s = 0$ . Como resultado los puntos fijos están dados por:

$$(p_s, q_s, j_{zs}, \phi_s) = \left( 0, \mp \frac{(1 + \xi)\gamma}{\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{f_{\xi x}^2}}, -\frac{1}{f_{\xi x}}, 0 \text{ o } \pi \right), \quad (3.47)$$

donde

$$f_{\xi_x} = \frac{\Delta\eta_{zx}}{\omega_0} + f_{\xi_+}. \quad (3.48)$$

En consecuencia, el acoplamiento de transición es:

$$\gamma_{\xi_x}^c = \gamma_{\xi_+} \sqrt{1 - \frac{\Delta\eta_{zx}}{\omega_0}}, \quad (3.49)$$

Sustituyendo [3.47](#) en [3.46](#), la energía de la fase superradiante en  $x-$  es:

$$\epsilon_{s\xi_x} = -\frac{1}{2} \left( f_{\xi_x} + \frac{1}{f_{\xi_x}} \right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}, \quad (3.50)$$

Por otro lado, tomando en cuenta  $\eta_x \neq \eta_y$  ( $\Delta\eta_{zx} \neq \Delta\eta_{zy}$ ) pero usando el caso  $\cos\phi_s = 0$  ( $\sin\phi_s = \pm 1$ ). Los puntos fijos están dados por:

$$(p_s, q_s, jz_s, \phi_s) = \left( \pm \frac{(1-\xi)\gamma}{\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{f_{\xi_y}^2}}, 0, -\frac{1}{f_{\xi_y}}, \pm \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.51)$$

donde

$$f_{\xi_y} = \frac{\Delta\eta_{zy}}{\omega_0} + f_{\xi_-}. \quad (3.52)$$

En consecuencia el acoplamiento de transición es:

$$\gamma_{\xi_y}^c = \gamma_{\xi_-} \sqrt{1 - \frac{\Delta\eta_{zy}}{\omega_0}}, \quad (3.53)$$

Sustituyendo [3.51](#) en [3.46](#), la energía de la fase superradiante en  $y-$  es:

$$\epsilon_{s\xi_y} = -\frac{1}{2} \left( f_{\xi_y} + \frac{1}{f_{\xi_y}} \right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}. \quad (3.54)$$

Estas fases corresponden a la generalización en  $\xi$  de la fase superradiante  $x-$  y  $y-$ .

**Fases Cuánticas en el Modelo Anisotrópico:** En la Fig. [3.3](#), se presentan los diagramas de fase correspondientes a las transiciones de fase superradiante, de acuerdo con los valores de los parámetros de interacción. Además, se ilustran las transiciones entre las superficies de energía en las fases normal y superradiante, considerando distintos valores de las interacciones atómicas.

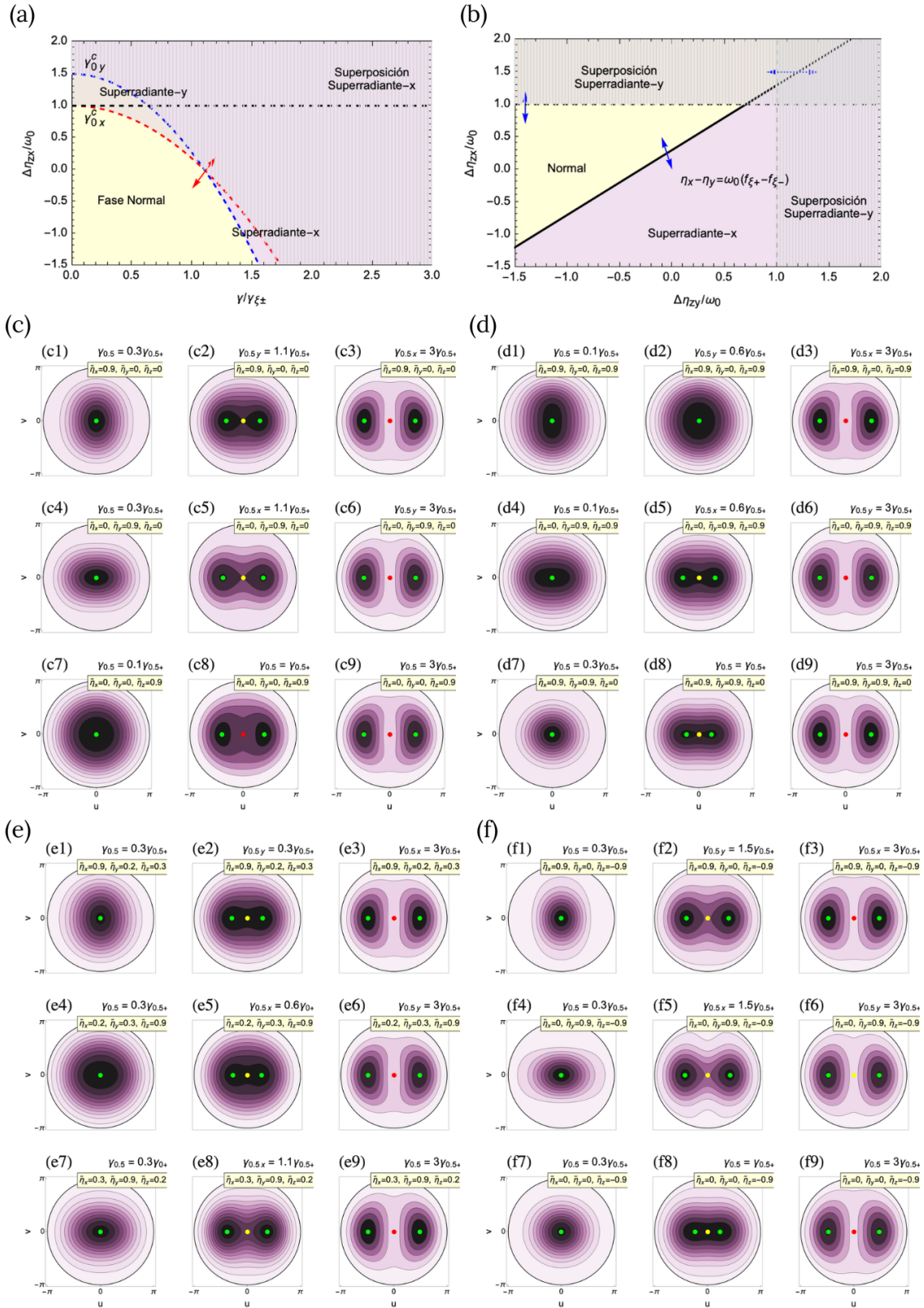


Figura 3.3: Las Figs. (a) y (b) muestran los diagramas de las transiciones de fase, donde se grafican  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$  vs.  $\gamma/\gamma_{\xi\pm}$  y  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$  vs.  $\Delta\eta_{zy}/\omega_0$ , respectivamente. Por otro lado, las Figs. (c-f) detallan la transición de las superficies de energía para distintos valores de las interacciones materiales, donde  $\bar{\eta}_i = \eta_i/\omega_0$

En la Fig. 3.3 (a), se muestra el diagrama de fases de  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$  vs.  $\gamma/\gamma_{\xi\pm}$  bajo la condición  $\eta_x < \eta_y$ . La línea punteada roja indica la transición de la fase normal a la fase superradiante  $x-$ , marcada por  $\gamma_{0x}^c$ , mientras que la línea punteada azul indica la transición de la fase normal a la fase superradiante  $y-$ , marcada por  $\gamma_{0y}^c$ . La línea negra punteada marca el límite de validez de la fase superradiante, definido por  $1 < \Delta\eta_{zy}/\omega_0$ .

La Fig. 3.3 (b) muestra un diagrama de fases de  $\Delta\eta_{zy}/\omega_0$  vs.  $\Delta\eta_{zx}/\omega_0$ , considerando un valor fijo del acoplamiento luz-materia. Este diagrama revela que las transiciones superradiantes dependen de las configuraciones de  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  y  $\eta_z$ .

Las Figs. 3.3 (c-f) ilustran la transición de las superficies de energía desde la fase normal a la superradiante para distintos valores de las interacciones materiales  $\eta_x$ ,  $\eta_y$  y  $\eta_z$ . Las líneas verdes representan los puntos de mínima energía, que muestran una ruptura espontánea de simetría al pasar entre fases. Los puntos rojos corresponden a inestables, y los amarillos a puntos silla.

A modo de ejemplo, la Fig. 3.3 (c) se detalla para facilitar la comprensión de las Figs. 3.3 (d-f). Las Figs. 3.3 (c1-c3) muestran la evolución cuando  $\eta_x = 0,9$ ,  $\eta_y = 0$  y  $\eta_z = 0$ , lo que implica que un acoplamiento de transición en  $\gamma_{0x}^c$ . La Fig. 3.3 (c1) representa la fase normal deformada, con un único punto estable y una superficie de energía en forma de pozo. La Fig. 3.3 (c2-c3) muestra la fase superradiante  $x-$ , donde aparecen dos puntos estables y un punto silla o un punto inestable, indicando una ruptura de simetría.

En las Figs. 3.3 (c4-c6), cuando  $\eta_z = 0$ ,  $\eta_y = 0,9$  y  $\eta_x = 0$ , y se tiene un acoplamiento de transición  $\gamma_{0y}^c$ . Las transiciones de las superficies de energía son similares a las de las Figs. 3.3 (c1-c3).

Finalmente, las Figs. 3.3 (c7-c9) corresponden al caso  $\eta_x = 0$ ,  $\eta_y = 0$  y  $\eta_z = 0,9$ , donde  $\gamma_{0x}^c$ . Las transiciones de las superficies de energía son similares a las de las Figs. 3.3 (c1-c3) y (c4-c5). Cabe resumir que las Figs. 3.3 (c) en la fase superradiante mantienen simetría de paridad similar a las fases superradiante en el límite de Dicke.

Por último, la energía del estado base del modelo de Dicke anisotrópico se puede resumir a partir de las Ecs. 3.50 y 3.54:

$$\epsilon_1^{\text{g.s.}} = -\frac{1}{2} \left( F_\xi + F_\xi^{-1} \right) + \frac{\eta_z}{2\omega_0}, \quad (3.55)$$

con

$$F_\xi = \begin{cases} f_{\xi x} & \text{para } \gamma \geq \gamma_{\xi x}^c, \text{ y } \Delta\eta_{zx} \leq \omega_0, \\ f_{\xi y} & \text{para } \gamma \geq \gamma_{\xi y}^c, \text{ y } \Delta\eta_{zy} \leq \omega_0, \\ 1 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (3.56)$$

Calculamos el gradiente de la energía del estado base como función de las interac-

ciones:

$$\nabla \epsilon_{\xi}^{\text{g.s.}} = \frac{1}{2\omega_0} \begin{cases} \frac{1-f_{\xi x}^2}{f_{\xi x}^2} \left( \frac{2\omega_0\gamma}{\gamma_{\xi+}^2}, -1, 0, 1 \right) + (0, 0, 0, 1) & \text{para } \gamma \geq \gamma_{\xi x}^c, \text{ y } \Delta\eta_{zx} \leq \omega_0, \\ \frac{1-f_{\xi y}^2}{f_{\xi y}^2} \left( \frac{2\omega_0\gamma}{\gamma_{\xi-}^2}, 0, -1, 1 \right) + (0, 0, 0, 1) & \text{para } \gamma \geq \gamma_{\xi y}^c, \text{ y } \Delta\eta_{zy} \leq \omega_0, \\ (0, 0, 0, 1) & \text{de otra manera} \end{cases}, \quad (3.57)$$

Evaluaremos las derivadas de tres combinaciones de parámetros específicos  $F_{\xi} = 1$ ,  $\Delta\eta_{zx} = \omega_0$  ( $\Delta\eta_{zy} = \omega_0$ ) y  $\Delta\eta_{zx} = \Delta\eta_{zy}$ . Cuando  $F_{\xi} = 1$ , la energía (como función de  $\gamma$ ) de la fase normal a la fase superradiante  $x-$  es continua, sin embargo, en la segunda derivada de la energía con respecto al acoplamiento se hace discontinua, por lo tanto, se observa que pasar de la fase normal a la fase superradiante es una transición de segundo orden. En el caso  $\Delta\eta_{zx} = \Delta\eta_{zy}$  y  $\Delta\eta_{zx} = \omega_0$  la energía del estado base descrita por (3.50) y (3.54) es de primer orden.

### 3.4. Densidad de Estados Semiclásicos

El estudio de la densidad de estados nos permite analizar la energía de excitación del sistema para un valor específico del acoplamiento luz-materia. Esto facilita la exploración de los dominios de energía que emergen de la fase normal o superradiante, los cuales se conocen como transiciones de fase de estados excitados. Para realizar este análisis de los dominios de energía y sus singularidades, emplearemos una aproximación semiclásica de la densidad de estados  $\nu_{\xi}(\epsilon)$ , obtenida al calcular el volumen del espacio de fase disponible mediante la ley de Weyl [124]. Así, podemos aproximar la densidad de estados determinando el volumen accesible del espacio de fase para una energía dada  $\epsilon\omega_0$  de la siguiente manera:

$$\nu_{\xi}(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq dp dj_z d\phi \delta [\epsilon\omega_0 - H_{cl}^{\xi}(q, p, j_z, \phi)]. \quad (3.58)$$

Para integrar la ecuación (3.58), es necesario eliminar los grados de libertad  $p$  y  $q$  [6, 48]. Para ello, eliminamos  $q$  del Hamiltoniano  $H_{cl}^{\xi}(q, p, j_z, \phi) = \xi$ , expresándolo en términos de  $p$ ,  $j_z$  y  $\phi$  mediante el uso de las propiedades de la delta de Dirac.

$$\nu_{\xi}(\epsilon\omega_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dj_z d\phi dp dq \left( \frac{\delta(q - q_+)}{|\partial H_{cl}/\partial q|_{q_+}} + \frac{\delta(q - q_-)}{|\partial H_{cl}/\partial q|_{q_-}} \right), \quad (3.59)$$

donde  $q_{\pm}$  son las soluciones cuadráticas de  $H_{cl} = E$ :

$$q_{\xi\pm} = -\frac{\gamma}{\omega} \sqrt{1 - j_z^2(1 + \xi)} \cos \phi \pm \sqrt{-p^2 + a_{\xi}p + b_{\xi}}, \quad (3.60)$$

los coeficientes  $a_\xi$  y  $b_\xi$  son:

$$a_\xi = \frac{2\gamma}{\omega} \sqrt{1 - j_z^2} (1 - \xi) \sin \phi, \quad (3.61)$$

$$b_\xi = -\frac{2}{\omega} j_z \left( \omega_0 + \frac{\eta_z j_z}{2} \right) - \frac{1}{\omega} (1 - j_z^2) (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) + \frac{2\epsilon\omega_0}{\omega} + \frac{\gamma^2}{\omega^2} (1 - j_z^2) (1 + \xi)^2 \cos^2 \phi. \quad (3.62)$$

Empleando las propiedades de la función delta de Dirac se tiene:

$$\nu_\xi(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dq dp dj_z d\phi \left[ \delta(q - q_{\xi+}) \left| \frac{\partial H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q} \right|_{q_{\xi+}}^{-1} + \delta(q - q_{\xi-}) \left| \frac{\partial H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q} \right|_{q_{\xi-}}^{-1} \right]. \quad (3.63)$$

Evaluando las derivadas tenemos:

$$\left| \frac{\partial H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q} \right|_{q_{\xi\pm}} = \left| \omega \left[ -\frac{\gamma}{\omega} \sqrt{1 - j_z^2} (1 + \xi) \cos \phi \pm \sqrt{-p^2 + a_\xi p + b_\xi} \right] + \gamma \sqrt{1 - j_z^2} (1 + \xi) \cos \phi \right| = \omega \sqrt{-p^2 + a_\xi p + b_\xi}. \quad (3.64)$$

Con esto, la integral respecto a  $q$  se simplifica:

$$\nu_\xi(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{\omega} \int dj_z d\phi \frac{dp}{\sqrt{-p^2 + a_\xi p + b_\xi}}. \quad (3.65)$$

Los límites en las variables  $j_z$ ,  $\phi$  y  $p$  están determinadas por la condición  $-p^2 + a_\xi p + b_\xi \geq 0$ . La integración en  $p$  está escrita por:

$$-p^2 + a_\xi p + b_\xi = (p_{\xi+} - p)(p - p_{\xi-}), \quad (3.66)$$

donde

$$p_{\xi\pm} = \frac{1}{2} \left( -a_\xi \pm \sqrt{a_\xi^2 + 4b_\xi} \right) \quad (3.67)$$

son las raíces ( $p_{\xi-} \geq p_{\xi+}$ ) del polinomio cuadrático  $-\omega^2 p^2 + a_\xi p + b_\xi = 0$ . En consecuencia,

$$\nu_\xi(\epsilon) = \frac{2}{\omega(2\pi)^2} \int dj_z \int d\phi \int_{p_{\xi-}}^{p_{\xi+}} dp \frac{1}{\sqrt{(p_{\xi+} - p)(p - p_{\xi-})}} = \frac{1}{2\pi\omega} \int dj_z \int d\phi \quad (3.68)$$

Este resultado es válido, siempre y cuando las raíces  $p_{\xi\pm}$  sean reales, lo cual, el discriminante

$$a_\xi^2 + 4b_\xi \geq 0 \quad (3.69)$$

Sustituyendo los valores  $a_\xi$  y  $b_\xi$  explícitamente

$$\frac{1}{2} (1 - j_z^2) \left[ \left( f_{\xi+} - \frac{\eta_x}{\omega_0} \right) \cos^2 \phi + \left( f_{\xi-} - \frac{\eta_y}{\omega_0} \right) \sin^2 \phi \right] \geq \frac{\eta_z}{2\omega_0} j_z^2 + j_z - \epsilon, \quad (3.70)$$

$$\cos^2 \phi \geq g_\xi(j_z, \epsilon), \quad (3.71)$$

donde

$$g_\xi(j_z, \epsilon) = \left\{ \frac{2}{1 - j_z^2} \left[ \frac{\eta_z}{2\omega_0} j_z^2 + j_z - \epsilon \right] - \left( f_{\xi-} - \frac{\eta_y}{\omega_0} \right) \right\} \left[ \left( f_{\xi+} - f_{\xi-} \right) - \left( \frac{\eta_x}{\omega_0} - \frac{\eta_y}{\omega_0} \right) \right]^{-1}. \quad (3.72)$$

La Ec. [3.72](#) depende del volumen del espacio de fase disponible en la región de la esfera de Bloch para una energía dada. Esto nos permite determinar los valores límite para  $(j_z, \phi)$  en la esfera de Bloch, considerando  $0 \geq \cos \phi_0 \geq 1$ . Si  $f_\xi(j_z, \epsilon) < 0$ , entonces la condición se puede satisfacer para todos los valores de  $\phi \in [0, 2\pi)$  en la esfera de Bloch. Por otro lado, si  $f_\xi(j_z, \epsilon) > 1$ , la condición no se puede cumplir. Por lo tanto, consideramos un intervalo para  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \phi_\xi = \arccos \sqrt{g_\xi(j_z, \epsilon)} = \arccos \left\{ \left[ \frac{2}{1 - j_z^2} \left[ \frac{\eta_z}{2\omega_0} j_z^2 + j_z - \epsilon \right] - \left( f_{\xi-} - \frac{\eta_y}{\omega_0} \right) \right]^{1/2} \right. \\ \left. \times \left[ \left( f_{\xi+} - f_{\xi-} \right) - \left( \frac{\eta_x}{\omega_0} - \frac{\eta_y}{\omega_0} \right) \right]^{-1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

En general, podemos obtener los valores límite para  $j_z$  y  $\epsilon$  donde la condición se satisface tomando en cuenta los límites del  $\cos \phi$ . Específicamente, consideramos los intervalos  $[-\phi_\xi, \phi_\xi]$  y  $[\pi - \phi_\xi, \pi + \phi_\xi]$ . En este caso, se obtiene una ecuación cuadrática en  $j_z$  que puede tener soluciones reales o complejas.

$$j_z^2 \left\{ \frac{\eta_z}{2\omega_0} + \frac{1}{2} \left( f_{\xi+} - \frac{\eta_x}{\omega_0} \right) \right\} + j_z - \left\{ \epsilon + \frac{\eta_z}{2\omega_0} + \frac{1}{2} \left( f_{\xi+} - \frac{\eta_z - \eta_x}{\omega_0} \right) \right\} = 0, \quad (3.74)$$

Añadimos y restamos  $\eta_z/2\omega_0$  en [3.74](#). Observamos que los efectos de interacción en la dirección  $\eta_z$  se traducen en un corrimiento en la energía, mientras que en la dirección  $\eta_x$  se reflejan en un corrimiento del acoplamiento crítico. Las raíces resultantes son:

$$j_{z\xi}^{(\pm)}(\epsilon) = -\frac{1}{f_{\xi x}} \left[ 1 \mp \sqrt{2f_{\xi x}(\epsilon - \epsilon_{s\xi x})} \right] \quad (3.75)$$

Obtenemos los límites dados por  $\cos \phi_{1,2} = 0$ . De la misma manera, obtenemos una ecuación cuadrática

$$j_z^2 \left[ \frac{\eta_z}{2\omega_0} + \frac{1}{2} \left( f_{\xi-} - \frac{\eta_y}{\omega_0} \right) \right] + j_z - \left[ \epsilon + \frac{\eta_z}{2\omega_0} + \frac{1}{2} \left( f_{\xi-} - \frac{\eta_z - \eta_y}{\omega_0} \right) \right] = 0. \quad (3.76)$$

donde también sumamos y restamos  $\eta_z/2\omega_0$ . Observamos que es análoga a la Ec. (3.74), con la única diferencia de que  $\eta_x$  es reemplazado por  $\eta_y$  y  $f_{\xi-}$  se sustituye por  $f_{\xi+}$ . En consecuencia, las soluciones son:

$$j_{z\xi}^{(1,2)}(\varepsilon) = -\frac{1}{f_{\xi y}} \left[ 1 \mp \sqrt{2f_{\xi y}(\varepsilon - \varepsilon_{s\xi y})} \right]. \quad (3.77)$$

En las siguientes secciones estudiaremos los casos límite de TC y Dicke estándar con interacciones materiales para entender los efectos de las interacciones en la emergencia de dominios y energías críticas.

### 3.4.1. Dominio de Energías en el Límite Tavis-Cummings con Interacciones

En el modelo de TC, las funciones clave para determinar la integral de la ecuación (3.68), que representa el volumen del espacio de fase disponible, son las siguientes:

$$\phi_0(j_z, \varepsilon) = \arccos \left\{ \left[ \frac{2}{1 - j_z^2} \left( \frac{\eta_z}{2\omega_0} j_z^2 + j_z - \varepsilon \right) - \left( f_{0+} - \frac{\eta_y}{\omega_0} \right) \right]^{1/2} \left( \frac{\eta_y}{\omega_0} - \frac{\eta_x}{\omega_0} \right)^{-1/2} \right\}, \quad (3.78)$$

$$j_{z0}^{(\pm)}(\varepsilon) = -\frac{1}{f_{0x}} \left[ 1 \mp \sqrt{2f_{0x}(\varepsilon - \varepsilon_{s0x})} \right], \quad (3.79)$$

$$j_{z0}^{(1,2)}(\varepsilon) = -\frac{1}{f_{0y}} \left[ 1 \mp \sqrt{2f_{0y}(\varepsilon - \varepsilon_{s0y})} \right]. \quad (3.80)$$

donde  $j_{z0}$  representa los límites para cada energía  $\varepsilon$ . Recordemos que la fase normal en TC está representado por  $j_z = \pm 1$ , con energía  $\varepsilon_{\pm} = \pm 1 + \eta_z/2\omega_0$ , si aumentamos el valor del acoplamiento luz-materia emergen fases cuánticas como la fase superradiante en  $x-$ ,  $y-$  y superpuestas con sus respectivas energías (3.50) y (3.54). Esto implica que cada fase esta asociada a diferentes comportamientos de  $g_{\xi}(j_z, \varepsilon)$  permitiendo identificar el volumen de espacio fase accesible en la esfera de Bloch para cada fase cuántica. A manera de ejemplo y sin perder generalidad asumiremos  $\varepsilon_{s0x} < \varepsilon_{s0y}$ , en consecuencia:

- Cuando  $\xi_+ < \xi$ , la función  $g_0(j_z, \xi)$  siempre es menor que uno, implicando que el volumen del espacio fase atómico (esfera de pseudospín) esté totalmente disponible, es decir,  $j_z \in [-1, 1]$  y  $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ .
- En el intervalo  $\xi_- < \xi < \xi_+$  implica que  $j_z$  toma valores únicamente en el intervalo  $[-1, j_{z0}^+]$ , donde  $|j_{z0}^+| \leq 1$ . Este intervalo está presente para todos los valores de parámetros y representa el volumen de espacio fase accesible desde el punto mínimo en  $j_z = -1$  hasta el máximo en  $j_z = +1$ .
- El intervalo  $\varepsilon_{0sy} < \varepsilon \leq \varepsilon_-$  se encuentra la fase superradiante en  $y-$ .



- El intervalo que surge de la presencia de ambas fases superradiantes,  $x-$  y  $y-$ , es  $\epsilon_{0sx} \leq \epsilon \leq \epsilon_{0sy}$ . El polo sur de la esfera de pseudospín ( $j_z = -1$ ) es inaccesible, y la variable  $j_z$  está restringida al intervalo  $j_{z0}^{(-)} \leq j_z \leq j_{z0}^+$ . Dado que  $\epsilon_{0sx} < \epsilon_{0sy}$  es la energía del estado base en la fase superradiante en  $x-$ .

Identificamos tres energías críticas, representadas por  $\epsilon_0^{(c1)}$ ,  $\epsilon_0^{(c2)} = \epsilon_-$  y  $\epsilon_0^{(c1)} = \epsilon_+$ . Cada una de estas energías corresponde a puntos estacionarios en la superficie de energía. La aproximación semiclásica de la densidad de estados en el modelo de TC con interacciones materiales se convierte en:

$$\frac{\omega}{2} \nu_0(\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{j_{z0}^{(-)}}^{j_{z0}^{(+)}} \phi_0(j_z, \epsilon) dj_z, & \epsilon \in [\epsilon_{0sx}, \epsilon_{0sy}] \text{ y } \gamma \in [\gamma_{0x}^c, \gamma_{0y}^c], \\ \frac{1}{\pi} \left[ \int_{j_{z0}^{(-)}}^{j_{z0}^{(1)}} \phi_0(j_z, \epsilon) dj_z + \int_{j_{z0}^{(2)}}^{j_{z0}^{(+)}} \phi_0(j_z, \epsilon) dj_z \right] + \frac{1}{2} (j_{z0}^{(2)} - j_{z0}^{(1)}), & \epsilon \in [\epsilon_{s0y}, \epsilon_-] \text{ y } \gamma \in [\gamma_{0y}^c, \infty), \\ \frac{1}{\pi} \int_{j_{z0}^{(1)}}^{j_{z0}^{(+)}} \phi_0(j_z, \epsilon) dj_z + \frac{1}{2} (j_{z0}^{(1)} + 1), & \epsilon \in [\epsilon_-, \epsilon_+], \text{ y } \gamma \in [0, \infty), \\ 1, & \epsilon_+ \leq \epsilon, \text{ y } \gamma \in [0, \infty). \end{cases} \quad (3.81)$$

El rango de energía está determinado por los tres intervalos de  $\gamma$ . La transición entre cada dominio energético aun cuando es continua revela la presencia de una ESQPT, ya que la densidad de estados experimenta un cambio crítico marcado por una singularidad en su primera derivada  $d\nu_0(\epsilon)/d\epsilon$ .

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial \epsilon} = \frac{1}{1 - j_z^2} \left\{ [1 - g_0(j_z, \epsilon)] g_0(j_z, \epsilon) \left( \frac{\eta_y - \eta_x}{\omega_0} \right) \right\}^{-1/2}. \quad (3.82)$$

Se puede demostrar que las derivadas ESQPT en  $\epsilon_{0sy}$  exhiben una discontinuidad de tipo logarítmico, mientras que en  $\epsilon_-$  y  $\epsilon_+$ , son discontinuas o de tipo salto. Existen singularidades de tipo salto cuando  $\epsilon_{0sy} = \epsilon_{0sx}$  y en  $\epsilon_+$  [96, 102].

### 3.4.2. Dominio de Energías en el Límite Dicke con Interacciones

Utilizando la metodología anteriormente presentada analizaremos el dominio de energías de modelo de Dicke con interacciones. Para ello consideramos:

$$\phi_1(j_z, \epsilon) = \arccos \left\{ \left[ \frac{2}{1 - j_z^2} \left[ \frac{\eta_z}{2\omega_0} j_z^2 + j_z - \epsilon \right] + \frac{\eta_y}{\omega_0} \right]^{1/2} \left( f_{1+} - \left( \frac{\eta_x}{\omega_0} - \frac{\eta_y}{\omega_0} \right) \right)^{-1/2} \right\}, \quad (3.83)$$

$$j_{z1}^{(\pm)}(\epsilon) = -\frac{1}{f_{1x}} \left[ 1 \mp \sqrt{2f_{1x}(\epsilon - \epsilon_{s1x})} \right], \quad (3.84)$$

$$j_{z1}^{(1,2)}(\epsilon) = -\frac{1}{f_{1y}} \left[ 1 \mp \sqrt{2f_{1y}(\epsilon - \epsilon_{s1y})} \right]. \quad (3.85)$$

donde  $j_{z1}^{(1)} \leq j_{z1}^{(2)}$  y  $f_{1y}$  es independiente del acoplamiento luz-materia. Similar al caso TC,  $j_z$  toma los mismo valores, por lo tanto, los intervalos son los siguientes:

- El intervalo  $\epsilon_+ < \epsilon$  corresponde al caso similar al modelo TC, donde la esfera de pseudospín está completamente disponible con  $j_z \in [-1, 1]$ ,  $\phi_1 \in [0, 2\pi)$  y  $\nu_1(\epsilon) = 2/\omega$ .
- El intervalo  $\epsilon_- < \epsilon < \epsilon_+$  presenta una restricción en la variable  $j_z$ , limitada al intervalo  $[-1, j_{z1}^{(+)}]$ . Si  $j_z \in [-1, \epsilon]$ , entonces  $\phi_1$  puede variar en  $[0, 2\pi)$ , pero si  $\epsilon < j_z \leq \epsilon_{1sy}$ , entonces  $0 < \phi_1 < \pi$ .
- El intervalo  $\epsilon_{1sy} < \epsilon < \epsilon_-$  está exclusivamente presente en la fase deformada.
- En el intervalo más bajo  $\epsilon_{1sx} \leq \epsilon \leq \epsilon_{1sy}$ , el polo sur de la esfera de Bloch ( $j_{zs} = -1$ ) es inaccesible y la variable  $j_z$  se restringe en el intervalo  $j_z \in [j_{z1}^{(-)}, j_{z1}^{(+)}]$ .

La expresión DoS semiclásica en el límite de Dicke se convierte

$$\frac{\omega}{2}\nu_1(\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{j_{z1}^{(-)}}^{j_{z1}^{(+)}} \phi_1(j_z, \epsilon) dj_z, & \epsilon \in [\epsilon_{s1x}, \epsilon_{s1y}] \text{ y } \gamma \in [\gamma_{1x}^c, \infty), \\ \frac{1}{\pi} \left[ \int_{j_{z1}^{(-)}}^{j_{z1}^{(+)}} \phi_1(j_z, \epsilon) dj_z + \int_{j_{z1}^{(2)}}^{j_{z1}^{(+)}} \phi_1(j_z, \epsilon) dj_z \right] + \frac{1}{2} (j_{z1}^{(2)} - j_{z1}^{(1)}), & \epsilon \in [\epsilon_{s1y}, \epsilon_-] \text{ y } \gamma \in [\gamma_{1x}^c, \infty), \\ \frac{1}{\pi} \int_{j_{z1}^{(1)}}^{j_{z1}^{(+)}} \phi_1(j_z, \epsilon) dj_z + \frac{1}{2} (j_{z1}^{(1)} + 1), & \epsilon \in [\epsilon_-, \epsilon_+] \text{ y } \gamma \in [0, \infty), \\ 1, & \epsilon_+ \leq \epsilon \text{ y } \gamma \in [0, \infty). \end{cases} \quad (3.86)$$

A través de la primera derivada de las densidades de estados podemos caracterizar el tipo de ESQPT:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \epsilon} = \frac{1}{1 - j_z^2} \left\{ [1 - g_1(j_z, \epsilon)] g_1(j_z, \epsilon) \left( f_{1+} - \frac{\eta_x - \eta_y}{\omega_0} \right) \right\}^{-1/2}. \quad (3.87)$$

### 3.4.3. Dominio de Energías en el Modelo Anisotrópico con Interacciones

Finalmente, analizaremos el dominio de energía para el modelo anisotrópico con interacciones materiales. Esto se logra obteniendo una expresión general que combina las ecuaciones (3.73), (3.75) y (3.77). De esta manera,

$$\frac{\omega}{2}\nu_\xi(\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{j_{z\xi}^{(-)}}^{j_{z\xi}^{(+)}} \phi_\xi(j_z, \epsilon) dj_z, & \epsilon_{s\xi x} \leq \epsilon \leq \epsilon_{s\xi y}, \text{ y } \gamma \in [\gamma_{\xi x}^c, \gamma_{\xi y}^c], \\ \frac{1}{\pi} \left[ \int_{j_{z\xi}^{(-)}}^{j_{z\xi}^{(+)}} \phi_0(j_z, \epsilon) dj_z + \int_{j_{z\xi}^{(2)}}^{j_{z\xi}^{(+)}} \phi_0(j_z, \epsilon) dj_z \right] + \frac{1}{2} (j_{z\xi}^{(2)} - j_{z\xi}^{(1)}), & \epsilon_{s\xi y} < \epsilon \leq \epsilon_-, \text{ y } \gamma \in [\gamma_{\xi y}^c, \infty), \\ \frac{1}{\pi} \int_{j_{z\xi}^{(1)}}^{j_{z\xi}^{(+)}} \phi_0(j_z, \epsilon) dj_z + \frac{1}{2} (j_{z\xi}^{(1)} + 1), & \epsilon_- < \epsilon \leq \epsilon_+, \text{ y } \gamma \in [0, \infty), \\ 1, & \epsilon_+ < \epsilon \text{ y } \gamma \in [0, \infty). \end{cases} \quad (3.88)$$

La fenomenología de este resultado es similar en el modelo de TC y Dicke estándar. La principal diferencia radica en la modificación del acoplamiento crítico de la fase superradiante dado por  $\eta_x$ , el acoplamiento crítico dado por la fase en  $\eta_y$  y el desplazamiento de la energía en  $j_z$  en  $\eta_z$ . Además, en este caso, obtenemos la expresión general.

$$\frac{\partial \phi_\xi}{\partial \epsilon} = \frac{1}{1 - j_z^2} \{ [1 - g_\xi(j_z, \epsilon)] g_\xi(j_z, \epsilon) \left[ (f_{\xi+} - f_{\xi-}) - \frac{\eta_x - \eta_y}{\omega_0} \right] \}^{-1/2}. \quad (3.89)$$

Un resultado destacado de nuestra investigación es que las interacciones  $\eta_x$  y  $\eta_y$  desempeñan roles similares para valores arbitrarios de  $\xi$  tanto en las propiedades del estado base como en los estados excitados.  $\eta_x$  modula la magnitud de  $\gamma_{\xi+}^c$ , mientras que  $\eta_y$  corresponde a  $\gamma_{\xi-}^c$ . Del mismo modo, para un valor arbitrario de las interacciones materiales y  $\xi$ , ambas transiciones ESQPT, una correspondiente al punto estacionario  $j_{zs} = 1$  y otra debido a la saturación de la esfera de Bloch ( $j_{zs} = +1$ ), son similares a casos anteriores [6, 125, 126].

Esto aclara los resultados observados en los límites de TC y Dicke. En el primer caso, la inclusión de interacciones hace que el modelo TC extendido ya no sea integrable. En el caso de Dicke, incluso con un  $\eta_x$  finito, se modifica la densidad de estados, aunque el acoplamiento crítico  $\gamma_{1-}^c$  tienda a infinito.

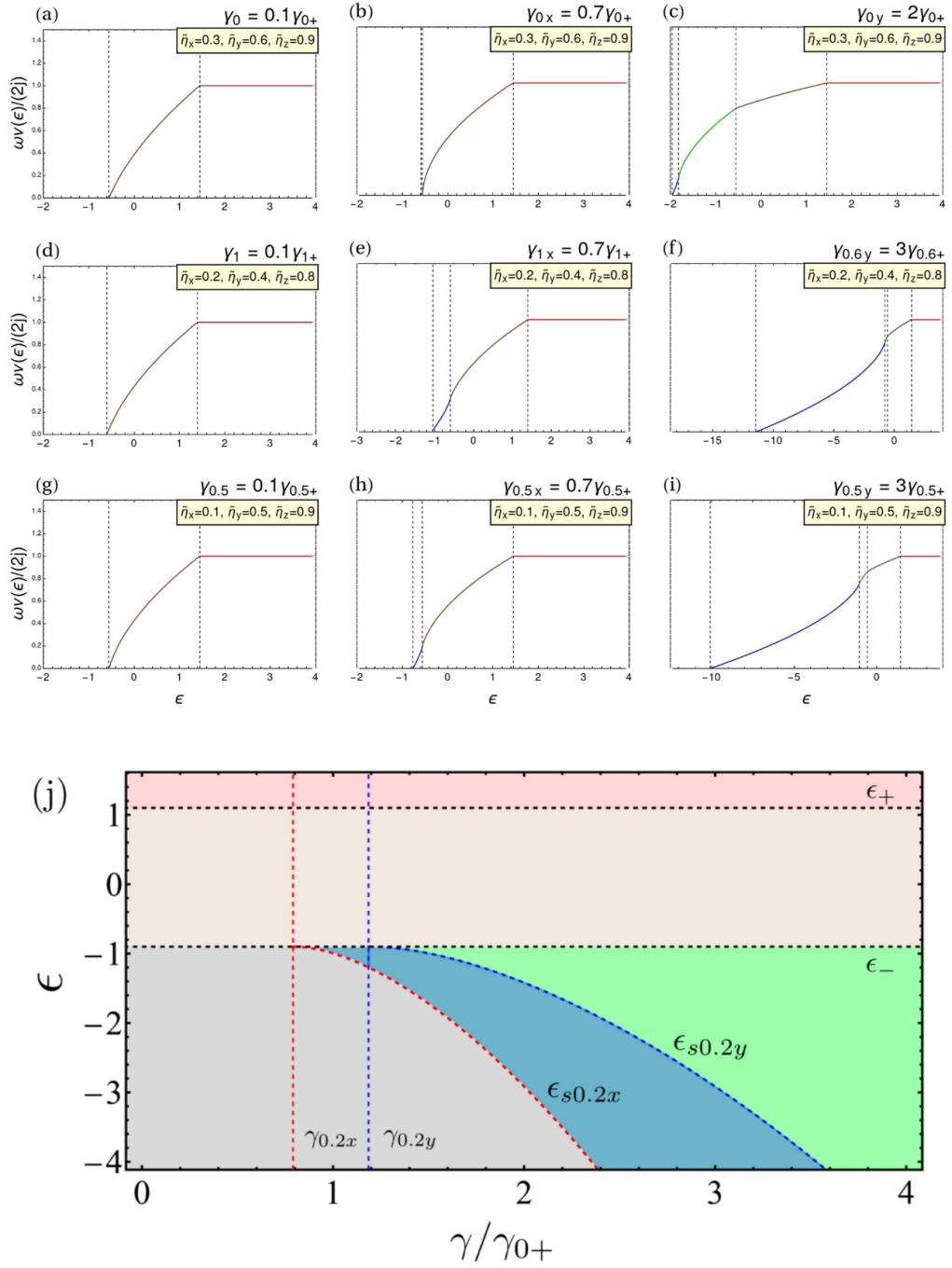


Figura 3.4: (a)-(i) muestran las regiones del volumen del espacio fase disponible  $\omega\nu(\epsilon)/2j$  vs.  $\epsilon$  para diferentes valores de las interacciones materiales. (a)-(c) corresponden al límite de Tavis-Cummings, (d)-(f) al límite de Dicke estándar, y (g)-(i) al modelo de Dicke anisotrópico. (j) presenta un diagrama de los dominios de energía  $\epsilon$  vs.  $\gamma/\gamma_0$  en el límite de Tavis-Cummings, específicamente para las interacciones  $\eta_x = \eta_y = 1$  y  $\eta_z = 2$ .

En la Fig. [3.4](#) (a)-(i) se presenta el volumen del espacio fase disponible,  $\omega\nu(\epsilon)/2j$ ,

en función de la energía del sistema  $\epsilon$ . La Fig. 3.4 (j) muestra un diagrama de los dominios de energía  $\epsilon$  en función de  $\gamma/\gamma_{0+}$ .

Las Figs. 3.4 (a)-(c) ilustran el volumen de espacio fase disponible en el límite de Tavis-Cummings para distintas regiones del acoplamiento luz-materia. En (a), correspondiente a la fase normal, se observa el pozo esférico de las superficies de energía. La línea café representa el dominio de energía dentro del pozo, mientras que la línea roja indica el borde del pozo, mostrando el volumen total de espacio fase disponible. (b) muestra un comportamiento similar. En (c), correspondiente a la fase superradiante, la línea azul denota el volumen disponible desde los puntos estables hasta los puntos silla, la línea verde desde los puntos silla hasta el punto inestable, la línea café desde el punto inestable hasta el borde del sistema, y la línea roja representa el volumen total.

Las Figs. 3.4 (d)-(f) muestran el volumen de espacio fase disponible en el límite de Dicke estándar para diferentes valores del acoplamiento luz-materia. En (d), se presenta la fase normal con el volumen del pozo esférico. (e) corresponde a la fase superradiante, donde la línea azul representa el volumen desde los puntos estables hasta el punto silla, y la línea café abarca desde el punto silla hasta el volumen total. (f) muestra un comportamiento similar al de (c).

Las Figs. 3.4 (g)-(i) representan el volumen de espacio fase disponible en el límite de Dicke anisotrópico para distintas regiones del acoplamiento luz-materia, mostrando un comportamiento similar a las Figs. 3.4 (d)-(f).

Finalmente, la Fig. 3.4 (j) muestra un diagrama de los dominios de energía  $\epsilon$  en función de  $\gamma/\gamma_{0+}$  en el límite de Tavis-Cummings, con las interacciones materiales  $\eta_x = \eta_y = 1$  y  $\eta_z = 2$ . Esta figura ilustra la ubicación de las diferentes líneas representadas en (a)-(i) para distintos valores del acoplamiento luz-materia.

### 3.5. Conclusiones

En este capítulo, estudiamos las fases cuánticas emergentes en el modelo de Dicke mediante una aproximación de estados coherentes, analizando las superficies de energía en los límites de Tavis-Cummings, Dicke estándar y Dicke anisotrópico. Observamos que el acoplamiento de transición provoca un desplazamiento en las interacciones materiales, afectando las características de las fases cuánticas.

Identificamos que la aparición de una transición de fase se manifiesta en cambios abruptos en las propiedades del estado base o en los puntos estables del sistema. Las formas que adquieren las superficies de energía nos permiten inferir los tipos de modos de excitación posibles, lo cual constituye el enfoque del siguiente capítulo.

Finalmente, estudiamos el comportamiento del volumen del espacio fase disponible en los tres límites mencionados, destacando cómo las distintas interacciones afectan

la estructura de estos volúmenes y su relación con la dinámica del sistema. Estos resultados ofrecen una base sólida para entender los mecanismos subyacentes a las transiciones de fase y sus implicaciones en la física de sistemas de interacción luz-materia.

# Capítulo 4

## Modos de Fase y Amplitud en el Modelo de Dicke Interactuante

Utilizando técnicas de campo medio analizaremos el espectro de bajas energías del modelo de Dicke anisotrópico incluyendo las interacciones materiales [41], con el propósito de identificar los modos de amplitud y de fase generados a partir de la ruptura espontánea de simetría.

Para ello, utilizaremos la aproximación de Holstein-Primakoff [127]: Primero, se realiza un mapeo de los operadores de pseudo-espín en términos de un bosón como una serie infinita. Se construye un estado coherente mediante bosones para proporcionar una descripción de campo medio al estado base y que se vuelve exacto en el límite termodinámico [41]. Segundo, se construye una versión truncada del Hamiltoniano cuadrático en términos de los operadores bosónicos proporcionando una descripción del Hamiltoniano de Dicke como dos osciladores armónicos desacoplados [41].

### 4.1. Aproximación de Holstein-Primakoff

Utilizar la aproximación de Holstein-Primakoff [41, 128] nos proporciona soluciones exactas en el límite termodinámico. Esto implica representar los operadores atómicos en términos de operadores bosónicos, permitiendo construir un Hamiltoniano con dos osciladores acoplados.

$$\hat{J}_z = \hat{b}^\dagger \hat{b} - j, \quad \hat{J}_+ = \hat{b}^\dagger \sqrt{2j} \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \quad \text{y} \quad \hat{J}_- = \sqrt{2j} \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \hat{b}. \quad (4.1)$$

Los operadores  $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger]$  respetan el álgebra SU(2):

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1.$$

Recordemos que el modelo de Dicke con interacciones materiales es:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[ (\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_-) + \xi (\hat{a}^\dagger \hat{J}_+ + \hat{a} \hat{J}_-) \right] + \frac{1}{N} \left[ \eta_x \hat{J}_x^2 + \eta_y \hat{J}_y^2 + \eta_z \hat{J}_z^2 \right], \quad (4.2)$$

sustituyendo [4.1](#) en [4.2](#):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 (\hat{b}^\dagger \hat{b} - j) \\ & + \gamma \left[ \left( \hat{a} \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} + \hat{a}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \hat{b} \right) + \xi \left( \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} + \hat{a} \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \hat{b} \right) \right] \\ & \frac{1}{4} \left[ \eta_x \left( \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} + \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \hat{b} \right)^2 - \eta_y \left( \hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} - \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \hat{b} \right)^2 \right] + \frac{\eta_z}{2j} (\hat{b}^\dagger \hat{b} - j)^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

La aproximación de Holstein-Primakoff nos facilita expresar el Hamiltoniano de Dicke en forma de dos osciladores representado por los operadores  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}^\dagger$ . Nos es posible desacoplar el Hamiltoniano aplicando una transformación de Bogoliubov [7](#), [113](#), gracias a esto, podemos establecer el espectro de energías tanto en la fase normal como superradiante y es lo que se mostrará a continuación.

## 4.2. Campo Medio en el Modelo de Dicke Anisotrópico Interactuante

### 4.2.1. Fase Normal

Al considerar el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ , el operador de número  $\hat{b}^\dagger \hat{b}$ , es reemplazado por su valor esperado  $\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle$ . Procediendo de la siguiente forma:

$$\frac{\langle \hat{b}^\dagger \hat{b} \rangle}{2j} \ll 1 \quad \text{esto implica} \quad \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} \approx 1.$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano aproximado es:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 (\hat{b}^\dagger \hat{b} - j) + \gamma \left[ (\hat{a} \hat{b}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{b}) + \xi (\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger + \hat{a} \hat{b}) \right] \\ & + \frac{1}{4} \left[ \eta_x (\hat{b}^\dagger + \hat{b})^2 - \eta_y (\hat{b}^\dagger - \hat{b})^2 \right] + \frac{\eta_z}{2j} (\hat{b}^\dagger \hat{b} - j)^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ya que nos interesa desacoplar [4.4](#) emplearemos la transformación de Bogoliubov [41](#), [128](#). Primero, transformaremos el Hamiltoniano a cuadraturas:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \hat{x} + \frac{i}{\omega} \hat{p}_x \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \hat{x} - \frac{i}{\omega} \hat{p}_x \right), \quad (4.5)$$



$$\hat{b} = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left( \hat{y} + \frac{i}{\omega_0} \hat{p}_y \right), \quad \hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}} \left( \hat{y} - \frac{i}{\omega_0} \hat{p}_y \right). \quad (4.6)$$

Sustituyendo [4.5](#) y [4.6](#) en [4.4](#) tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2} \left( \omega^2 \hat{x}^2 + \omega_0^2 \left[ 1 + \frac{\eta_x}{\omega_0} - \frac{\eta_z}{\omega_0} \right] \hat{y}^2 + \hat{p}_x^2 + \left[ 1 + \frac{\eta_y}{\omega_0} - \frac{\eta_z}{\omega_0} \right] \hat{p}_y^2 + 2\gamma\sqrt{\omega\omega_0}(1+\xi)\hat{x}\hat{y} \right. \\ & \left. + \frac{2\gamma}{\sqrt{\omega\omega_0}}(1-\xi)\hat{p}_x\hat{p}_y - \left[ \omega + \omega_0 \left( 1 - \frac{\eta_z}{\omega_0} \right) + \omega_0 \left( 1 - \frac{\eta_z}{2\omega_0} \right) 2j \right] \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Reducimos el Hamiltoniano tomando en cuenta los siguientes cambios de variable

$$\omega_{zx} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\eta_z - \eta_x}{\omega_0}} = \omega_0 \left[ \frac{\gamma_{\xi x}^c}{\gamma_{\xi+}} \right] \quad \text{y} \quad \omega_{zy} = \left[ 1 - \frac{\eta_z - \eta_y}{\omega_0} \right] = \left[ \frac{\gamma_{\xi y}^c}{\gamma_{\xi-}} \right]. \quad (4.8)$$

$\gamma_{\xi x}/\gamma_{\xi+}$  y  $\gamma_{\xi y}/\gamma_{\xi-}$  están representados por [\(3.49\)](#) y [\(3.53\)](#), respectivamente. Reordenando [4.7](#):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2} \left( \omega^2 \hat{x}^2 + \omega_{zx}^2 \hat{y}^2 + \hat{p}_x^2 + \omega_{zy}^2 \hat{p}_y^2 + 2\gamma\sqrt{\omega\omega_0}(1+\xi)\hat{x}\hat{y} + \frac{2\gamma}{\sqrt{\omega\omega_0}}(1-\xi)\hat{p}_x\hat{p}_y \right. \\ & \left. - \left[ \omega + \omega_0 \left( 1 - \frac{\eta_z}{\omega_0} \right) + \omega_0 \left( 1 - \frac{\eta_z}{2\omega_0} \right) 2j \right] \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

El siguiente paso implica eliminar los terminos cruzados:  $\hat{x}\hat{y}$  y  $\hat{p}_x\hat{p}_y$ . Para ello, realizaremos rotaciones sobre los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{q}_1 \cos \theta_1 + \hat{q}_2 \sin \theta_1, & \hat{y} &= -\hat{q}_1 \sin \theta_1 + \hat{q}_2 \cos \theta_1, \\ \hat{p}_x &= \hat{p}_1 \cos \theta_2 + \hat{p}_2 \sin \theta_2, & \hat{p}_y &= -\hat{p}_1 \sin \theta_2 + \hat{p}_2 \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sustituyendo [4.10](#) en [4.9](#):

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2} \left[ \hat{q}_1^2 \left\{ \omega^2 \cos^2 \theta_1 + \omega_{zx}^2 \sin^2 \theta_1 - 2\gamma\sqrt{\omega\omega_0}(1+\xi) \cos \theta_1 \sin \theta_1 \right\} \right. \\ & + \hat{q}_2^2 \left\{ \omega^2 \sin^2 \theta_1 + \omega_{zx}^2 \cos^2 \theta_1 + 2\gamma\sqrt{\omega\omega_0}(1+\xi) \cos \theta_1 \sin \theta_1 \right\} \\ & + \hat{p}_1^2 \left\{ \cos^2 \theta_2 + \omega_{zy}^2 \sin^2 \theta_2 - 2\frac{\gamma}{\sqrt{\omega\omega_0}}(1-\xi) \cos \theta_2 \sin \theta_2 \right\} \\ & + \hat{p}_2^2 \left\{ \sin^2 \theta_2 + \omega_{zy}^2 \cos^2 \theta_2 + 2\frac{\gamma}{\sqrt{\omega\omega_0}}(1-\xi) \cos \theta_2 \sin \theta_2 \right\} \\ & + \hat{q}_1 \hat{q}_2 \left\{ 2\omega^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - 2\omega_{zx}^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + 2\gamma\sqrt{\omega\omega_0}(1+\xi) (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) \right\} \\ & + \hat{p}_1 \hat{p}_2 \left\{ 2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 - 2\omega_{zy}^2 \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \frac{2\gamma}{\sqrt{\omega\omega_0}}(1-\xi) (\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) \right\} \\ & \left. - \left[ \omega + \omega_0 \left( 1 - \frac{\eta_z}{\omega_0} \right) + \omega_0 \left( 1 - \frac{\eta_z}{2\omega_0} \right) 2j \right] \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Finalmente, conseguimos los términos cruzados  $q_1q_2$  y  $p_1p_2$ , sin embargo, podemos

anularlos encontrando soluciones para  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\gamma\sqrt{\omega\omega_0}(1+\xi)}{\omega_{zx}^2 - \omega^2} \quad \text{y} \quad \tan 2\theta_2 = \frac{2\gamma(1-\xi)}{\sqrt{\omega\omega_0}} \frac{1}{\omega_{zy}^2 - 1}. \quad (4.12)$$

Sustituyendo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en [4.11](#) obtenemos las energías  $\epsilon_{1\pm}^N$  y  $\epsilon_{2\pm}^N$ :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left( (\epsilon_{1-}^N \hat{q}_1)^2 + (\epsilon_{1+}^N \hat{q}_2)^2 + (\epsilon_{2-}^N \hat{p}_1)^2 + (\epsilon_{2+}^N \hat{p}_2)^2 - \epsilon_0 \right). \quad (4.13)$$

donde:

$$\epsilon_{1\pm}^N = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\omega^2 + \omega_{zx}^2) \pm \sqrt{(\omega_{zx}^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega\omega_0(1+\xi)^2} \right)}, \quad (4.14)$$

$$\epsilon_{2\pm}^N = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (1 + \omega_{zy}) \pm \sqrt{(\omega_{zy} - 1)^2 + \frac{4\gamma^2(1-\xi)^2}{\omega\omega_0}} \right)}, \quad (4.15)$$

$$\epsilon_0 = \left[ \omega + \omega_0 \left( 1 - \frac{\eta_z}{\omega_0} \right) + \omega_0 \left( 1 - \frac{\eta_z}{2\omega_0} \right) 2j \right]. \quad (4.16)$$

Reescribimos [\(4.13\)](#) en segunda cuantización con el fin de obtener un Hamiltoniano desacoplado generando nuevas excitaciones que respeten las reglas de conmutación:

$$\begin{aligned} \hat{q}_1 &= \frac{(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)}{\sqrt{2\omega_{N-}}}, & \hat{p}_1 &= i\sqrt{\frac{\omega_{N-}}{2}}(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1), \\ \hat{q}_2 &= \frac{(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2)}{\sqrt{2\omega_{N+}}}, & \hat{p}_2 &= i\sqrt{\frac{\omega_{N+}}{2}}(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2), \end{aligned}$$

donde  $\omega_{N-} = \epsilon_{1-}^N/\epsilon_{2-}^N$  y  $\omega_{N+} = \epsilon_{1+}^N/\epsilon_{2+}^N$ . De este modo, obtendremos los modos de oscilación  $\epsilon_-^N$  y  $\epsilon_+^N$ :

$$\hat{H} = \epsilon_0^N + \epsilon_-^N \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \epsilon_+^N \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2, \quad (4.17)$$

siendo:

$$\epsilon_-^N = \epsilon_{2-}^N \epsilon_{1-}^N, \quad \epsilon_+^N = \epsilon_{2+}^N \epsilon_{1+}^N \quad \text{y} \quad \epsilon_0^N = \frac{1}{2} [\epsilon_-^N + \epsilon_+^N - \epsilon_0]. \quad (4.18)$$

## 4.2.2. Fase superradiante

En la fase superradiante, seguiremos el mismo procedimiento que en la fase normal, es decir, construiremos un Hamiltoniano con dos osciladores desacoplados. La principal diferencia radica en que es necesario realizar un desplazamiento  $(\alpha, \beta)$  en los operadores bosónicos:

$$\hat{a}^\dagger \rightarrow \hat{c}^\dagger + \alpha\sqrt{2j}, \quad \text{y} \quad \hat{b}^\dagger \rightarrow \hat{d}^\dagger - \beta\sqrt{2j}. \quad (4.19)$$

Tomar en cuenta los desplazamientos  $\alpha$  y  $\beta$ , es tener presente el valor esperado de las excitaciones bosónicas, además nos proporcionará información respecto al acoplamiento crítico, acorde a lo visto en el Cap. 3. En la aproximación Holstein-Primakoff 4.1, el término que se ve afectado por estos desplazamientos es:

$$\sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2j}} = \sqrt{1 - \frac{\hat{d}^\dagger \hat{d} - \beta\sqrt{2j}(\hat{d}^\dagger + \hat{d}) + \beta^2 2j}{2j}} = \sqrt{k} \sqrt{1 - \frac{\hat{d}^\dagger \hat{d} - \beta\sqrt{2j}(\hat{d}^\dagger + \hat{d})}{2jk}}, \quad (4.20)$$

donde  $k = 1 - \beta^2$  y consideramos  $\xi_0 = 1 - \frac{\hat{d}^\dagger \hat{d} - \beta\sqrt{2j}(\hat{d}^\dagger + \hat{d})}{2jk}$ . El Hamiltoniano queda expresado como:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \omega \left[ \hat{c}^\dagger \hat{c} + \alpha\sqrt{2j}(\hat{c}^\dagger + \hat{c}) + \alpha^2 2j \right] + \omega_0 \left[ \hat{d}^\dagger \hat{d} - \beta\sqrt{2j}(\hat{d}^\dagger + \hat{d}) + \beta^2 2j - j \right] \\ & + \gamma\sqrt{k} \left[ (\hat{c} + \alpha\sqrt{2j})(\hat{d}^\dagger - \beta\sqrt{2j})\sqrt{\xi_0} + (\hat{c}^\dagger + \alpha\sqrt{2j})\sqrt{\xi_0}(\hat{d} - \beta\sqrt{2j}) \right] \\ & + \xi\gamma\sqrt{k} \left[ (\hat{c}^\dagger + \alpha\sqrt{2j})(\hat{d}^\dagger - \beta\sqrt{2j})\sqrt{\xi_0} + (\hat{c} + \alpha\sqrt{2j})\sqrt{\xi_0}(\hat{d} - \beta\sqrt{2j}) \right] \\ & + \frac{k}{4} \left[ \eta_x \left\{ (\hat{d}^\dagger - \beta\sqrt{2j})\sqrt{\xi_0} + \sqrt{\xi_0}(\hat{d} - \beta\sqrt{2j}) \right\}^2 \right. \\ & \left. - \eta_y \left\{ (\hat{d}^\dagger - \beta\sqrt{2j})\sqrt{\xi_0} - \sqrt{\xi_0}(\hat{d} - \beta\sqrt{2j}) \right\}^2 \right] + \frac{\eta_z}{2j} \left[ \hat{d}^\dagger \hat{d} - \beta\sqrt{2j}(\hat{d}^\dagger + \hat{d}) + \beta^2 2j - j \right]^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Utilizar la aproximación de Holstein-Primakoff es tener en cuenta el límite termodinámico  $\langle \hat{d}^\dagger \hat{d} / 2j \rangle \ll 1$ , por lo tanto, es indispensable aplicar una aproximación en serie de Taylor a 4.20:

$$\sqrt{\xi_0} = \sqrt{1 - \frac{\hat{d}^\dagger \hat{d} - \beta\sqrt{2j}(\hat{d}^\dagger + \hat{d})}{2jk}} \approx \left( 1 - \frac{\hat{d}^\dagger \hat{d} - \beta\sqrt{2j}(\hat{d}^\dagger + \hat{d})}{4jk} - \frac{1}{8} \frac{\beta^2 (\hat{d}^\dagger + \hat{d})^2}{2jk^2} \right). \quad (4.22)$$

Sustituimos [4.22](#) en [4.21](#). Desarrollando, tendremos en cuenta únicamente los operadores hasta orden cuadrático:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + \left[ \omega \alpha - \gamma \sqrt{k} \beta (1 + \xi) \right] \sqrt{2j} (\hat{c}^\dagger + \hat{c}) \\
&+ \left[ \omega_0 + \gamma \frac{\alpha \beta}{\sqrt{k}} (1 + \xi) + \eta_z (2\beta^2 - 1) - \eta_x \beta^2 \right] \hat{d}^\dagger \hat{d} \\
&+ \left[ -\omega_0 \beta + \gamma \alpha \left( \frac{k - \beta^2}{\sqrt{k}} \right) (1 + \xi) - \eta_x k \beta \left( 1 - \frac{\beta^2}{k} \right) - \eta_z (2\beta^2 - 1) \beta \right] \sqrt{2j} (\hat{d}^\dagger + \hat{d}) \\
&+ \left[ \gamma \frac{\alpha \beta}{4\sqrt{k}k} (2 - \beta^2) (1 + \xi) + \eta_x \frac{k}{4} \left( 1 - \frac{4\beta^2}{k} \right) + \eta_z \beta^2 \right] (\hat{d}^\dagger + \hat{d})^2 - \eta_k \frac{k}{4} (\hat{d}^\dagger - \hat{d})^2 \\
&- \gamma \left[ \frac{\beta^2}{2\sqrt{k}} (1 + \xi) \right] (\hat{c}^\dagger + \hat{c}) (\hat{d}^\dagger + \hat{d}) + \gamma \sqrt{\xi_0} \left[ (\hat{c} \hat{d}^\dagger + \hat{c}^\dagger \hat{d}) + \xi (\hat{c}^\dagger \hat{d}^\dagger + \hat{c} \hat{d}) \right] \\
&+ \left[ \omega \alpha^2 + \omega_0 \beta^2 - \frac{\omega_0}{2} - \gamma \sqrt{k} 2\alpha \beta (1 + \xi) + \eta_x k \beta^2 + \eta_z \left( \beta^2 - \frac{1}{2} \right)^2 \right] 2j \\
&- \gamma \frac{\alpha \beta}{2\sqrt{k}} (1 + \xi) - \eta_x \frac{\beta^2}{2}. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Ya que el objetivo es conseguir un Hamiltoniano en orden cuadrático y desacoplado, eliminaremos los términos lineales  $(\hat{c}^\dagger + \hat{c})$  y  $(\hat{d}^\dagger + \hat{d})$ , en consecuencia, podremos determinar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\omega \alpha - \gamma \sqrt{k} \beta (1 + \xi) = 0, \tag{4.24}$$

$$-\omega_0 \beta + \gamma \alpha \left( \frac{k - \beta^2}{\sqrt{k}} \right) (1 + \xi) - \eta_x k \beta \left( 1 - \frac{\beta^2}{k} \right) - \eta_z (2\beta^2 - 1) \beta = 0. \tag{4.25}$$

Una solución es cuando  $\alpha = 0$  y  $\beta = 0$ , recuperando la información de la fase normal. La segunda solución es resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\alpha = \frac{\gamma(1 + \xi)}{2\omega} \sqrt{1 - \frac{1}{f_{\xi x}^2}} \quad \text{y} \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{f_{\xi x}^2} \right)}, \tag{4.26}$$

donde  $f_{\xi x} = \frac{\Delta \eta_{zx}}{\omega_0} + f_{\xi+}$ ,  $f_{\xi+} = \frac{\gamma^2}{\gamma_{\xi+}^2}$ ,  $\gamma_{\xi+} = \frac{\sqrt{\omega \omega_0}}{(1 + \xi)}$  y  $\Delta \eta_{zx} = \eta_z - \eta_x$ . Cuando  $1/f_{\xi x} = 1$ , recuperamos la Ec. [3.49](#), esto es, el acoplamiento crítico de la fase superradiante  $x-$  del modelo de Dicke Anisotrópico. Sustituimos [\(4.26\)](#) en [\(4.23\)](#) y consideramos  $\mu_x = 1/f_{\xi x}$ :

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \omega \hat{c}^\dagger \hat{c} + \omega_A \hat{d}^\dagger \hat{d} + \omega_B (\hat{d}^\dagger + \hat{d})^2 + \omega_C (\hat{d}^\dagger - \hat{d})^2 \\
&+ \omega_D (\hat{c}^\dagger + \hat{c}) (\hat{d}^\dagger + \hat{d}) + \omega_E \left[ (\hat{c} \hat{d}^\dagger + \hat{c}^\dagger \hat{d}) + \xi_0 (\hat{c}^\dagger \hat{d}^\dagger + \hat{c} \hat{d}) \right] + \omega_F, \tag{4.27}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\omega_A &= \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_0}{\mu_x} - \eta_z \right) (1 + \mu_x), \\ \omega_B &= \frac{\omega_0}{2} \frac{1 - \mu_x}{4} \left[ \frac{1}{1 + \mu_x} \frac{3 + \mu_x}{\mu_x} + \frac{\eta_z}{\omega_0} \frac{1 + 3\mu_x}{1 + \mu_x} + \frac{\eta_x}{\omega_0} \frac{4\mu_x^2}{1 - \mu_x^2} \right], \\ \omega_C &= -\frac{1}{8} \eta_y (1 + \mu_x), \quad \omega_D = -\frac{\sqrt{2}}{4} \gamma (1 + \xi) \frac{1 - \mu_x}{\sqrt{1 + \mu_x}}, \quad \omega_E = \gamma \sqrt{\frac{1}{2} (1 + \mu_x)}, \\ \omega_F &= -\frac{\omega_0}{2} \left[ \frac{1 - \mu_x^2}{2\mu_x} + \left( \mu_x - \frac{\eta_z}{2\omega_0} \right) \right] 2j - \frac{1}{4} \left[ \frac{\omega_0}{\mu_x} - \eta_z \right] (1 - \mu_x).\end{aligned}$$

Para desacoplar [4.27](#), realizaremos la transformación de Bogoliubov. Aplicamos una transformación de cuadraturas:

$$\begin{aligned}\hat{c} &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \hat{x} + \frac{i}{\omega} \hat{p}_x \right), \quad \hat{c}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( \hat{x} - \frac{i}{\omega} \hat{p}_x \right), \\ \hat{d} &= \sqrt{\frac{\omega_A}{2}} \left( \hat{y} + \frac{i}{\omega_A} \hat{p}_y \right), \quad \hat{d}^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_A}{2}} \left( \hat{y} - \frac{i}{\omega_A} \hat{p}_y \right),\end{aligned}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left( \omega^2 \hat{x}^2 + \omega_A^2 \chi_+ \hat{y}^2 + \hat{p}_x^2 + \chi_- \hat{p}_y^2 + \sqrt{\omega \omega_A} \kappa_+ \hat{x} \hat{y} + \frac{\kappa_-}{\sqrt{\omega \omega_A}} \hat{p}_x \hat{p}_y - \epsilon_1 \right). \quad (4.28)$$

donde

$$\begin{aligned}\omega_A^2 \left( 1 + 4 \frac{\omega_B}{\omega_A} \right) &= \omega_A^2 \chi_+, \quad \sqrt{\omega \omega_A} \kappa_+ = \sqrt{\omega \omega_A} (4\omega_D + 2\omega_E (1 + \xi)) \\ \left( 1 - 4 \frac{\omega_C}{\omega_A} \right) &= \chi_-, \quad \frac{\kappa_-}{\sqrt{\omega \omega_A}} = 2 \frac{\omega_E (1 - \xi)}{\sqrt{\omega \omega_A}}, \\ \epsilon_1 &= \omega_0 \left[ \frac{1 - \mu_x^2}{2\mu_x} + \left( \mu_x - \frac{\eta_z}{2\omega_0} \right) \right] 2j + \omega_0 \left[ \left( \frac{1}{\mu_x} - \frac{\eta_z}{\omega_0} \right) \right] + \omega\end{aligned}$$

Al tener términos cruzados  $\hat{x}\hat{y}$  y  $\hat{p}_x\hat{p}_y$  realizamos las rotaciones en  $\theta_1$  y  $\theta_2$  al Hamiltoniano [4.28](#):

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{q}_1 \cos \theta_1 + \hat{q}_2 \sin \theta_1, \quad \hat{y} = -\hat{q}_1 \sin \theta_1 + \hat{q}_2 \cos \theta_1, \\ \hat{q}_x &= \hat{q}_1 \cos \theta_2 + \hat{q}_2 \sin \theta_2, \quad \hat{q}_y = -\hat{q}_1 \sin \theta_2 + \hat{q}_2 \cos \theta_2.\end{aligned}$$

Cancelamos los términos cruzados  $\hat{q}_1\hat{q}_2$  y  $\hat{p}_1\hat{p}_2$  y conseguimos las soluciones para  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

$$\begin{aligned}\hat{H} = & \frac{1}{2} \left( \hat{q}_1^2 \left[ \omega^2 \cos^2 \theta_1 + \omega_A^2 \chi_+ \sin^2 \theta_1 - \sqrt{\omega\omega_A} \kappa_+ \cos \theta_1 \sin \theta_1 \right] \right. \\ & \left. + \hat{q}_2^2 \left[ \omega^2 \sin^2 \theta_1 + \omega_A^2 \chi_+ \cos^2 \theta_1 + \sqrt{\omega\omega_A} \kappa_+ \cos \theta_1 \sin \theta_1 \right] \right. \\ & \left. + \hat{q}_1\hat{q}_2 \left[ 2\omega^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 - 2\omega_A^2 \chi_+ \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \sqrt{\omega\omega_A} \kappa_+ (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) \right] \right. \\ & \left. + \hat{p}_1^2 \left[ \cos^2 \theta_2 + \chi_- \sin^2 \theta_2 - \frac{\kappa_-}{\sqrt{\omega\omega_A}} \cos \theta_2 \sin \theta_2 \right] \right. \\ & \left. + \hat{p}_2^2 \left[ \sin^2 \theta_2 + \chi_- \cos^2 \theta_2 + \frac{\kappa_-}{\sqrt{\omega\omega_A}} \cos \theta_2 \sin \theta_2 \right] \right. \\ & \left. + \hat{p}_1\hat{p}_2 \left[ (2 - 2\chi_-) \cos \theta_2 \sin \theta_2 + \frac{\kappa_-}{\sqrt{\omega\omega_A}} (\cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2) \right] - \epsilon_1 \right).\end{aligned}$$

Eliminando los términos cruzados  $\hat{q}_1\hat{q}_2$  y  $\hat{p}_1\hat{p}_2$ , se consigue las soluciones para los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ :

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\sqrt{\omega\omega_A} \kappa_+}{\omega_A^2 \chi_+ - \omega^2} \quad y \quad \tan 2\theta_2 = \frac{\kappa_-}{\sqrt{\omega\omega_A} (\chi_- - 1)}. \quad (4.29)$$

El Hamiltoniano se reduce a:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left( (\epsilon_{1-}^S \hat{q}_1)^2 + (\epsilon_{1+}^S \hat{q}_2)^2 + (\epsilon_{2-}^S \hat{p}_1)^2 + (\epsilon_{2+}^S \hat{p}_2)^2 - \epsilon_1 \right). \quad (4.30)$$

Las energías son:

$$\epsilon_{1\pm}^S = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\omega^2 + \omega_A^2 \chi_+) \pm \sqrt{(\omega_A^2 \chi_+ - \omega^2)^2 + \omega\omega_A \kappa_+^2} \right)}, \quad (4.31)$$

$$\epsilon_{2\pm}^S = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (1 + \chi_-) \pm \sqrt{(\chi_- - 1)^2 + \frac{\kappa_-^2}{\omega\omega_A}} \right)}. \quad (4.32)$$

Para conseguir el Hamiltoniano desacoplado usamos cuadraturas o segunda cuantización:

$$\begin{aligned}\hat{q}_1 &= \frac{(\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1)}{\sqrt{2\omega_{S_-}}}, & \hat{p}_1 &= i\sqrt{\frac{\omega_{S_-}}{2}}(\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1), \\ \hat{q}_2 &= \frac{(\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2)}{\sqrt{2\omega_{S_+}}}, & \hat{p}_2 &= i\sqrt{\frac{\omega_{S_+}}{2}}(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2),\end{aligned}$$

donde  $\omega_{S_-} = \epsilon_{1-}^S/\epsilon_{2-}^S$  y  $\omega_{S_+} = \epsilon_{1+}^S/\epsilon_{2+}^S$ . De este modo obtendremos los modos de oscilación  $\epsilon_-^S$  y  $\epsilon_+^S$

$$H = \epsilon_-^S \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \epsilon_+^S \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \epsilon_0^S, \quad (4.33)$$

siendo:

$$\epsilon_-^S = \epsilon_{2-}^S \epsilon_{1-}^S, \quad \epsilon_+^S = \epsilon_{2+}^S \epsilon_{1+}^S, \quad \epsilon_0^S = \frac{1}{2} (\epsilon_-^S + \epsilon_+^S - \epsilon_1). \quad (4.34)$$

### 4.3. Análisis Espectro de Bajas Energías

La aproximación de Holstein-Primakoff nos permite desacoplar el Hamiltoniano de Dicke anisotrópico en la fase normal y superradiante cuando está en una representación bosónica. De acuerdo con [4.18](#) y [4.34](#) podemos analizar el espectro de energías de los modos de fase y amplitud.

Es útil recordar las simetrías que existen en nuestro modelo ya que tendrán importancia en la emergencia de dichos modos, el modelo de Dicke estándar y anisotrópico poseen simetría de paridad mientras que el modelo TC posee simetría  $U(1)$

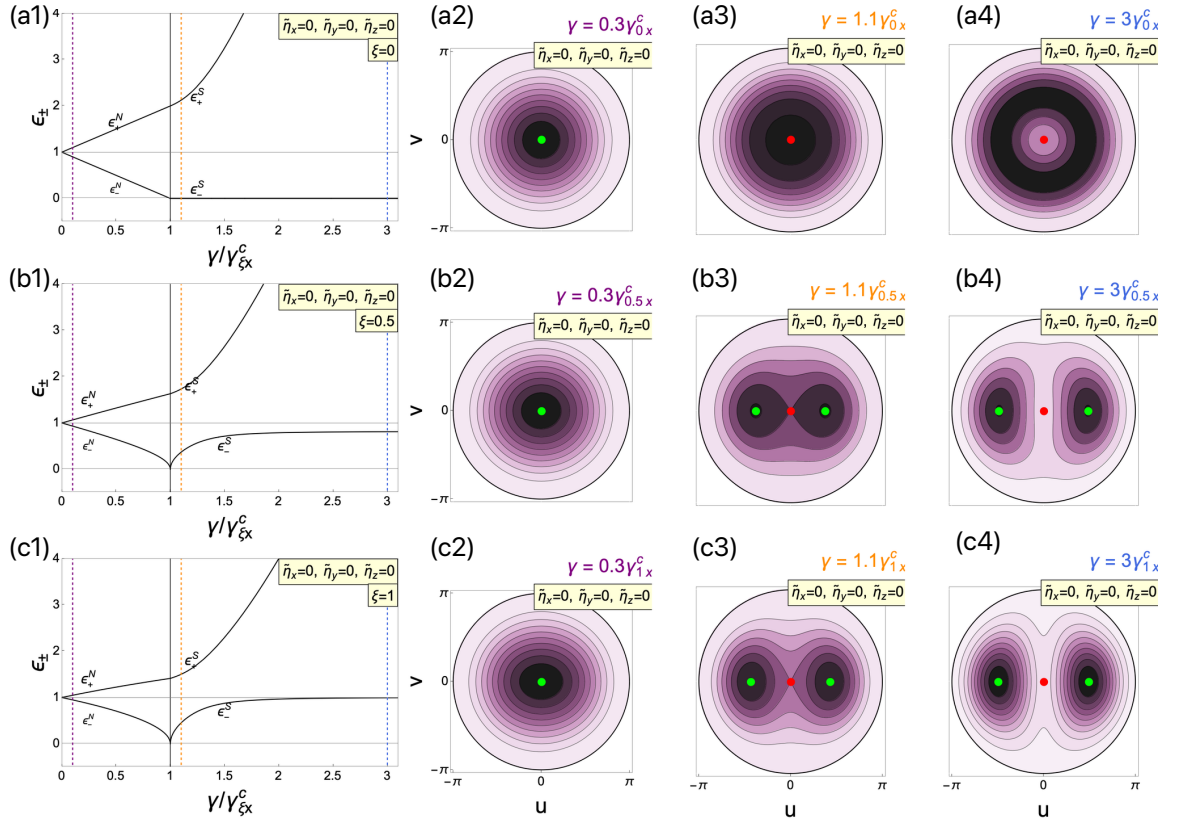


Figura 4.1: Espectro de energías del modelo de Dicke sin interacciones colectivas materiales. (a) límite de Tavis-Cummings ( $\xi = 0$ ) (fila superior), (b) modelo anisotrópico ( $\xi = 0,5$ ) (fila intermedia) y (c) límite de Dicke ( $\xi = 1$ ) (fila inferior). La línea negra ubicada en  $\gamma/\gamma_{\xi x}^c = 1$  representa el acoplamiento crítico. La línea punteada morada muestra el acoplamiento de las superficies de energía en el espectro de energías (fases normales) (a2,b2,c2). La línea naranja indica el acoplamiento de las superficies de energía en la fase superradiante (a3,b3,c3), mientras que la línea azul representa los acoplamientos luz-materia con valores más altos (a4,b4,c4). Recordemos que en las superficies de energía, los puntos verdes representan los mínimos, los rojos indican los máximos

El espectro de energía de la Fig. 4.1 (a) corresponde al límite de Tavis-Cummings sin interacciones materiales.  $\epsilon_-^N$  representa el modo de fase en la fase normal,  $\epsilon_+^N$  es el modo de fase en la fase superradiante,  $\epsilon_+^N$  es el modo de amplitud en la fase normal y  $\epsilon_+^S$  es el modo de amplitud en la fase superradiante.

Analizando las superficies de energía, Fig. 4.1 (a2) representa la fase normal del límite TC y adopta la forma de un pozo esférico con simetría  $U(1)$ . Al transicionar a la fase superradiante, la superficie de energía experimenta una ruptura espontánea de simetría, tomando la forma de un sombrero mexicano Fig. 4.1 (a3-a4). El espectro de energías de TC se muestra en Fig. 4.1 (a1). El modo de fase  $\epsilon_-^S$  se hace cero en la fase superradiante y representa los puntos mínimos degenerados del sombrero mexicano. La línea  $\epsilon_+^S$  es el modo de amplitud, esto quiere decir que se mantiene constante la fase y se varia la amplitud. A medida que aumenta el parámetro de



acoplamiento luz-materia la copa del sombrero mexicano aumenta, es decir, aumenta el valor del punto máximo, significando que, los modos de amplitud requieran un coste energético cada vez mayor en contraste con los modos de fase que tienen una energía mínima.

Los espectros de energía mostrados en las Figs (4.1) (b)-(c) corresponden al caso anisotrópico cuando  $\xi = 0,5$  y al límite de Dicke estándar  $\xi = 1$ , respectivamente. Ambos casos muestran un comportamiento bastante similar. Al incrementar el acoplamiento luz-materia, el modo de fase  $\epsilon_-^S$  superradiante converge a 1 en el límite de Dicke, y es conocido como un modo rotónico [105]. En contraste con el modelo TC, el valor de la energía es finito ya que la superficie de energía tiene dos mínimos de energía, véase las Figs 4.1 (b4-c4). El modo rotónico posee un costo energético para pasar entre los dos estados degenerados, pues sólo hay dos fases posibles: 0 a  $\pi$ .  $\epsilon_+^S$  representa el modo de amplitud y tiene un comportamiento bastante similar al de TC.

Ahora analizaremos los espectros de energía al considerar únicamente la interacción material en el eje z, como se muestra en la Fig. 4.2:

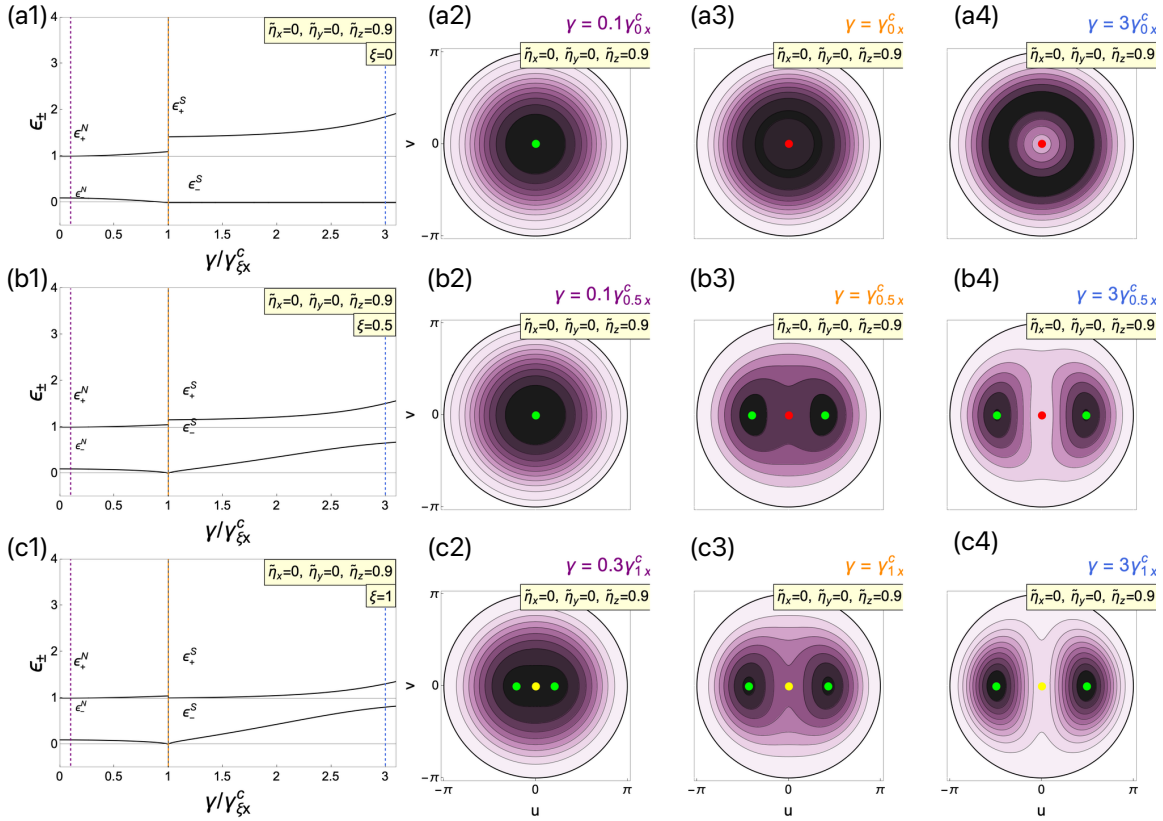


Figura 4.2: Espectro de energías del modelo de Dicke con interacciones colectivas materiales en  $\eta_z = 0,9$ . (a) límite de Tavis Cummings ( $\xi = 0$ ), (b) anisotrópico ( $\xi = 0,5$ ) y (c) límite de Dicke ( $\xi = 1$ ).

Analizando el espectro de energías para TC, caso anisotrópico y Dicke estándar,

en el acoplamiento crítico  $\gamma/\gamma_{\xi x}^c = 1$ , observamos que existen discontinuidades, sin embargo, al aumentar el acoplamiento luz-materia observamos la emergencia de los modos de fase y amplitud, por ejemplo, en el límite de TC, Fig. 4.2(a1), ya que en la fase superradiante su correspondiente superficie de energía adopta la forma de un sombrero mexicano. En el caso anisotrópico y de Dicke estándar, la dinámica es similar al caso sin interacciones, es decir, en la superficie de energía se forman dos puntos mínimos estables degenerados, Fig. 4.2 (b4-c4).

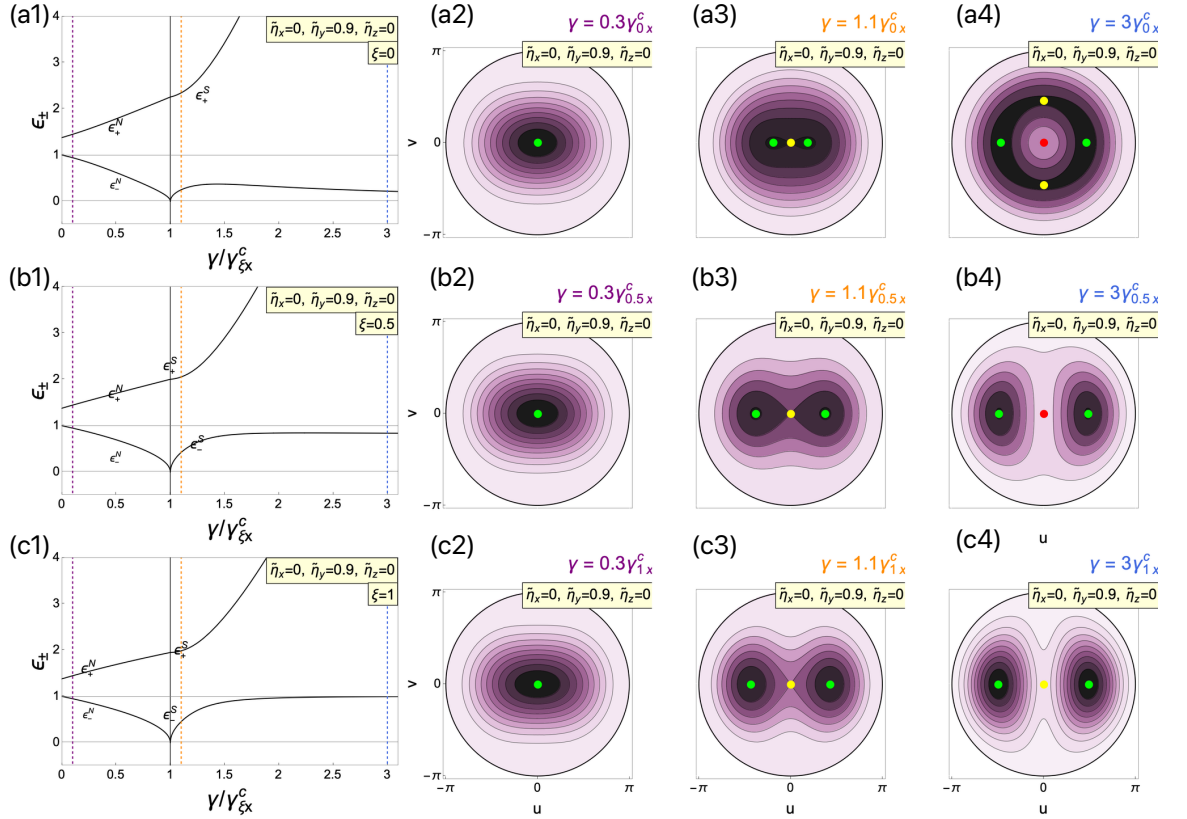


Figura 4.3: Espectro de energías del modelo de Dicke con interacciones colectivas materiales en  $\eta_y = 0,9$ . (a) límite de Tavis Cummings ( $\xi = 0$ ), (b) anisotrópico ( $\xi = 0,5$ ) y (c) límite de Dicke ( $\xi = 1$ ).

Por otro lado, en la Fig. 4.3 se considera la interacción en  $\eta_y = 0,9$ . Se observa una dinámica bastante similar para los modos de amplitud. En el límite de TC, el modo  $\epsilon_-^S$ , notamos que justo después del acoplamiento crítico tiene un valor finito, representando la fase superradiante superpuesta estudiado en el Capítulo 3, a medida que aumenta el valor del acoplamiento crítico, el modo se hace cero, esto significa que en la superficie de energía recuperamos un sombrero mexicano y se encuentra la emergencia del modo de fase. Notamos que dentro del espectro de energías, en el acoplamiento crítico, los modos en la fase normal y superradiante son continuas a diferencia del caso Fig. 4.2

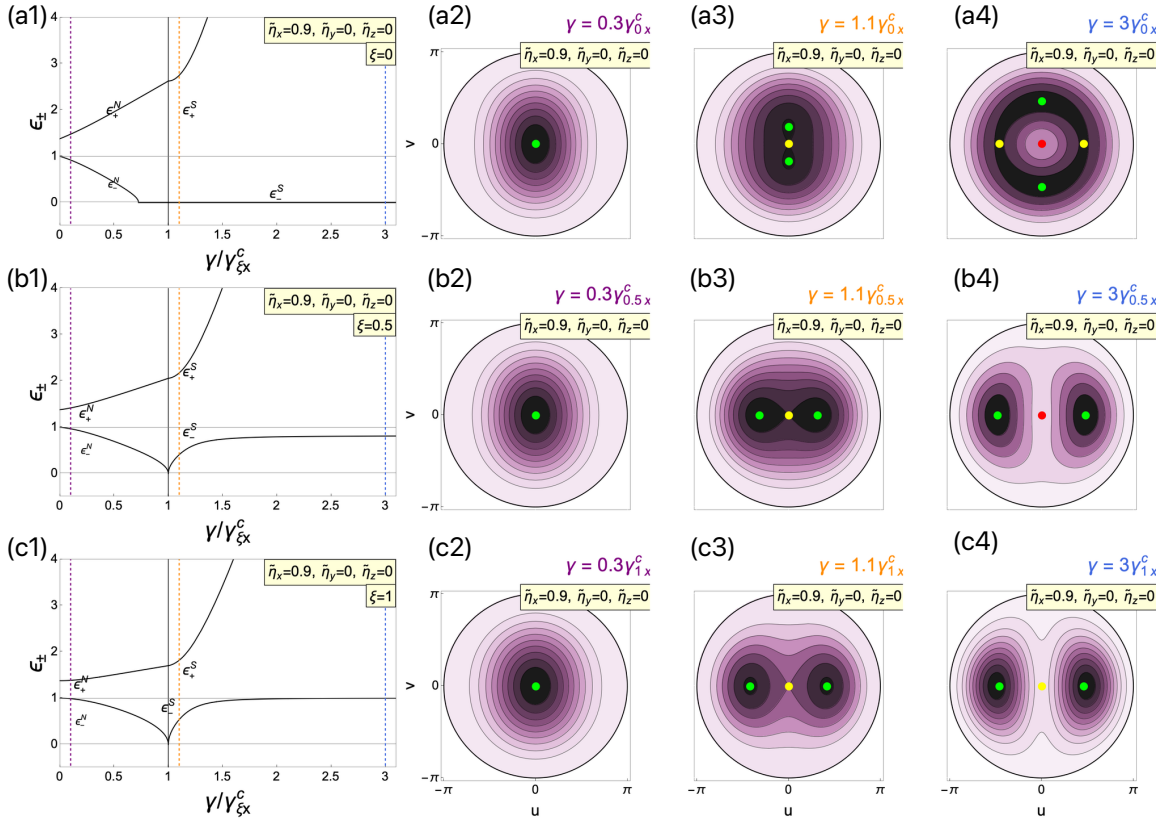


Figura 4.4: Espectro de energías del modelo de Dicke con interacciones colectivas materiales en  $\eta_x = 0,9$ . (a) está en el límite de Tavis Cummings ( $\xi = 0$ ), (b) es el caso intermedio ( $\xi = 0,5$ ) y (c) está en el límite de Dicke ( $\xi = 1$ ).

Por último consideramos la interacción en  $\eta_x = 0,9$ , Fig. (4.4). En el límite TC,  $\epsilon_-^N$  que representa el modo inferior en la fase normal llega a cero antes de llegar al acoplamiento crítico. En la fase superradiante los puntos mínimos degenerados ya no se encuentran en la posición  $0$  y  $\pi$ , véase la Fig. 4.4 sino que ahora están en la posición  $\pi/2$  y  $3\pi/2$ . Aún así, al seguir aumentando el acoplamiento luz-materia, la superficie de energía toma la forma de sombrero mexicano, similar caso de interacción en  $y$ –

Resumiendo, considerar interacciones materiales en el modelo de Dicke anisotrópico afecta donde emergerá el acoplamiento crítico y la estructura de la energía base. Inicialmente no esperábamos encontrar modos rotonicos, sin embargo, explican los dos puntos mínimos degenerados en el caso anisotrópico y Dicke estándar, ya que presentan una energía finita y se mantienen estables al aumentar el acoplamiento luz-materia. Podemos apreciar que los modos rotonicos aparecen en una simetría de paridad, lo que requiere un costo energético para pasar entre ellos. Es interesante notar que en la interacción  $\eta_y$ , en el régimen de Tavis-Cummings, la evolución paramétrica del acoplamiento dentro de la fase superradiante toma la forma de un modo rotonico, que eventualmente se convierte en un modo de fase. Esto se refleja en las superficies de energía, donde pasamos de tener dos puntos mínimos degenerados a

tener un sombrero mexicano.

## 4.4. Conclusiones

La aproximación de Holstein-Primakoff proporciona un marco teórico para analizar el comportamiento de los modos de fase, amplitud y rotónicos en el modelo de Dicke incluyendo interacciones materiales. Gracias al análisis del espectro de energías, podemos identificar estos modos, lo que nos permite comprender mejor las transiciones de fase y los fenómenos emergentes en sistemas colectivos de qubits. Esta aproximación nos brinda una herramienta para estudiar cómo las interacciones materiales afectan las propiedades del sistema y cómo surgen los modos característicos de fase y amplitud en el contexto del rompimiento espontáneo de simetría.

# Conclusiones y perspectivas

El propósito de esta tesis fue explorar el modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales. Si bien los modos de fase y amplitud han sido estudiados en modelos de interacción radiación y materia como Dicke y Tavis-Cummings, este trabajo presenta por primera vez un análisis detallado de estos modos en un modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales.

La estructura principal de la tesis se dividió en varias etapas. En primer lugar, se presentaron de manera general los conceptos necesarios y el panorama actual relacionado con nuestro objeto de estudio. Luego, se introdujeron las herramientas matemáticas necesarias para construir nuestro análisis en el modelo de Dicke. Una vez establecido este marco teórico, se llevó a cabo un análisis exhaustivo del modelo de Dicke, centrándose en una correspondencia semi-clásica para comprender cómo las interacciones materiales afectan la fase superradiante. Por último, con una perspectiva más completa de las características del sistema, se procedió a analizar el espectro de energías para determinar la emergencia de los modos de fase y amplitud en el modelo de Dicke al incluir las interacciones materiales.

La contribución de esta tesis se divide en dos partes principales. En primer lugar, se observó que las interacciones materiales inducen desplazamientos en el acoplamiento crítico y en la energía base del sistema. Mediante el estudio de las superficies de energía, que permiten distinguir entre la fase normal y la superradiante a través del acoplamiento luz-materia, en una correspondencia semi-clásica de estados coherentes, se identificaron varios acoplamientos críticos dependientes de las interacciones materiales, así como ciertas simetrías particulares para ambas fases. Además, se examinaron las transiciones de fase cuántica de los estados excitados para cada transición. En segundo lugar, utilizando la aproximación de bajas energías, Holstein-Primakoff, se identificaron los modos de fase y amplitud, así como la emergencia de modos rotónicos. Se observó que en ciertas configuraciones del modelo de Dicke anisotrópico con interacciones, los modos rotónicos pueden surgir en la fase superradiante y evolucionar hacia modos de fase a medida que aumenta el acoplamiento luz-materia.

Como trabajo futuro, se propone analizar los modos de fase y amplitud en el modelo de Dicke anisotrópico utilizando el enfoque de integral de trayectoria.



# Apéndices





# Apéndice A

## Estados Coherentes

### A.1. Álgebra de Heisenberg-Weyl

Analizamos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, la cual involucra un Hamiltoniano que incluye un potencial armónico o la cuantización de un campo electromagnético confinado dentro de una cavidad. [129]:

$$\hat{H}\psi = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \right) \psi = E\psi. \quad (\text{A.1})$$

Reescribimos el operador

$$\hat{H}\psi = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \right)^2 + (m\omega \hat{x})^2 \right] \psi = \frac{1}{2m} [2\hat{m}^2 + \hat{x}^2] = E\psi, \quad (\text{A.2})$$

donde  $\hat{x} = m\omega \hat{x}$ . Intentamos representar esta ecuación en términos del cuadrado de algún operador.

$$\hat{p}^2 + \hat{x}^2 = (\hat{x} + i\hat{p})(\hat{x} - i\hat{p}) = \hat{p}^2 + \hat{x}^2 + i(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p}),$$

dado que  $\hat{x}$  no conmuta con  $\hat{p}$ , factorizamos el Hamiltoniano definiendo nuevos operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$ , como:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega \hat{x} + i\hat{p}), \quad \text{Operador de aniquilación} \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}(m\omega \hat{x} - i\hat{p}). \quad \text{Operador de creación} \quad (\text{A.4})$$

Estos operadores crean/aniquilan un cuanto de energía  $E = \hbar\omega$ . Podemos expresar los operadores de posición y momento en:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \text{y} \quad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (\text{A.5})$$

Conmutamos los operadores de creación y aniquilación:

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0, \quad (\text{A.6})$$

y

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{a}^\dagger &= \frac{1}{2m\omega\hbar}[(m\omega\hat{x})^2 + im\omega[\hat{p}, \hat{x}] + \hat{p}^2], \\ \hat{a}^\dagger\hat{a} &= \frac{1}{2m\omega\hbar}[(m\omega\hat{x})^2 - im\omega[\hat{p}, \hat{x}] + \hat{p}^2], \end{aligned}$$

siendo  $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$ ,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (\text{A.7})$$

por lo tanto conseguimos

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m}[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2] = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger), \\ \hat{H} &= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

### A.1.1. Reglas de Conmutación y el Espacio de Fock

Definimos:

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad \text{Operador de número.} \quad (\text{A.9})$$

Satisface las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad \text{y} \quad [\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad (\text{A.10})$$

además

$$\hat{a}|\hat{n}\rangle = \sqrt{\hat{n}}|n-1\rangle, \quad \sqrt{\hat{n}+1}|n+1\rangle. \quad (\text{A.11})$$

Si aplicamos varias veces el operador de creación al estado base

$$\begin{aligned}
|1\rangle &= \hat{a}^\dagger |0\rangle, \\
|2\rangle &= \left(\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}\right) |1\rangle = \left(\frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{\sqrt{2}}\right) |0\rangle, \\
|3\rangle &= \left(\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{3}}\right) |2\rangle = \left(\frac{(\hat{a}^\dagger)^3}{\sqrt{3}}\right) |0\rangle, \\
&\vdots \\
|n\rangle &= \left[\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\right] |0\rangle.
\end{aligned}$$

El espacio de Hilbert está conformado por eigenestados del operador de número, los estados de Fock:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (\text{A.12})$$

Los estados de Fock constituyen una base completa que satisface las condiciones de ortogonalidad y completéz

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \quad \text{y} \quad |n'\rangle\langle n| = \delta_{n',n}. \quad (\text{A.13})$$

### A.1.2. Estados Coherentes de Glauber

Los estados coherentes pueden caracterizarse como una descripción cuántica de los campos electromagnéticos clásicos, donde su espacio de Hilbert está compuesto por estados de Fock. Podemos definir los estados coherentes como una traslación del estado vacío ( $|0\rangle$ ) de la base de Fock, a través de un operador  $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$ . Definimos el operador de desplazamiento:

$$D(\alpha) = e^{-i/\hbar(\zeta p - \eta q)} = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}, \quad (\text{A.14})$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega m}}(\omega m \zeta + i\eta). \quad (\text{A.15})$$

Usando la regla de Baker-Hausdorff-Campbell [\[130\]](#):

$$\begin{aligned}
[[A, B], A] &= [[A, B], B] = 0. \\
e^{A+B} &= e^{-[A,B]} e^A e^B,
\end{aligned}$$

podemos reescribir el operador de desplazamiento:

$$D(\alpha) = e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha^* \hat{a}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}. \quad (\text{A.16})$$

Además, como el operador de desplazamiento es una transformación unitaria

$$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha), \quad (\text{A.17})$$

obtenemos el estado coherente de Glauber con el operador de desplazamiento como una transformación unitaria en el vacío

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (\text{A.18})$$

La transformación sobre los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$  es:

$$D(\alpha)\hat{a}D(\alpha)^{-1} = \hat{a} - \alpha, \quad (\text{A.19})$$

$$D(\alpha)\hat{a}^\dagger D(\alpha)^{-1} = \hat{a}^\dagger - \alpha^*, \quad (\text{A.20})$$

$$D(\alpha)\hat{n}D(\alpha)^{-1} = \hat{a} - \alpha = n - (\alpha\hat{a}^\dagger + \alpha^*\hat{a}) + |\alpha|^2. \quad (\text{A.21})$$

y siendo

$$D(\alpha)\hat{a}D(\alpha)|\alpha\rangle = (a - \alpha)|\alpha\rangle = 0. \quad (\text{A.22})$$

Siendo otra forma de definir los estados coherentes, como eigenestados del operador de aniquilación

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (\text{A.23})$$

El estado coherente puede escribirse como

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{A.24})$$

En particular, los estados coherentes son estados propios del operador de creación del oscilador armónico cuántico, por lo tanto, tienen energía definida y finita.

## Propiedades de los Estados Coherentes

Calculamos el producto interno entre estados de Glauber, utilizando Ec. [A.24](#)

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\beta|n\rangle\langle n|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} \left(\frac{(\alpha^*\beta)^n}{n!}\right) = \exp\left(\frac{-|\alpha|^2 + 2\alpha^*\beta - |\beta|^2}{2}\right). \quad (\text{A.25})$$

Despejando el numerador del argumento de la exponencial, la norma cuadrada es:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}. \quad (\text{A.26})$$

La norma está normalizada pero no es ortogonal pero si normalizada. Utilizando la completez:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi} \sum_n |n\rangle\langle n|\alpha\rangle\langle\alpha| \sum_{n'} |n'\rangle\langle n'| = \sum_n \sum_{n'} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |n\rangle\langle n'| \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|n'\rangle \\ &= \sum_n \sum_{n'} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} |n\rangle\langle n'| e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n!n'}} = \sum_n \sum_{n'} \int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{\alpha^n (\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n!n'}} |n\rangle\langle n'|. \end{aligned}$$

Reescribiendo parte de la integral

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \alpha^n (\alpha^*)^{n'} = \int_0^\infty |\alpha|^{n+n'+1} e^{-|\alpha|^2} d|\alpha| \int_0^{2\pi} e^{i(n'-n)\theta} d\theta = \pi n! \delta_{n,n'}.$$

por lo tanto:

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1. \quad (\text{A.27})$$

Podemos calcular los elementos de matriz y el valor esperado del álgebra de Heisenberg-Weyl en estados coherentes:

$$\langle\beta|\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \beta^* e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}}, \quad \langle\beta|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha e^{-\frac{|\alpha-\beta|^2}{2}} \quad (\text{A.28})$$

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \alpha^*, \quad \langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha, \quad (\text{A.29})$$

y para el operador de número

$$\langle\beta|n|\alpha\rangle = \beta^* \alpha^n \quad \text{y} \quad \langle\alpha|n|\alpha\rangle = |\alpha|^{2n}. \quad (\text{A.30})$$

## A.2. Álgebra SU(2)

### A.2.1. Estados Coherentes de Bloch

Similar a los estados coherentes de Glauber, definiremos el estado coherente atómico [\[131\]](#). Definimos el operador de desplazamiento

$$\Omega(z) = e^{z\hat{J}_z - z^*\hat{J}_-} \quad (\text{A.31})$$

y consideramos el parámetro del estado coherente

$$z = \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}, \quad z^* = \frac{\theta}{2} e^{i\phi}, \quad (\text{A.32})$$

En términos de los operadores  $\hat{J}_x$  y  $\hat{J}_y$ , vemos que

$$\begin{aligned} z\hat{J}_+ - z^*\hat{J}_- &= z(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) - z^*(\hat{J}_x - i\hat{J}_y) = \hat{J}_x \frac{\theta}{2}(e^{-i\phi} - e^{i\phi}) + i\hat{J}_y \frac{\theta}{2}(e^{-i\phi} + e^{i\phi}) \\ &= -i\theta(\hat{J}_x \sin \phi - \hat{J}_y \cos \phi). \end{aligned}$$

El operador del desplazamiento atómico es:

$$\Omega(z) = e^{-i\theta(\hat{J}_x \sin \phi - \hat{J}_y \cos \phi)}. \quad (\text{A.33})$$

A diferencia de los estados coherentes de Glauber que representa una traslación, en el caso atómico es una rotación

$$\Omega^\dagger(z) = \Omega(-z) = \Omega^{-1}(z). \quad (\text{A.34})$$

Utilizando Baker-Campbell-Hausdorf, expresamos el operador de desplazamiento

$$\Omega(\tau) = e^{\tau\hat{J}_+} e^{\text{Ln}(1+|\tau|^2)\hat{J}_z} e^{-\tau^*\hat{J}_-} = e^{-\tau^*\hat{J}_-} e^{\text{Ln}(1+|\tau|^2)\hat{J}_z} e^{\tau\hat{J}_+},$$

donde  $\tau = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}$ . El estado coherente atómico se define como la aplicación del operador de desplazamiento sobre el estado extremal, es decir de  $j$  a  $-j$ :

$$|z\rangle = \Omega(z)|j, -j\rangle. \quad (\text{A.35})$$

Nos interesa como se transforman los operadores de pseudo-espín colectivo bajo la acción de  $\Omega(z)$ . Usando la regla Baker-Campbell-Hausdorf:

$$\begin{aligned} \Omega(z)\hat{J}_x\Omega^{-1}(z) &= \hat{J}_x + \hat{J}_z \cos \phi \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) + \left( \hat{J}_y \sin \phi \cos \phi + \hat{J}_x \cos^2 \phi \right) \\ &\times \left( -\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) = \hat{J}_z \cos \phi \sin \phi + \hat{J}_x [1 - \cos^2 \phi (\cos \theta - 1)] + \hat{J}_y [\sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1)] \\ &= \hat{J}_z \cos \phi \sin \phi + \hat{J}_x \left[ 1 - 2 \cos^2 \phi \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] - 2\hat{J}_y \left[ \sin \phi \cos \phi \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (\text{A.36}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega(z)\hat{J}_y\Omega^{-1}(z) &= \hat{J}_y + \hat{J}_z \cos \phi \left( \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) + \left( \hat{J}_x \sin \phi \cos \phi + \hat{J}_y \cos^2 \phi \right) \\ &\times \left( -\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \hat{J}_z \sin \phi \sin \phi + \hat{J}_y \left[ 1 - 2 \cos^2 \phi \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] - 2\hat{J}_x \left[ \sin \phi \cos \phi \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (\text{A.37}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega(z)\hat{J}_z\Omega^{-1}(z) &= \hat{J}_z + (\hat{J}_y \sin \phi + \hat{J}_x \cos \phi) \left( \theta + \frac{\theta^3}{3!} \right) + \hat{J}_z \left( -\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right) \\ &= \hat{J}_z \cos \phi - \frac{1}{2} \sin \theta (e^{-i\phi} \hat{J}_+ + e^{i\phi} \hat{J}_-),\end{aligned}\quad (\text{A.38})$$

$$\Omega(z)\hat{J}_+\Omega^{-1}(z) = e^{i\phi} \left\{ \hat{J}_z + \hat{J}_+ e^{-i\phi} - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} [\hat{J}_+ e^{-i\phi} + \hat{J}_+ e^{i\phi}] \right) \right\}, \quad (\text{A.39})$$

$$\Omega(z)\hat{J}_-\Omega^{-1}(z) = e^{-i\phi} \left\{ \hat{J}_z + \hat{J}_- e^{i\phi} - \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} [\hat{J}_+ e^{-i\phi} + \hat{J}_+ e^{i\phi}] \right) \right\}. \quad (\text{A.40})$$

Por último, expresamos los estados coherentes atómicos en términos de los estados de Dicke

$$e^{\text{Ln}(1+|\tau|^2)\hat{J}_z}|j, -j\rangle = e^{-j\text{Ln}(1+|\tau|^2)}|j, -j\rangle = \frac{1}{(1+|\tau|^2)^j}|j, -j\rangle, \quad (\text{A.41})$$

y

$$e^{z\hat{J}_+}|j, -j\rangle = \sum_{m=-j}^j \frac{\tau^{j+m}}{(j+m)!} \hat{J}_+^{j+m}|j, -j\rangle = \sum_{m=-j}^j \left( \frac{2j}{j+m} \right)^{1/2} \tau^{j+m}|jm\rangle. \quad (\text{A.42})$$

Los estados de Dicke podemos expresarlos como:

$$|z\rangle = \sum_{m=-j}^j \left( \frac{2j}{j+m} \right)^{1/2} \frac{\tau^{j+m}}{(1+|\tau|^2)^j}|jm\rangle. \quad (\text{A.43})$$

### A.3. Propiedades de los Estados Coherentes de Bloch

Podemos obtener los valores esperados de  $\hat{J}_z$ ,  $\hat{J}_+$  y  $\hat{J}_-$  a partir de las transformaciones de los operadores con el operador de desplazamiento:

$$\langle z|\hat{J}_z|z\rangle = -j \cos \theta, \quad (\text{A.44})$$

$$\langle z|\hat{J}_x|z\rangle = -j \sin \theta \cos \phi, \quad (\text{A.45})$$

$$\langle z|\hat{J}_y|z\rangle = -j \sin \theta \sin \phi, \quad (\text{A.46})$$

$$\langle z|\hat{J}_+|z\rangle = -j \sin \theta e^{i\phi}, \quad (\text{A.47})$$

$$\langle z|\hat{J}_-|z\rangle = -j \sin \theta e^{-i\phi}. \quad (\text{A.48})$$





# Apéndice B

## Suplemento sobre Transiciones de Fase Superradiante

### B.1. Ecuaciones de Hamilton para los Límites de Dicke y Tavis-Cummings

Evaluando las Ecs. de Hamilton (3.5)-(3.8) en el límite de Tavis-Cummings ( $\xi = 0$ ):

$$\dot{q} = \omega p - \gamma \sqrt{1 - j_z^2} \sin \phi, \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{p} = -\omega q - \gamma \sqrt{1 - j_z^2} \cos \phi, \quad (\text{B.2})$$

$$\dot{\phi} = \omega_0 + \eta_z j_z - j_z (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) - \frac{\gamma j_z}{\sqrt{1 - j_z^2}} (q \cos \phi - p \sin \phi), \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{j}_z = (1 - j_z^2) (\eta_x - \eta_y) \cos \phi \sin \phi + \gamma \sqrt{1 - j_z^2} (q \sin \phi + p \cos \phi). \quad (\text{B.4})$$

De la misma forma evaluando las ecuaciones de Hamilton en el límite de Dicke ( $\xi = 1$ ):

$$\dot{q} = \omega p, \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{p} = -\omega q - 2\gamma \sqrt{1 - j_z^2} \cos \phi, \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{\phi} = \omega_0 + \eta_z j_z - j_z (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) - \frac{2\gamma j_z}{\sqrt{1 - j_z^2}} q \cos \phi, \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{j}_z = (1 - j_z^2) (\eta_x - \eta_y) \cos \phi \sin \phi + 2\gamma \sqrt{1 - j_z^2} q \sin \phi. \quad (\text{B.8})$$

## B.2. Variables para Visualizar las Superficies de Energía

Empleamos un nuevo conjunto de variables  $u$  y  $v$  asociados al espacio del qubit para visualizar mejor las superficies de energía, como se muestran en las Figs. [3.1](#), [3.2](#) y [3.3](#):

$$u = \arccos(j_z) \cos \phi \quad \text{y} \quad v = \arccos(-j_z) \sin \phi. \quad (\text{B.9})$$

siendo la transformación inversa

$$j_z = -\cos \sqrt{u^2 + v^2}, \quad j_x = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sin \sqrt{u^2 + v^2}, \quad j_y = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sin \sqrt{u^2 + v^2}. \quad (\text{B.10})$$

Las variables  $u$  y  $v$  corresponden a los ángulos  $\phi$  y  $\theta = \sqrt{u^2 + v^2}$ , es decir, el ángulo zenital medido con respecto al polo. Entonces, eliminamos las variables bosónicas  $q$  y  $p$  empleando las ecuaciones de Hamilton [3.5](#) y [3.6](#). Por lo tanto, obtenemos las superficies de energía ( $\epsilon = E/\omega_0$ ) únicamente como función de las nuevas variables  $(u, v)$

$$\begin{aligned} \epsilon(\xi, u, v) = \sin^2 \sqrt{u^2 + v^2} \frac{1}{2(u^2 + v^2)} \left[ u^2 \left( \frac{\eta_x}{\omega_0} - f_{\xi+} \right) + v^2 \left( \frac{\eta_y}{\omega_0} - f_{\xi-} \right) \right] \\ - \cos \sqrt{u^2 + v^2} \left( 1 - \frac{\eta_z}{2\omega_0} \cos \sqrt{u^2 + v^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

con  $f_{\xi\pm} = \gamma^2/\gamma_{\xi\pm}^c$ .

## B.3. Matriz Hessiana

Mostramos expresiones generales de la matriz Hessiana del modelo de Dicke con interacciones colectivas qubit-qubit, ya que nos permiten identificar y estudiar los puntos estables y la dinámica de las transiciones de fase cuánticas.

$$D^{(\xi)}(q, p, j_z, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial^2 p} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z \partial p} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi \partial p} \\ \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial p \partial q} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial^2 q} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z \partial q} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi \partial q} \\ \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial p \partial j_z} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q \partial j_z} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial^2 j_z} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi \partial j_z} \\ \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial p \partial \phi} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q \partial \phi} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z \partial \phi} & \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Las segundas derivadas del Hamiltoniano clásico son:

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q^2} = \omega, \quad \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q \partial p} = \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial p \partial q} = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z \partial p} = \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial p \partial j_z} = \frac{\gamma j_z}{\sqrt{1 - j_z^2}} (1 - \xi) \sin \phi, \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z \partial q} = \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q \partial j_z} = -\frac{\gamma j_z}{\sqrt{1 - j_z^2}} (1 + \xi) \cos \phi, \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi \partial p} = \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial p \partial \phi} = -\gamma \sqrt{1 - j_z^2} (1 - \xi) \cos \phi, \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi \partial q} = \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial q \partial \phi} = -\gamma \sqrt{1 - j_z^2} (1 + \xi) \sin \phi, \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi \partial j_z} = \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z \partial \phi} = j_z (\eta_x - \eta_y) 2 \cos \phi \sin \phi + \frac{\gamma j_z}{\sqrt{1 - j_z^2}} [(1 + \xi)q \sin \phi + (1 - \xi)p \cos \phi], \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z^2} = [\eta_z - (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi)] - \frac{\gamma}{(1 - j_z^2)^{3/2}} [(1 + \xi)q \cos \phi - (1 - \xi)p \sin \phi], \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi^2} = (1 - j_z^2) (\eta_x - \eta_y) (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) - \gamma \sqrt{1 - j_z^2} [(1 + \xi)q \cos \phi - (1 - \xi)p \sin \phi]. \quad (\text{B.20})$$

El determinante de la matriz Hessiana es:

$$\begin{aligned} D^{(\xi)}(q, p, j_z, \phi) = & \omega^2 \left[ \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z^2} \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi^2} - \left( \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z \partial \phi} \right)^2 \right] - \gamma^2 j_z (1 - \xi) (1 + \xi) + \quad (\text{B.21}) \\ & -\omega \gamma^2 \left\{ (1 - j_z^2) [(1 - \xi)^2 \cos^2 \phi + (1 + \xi)^2 \sin^2 \phi] \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z^2} \right. \\ & + \frac{j_z^2}{1 - j_z^2} [(1 - \xi)^2 \sin^2 \phi + (1 + \xi)^2 \cos^2 \phi] \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial \phi^2} \\ & \left. + 2j_z \cos \phi \sin \phi [(1 - \xi)^2 - (1 + \xi)^2] \frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z \partial \phi} \right\}. \end{aligned}$$

Como ejemplo, considerando los puntos  $j_{zs} = \pm 1$ , y  $q_s = p_s = 0$ , el Hessiano toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D^{(\xi)}(0, 0, \pm 1, \phi_s) = & -\omega^2 (\eta_x - \eta_y)^2 \sin^2 2\phi_s + \\ & \omega \gamma^2 (\eta_x - \eta_y) \left[ ((1 + \xi)^2 \cos^2 \phi_s + (1 - \xi)^2 \sin^2 \phi_s) \cos 2\phi_s \right. \\ & \left. - 4\xi \sin^2 2\phi_s \right] + \gamma^4 (1 - \xi)^2 (1 + \xi)^2, \end{aligned}$$

Si consideramos el caso simétrico  $\xi = 0$  con  $\eta_x = \eta_y$  donde se consigue la simetría rotacional, uno consigue  $D_{\eta_x=\eta_y}^0(0, 0, \pm 1, \phi_s) = \gamma^4$ . Por consiguiente  $j_{zs} = \pm 1$  deben ser un máximo o un mínimo. De hecho analizando las superficies de energía muestra su naturaleza la cuál se confirma si uno calcula el espectro de la matriz Hessiana.

### B.3.1. Determinante del Hessiano en el Límite de Tavis-Cummings

En el límite de Tavis-Cummings ( $\xi = 0$ ), el determinante del Hessiano toma la forma:

$$D^{(0)}(q, p, j_z, \phi) = \omega^2 \left[ \frac{\partial^2 H_{cl}^{(0)}}{\partial j_z^2} \frac{\partial^2 H_{cl}^{(0)}}{\partial \phi^2} - \left( \frac{\partial^2 H_{cl}^{(0)}}{\partial j_z \partial \phi} \right)^2 \right] \quad (\text{B.22})$$

$$- \gamma^2 j_z - \omega \gamma^2 \left[ (1 - j_z^2) \frac{\partial^2 H_{cl}^{(0)}}{\partial j_z^2} + \frac{j_z^2}{1 - j_z^2} \frac{\partial^2 H_{cl}^{(0)}}{\partial \phi^2} \right].$$

with

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(0)}}{\partial j_z \partial \phi} = j_z (\eta_x - \eta_y) 2 \cos \phi \sin \phi \quad (\text{B.23})$$

$$+ \frac{\gamma j_z}{\sqrt{1 - j_z^2}} (q \sin \phi + p \cos \phi),$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(\xi)}}{\partial j_z^2} = \left[ \eta_z - (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) \right] \quad (\text{B.24})$$

$$- \frac{\gamma}{(1 - j_z^2)^{3/2}} (q \cos \phi - p \sin \phi),$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(0)}}{\partial \phi^2} = (1 - j_z^2) (\eta_x - \eta_y) (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \quad (\text{B.25})$$

$$- \gamma \sqrt{1 - j_z^2} (q \cos \phi - p \sin \phi).$$

### B.3.2. Determinante del Hessiano en el Límite de Dicke

De forma análoga calculamos en el límite de Dicke ( $\xi = 1$ ), el determinante del Hessiano:

$$D^{(1)}(q, p, j_z, \phi) = \omega^2 \left[ \frac{\partial^2 H_{cl}^{(1)}}{\partial j_z^2} \frac{\partial^2 H_{cl}^{(1)}}{\partial \phi^2} - \left( \frac{\partial^2 H_{cl}^{(1)}}{\partial j_z \partial \phi} \right)^2 \right] + \quad (B.26)$$

$$- \omega \gamma^2 \left\{ (1 - j_z^2) 4 \sin^2 \phi \frac{\partial^2 H_{cl}^{(1)}}{\partial j_z^2} \right.$$

$$\left. + \frac{j_z^2}{1 - j_z^2} 4 \cos^2 \phi \frac{\partial^2 H_{cl}^{(1)}}{\partial \phi^2} - 8 j_z \cos \phi \sin \phi \frac{\partial^2 H_{cl}^{(1)}}{\partial j_z \partial \phi} \right\}.$$

con

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(1)}}{\partial j_z \partial \phi} = j_z (\eta_x - \eta_y) 2 \cos \phi \sin \phi + \frac{2\gamma j_z}{\sqrt{1 - j_z^2}} q \sin \phi, \quad (B.27)$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(1)}}{\partial j_z^2} = \left[ \eta_z - (\eta_x \cos^2 \phi + \eta_y \sin^2 \phi) \right] - \frac{2\gamma q \cos \phi}{(1 - j_z^2)^{3/2}}, \quad (B.28)$$

$$\frac{\partial^2 H_{cl}^{(1)}}{\partial \phi^2} = (1 - j_z^2) (\eta_x - \eta_y) (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) - 2\gamma \sqrt{1 - j_z^2} q \cos \phi. \quad (B.29)$$



# Apéndice C

## Integral de Trayectoria en el Modelo de Dicke Anisotrópico

Después de revisar el Cap. 2.2, exploraremos las propiedades a temperatura finita del modelo de Dicke anisotrópico sin interacciones utilizando el enfoque de integral de trayectoria y métodos funcionales. Nuestro objetivo es determinar los modos de fase y amplitud del sistema. Analizaremos el comportamiento asintótico de la función de partición en el límite termodinámico, así como el espectro colectivo del sistema en las fases normal y superradiante. Este apéndice sigue la dirección establecida en la Ref. [38], que sirve como referencia para futuros estudios sobre la integral de trayectoria en el modelo de Dicke, incluyendo las interacciones materiales.

El método de la integral de trayectoria ha sido empleado para abordar problemas de espín-bosón, lo que ha permitido determinar su temperatura crítica y la energía libre [50, 132]. V.N Popov y S. Fedotov llevaron a cabo cálculos de la función de partición y el espectro colectivo para el modelo de Dicke en las fases normal y superradiante [133, 134]. En estudios centrados en el comportamiento asintótico de la función de partición y el espectro colectivo en la fase normal del modelo de Dicke, también se ha recurrido al método de la integral de trayectoria [37, 135]. El objetivo de este apéndice es analizar el enfoque de la integral de trayectoria y comparar sus resultados con los obtenidos mediante la aproximación de Holstein-Primakoff a bajas energías.

### C.1. Modelo de Dicke Fermiónico.

Exploraremos la representación fermiónica del modelo de Dicke, ya que nos interesa estudiar el comportamiento asintótico de la función de partición en un cierto régimen de temperatura. La representación fermiónica nos facilita considerar las condiciones de frontera temporales del sistema. En esta representación, consideramos los operadores de creación y aniquilación  $\hat{\alpha}_i^\dagger$ ,  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i^\dagger$  y  $\hat{\beta}_i$ , que satisfacen las relaciones de

anticonmutación  $\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j^\dagger + \hat{\alpha}_j^\dagger \hat{\alpha}_i = \delta_{ij}$  y  $\hat{\beta}_i \hat{\beta}_j^\dagger + \hat{\beta}_j^\dagger \hat{\beta}_i = \delta_{ij}$ . Para las combinaciones bilineales de estos operadores de Fermi, utilizamos la representación de los operadores de espín de Pauli  $\hat{J}_z^i$ ,  $\hat{J}_+^{(i)}$  y  $\hat{J}_-^{(i)}$ . La correspondencia entre ellos es:

$$\hat{J}_z^{(i)} \rightarrow \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i^\dagger \hat{\beta}_i, \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{J}_+^{(i)} \rightarrow \hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\beta}_i, \quad \text{y} \quad \hat{J}_-^{(i)} \rightarrow \hat{\beta}_i \hat{\alpha}_i. \quad (\text{C.2})$$

Tomando en cuenta los operadores de pseudospín  $\hat{J}_p = 1/2 \sum_i^N \hat{J}_p^{(i)}$  (matriz de espín de Pauli), se tiene que:

$$\hat{J}_z = \sum_i \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i^\dagger \hat{\beta}_i), \quad (\text{C.3})$$

$$\hat{J}_+ = \sum_i \hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\beta}_i \quad \text{y} \quad \hat{J}_- = \sum_i \hat{\beta}_i^\dagger \hat{\alpha}_i, \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2} \sum_i (\hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\beta}_i + \hat{\beta}_i \hat{\alpha}_i) \quad \text{y} \quad \hat{J}_y = \frac{1}{2i} \sum_i (\hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\beta}_i - \hat{\beta}_i^\dagger \hat{\alpha}_i). \quad (\text{C.5})$$

De acuerdo con las ecuaciones (C.1) y (C.2), definimos el Hamiltoniano fermiónico de Dicke como  $\hat{H}_F$ :

$$\hat{H}_F = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \sum_{i=1}^N (\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i^\dagger \hat{\beta}_i) + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[ (\hat{a} \hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\beta}_i + \hat{a}^\dagger \hat{\beta}_i^\dagger \hat{\alpha}_i) + \xi (\hat{a}^\dagger \hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\beta}_i + \hat{a} \hat{\beta}_i^\dagger \hat{\alpha}_i) \right]. \quad (\text{C.6})$$

Al estar interesados en las propiedades termodinámicas del sistema, consideramos una función de partición  $Z$  en la distribución canónica, ya que nos interesa el factor de Boltzmann-Gibbs. Es importante notar que cada Hamiltoniano  $\hat{H}$  y  $\hat{H}_F$  actúan en espacios diferentes. Cada operador que aparece en el Hamiltoniano  $\hat{H}$  y actúa en un espacio de Hilbert de dos dimensiones, mientras que los operadores de Fermi  $\hat{\alpha}_i^\dagger$ ,  $\hat{\alpha}_i$ ,  $\hat{\beta}_i^\dagger$  y  $\hat{\beta}_i$  están en el Hamiltoniano  $\hat{H}_F$ , que actúa en un espacio de Fock de cuatro dimensiones. Podemos relacionar la función de partición del modelo de Dicke con la función de partición del modelo de Dicke fermiónico [37, 38]

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = i^{\hat{N}} \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}_F - \frac{i\pi}{2} \hat{N}_F} \quad (\text{C.7})$$

El operador  $\hat{N}_F$  se define como:

$$\hat{N}_F = \sum_{i=1}^N (\hat{\alpha}_i^\dagger \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_i^\dagger \hat{\beta}_i). \quad (\text{C.8})$$

De acuerdo con (C.7), el segundo término introduce una fase asociada con el número total de fermiones  $\hat{N}_F$ . Calculando la función de partición a dicha fase se obtiene un



factor  $2^N$ ,

$$\begin{aligned}
& i^N \text{Tr} \left[ e^{-\frac{i\pi}{2} N_F} \right] \\
&= i^N \text{Tr} \left[ e^{-\frac{i\pi}{2} \sum_{i=1}^N (\alpha_i^\dagger \alpha_i + \beta_i^\dagger \beta_i)} \right] = i^N \prod_{i=1}^N \text{Tr} \left[ e^{-\frac{i\pi}{2} (\alpha_i^\dagger \alpha_i + \beta_i^\dagger \beta_i)} \right] \\
&= i^N \sum_{n_\alpha, n_\beta} \left[ \prod_{i=1}^N \langle n_{\beta_i} | \otimes \langle n_{\alpha_i} | \right] e^{-\frac{i\pi}{2} (\alpha_i^\dagger \alpha_i + \beta_i^\dagger \beta_i)} \left[ \prod_{i=1}^N |n_{\alpha_i}\rangle \otimes |n_{\beta_i}\rangle \right] \\
&= i^N \left[ \sum_{n_\alpha, n_\beta} \langle n_\beta | \otimes \langle n_\alpha | e^{-\frac{i\pi}{2} (\alpha^\dagger \alpha + \beta^\dagger \beta)} |n_\alpha\rangle \otimes |n_\beta\rangle \right]^N \\
&= i^N \left[ \sum_{n_\alpha} \langle n_\alpha | e^{-\frac{i\pi}{2} \alpha^\dagger \alpha} |n_\alpha\rangle \right]^N \left[ \sum_{n_\beta} \langle n_\beta | e^{-\frac{i\pi}{2} \beta^\dagger \beta} |n_\beta\rangle \right]^N \\
&= i^N \left[ \langle 0 | e^{-\frac{i\pi}{2} \alpha^\dagger \alpha} |0\rangle + \langle 1 | e^{-\frac{i\pi}{2} \alpha^\dagger \alpha} |1\rangle \right]^N \left[ \langle 0 | e^{-\frac{i\pi}{2} \beta^\dagger \beta} |0\rangle + \langle 1 | e^{-\frac{i\pi}{2} \beta^\dagger \beta} |1\rangle \right]^N \\
&= \left[ i(1-i)^2 \right]^N = 2^N.
\end{aligned}$$

## C.2. Función de Partición e Integral de Trayectoria.

Tomaremos la aproximación  $N \rightarrow \infty$ , por tal razón, debemos tomar la expresión asintótica de la función de partición  $Z$ . Definimos la acción Euclideana  $S$  para el modelo de Dicke:

$$S = \int_0^\beta d\tau \left[ \hat{a}^*(\tau) \partial_\tau \hat{a}(\tau) + \sum_{i=1}^N \left( \hat{\alpha}_i^*(\tau) \partial_\tau \hat{\alpha}_i(\tau) + \hat{\beta}_i^*(\tau) \partial_\tau \hat{\beta}_i(\tau) \right) \right] - \int_0^\beta d\tau \hat{H}_F(\tau), \quad (\text{C.9})$$

siendo  $\hat{H}_F$ :

$$\begin{aligned}
H_F(\tau) &= \omega \hat{a}^*(\tau) \hat{a}(\tau) + \frac{\omega_0}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \hat{\alpha}_i^*(\tau) \hat{\alpha}_i(\tau) - \hat{\beta}_i^*(\tau) \hat{\beta}_i(\tau) \right] \\
&+ \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left[ \left( \hat{\alpha}_i^*(\tau) \hat{\beta}_i(\tau) \hat{a}(\tau) + \hat{\beta}_i^*(\tau) \hat{\alpha}_i(\tau) \hat{a}^*(\tau) \right) + \xi \left( \hat{\beta}_i^*(\tau) \hat{\alpha}_i(\tau) \hat{a}(\tau) + \hat{\alpha}_i^*(\tau) \hat{\beta}_i(\tau) \hat{a}^*(\tau) \right) \right].
\end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Definimos el cociente de la función de partición del modelo de Dicke y la función de partición del modelo de Dicke no interactuante:

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{\int [d\eta] e^{S - \frac{i\pi}{2\beta} \int_0^\beta \hat{n}(\tau) d\tau}}{\int [d\eta] e^{S_0 - \frac{i\pi}{2\beta} \int_0^\beta \hat{n}(\tau) d\tau}}, \quad (\text{C.11})$$

la función  $\hat{n}(\tau)$  es:

$$\hat{n}(\tau) = \sum_{i=1}^N \left[ \hat{\alpha}_i^*(\tau) \hat{\alpha}_i(\tau) + \hat{\beta}_i^*(\tau) \hat{\beta}_i(\tau) \right], \quad (\text{C.12})$$

donde  $[d\eta]$  es la medida funcional,  $S_0 = S_0(\hat{a}, \hat{a}^*, \hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger, \hat{\beta}, \hat{\beta}^\dagger)$  es la acción Euclideana libre para el modo bosónico y atómico. Las integrales funcionales de (C.11) considera las funciones complejas  $\hat{a}^*(\tau)$  y  $\hat{a}(\tau)$  y los campos fermiónicos  $\hat{\alpha}_i^*(\tau), \hat{\alpha}_i(\tau), \hat{\beta}_i^*(\tau), \hat{\beta}_i(\tau)$ . Utilizando las condiciones a la frontera del equilibrio térmico, en el formalismo del tiempo imaginario, las variables de integración de (C.11) obedecen las siguientes condiciones periódicas del campo bosónico  $\hat{a}(\beta) = \hat{a}(0)$  y antiperiódicas del campo fermiónico  $\hat{\alpha}_i(\beta) = -\hat{\alpha}_i(0)$  y  $\hat{\beta}_i(\beta) = -\hat{\beta}_i(0)$ .

Gracias a las condiciones de frontera podemos indagar sobre la simetría continua y discreta del modelo. Analicemos la invarianza de la acción dado por (C.9) bajo transformaciones simétricas. Consideramos la transformación de campo:

$$\begin{aligned} \hat{a}(\tau) &\rightarrow e^{i\gamma} \hat{a}(\tau), & \hat{\alpha}(\tau) &\rightarrow e^{i\theta} \hat{\alpha}(\tau), & \hat{\beta}(\tau) &\rightarrow e^{i\phi} \hat{\beta}(\tau), \\ \hat{a}^*(\tau) &\rightarrow e^{-i\gamma} \hat{a}^*(\tau), & \hat{\alpha}^*(\tau) &\rightarrow e^{-i\theta} \hat{\alpha}^*(\tau), & \hat{\beta}^*(\tau) &\rightarrow e^{-i\phi} \hat{\beta}^*(\tau). \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

De acuerdo con la acción:

$$\begin{aligned} S = \int_0^\beta d\tau &\left\{ e^{-i\gamma} \hat{a}^*(\tau) \partial_\tau e^{i\gamma} \hat{a}(\tau) + \sum_{i=1}^N \left[ e^{-i\theta} \hat{\alpha}_i^*(\tau) \partial_\tau e^{i\theta} \hat{\alpha}_i(\tau) + e^{-i\phi} \hat{\beta}_i^*(\tau) \partial_\tau e^{i\phi} \hat{\beta}_i(\tau) \right] \right. \\ &- \omega e^{-i\gamma} \hat{b}^*(\tau) e^{i\gamma} \hat{b}(\tau) - \frac{\omega_0}{2} \sum_{i=1}^N \left[ e^{-i\theta} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{i\theta} \hat{\alpha}_i(\tau) - e^{-i\phi} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{i\phi} \hat{\beta}_i(\tau) \right] \\ &- \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left[ \left( e^{-i\theta} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{i\phi} \hat{\beta}_i(\tau) e^{i\gamma} \hat{a}(\tau) + e^{-i\phi} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{i\theta} \hat{\alpha}_i(\tau) e^{-i\gamma} \hat{a}^*(\tau) \right) \right. \\ &\left. \left. + \xi \left( e^{-i\phi} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{i\theta} \hat{\alpha}_i(\tau) e^{i\gamma} \hat{a}(\tau) + e^{-i\theta} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{i\phi} \hat{\beta}_i(\tau) e^{-i\gamma} \hat{a}^*(\tau) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Observamos que al aplicar la transformación a la acción euclidiana, los únicos términos que no se anulan son los relacionados con la interacción luz-materia. En el límite de Tavis-Cummings ( $\xi = 0$ ), la transformación es invariante cuando  $\gamma = \theta - \phi$ . Se dice que la acción es invariante bajo transformaciones continuas  $U(1)$  del campo bosónico  $\hat{a}(\tau)$ . En el caso límite de Dicke ( $\xi = 1$ ), la acción es invariante bajo transformaciones cuando  $\gamma = \theta - \phi = 0$  o  $\gamma = \theta - \phi = \pi$ . Por lo tanto, se dice que la acción es invariante bajo transformaciones discretas del campo bosónico, es decir,  $\hat{a}(\tau) \rightarrow \hat{a}(\tau)$  y  $\hat{a}(\tau) \rightarrow -\hat{a}(\tau)$ , lo cual coincide con los resultados obtenidos en las superficies de energía en el Capítulo 3 para TC y Dicke estándar, véase la Fig. 3.1, 3.2 y 3.3.

Para calcular el cociente  $\frac{Z}{Z_0}$  utilizamos la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_i(\tau) &\rightarrow e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau), & \hat{\alpha}_i^*(\tau) &\rightarrow e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau), \\ \hat{\beta}_i(\tau) &\rightarrow e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau), & \hat{\beta}_i^*(\tau) &\rightarrow e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau).\end{aligned}\tag{C.15}$$

Aplicando (C.15) a los argumentos del cociente (C.11):

$$\begin{aligned}S - \frac{i\pi}{2\beta} \int_0^\beta \hat{n}(\tau) d\tau &= \\ \int_0^\beta d\tau &\left\{ \hat{a}^*(\tau) \partial_\tau \hat{a}(\tau) + \sum_{i=1}^N \left[ e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau) \partial_\tau \left\{ e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau) \right\} + e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau) \partial_\tau \left\{ e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau) \right\} \right] \right. \\ &- \omega b^*(\tau) b(\tau) - \frac{\omega_0}{2} \sum_{i=1}^N \left[ e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau) - e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau) \right] \\ &- \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left[ \left( e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau) \hat{a}(\tau) + e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau) \hat{a}^*(\tau) \right) \right. \\ &+ \left. \xi \left( e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau) \hat{a}(\tau) + e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau) \hat{a}^*(\tau) \right) \right] \left. \right\} - \frac{i\pi}{2\beta} \int_0^\beta \hat{n}(\tau) d\tau, \\ &= \int_0^\beta d\tau \left\{ \hat{a}^*(\tau) \partial_\tau \hat{a}(\tau) + \sum_{i=1}^N \left[ e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau) \left\{ \frac{i\pi}{2\beta} e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau) + e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \partial_\tau \hat{\alpha}_i(\tau) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau) \left\{ \frac{i\pi}{2\beta} e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau) + e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \partial_\tau \hat{\beta}_i(\tau) \right\} \right] \right. \\ &- \omega \hat{a}^*(\tau) \hat{a}(\tau) - \frac{\omega_0}{2} \sum_{i=1}^N \left[ e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau) - e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau) \right] \\ &- \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \left[ \left( e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau) \hat{a}(\tau) + e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau) \hat{a}^*(\tau) \right) \right. \\ &\quad \left. \xi \left( e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau) \hat{a}(\tau) + e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau) \hat{a}^*(\tau) \right) \right] \left. \right\} \\ &- \frac{i\pi}{2\beta} \int_0^\beta d\tau \left\{ e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\alpha}_i(\tau) + e^{-\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i^*(\tau) e^{\frac{i\pi}{2\beta}t} \hat{\beta}_i(\tau) \right\} = S\end{aligned}$$

Dada la transformación, el argumento  $\hat{\eta}(\tau)$  se cancela, de tal forma que el cociente (C.11) es:

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{\int [d\eta] e^S}{\int [d\eta] e^{S_0}}.\tag{C.16}$$

Evaluando la frontera de la transformación (C.15):

$$\hat{\alpha}_i(\beta) = -\hat{\alpha}_i(0) \quad \text{y} \quad \hat{\beta}_i(\beta) = -\hat{\beta}_i(0), \quad \text{Condición Frontera Fermiónica.}$$

$$\begin{array}{c|c} \text{Bosónico} & \text{Fermiónico} \\ \hline \hat{b}(\beta) = \hat{b}(0) & \begin{array}{l} \hat{\alpha}_i(\beta) = i\hat{\alpha}_i(0), \quad \hat{\beta}_i(\beta) = i\hat{\beta}_i(0) \\ \hat{\alpha}_i^*(\beta) = i\hat{\alpha}_i^*(0), \quad \hat{\beta}_i^*(\beta) = i\hat{\beta}_i^*(0). \end{array} \end{array} \quad (\text{C.17})$$

La acción libre para el modo bosónico libre  $S_{B0}(b)$  esta dado por:

$$S_{B0}(b) = \int_0^\beta d\tau [\hat{a}^*(\tau) (\partial_\tau - \omega) \hat{a}(\tau)]. \quad (\text{C.18})$$

Reescribimos la acción  $S$  dada por la Ec. (C.9), así pues, el modelo de Dicke Fermiónico quedará expresado por la acción libre más una matriz que involucra los términos de interacción. La acción total de  $S$  es:

$$S = S_{B0}(b) + \int_0^\beta d\tau \left[ \sum_i^N \hat{\rho}_i^\dagger M(\hat{a}, \hat{a}^*) \hat{\rho}_i(\tau) \right], \quad (\text{C.19})$$

$\hat{\rho}_i(\tau)$  son los operadores de campo fermiónicos (espinores de Nambu): [38, 110, 136]

$$\hat{\rho}_i(\tau) = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_i(\tau) \\ \hat{\alpha}_i(\tau) \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho}_i^\dagger(\tau) = (\hat{\beta}_i^* \hat{\alpha}_i^*(\tau)), \quad (\text{C.20})$$

y la matriz  $M(\hat{a}^*, \hat{a})$  está dada por:

$$M(\hat{a}^*, \hat{a}) = \begin{pmatrix} L & -\frac{1}{\sqrt{N}} (\hat{a}^*(\tau) + \xi \hat{a}(\tau)) \\ -\frac{1}{\sqrt{N}} (\hat{a}(\tau) + \xi \hat{a}^*(\tau)) & L_* \end{pmatrix}, \quad (\text{C.21})$$

siendo  $L = \partial_\tau + \frac{\Omega}{2}$  y  $L_* = \partial_\tau + \frac{\Omega}{2}$ . Sustituyendo (C.19) en (C.16), observamos que la integral funcional de la función de partición es Gaussiana en los campos fermiónicos. Integrando respecto a los campos fermiónicos tenemos:

$$Z = \int [d\eta(a)] e^{S_{B0}} (\det M(\hat{a}, \hat{a}^*))^N. \quad (\text{C.22})$$

Utilizando propiedades de los determinantes, tenemos que:

$$\det M(\hat{a}, \hat{a}^*) = \det (LL_*) \det \left( 1 - \frac{1}{N} \frac{1}{L_*} (\hat{a} + \xi \hat{a}^*) \frac{1}{L} (\hat{a}^* + \xi \hat{a}) \right). \quad (\text{C.23})$$

Para justificar la ecuación C.23, veamos las propiedades de las matrices por bloques. Al desarrollar la función de partición (ecuación C.23), es esencial considerar la matriz por bloques según se describe en [137]

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

Donde sus elementos  $A, B, C$  y  $D$  son matrices y deben cumplir:

- $A$  y  $B$  tienen el mismo número de filas.
- $C$  y  $D$  tienen el mismo número de filas.
- $A$  y  $C$  tienen el mismo número de columnas.
- $B$  y  $D$  tienen el mismo número de columnas.

Se considera la multiplicación de las matrices de bloque como si sus bloques fuesen escalares:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{bmatrix}. \quad (\text{C.25})$$

El caso general del determinante de la matriz de block es el siguiente:

Sea la matriz

$$\Gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (\text{C.26})$$

$A$  y  $D$  son matrices cuadradas y invertibles, de acuerdo al complemento de Schur [118], podemos factorizar la matriz  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ CA^{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ D^{-1}C & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.27})$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ CA^{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D(1 - D^{-1}CA^{-1}B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ D^{-1}C & \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.28})$$

Aplicando el determinante a la matriz  $\Gamma$ :

$$\det(\Gamma) = \mathbf{1} \cdot \det(A) \det[D(1 - D^{-1}CA^{-1}B)] \cdot \mathbf{1}, \quad (\text{C.29})$$

$$\det(\Gamma) = \det(A) \det(D) \det(1 - D^{-1}CA^{-1}B), \quad (\text{C.30})$$

$$\det(\Gamma) = \det(AD) \det(1 - D^{-1}CA^{-1}B). \quad (\text{C.31})$$

Sustituyendo [C.22] y [C.23]:

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{\int [d\eta(a)] e^{S_{B0} + N \text{Tr} \left\{ \ln \left[ 1 - \frac{1}{N} \frac{1}{L^*} (\hat{a} + \xi \hat{a}^*) \frac{1}{L^*} (\hat{a}^* + \xi \hat{a}) \right] \right\}}}{\int [d\eta(a)] e^{S_{B0}}} = \frac{Z_A}{\int [d\eta(a)] e^{S_{B0}}}. \quad (\text{C.32})$$

Estamos interesados en conocer el comportamiento asintótico del cociente  $\frac{Z}{Z_0}$  en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ . Analizamos la expresión  $Z_A$  para ver observar

dicho comportamiento. Primero escalamos el campo bosónico como  $\hat{a} \rightarrow \sqrt{N}\hat{a}$  y  $\hat{a}^* \rightarrow \sqrt{N}\hat{a}^*$ :

$$Z_A = A(N) \int [d\eta(a)] e^{\Phi(\hat{a}^*, \hat{a})}, \quad (\text{C.33})$$

donde

$$\Phi(\hat{a}^*, \hat{a}) = S_{BO} + \text{Tr} \ln \left( 1 - \frac{1}{L_*} (\hat{a} + \xi \hat{a}^*) \frac{1}{L} (\hat{a}^* + \xi \hat{a}) \right). \quad (\text{C.34})$$

El término  $A(N)$  en (C.33) proviene de transformar la medida funcional  $[d\eta(a)]$  bajo un reescalamiento  $\hat{a} \rightarrow \sqrt{N}\hat{a}$  y  $\hat{a}^* \rightarrow \sqrt{N}\hat{a}^*$ . El comportamiento asintótico (cuando  $N \rightarrow \infty$ ) de la integral funcional (C.33) puede obtenerse a través del método del descenso gradiente [138]. En este método, expandimos la función  $\Phi(\hat{a}^*, \hat{a})$  alrededor del punto  $\hat{a}(\tau) = \hat{a}_0(\tau)$  y  $\hat{a}^*(\tau) = \hat{a}_0^*(\tau)$ , el cual puede ser de dos tipos: uno que hace que  $\text{Re} \Phi(\hat{a}^*, \hat{a})$  sea un máximo y otro que sea un punto de silla. En el método, consideramos los primeros términos de la expansión de la integral funcional, ya que son los términos dominantes. Podemos encontrar los máximos o puntos de silla al hallar los puntos estacionarios. Estos son solución de las siguientes ecuaciones:  $\frac{\delta \Phi(\hat{a}^*, \hat{a})}{\delta \hat{a}(\tau)} = 0$  y  $\frac{\delta \Phi(\hat{a}^*, \hat{a})}{\delta \hat{a}^*(\tau)} = 0$ , donde la contribución a la integral de trayectoria es máxima o mínima, representando los extremos de la acción y correspondiendo a las trayectorias más probables en el espacio de configuración del sistema. Para el modelo de Dicke, los puntos estacionarios son funciones constantes  $\hat{a}(\tau) = a_0$  y  $\hat{a}^*(\tau) = a_0^*$ . No es difícil mostrar que para  $\beta \leq \beta_c$  el punto estacionario está dado por  $a_0 = a_0^* = 0$ , el cual es un máximo. El valor crítico  $\beta_c$  se obtiene resolviendo la siguiente ecuación:

$$\frac{\omega \omega_0}{\gamma^2 (1 + \xi)^2} = \tanh \left( \frac{\beta_c \omega_0}{2} \right). \quad (\text{C.35})$$

La Ec. (C.35) es la condición para la temperatura crítica en la que sucede la transición de fase térmica en el modelo de Dicke anisotrópico [48]. Es posible encontrar alguna solución para  $\beta_c$ , en el caso de  $(1 + \xi)^2 < \omega \omega_0$ . Con esta condición el sistema pasa a una transición de fase. Cuando el sistema tiene  $\beta < \beta_c$  decimos que el sistema está en la fase normal. Para  $\beta > \beta_c$  los puntos estacionarios  $\hat{a}(\tau) = a_0$  y  $\hat{a}^*(\tau) = a_0^*$  satisface la siguiente ecuación

$$\frac{\omega \omega_0}{\gamma^2 (1 + \xi)^2} = \tanh \left( \frac{\beta \omega_0 \Delta}{2} \right), \quad (\text{C.36})$$

con  $\omega_{0\Delta}$  definido por:

$$\omega_{0\Delta} = \sqrt{\omega_0^2 + 4\gamma^2 (1 + \xi)^2 |a_0|^2}. \quad (\text{C.37})$$

Es posible encontrar transiciones de fase encontrando alguna solución real  $a_0 = 0$ . En el caso límite de Tavis-Cummings existe un conjunto de puntos máximos dados por las expresiones  $a_0 = \rho e^{i\phi}$  y  $a_0^* = \rho e^{-i\phi}$  con  $\phi = [0, 2\pi)$  y  $\rho = |a_0|$ . En el caso límite de Dicke se tienen dos puntos máximos dados por  $a_0^* = a_0 = \pm|a_0|$ . Analizamos el comportamiento asintótico de la integral funcional [C.33](#) en el límite termodinámico  $N \rightarrow \infty$ . Encontramos un punto máximo definido  $a_0 = a_0^*$  debido al comportamiento asintótico y será útil tanto para la fase normal y la fase superradiante en el límite de Dicke

$$\Phi(\hat{a}^\dagger, \hat{a}) = \Phi(a_0^*, a_0) = \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 [\hat{a}^*(\tau_1) - a_0^*, \hat{a}(\tau_1) - a_0] M_\Phi \begin{bmatrix} \hat{a}^*(\tau_2) - a_0^* \\ \hat{a}(\tau_2) - a_0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.38})$$

La matriz  $M_\Phi$  está dado por:

$$M_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Phi(\hat{a}^*, \hat{a})}{\delta \hat{a}^*(\tau_1) \delta \hat{a}^*(\tau_2)} & \frac{\delta^2 \Phi(\hat{a}^*, \hat{a})}{\delta \hat{a}^*(\tau_1) \delta \hat{a}(\tau_2)} \\ \frac{\delta^2 \Phi(\hat{a}^*, \hat{a})}{\delta \hat{a}(\tau_1) \delta \hat{a}^*(\tau_2)} & \frac{\delta^2 \Phi(\hat{a}^*, \hat{a})}{\delta \hat{a}(\tau_1) \delta \hat{a}(\tau_2)} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.39})$$

Sustituyendo la expansión en [C.38](#) y [C.33](#) se tiene

$$Z_A = e^{N\Phi(a_0^*, a_0)} \int d\eta(a) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 [\hat{a}^*(\tau_1) \hat{a}(\tau_1)] M_\Phi \begin{bmatrix} \hat{a}^*(\tau_2) \\ \hat{a}(\tau_2) \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{C.40})$$

Aplicamos la transformación  $\hat{a}(\tau) \rightarrow (\hat{a}(\tau) + a_0)/\sqrt{N}$  y  $\hat{a}^*(\tau) \rightarrow (\hat{a}^*(\tau) + a_0^*)/\sqrt{N}$ . Para hacer más fácil la integral funcional dado por [C.33](#) consideramos

$$\begin{aligned} \hat{c}(\tau) &= \alpha (\hat{a}^*(\tau) + \xi \hat{a}(\tau)), \\ \hat{c}^*(\tau) &= \alpha (\hat{a}(\tau) + \xi \hat{a}^*(\tau)), \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

$\alpha$  está definido por  $\alpha^2 = (\xi^2 - 1)^{-1}$ . Aplicando esta transformación a [C.33](#)

$$Z_A = A(N) \int [d\eta[c]] \exp\{N\Phi_I(\hat{c}^*, \hat{c})\}. \quad (\text{C.42})$$

La función  $\Phi_I$  está dado por

$$\Phi_I(\hat{c}^\dagger, \hat{c}) = \alpha^2 \int_0^\beta d\tau (\hat{c}(\tau) - \xi \hat{c}^*(\tau)) (\partial_\tau - \omega) (\hat{c}^* - \xi \hat{c}(\tau)) + \text{tr Ln} \left( 1 - \alpha^{-2} L_*^{-1} \hat{c}^* L^{-1} \hat{c} \right). \quad (\text{C.43})$$

Los puntos máximos corresponden a  $c_0^* = c_0 = \alpha(1 + \xi)a_0$ , el punto  $a_0^* = a_0$  corresponde al máximo de la función  $\text{Re}(\Phi(a^*, a))$ . Usando esta expansión en [C.38](#)

para  $\Phi_I(c^*, c)$  y sustituyendo en [C.42](#), se tiene:

$$Z_A = e^{N\Phi(a_0^*, a_0)} \int d\eta[c] \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 (\hat{c}^*(\tau_1), \hat{c}(\tau_1)) M_{\Phi_I} \begin{pmatrix} \hat{c}^*(\tau_2) \\ \hat{c}(\tau_2) \end{pmatrix} \right\}, \quad (\text{C.44})$$

usamos la identidad  $\Phi_I(c_0^*, c_0) = \Phi(a_0^*, a_0)$  y la matriz  $M_{\Phi}$  está definida

$$M_{\Phi_I} = \begin{pmatrix} \frac{\delta^2 \Phi(\hat{c}^*, \hat{c})}{\delta \hat{c}^*(\tau_1) \delta \hat{c}^*(\tau_2)} & \frac{\delta^2 \Phi(\hat{c}^*, \hat{c})}{\delta \hat{c}^*(\tau_1) \delta \hat{c}(\tau_2)} \\ \frac{\delta^2 \Phi(\hat{c}^*, \hat{c})}{\delta \hat{c}(\tau_1) \delta \hat{c}^*(\tau_2)} & \frac{\delta^2 \Phi(\hat{c}^*, \hat{c})}{\delta \hat{c}(\tau_1) \delta \hat{c}(\tau_2)} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.45})$$

La Ec. [C.45](#) es, de hecho, el propagador, el que nos permitirá explorar el comportamiento de las excitaciones por encima de los modos de amplitud y de fase. Resulta apropiado emplear la transformación de Fourier para los campos  $\hat{c}(\tau)$  mediante la integral funcional [C.44](#). Al considerar las condiciones periódicas de los campos bosónicos  $\hat{a}(\tau)$  y [C.2](#), se infiere que tanto  $\hat{c}(\tau)$  como  $\hat{c}^*(\tau)$  cumplen con condiciones periódicas  $c(\beta) = c(0)$  y  $c^*(\beta) = c^*(0)$ . La representación de Fourier se expone a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{c}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_f \hat{c}(f) e^{if\tau}, \\ \hat{c}^*(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{fa} \hat{c}^*(f) e^{-if\tau}, \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

Donde  $f$  representa la frecuencia y toma los valores  $2\pi n/\beta$ , con  $n$  como números enteros. Estos valores constituyen las frecuencias de Matsubara asociadas a campos bosónicos. Al sustituir la expresión [C.46](#) en la ecuación [C.44](#), obtenemos:

$$Z_A = e^{N\Phi(a_0^*, a_0)} \int d\eta[c] \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{f_1, f_2} (\hat{c}^*(f_1), \hat{c}(f_2)) \delta^2 \Phi(f_1, f_2) \begin{pmatrix} \hat{c}^*(f_2) \\ \hat{c}(f_2) \end{pmatrix} \right], \quad (\text{C.47})$$

con  $\delta^2 \Phi(f_1, f_2)$

$$\delta^2 \Phi(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} \delta^2 \Phi_{11}(f_1, f_2) & \delta^2 \Phi_{12}(f_1, f_2) \\ \delta^2 \Phi_{21}(f_1, f_2) & \delta^2 \Phi_{22}(f_1, f_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.48})$$

Cada componente de la matriz satisface

$$\begin{aligned} \delta^2 \Phi_{11}(f_1, f_2) &= \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 e^{-if_1\tau_1} \frac{\delta^2 \Phi_I(\hat{c}^*, \hat{c})}{\delta \hat{c}^*(\tau_1) \delta \hat{c}^*(\tau_2)} e^{-if_2\tau_2}, \\ \delta^2 \Phi_{12}(f_1, f_2) &= \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 e^{-if_1\tau_1} \frac{\delta^2 \Phi_I(\hat{c}^*, \hat{c})}{\delta \hat{c}^*(\tau_1) \delta \hat{c}(\tau_2)} e^{if_2\tau_2}, \\ \delta^2 \Phi_{21}(f_1, f_2) &= \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 e^{if_1\tau_1} \frac{\delta^2 \Phi_I(\hat{c}^*, \hat{c})}{\delta \hat{c}(\tau_1) \delta \hat{c}^*(\tau_2)} e^{-if_2\tau_2}, \\ \delta^2 \Phi_{22}(f_1, f_2) &= \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 e^{if_1\tau_1} \frac{\delta^2 \Phi_I(\hat{c}^*, \hat{c})}{\delta \hat{c}^*(\tau_1) \delta \hat{c}^*(\tau_2)} e^{if_2\tau_2}. \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$



Al evaluar la integral de Fourier en la integral funcional descrita por [C.47](#), el diferencial  $d\eta[c]$  adopta la forma  $\prod_f dc^*(f)dc^f$ . Mediante la utilización de la expresión  $\Phi_I(c^*, c)$  proporcionada en [C.43](#), procedemos a calcular la matriz  $\delta^2\Phi(f_1, f_2)$  cuyas componentes se encuentran en [C.49](#). El desarrollo detallado de estos cálculos es el siguiente:

$$\begin{aligned}\delta^2\Phi_{11}(f_1, f_2) &= \delta^2\Phi_{12}(f_1, f_2) = d_{f_1, -f_2}R(f_1), \\ \delta^2\Phi_{21}(f_1, f_2) &= \delta^2\Phi_{22}(f_1, f_2) = d_{f_1, f_2}S(f_1),\end{aligned}\tag{C.50}$$

Con  $\delta_{f_1, f_2}$  siendo la delta de Kronecker y las funciones  $R(f)$  y  $S(f)$  están dadas por

$$\begin{aligned}R(f) &= 2\omega\xi\alpha^2 - \frac{(\omega_{0\Delta}^2 - \omega_0)\alpha^{-2}}{2\omega_{0\Delta}(f^2 + \omega_{0\Delta}^2)} \tanh\frac{\beta\omega_{0\Delta}}{2}, \\ S(f) &= if\left(1 - \frac{\omega_0\alpha^{-2}}{\omega_{0\Delta}} \tanh\left(\frac{\beta\omega_{0\Delta}}{2}\right)\right) - \omega_0\gamma^2(1 + \xi^2)\alpha^2 + \frac{\omega_{0\Delta}^2 + \omega_0^2\alpha^{-2}}{2\omega_{0\Delta}(f^2 + \omega_{0\Delta}^2)} \tanh\left(\frac{\beta\omega_{0\Delta}}{2}\right).\end{aligned}\tag{C.51}$$

La expresión para  $\omega_{0\Delta}$  está dada por [C.37](#). Sustituyendo [C.50](#) en la integral funcional [C.47](#) obtenemos

$$Z_A = e^{N\Phi(a_0^*, a_0)} \int d\eta[c] \exp \sum_f S(f)c(f)c^*(f) + \frac{1}{2}R(f)[\hat{c}(f)\hat{c}(-f) + \hat{c}^*(f)\hat{c}^*(-f)].\tag{C.52}$$

Desarrollando la integral funcional gaussiana

$$Z_A = e^{N\Phi(a_0^*, a_0)} \frac{2\pi i}{\sqrt{S^2(0) - R^2(0)}} \prod_{f \leq 1} \frac{(2\pi i)^2}{S(f)S(-f) - R^2(f)}.\tag{C.53}$$

Para determinar el comportamiento asintótico de  $Z/Z_0$  a medida que  $N \rightarrow \infty$ , evaluamos la expresión  $\int [d\eta(a)]e^{S_{B0}}$  en [C.32](#). Al emplear la acción bosónica libre dada en [C.18](#), obtenemos:

$$\int [d\eta(a)]e^{S_{B0}} = \prod_f \frac{2\pi i}{f_0 - if}.\tag{C.54}$$

Sustituyendo [C.53](#) y [C.54](#) en [C.32](#):

$$\frac{Z}{Z_0} = e^{N\Phi(a_0^*, a_0)}.\tag{C.55}$$

La función  $H_f$  es:

$$H(f) = \frac{S(f)S(-f) - R^2(f)}{f^2 - f_0^2}.\tag{C.56}$$

Utilizando [C.51](#) y sustituyendo en [C.56](#)

$$H(f) = 1 + \frac{\gamma^2(1-\xi)^2\omega_0^2}{\omega_{0\Delta}^2(f^2 + \omega_{0\Delta}^2)(f^2 + \omega^2)} \tanh^2\left(\frac{\beta\omega_{0\Delta}}{2}\right),$$

$$+ \frac{2\gamma^2(1-\xi^2)\omega_0 f^2 - \gamma^2(1+\xi^2)(\omega_0^2 + \omega_{0\Delta}^2)\omega}{\omega_{0\Delta}(f^2 + \omega_{0\Delta}^2)(f^2 + \omega^2)} \tanh\left(\frac{\beta\omega_{0\Delta}}{2}\right). \quad (\text{C.57})$$

La expresión dada por [C.55](#) con  $H(f)$  está dado por [C.57](#) nos da una expresión valida para el cociente  $Z/Z_0$  en la fase normal y la fase superradiante en el límite de Dicke a temperatura finita.

### C.3. Fase Normal $\beta < \beta_c$

En la fase normal, que corresponde a  $\beta < \beta_c$ , a partir de [C.36](#), se obtiene  $a_0 = a_0^* = 0$  (dado que el valor esperado de los operadores bosónicos que representan las excitaciones fotónicas promedian cero). Por consiguiente,  $\omega_{0\Delta} = \omega_0$ . Sustituyendo [C.55](#) y [C.56](#):

$$\frac{Z}{Z_0} = \frac{1}{\sqrt{H_I(0)}} \prod_{f \leq 1} \frac{1}{H_I(f)}, \quad (\text{C.58})$$

donde:

$$H_I(f) = 1 + \frac{\gamma^2(1-\xi^2)^2}{(f^2 + \omega_0^2)(f^2 + \omega^2)} \tanh\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)$$

$$+ \frac{2\gamma^2(1-\xi^2)^2 f^2 - 2\gamma^2(1+\xi^2)\omega\omega_0}{(f^2 + \omega_0^2)(f^2 + \omega^2)} \tanh\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right). \quad (\text{C.59})$$

Haciendo la continuidad analítica  $if \rightarrow E$  en  $H_I(f)$  resolvemos  $H_I(-iE) = 0$ , lo cual corresponde a las ecuaciones de espectro colectivas. Resolviendo tenemos:

$$2E^2 = \omega^2 + \omega_0^2 + 2\gamma^2(1-\xi^2) \tanh\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)$$

$$\pm \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\left(\gamma^2(\omega_0 + \omega)^2 - \gamma^2\xi^2(\omega - \omega_0)^2 \tanh\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)\right)}. \quad (\text{C.60})$$

Si  $\beta = \beta_c$

$$E_1 = 0 \quad \text{y} \quad E_2 = \sqrt{\frac{\gamma(\omega + \omega_0)^2 + \gamma\xi(\omega_0 - \omega)^2}{\gamma(1 + \xi)}}. \quad (\text{C.61})$$

A partir de [C.60](#) conseguimos un espectro continuo. El primer caso es en el límite de Tavis-Cummings

$$2E = \omega + \omega_0 \pm \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\gamma^2 \tanh\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)}, \quad (\text{C.62})$$

El segundo corresponde al límite de Dicke

$$2E^2 = \omega^2 + \omega_0^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 16\gamma^2\omega\omega_0 \tanh\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)}. \quad (\text{C.63})$$

Al considerar  $\beta \rightarrow \infty$ , recuperamos la expresión del capítulo de campo medio empleando la aproximación de Holstein-Primakoff [4](#) Ec. [4.14](#).

## C.4. Fase Superradiante $\beta > \beta_c$

### Caso Límite Dicke

En la fase superradiante ( $\beta > \beta_c$ ), al considerar el caso límite de Dicke ( $\xi = 1$ ), se observan dos puntos máximos. Ambos máximos contribuyen a la función de partición, lo que implica que en  $Z/Z_0$ , como se indica en la ecuación [C.55](#), se multiplica por un factor de 2. En este escenario, donde  $a_0 \neq 0$ , se infiere que  $\Omega_\Delta \neq \Omega$ . La expresión para  $Z/Z_0$  es la siguiente

$$\frac{Z}{Z_0} = 2e^{N\phi} \frac{1}{\sqrt{H_{II}(0)}} \prod_{f \geq 1} \frac{1}{H_{II}(f)}, \quad (\text{C.64})$$

donde el factor  $\phi$ , está definido por:

$$\phi = -\frac{\omega\beta(\omega_{0\Delta}^2 - \omega_0^2)}{4(1 + \xi)^2} + \ln \left( \frac{\cosh\left(\frac{\beta\omega_{0\Delta}}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\beta\omega_0}{2}\right)} \right). \quad (\text{C.65})$$

La función  $H_{II}(f)$  tiene la forma:

$$H_{II}(f) = \frac{1}{(f^2 + \omega_{0\Delta}^2)(f^2 + \omega^2)} \left[ f^4 + \left( \omega^2 + \omega_{0\Delta}^2 + 2\frac{\gamma^2(1 - \xi^2)}{\gamma^2(1 + \xi)^2}\omega\omega_0 \right) f^2 + \frac{4\xi}{\gamma^2(1 + \xi)^2}\omega^2(\omega_{0\Delta}^2 - \omega_0^2) \right], \quad (\text{C.66})$$

y  $f = 0$  en [C.66](#) se tiene la expresión para  $H_{II}(0)$  de tal forma que

$$H_{II}(0) = \frac{4\gamma^2\xi(\omega_{0\Delta}^2 - \omega_0^2)}{\gamma^2(1 + \xi)^2\omega_{0\Delta}^2}. \quad (\text{C.67})$$

Haciendo analítico ( $if \rightarrow E$ ) en  $H_{II}(f)$  dado por [C.66](#) resolvemos la ecuación  $H_{II}(-iE) = 0$ . El conjunto de soluciones  $E$  son el espectro colectivo en la fase superradiante para el límite de Dicke. Por lo tanto, resolviendo

$$2E^2 = \omega^2 + \omega_{0\Delta}^2 + 2\frac{\gamma^2(1-\xi^2)}{\gamma^2(1+\xi)^2}\omega\omega_0 \quad (\text{C.68})$$

$$\pm \sqrt{\left(\omega^2 + \omega_0^2 + 2\frac{\gamma^2(1-\xi^2)}{\gamma^2(1+\xi)^2}\omega\omega_0\right)^2 - 16\frac{\gamma^2\xi}{\gamma^2(1+\xi)^2}\omega(\omega_{0\Delta}^2 - \omega_0^2)}, \quad (\text{C.69})$$

siendo  $\xi = 1$ , el espectro colectivo de energías toma la forma particular

$$2E^2 = \omega^2 + \omega_{0\Delta}^2 \pm \sqrt{(\omega^2 - \omega_{0\Delta}^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2}. \quad (\text{C.70})$$

Considerando  $\beta \rightarrow \infty$  o temperatura cero conseguimos

$$2E^2 = \omega^2 + 16\frac{\gamma^4}{\omega^2} \pm \sqrt{\left(\omega^2 - 16\frac{\gamma^4}{\omega^2}\right)^2 + \omega^2\omega_0^2}. \quad (\text{C.71})$$

Se recupera la expresión obtenida en el capítulo de campo medio empleando la aproximación de Holstein-Primakoff [4](#). Ec. [4.31](#).

### C.4.1. Caso Límite Tavis-Cummings

Estudiaremos el caso TC en la fase superradiante. Aquí la expresión  $Z/Z_0$  se considera en  $\xi = 0$ . Usando [C.33](#) y [C.34](#)

$$Z_A = A(N) \int [d\eta(a)] e^{N\Phi_{g1}(\hat{a}^*, \hat{a})}. \quad (\text{C.72})$$

La función  $\Phi_{g1}(\hat{a}^*, \hat{a})$ , se define como:

$$\Phi_{g1}(\hat{a}^*, \hat{a}) = \int_0^\beta d\tau \hat{a}(\tau) (\partial_\tau - \omega) \hat{a}(\tau) + \text{trLn} \left( 1 - L_*^{-1} \hat{a} L^{-1} \hat{a}^* \right). \quad (\text{C.73})$$

De acuerdo con [C.73](#) podemos ver la función  $\Phi_{g1}(\hat{a}^*, \hat{a})$  es invariante ante la transformación  $a(\tau) \rightarrow e^{i\theta} a(\tau)$  y  $a^*(\tau) \rightarrow e^{-i\theta} a^*(\tau)$ , donde  $\theta$  es un factor arbitrario de  $\tau$ . Esta invarianza es responsable de la emergencia del modo de fase en el sistema. Para desarrollar la integral funcional dado por [C.72](#) separamos la función  $a(\tau)$  de la siguiente forma:

$$\hat{a}(\tau) = \hat{a}_c + \hat{a}'(\tau), \quad (\text{C.74})$$

$$\hat{a}^*(\tau) = \hat{a}_c^* + \hat{a}'^*(\tau). \quad (\text{C.75})$$

Donde  $a_c$  es una función constante, los campos  $a'(\tau)$  y  $a'^*(\tau)$  satisfacen las condiciones de frontera  $a'(0) = a'(\beta) = 0$  y  $a'^*(0) = a'^*(\beta) = 0$ . Usando la representación

$a_c = \rho e^{i\phi}$  y  $a_c^* = \rho e^{-i\phi}$  en la funcional integral dado por [C.72](#) y [C.73](#) y después de aplicar la transformación  $a'(\tau) \rightarrow e^{i\phi} a'(\tau)$  y  $a'^*(\tau) \rightarrow e^{-i\phi} a'^*(\tau)$  se tiene

$$Z_A = 2\pi i A(N) \int_0^\infty d\rho^2 \int [d\eta(a')] e^{N\Phi_{g1}(\hat{\rho}, \hat{a}^*, \hat{a})}. \quad (\text{C.76})$$

La función  $\Phi_{g1}(\rho, a'^*, a')$  está dada por:

$$\Phi_{g1}(\hat{\rho}, \hat{a}^*, \hat{a}) = \int_0^\beta d\tau (\hat{\rho} + \hat{a}^*(\tau)) (\partial_\tau - \omega) (\hat{\rho} + \hat{a}'(\tau)) \quad (\text{C.77})$$

$$\text{trLn} \left( 1 - L_*^{-1}(\hat{\rho}' + \hat{a}') L^{-1}(\hat{\rho} + \hat{a}^*) \right). \quad (\text{C.78})$$

La integral funcional en [C.76](#), la variable de integración es  $\rho^2$ . Utilizamos el método de paso descendente para analizar  $N \rightarrow \infty$ , encontramos un punto estacionario con respecto a  $\rho^2$  [48](#). El punto estacionario satisface  $\delta\Phi_{g1}/\delta(\rho^2)|_{\rho=\rho_0}$  con  $a'^* = a'(\tau) = 0$ . El valor de  $\rho_0$  es el mismo como en  $a_0$  en [C.36](#). Considerando los primeros dos términos en la integral funcional en [C.76](#) provenientes de la expansión  $\Phi_{g1}(\rho, a'^*, a')$  alrededor del punto  $a_0$  y  $a'^*(\tau) = a'(\tau) = 0$  dando el máximo para  $\text{Re}\Phi_{g1}(\rho, a'^*, a')$ . Esta expansión está dada por:

$$\Phi_{g1}(\hat{\rho}, \hat{a}^*, \hat{a}') = \Phi_{g1}(\rho_0, 0, 0) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \Phi_{g1}}{\delta(\hat{\rho}^2)^2} \Big|_{\hat{\rho}=\rho_0, \hat{a}^*=\hat{a}'=0} \quad (\text{C.79})$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 [\hat{a}^*(\tau_1), \hat{a}'(\tau_1)] M_{\Phi_{g1}} \begin{pmatrix} \hat{a}^*(\tau_2) \\ \hat{a}'(\tau_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.80})$$

Aquí la matriz  $M_{\Phi_{g1}}$  está dada por:

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\delta^2 \Phi_{g1}}{\delta \hat{a}^*(\tau_1) \delta \hat{a}^*(\tau_2)} & \frac{\delta^2 \Phi_{g1}}{\delta \hat{a}^*(\tau_1) \delta \hat{a}'(\tau_2)} \\ \frac{\delta^2 \Phi_{g1}}{\delta \hat{a}'(\tau_1) \delta \hat{a}^*(\tau_2)} & \frac{\delta^2 \Phi_{g1}}{\delta \hat{a}'(\tau_1) \delta \hat{a}'(\tau_2)} \end{array} \right). \quad (\text{C.81})$$

Usando esta expresión por [C.79](#), la funcional integral dada por [C.76](#) tenemos que:

$$Z_A = 2\pi i \sqrt{N} e^{N\Phi_{g1}} \int_{-\sqrt{N}\rho_0^2}^\infty dy \exp \left\{ \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \Phi_{g1}}{\delta(\rho^2)^2} \Big|_{\hat{\rho}=\rho_0, \hat{a}^*=\hat{a}'=0} y^2 \right\} \quad (\text{C.82})$$

$$+ \int [d\eta(a')] \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau_1 d\tau_2 (\hat{a}^*, \hat{a}') M_{\Phi_{g1}} \begin{pmatrix} \hat{a}^*(\tau_2) \\ \hat{a}'(\tau_2) \end{pmatrix} \right\}. \quad (\text{C.83})$$

La expresión  $\Phi_{g1}$  corresponde a la expresión de  $\phi$  en [C.65](#). El factor de  $\sqrt{N}$  en [C.82](#) proviene de  $\rho^2 \rightarrow \rho^2/\sqrt{N}$  para  $N \rightarrow \infty$ . Presentaremos  $a'(\tau)$  y  $a'^*(\tau)$  en series de Fourier el cual no posee el modo cero. Desarrollando la integral funcional en [C.79](#) tenemos que:

$$\frac{Z}{Z_0} = \sqrt{N} e^{N\Phi_{g1}} \frac{1}{A_0} \prod_{f \leq 1} \frac{1}{H_{II}(f)}, \quad (\text{C.84})$$

$\phi_{g1}$  y  $H_{II}$  son de [C.65](#) y [C.66](#) y  $A_0$  está dado por

$$A_0 = \frac{\gamma}{\omega_{0\Delta} \sqrt{\pi\beta\omega}} \sqrt{1 - \frac{\beta\omega_{0\Delta}}{\sinh \beta\omega_{0\Delta}}}. \quad (\text{C.85})$$

Haciendo la continuación analítica  $if \rightarrow E$  en  $H_{II}(\omega)$  dado por [C.66](#) el espacio colectivo se obtiene de resolver  $H_{II}(-iE) = 0$  y el espectro de energías es:

$$E_1 = 0 \quad (\text{C.86})$$

donde [C.86](#) corresponde al modo de fase, por último

$$E_2^2 = \omega^2 + \omega_{0\Delta}^2 + 2\omega\omega_0. \quad (\text{C.87})$$

Se recupera la expresión obtenida en el capítulo de campo medio empleando la aproximación de Holstein-Primakoff [4](#), Ec. [4.31](#).

# Bibliografía

- <sup>1</sup>R. Herrera Romero, M. A. Bastarrachea-Magnani y R. Linares, Critical Phenomena in Light–Matter Systems with Collective Matter Interactions, [Entropy \*\*24\*\* \(2022\)](#).
- <sup>2</sup>R. Herrera Romero y M. A. Bastarrachea-Magnani, Phase and Amplitude Modes in the Anisotropic Dicke Model with Matter Interactions, [Entropy \*\*26\*\* \(2024\)](#).
- <sup>3</sup>H. Goldstein, *Classical mechanics* (Pearson Education India, 2011).
- <sup>4</sup>J. J. Sakurai y E. D. Commins, *Modern quantum mechanics, revised edition* (American Association of Physics Teachers, 1995).
- <sup>5</sup>A. J. Beekman, L. Rademaker y J. van Wezel, An introduction to spontaneous symmetry breaking, [SciPost Phys. Lect. Notes, \*\*11\*\* \(2019\)](#).
- <sup>6</sup>M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández y J. G. Hirsch, Comparative quantum and semiclassical analysis of atom–field systems. I. Density of states and excited-state quantum phase transitions, [Phys. Rev. A \*\*89\*\*, 032101 \(2014\)](#).
- <sup>7</sup>M. Á. Bastarrachea-Magnani, *Fenómenos críticos en sistemas átomo-campo* (Universidad Autónoma Nacional de México, ene. de 2016).
- <sup>8</sup>S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, 1999).
- <sup>9</sup>D. Pekker y C. Varma, Amplitude/Higgs Modes in Condensed Matter Physics, [Annual Review of Condensed Matter Physics \*\*6\*\*, 269-297 \(2015\)](#).
- <sup>10</sup>J. Léonard, A. Morales, P. Zupancic, T. Donner y T. Esslinger, Monitoring and manipulating Higgs and Goldstone modes in a supersolid quantum gas, [Science \*\*358\*\*, 1415-1418 \(2017\)](#).
- <sup>11</sup>C. M. Varma, Higgs Boson in Superconductors, [Journal of Low Temperature Physics \*\*126\*\*, 901-909 \(2002\)](#).
- <sup>12</sup>M. Endres, T. Fukuhara, D. Pekker, M. Cheneau, P. Schauβ, C. Gross, E. Demler, S. Kuhr e I. Bloch, The ‘Higgs’ amplitude mode at the two-dimensional superfluid/Mott insulator transition, [Nature \*\*487\*\*, 454-458 \(2012\)](#).
- <sup>13</sup>M. Vallone, Higgs and Goldstone Modes in Crystalline Solids, [physica status solidi \(b\) \*\*257\*\*, 1900443 \(2020\)](#).

- <sup>14</sup>A Jain, M Krautloher, J Porras, G. H. Ryu, D. P. Chen, D. L. Abernathy, J. T. Park, A Ivanov, J Chaloupka, G Khaliullin, B Keimer y B. J. Kim, Higgs mode and its decay in a two-dimensional antiferromagnet, [Nature Physics \*\*13\*\*, 633-637 \(2017\)](#).
- <sup>15</sup>R. Sooryakumar y M. V. Klein, Raman Scattering by Superconducting-Gap Excitations and Their Coupling to Charge-Density Waves, [Phys. Rev. Lett. \*\*45\*\*, 660-662 \(1980\)](#).
- <sup>16</sup>R. Sooryakumar y M. V. Klein, Raman scattering from superconducting gap excitations in the presence of a magnetic field, [Phys. Rev. B \*\*23\*\*, 3213-3221 \(1981\)](#).
- <sup>17</sup>S. Prosandeev, S. Prokhorenko, Y. Nahas, A. Al-Barakaty, L. Bellaiche, P. Gemeiner, D. Wang, A. A. Bokov, Z.-G. Ye y B. Dkhil, Evidence for Goldstone-like and Higgs-like structural modes in the model  $\text{PbMg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3}\text{O}_3$  relaxor ferroelectric, [Phys. Rev. B \*\*102\*\*, 104110 \(2020\)](#).
- <sup>18</sup>Q. N. Meier, A. Stucky, J. Teyssier, S. M. Griffin, D. van der Marel y N. A. Spaldin, Manifestation of structural Higgs and Goldstone modes in the hexagonal manganites, [Phys. Rev. B \*\*102\*\*, 014102 \(2020\)](#).
- <sup>19</sup>P. Nozieres, *Theory of quantum liquids* (CRC Press, 2018).
- <sup>20</sup>C. J. Pethick y H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases* (Cambridge university press, 2008).
- <sup>21</sup>M. Ueda, Bose Gases with Nonzero Spin, [Annual Review of Condensed Matter Physics \*\*3\*\*, 263-283 \(2012\)](#).
- <sup>22</sup>A. Schmitt, *Introduction to Superfluidity*, vol. 888, Lecture Notes in Physics (Springer, 2015).
- <sup>23</sup>C. Burgess, Goldstone and pseudo-Goldstone bosons in nuclear, particle and condensed-matter physics, [Physics Reports \*\*330\*\*, 193-261 \(2000\)](#).
- <sup>24</sup>H. Leutwyler, Nonrelativistic effective Lagrangians, [Phys. Rev. D \*\*49\*\*, 3033-3043 \(1994\)](#).
- <sup>25</sup>E. Fradkin, *Field theories of condensed matter physics* (Cambridge University Press, 2013).
- <sup>26</sup>Y. Kawaguchi y M. Ueda, Spinor Bose-Einstein condensates, [Physics Reports \*\*520\*\*, Spinor Bose-Einstein condensates, 253-381 \(2012\)](#).
- <sup>27</sup>D. M. Stamper-Kurn y M. Ueda, Spinor Bose gases: Symmetries, magnetism, and quantum dynamics, [Rev. Mod. Phys. \*\*85\*\*, 1191-1244 \(2013\)](#).
- <sup>28</sup>M. A. Cazalilla y A. M. Rey, Ultracold Fermi gases with emergent  $\text{SU}(N)$  symmetry, [Reports on Progress in Physics \*\*77\*\*, 124401 \(2014\)](#).



- <sup>29</sup>A. J. Beekman, K. Wu, V. Cvetkovic y J. Zaanen, Deconfining the rotational Goldstone mode: The superconducting quantum liquid crystal in (2+1) dimensions, [Phys. Rev. B \*\*88\*\*, 024121 \(2013\)](#).
- <sup>30</sup>P. W. Anderson, Plasmons, Gauge Invariance, and Mass, [Phys. Rev. \*\*130\*\*, 439-442 \(1963\)](#).
- <sup>31</sup>P. W. Higgs, Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons, [Phys. Rev. Lett. \*\*13\*\*, 508-509 \(1964\)](#).
- <sup>32</sup>F. Englert y R. Brout, Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons, [Phys. Rev. Lett. \*\*13\*\*, 321-323 \(1964\)](#).
- <sup>33</sup>Y. Nambu, Nobel Lecture: Spontaneous symmetry breaking in particle physics: A case of cross fertilization, [Rev. Mod. Phys. \*\*81\*\*, 1015-1018 \(2009\)](#).
- <sup>34</sup>R. H. Dicke, Coherence in Spontaneous Radiation Processes, [Phys. Rev. \*\*93\*\*, 99-110 \(1954\)](#).
- <sup>35</sup>B. M. Garraway, The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited, [Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences \*\*369\*\*, 1137-1155 \(2011\)](#).
- <sup>36</sup>K. Hayashida, T. Makihara, N. Marquez Peraca, D. Fallas Padilla, H. Pu, J. Kono y M. Bamba, Perfect intrinsic squeezing at the superradiant phase transition critical point, [Scientific Reports \*\*13\*\*, 2526 \(2023\)](#).
- <sup>37</sup>M. A. Alcalde, A. L. L. de Lemos y N. F. Svaiter, Functional methods in the generalized Dicke model, [Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical \*\*40\*\*, 11961 \(2007\)](#).
- <sup>38</sup>M. A. Alcalde y B. Pimentel, Path integral approach to the full Dicke model, [Physica A: Statistical Mechanics and its Applications \*\*390\*\*, 3385-3396 \(2011\)](#).
- <sup>39</sup>P. Kirton, M. M. Roses, J. Keeling y E. G. Dalla Torre, Introduction to the Dicke Model: From Equilibrium to Nonequilibrium, and Vice Versa, [Advanced Quantum Technologies \*\*2\*\*, 1800043 \(2019\)](#).
- <sup>40</sup>S. Takeno, M. Nagashima y J. Sugimoto, Coherent States and Photon Dynamics in the Dicke Model Hamiltonian, [Journal of the Physical Society of Japan \*\*41\*\*, 921-928 \(1976\)](#).
- <sup>41</sup>C. Emary y T. Brandes, Quantum Chaos Triggered by Precursors of a Quantum Phase Transition: The Dicke Model, [Phys. Rev. Lett. \*\*90\*\*, 044101 \(2003\)](#).
- <sup>42</sup>M. A. Bastarrachea-Magnani y J. G. Hirsch, Numerical solutions of the Dicke Hamiltonian, [Rev. Mex. Fis. S \*\*57\*\*, 69 \(2011\)](#).
- <sup>43</sup>L. Allen y J. H. Eberly, *Optical resonance and two-level atoms*, vol. 28 (Courier Corporation, 1987).

- <sup>44</sup>T. E. Tessier, I. H. Deutsch, A. Delgado e I. Fuentes-Guridi, Entanglement sharing in the two-atom Tavis-Cummings model, [Phys. Rev. A \*\*68\*\*, 062316 \(2003\)](#).
- <sup>45</sup>J. M. Fink, R. Bianchetti, M. Baur, M. Göppl, L. Steffen, S. Filipp, P. J. Leek, A. Blais y A. Wallraff, Dressed Collective Qubit States and the Tavis-Cummings Model in Circuit QED, [Phys. Rev. Lett. \*\*103\*\*, 083601 \(2009\)](#).
- <sup>46</sup>J. H. Zou, T Liu, M Feng, W. L. Yang, C. Y. Chen y J Twamley, Quantum phase transition in a driven Tavis–Cummings model, [New Journal of Physics \*\*15\*\*, 123032 \(2013\)](#).
- <sup>47</sup>M. Blaha, A. Johnson, A. Rauschenbeutel y J. Volz, Beyond the Tavis-Cummings model: Revisiting cavity QED with ensembles of quantum emitters, [Phys. Rev. A \*\*105\*\*, 013719 \(2022\)](#).
- <sup>48</sup>M. A. Bastarrachea-Magnani, S Lerma-Hernández y J. G. Hirsch, Thermal and quantum phase transitions in atom-field systems: a microcanonical analysis, [Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment \*\*2016\*\*, 093105 \(2016\)](#).
- <sup>49</sup>P. Cejnar, P. Stránský, M. Macek y M. Kloc, Excited-state quantum phase transitions, [Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical \*\*54\*\*, 133001 \(2021\)](#).
- <sup>50</sup>F. T. Hioe, Phase Transitions in Some Generalized Dicke Models of Superradiance, [Phys. Rev. A \*\*8\*\*, 1440-1445 \(1973\)](#).
- <sup>51</sup>W. Buijsman, V. Gritsev y R. Sprik, Nonergodicity in the Anisotropic Dicke Model, [Phys. Rev. Lett. \*\*118\*\*, 080601 \(2017\)](#).
- <sup>52</sup>M. M. Roses y E. G. Dalla Torre, Dicke model, [PLOS ONE \*\*15\*\*, 1-8 \(2020\)](#).
- <sup>53</sup>G. S. Agarwal, Master equations for time correlation functions of a quantum system interacting with stochastic perturbations and applications to emission and absorption line shapes, [Zeitschrift für Physik B Condensed Matter \*\*33\*\*, 111-124 \(1979\)](#).
- <sup>54</sup>Y. Makhlin, G. Schön y A. Shnirman, Josephson-junction qubits with controlled couplings, [Nature \*\*398\*\*, 305-307 \(1999\)](#).
- <sup>55</sup>L. Quiroga y N. F. Johnson, Entangled Bell and Greenberger-Horne-Zeilinger States of Excitons in Coupled Quantum Dots, [Phys. Rev. Lett. \*\*83\*\*, 2270-2273 \(1999\)](#).
- <sup>56</sup>C. Chin, R. Grimm, P. Julienne y E. Tiesinga, Feshbach resonances in ultracold gases, [Rev. Mod. Phys. \*\*82\*\*, 1225-1286 \(2010\)](#).
- <sup>57</sup>G. Chen, D. Zhao y Z. Chen, Quantum phase transition for the Dicke model with the dipole–dipole interactions, [Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics \*\*39\*\*, 3315 \(2006\)](#).

- <sup>58</sup>A. Joshi, R. R. Puri y S. V. Lawande, Effect of dipole interaction and phase-interrupting collisions on the collapse-and-revival phenomenon in the Jaynes-Cummings model, [Phys. Rev. A \*\*44\*\*, 2135-2140 \(1991\)](#).
- <sup>59</sup>T. Jaako, Z.-L. Xiang, J. J. Garcia-Ripoll y P. Rabl, Ultrastrong-coupling phenomena beyond the Dicke model, [Phys. Rev. A \*\*94\*\*, 033850 \(2016\)](#).
- <sup>60</sup>D. De Bernardis, T. Jaako y P. Rabl, Cavity quantum electrodynamics in the nonperturbative regime, [Phys. Rev. A \*\*97\*\*, 043820 \(2018\)](#).
- <sup>61</sup>P. Pilar, D. De Bernardis y P. Rabl, Thermodynamics of ultrastrongly coupled light-matter systems, [Quantum \*\*4\*\*, 335 \(2020\)](#).
- <sup>62</sup>J. P. J. Rodriguez, S. A. Chilingaryan y B. M. Rodríguez-Lara, Critical phenomena in an extended Dicke model, [Phys. Rev. A \*\*98\*\*, 043805 \(2018\)](#).
- <sup>63</sup>A. S. Abdel-Rady, S. S. A. Hassan, A.-N. A. Osman y A. Salah, Evolution of Extended JC-Dicke Quantum Phase Transition with a Coupled Optical Cavity in Bose-Einstein Condensate System, [International Journal of Theoretical Physics \*\*56\*\*, 3655-3666 \(2017\)](#).
- <sup>64</sup>A. Salah, A. S. Abdel-Rady, A.-N. A. Osman y S. S. A. Hassan, Enhancing quantum phase transitions in the critical point of Extended TC-Dicke model via Stark effect, [Scientific Reports \*\*8\*\*, 11633 \(2018\)](#).
- <sup>65</sup>S. Sinha y S. Sinha, Chaos and Quantum Scars in Bose-Josephson Junction Coupled to a Bosonic Mode, [Phys. Rev. Lett. \*\*125\*\*, 134101 \(2020\)](#).
- <sup>66</sup>R. Amsüss, C. Koller, T. Nöbauer, S. Putz, S. Rotter, K. Sandner, S. Schneider, M. Schramböck, G. Steinhauser, H. Ritsch, J. Schmiedmayer y J. Majer, Cavity QED with Magnetically Coupled Collective Spin States, [Phys. Rev. Lett. \*\*107\*\*, 060502 \(2011\)](#).
- <sup>67</sup>J. Cardy, *Scaling and renormalization in statistical physics*, vol. 5 (Cambridge university press, 1996).
- <sup>68</sup>M. Gross y S. Haroche, Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission, [Physics Reports \*\*93\*\*, 301-396 \(1982\)](#).
- <sup>69</sup>F. Dimer, B. Estienne, A. S. Parkins y H. J. Carmichael, Proposed realization of the Dicke-model quantum phase transition in an optical cavity QED system, [Phys. Rev. A \*\*75\*\*, 013804 \(2007\)](#).
- <sup>70</sup>B. M. Rodríguez-Lara y R.-K. Lee, Classical dynamics of a two-species condensate driven by a quantum field, [Phys. Rev. E \*\*84\*\*, 016225 \(2011\)](#).
- <sup>71</sup>C. F. Lee y N. F. Johnson, First-Order Superradiant Phase Transitions in a Multiqubit Cavity System, [Phys. Rev. Lett. \*\*93\*\*, 083001 \(2004\)](#).

- <sup>72</sup>G. Chen, X. Wang, J.-Q. Liang y Z. D. Wang, Exotic quantum phase transitions in a Bose-Einstein condensate coupled to an optical cavity, [Phys. Rev. A \*\*78\*\*, 023634 \(2008\)](#).
- <sup>73</sup>Q.-H. Chen, T. Liu, Y.-Y. Zhang y K.-L. Wang, Quantum phase transitions in coupled two-level atoms in a single-mode cavity, [Phys. Rev. A \*\*82\*\*, 053841 \(2010\)](#).
- <sup>74</sup>J. Klinder, H. Keßler, M. Wolke, L. Mathey y A. Hemmerich, Dynamical phase transition in the open Dicke model, [Proceedings of the National Academy of Sciences \*\*112\*\*, 3290-3295 \(2015\)](#).
- <sup>75</sup>D. Schneble, Y. Torii, M. Boyd, E. W. Streed, D. E. Pritchard y W. Ketterle, The Onset of Matter-Wave Amplification in a Superradiant Bose-Einstein Condensate, [Science \*\*300\*\*, 475-478 \(2003\)](#).
- <sup>76</sup>K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke y T. Esslinger, Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity, [Nature \*\*464\*\*, 1301-1306 \(2010\)](#).
- <sup>77</sup>K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke y T. Esslinger, Exploring Symmetry Breaking at the Dicke Quantum Phase Transition, [Phys. Rev. Lett. \*\*107\*\*, 140402 \(2011\)](#).
- <sup>78</sup>J. Keeling, M. J. Bhaseen y B. D. Simons, Collective Dynamics of Bose-Einstein Condensates in Optical Cavities, [Phys. Rev. Lett. \*\*105\*\*, 043001 \(2010\)](#).
- <sup>79</sup>A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation, [Phys. Rev. A \*\*69\*\*, 062320 \(2004\)](#).
- <sup>80</sup>J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll y E. Solano, Deep Strong Coupling Regime of the Jaynes-Cummings Model, [Phys. Rev. Lett. \*\*105\*\*, 263603 \(2010\)](#).
- <sup>81</sup>A Mezzacapo, U Las Heras, J. S. Pedernales, L DiCarlo, E Solano y L Lamata, Digital Quantum Rabi and Dicke Models in Superconducting Circuits, [Scientific Reports \*\*4\*\*, 7482 \(2014\)](#).
- <sup>82</sup>M. P. Baden, K. J. Arnold, A. L. Grimsmo, S. Parkins y M. D. Barrett, Realization of the Dicke Model Using Cavity-Assisted Raman Transitions, [Phys. Rev. Lett. \*\*113\*\*, 020408 \(2014\)](#).
- <sup>83</sup>D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai y P. Domokos, Dicke-Model Phase Transition in the Quantum Motion of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Cavity, [Phys. Rev. Lett. \*\*104\*\*, 130401 \(2010\)](#).
- <sup>84</sup>N. Liu, J. Lian, J. Ma, L. Xiao, G. Chen, J. Q. Liang y S. Jia, Light-shift-induced quantum phase transitions of a Bose-Einstein condensate in an optical cavity, [Phys. Rev. A \*\*83\*\*, 033601 \(2011\)](#).

- <sup>85</sup>J.-B. Yuan, W.-J. Lu, Y.-J. Song y L.-M. Kuang, Single-impurity-induced Dicke quantum phase transition in a cavity-Bose-Einstein condensate, [Scientific Reports \*\*7\*\*, 7404 \(2017\)](#).
- <sup>86</sup>W.-J. Yang y X.-B. Wang, Ultrastrong-coupling quantum-phase-transition phenomena in a few-qubit circuit QED system, [Phys. Rev. A \*\*95\*\*, 043823 \(2017\)](#).
- <sup>87</sup>N. Auerbach y V. Zelevinsky, Super-radiant dynamics, doorways and resonances in nuclei and other open mesoscopic systems, [Reports on Progress in Physics \*\*74\*\*, 106301 \(2011\)](#).
- <sup>88</sup>K. Cong, Q. Zhang, Y. Wang, G. T. Noe, A. Belyanin y J. Kono, Dicke superradiance in solids, [J. Opt. Soc. Am. B \*\*33\*\*, C80-C101 \(2016\)](#).
- <sup>89</sup>D. Hagenmüller y C. Ciuti, Cavity QED of the Graphene Cyclotron Transition, [Phys. Rev. Lett. \*\*109\*\*, 267403 \(2012\)](#).
- <sup>90</sup>L. Chirolli, M. Polini, V. Giovannetti y A. H. MacDonald, Drude Weight, Cyclotron Resonance, and the Dicke Model of Graphene Cavity QED, [Phys. Rev. Lett. \*\*109\*\*, 267404 \(2012\)](#).
- <sup>91</sup>N. Lambert, C. Emary y T. Brandes, Entanglement and the Phase Transition in Single-Mode Superradiance, [Phys. Rev. Lett. \*\*92\*\*, 073602 \(2004\)](#).
- <sup>92</sup>M. A. M. de Aguiar, K. Furuya, C. H. Lewenkopf y M. C. Nemes, Particle-Spin Coupling in a Chaotic System: Localization-Delocalization in the Husimi Distributions, [Europhysics Letters \*\*15\*\*, 125 \(1991\)](#).
- <sup>93</sup>O. Castaños, R. López-Peña, E. Nahmad-Achar, J. G. Hirsch, E. López-Moreno y J. E. Vitela, Coherent state description of the ground state in the Tavis–Cummings model and its quantum phase transitions, [Physica Scripta \*\*79\*\*, 065405 \(2009\)](#).
- <sup>94</sup>O. Castaños, E. Nahmad-Achar, R. López-Peña y J. G. Hirsch, Superradiant phase in field-matter interactions, [Phys. Rev. A \*\*84\*\*, 013819 \(2011\)](#).
- <sup>95</sup>M. A. Bastarrachea-Magnani, B. L. del Carpio, S. Lerma-Hernández y J. G. Hirsch, Chaos in the Dicke model: quantum and semiclassical analysis, [Physica Scripta \*\*90\*\*, 068015 \(2015\)](#).
- <sup>96</sup>M. A. Bastarrachea-Magnani, B. López-del Carpio, J. Chávez-Carlos, S. Lerma-Hernández y J. G. Hirsch, Delocalization and quantum chaos in atom-field systems, [Phys. Rev. E \*\*93\*\*, 022215 \(2016\)](#).
- <sup>97</sup>M. Caprio, P. Cejnar y F. Iachello, Excited state quantum phase transitions in many-body systems, [Annals of Physics \*\*323\*\*, 1106-1135 \(2008\)](#).
- <sup>98</sup>A. Relaño, J. M. Arias, J. Dukelsky, J. E. García-Ramos y P. Pérez-Fernández, Decoherence as a signature of an excited-state quantum phase transition, [Phys. Rev. A \*\*78\*\*, 060102 \(2008\)](#).

- <sup>99</sup>M. Gessner, V. M. Bastidas, T. Brandes y A. Buchleitner, Semiclassical excited-state signatures of quantum phase transitions in spin chains with variable-range interactions, [Phys. Rev. B \*\*93\*\*, 155153 \(2016\)](#).
- <sup>100</sup>P. Stránský, M. Macek, A. Leviatan y P. Cejnar, Excited-state quantum phase transitions in systems with two degrees of freedom: II. Finite-size effects, [Annals of Physics \*\*356\*\*, 57-82 \(2015\)](#).
- <sup>101</sup>P. Pérez-Fernández, A. Relaño, J. M. Arias, P. Cejnar, J. Dukelsky y J. E. García-Ramos, Excited-state phase transition and onset of chaos in quantum optical models, [Phys. Rev. E \*\*83\*\*, 046208 \(2011\)](#).
- <sup>102</sup>T. Brandes, Excited-state quantum phase transitions in Dicke superradiance models, [Phys. Rev. E \*\*88\*\*, 032133 \(2013\)](#).
- <sup>103</sup>M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández y J. G. Hirsch, Comparative quantum and semiclassical analysis of atom-field systems. II. Chaos and regularity, [Phys. Rev. A \*\*89\*\*, 032102 \(2014\)](#).
- <sup>104</sup>A. Baksic y C. Ciuti, Controlling Discrete and Continuous Symmetries in “Superradiant” Phase Transitions with Circuit QED Systems, [Phys. Rev. Lett. \*\*112\*\*, 173601 \(2014\)](#).
- <sup>105</sup>J. Fan, Z. Yang, Y. Zhang, J. Ma, G. Chen y S. Jia, Hidden continuous symmetry and Nambu-Goldstone mode in a two-mode Dicke model, [Phys. Rev. A \*\*89\*\*, 023812 \(2014\)](#).
- <sup>106</sup>E. I. R. Chiacchio y A. Nunnenkamp, Emergence of continuous rotational symmetries in ultracold atoms coupled to optical cavities, [Phys. Rev. A \*\*98\*\*, 023617 \(2018\)](#).
- <sup>107</sup>M.-J. Hwang y M. B. Plenio, Quantum Phase Transition in the Finite Jaynes-Cummings Lattice Systems, [Phys. Rev. Lett. \*\*117\*\*, 123602 \(2016\)](#).
- <sup>108</sup>R. Palacino y J. Keeling, Atom-only theories for U(1) symmetric cavity-QED models, [Phys. Rev. Res. \*\*3\*\*, L032016 \(2021\)](#).
- <sup>109</sup>Y. Deng y S. Yi, Self-ordered supersolid phase beyond Dicke superradiance in a ring cavity, [Phys. Rev. Res. \*\*5\*\*, 013002 \(2023\)](#).
- <sup>110</sup>A. Altland y B. D. Simons, *Condensed matter field theory* (Cambridge university press, 2010).
- <sup>111</sup>H. Bruus y K. Flensberg, *Many-body quantum theory in condensed matter physics: an introduction* (OUP Oxford, 2004).
- <sup>112</sup>R. D. Mattuck, *A guide to Feynman diagrams in the many-body problem* (Courier Corporation, 1992).
- <sup>113</sup>J. W. A.L. Fetter, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover Publications, 2003).

- <sup>114</sup>S. J. Blundell y K. M. Blundell, *Concepts in thermal physics* (Oxford University Press on Demand, 2010).
- <sup>115</sup>H. T. Stoof, K. B. Gubbels y D. Dickerscheid, *Ultracold quantum fields* (Springer, 2009).
- <sup>116</sup>M. de Aguiar, K Furuya, C. Lewenkopf y M. Nemes, Chaos in a spin-boson system: Classical analysis, [Ann. Phys. \*\*216\*\*, 291 -312 \(1992\)](#).
- <sup>117</sup>J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, S. Lerma-Hernández y J. G. Hirsch, Classical chaos in atom-field systems, [Phys. Rev. E \*\*94\*\*, 022209 \(2016\)](#).
- <sup>118</sup>F. Zhang, *The Schur complement and its applications*, vol. 4 (Springer Science & Business Media, 2006).
- <sup>119</sup>O. Castaños, R. López-Peña, J. G. Hirsch y E. López-Moreno, Classical and quantum phase transitions in the Lipkin-Meshkov-Glick model, [Phys. Rev. B \*\*74\*\*, 104118 \(2006\)](#).
- <sup>120</sup>S. Pilatowsky-Cameo, J. Chávez-Carlos, M. A. Bastarrachea-Magnani, P. Stránský, S. Lerma-Hernández, L. F. Santos y J. G. Hirsch, Positive quantum Lyapunov exponents in experimental systems with a regular classical limit, [Phys. Rev. E \*\*101\*\*, 010202 \(2020\)](#).
- <sup>121</sup>Y. Yi-Xiang, J. Ye y W.-M. Liu, Goldstone and Higgs modes of photons inside a cavity, [Scientific Reports \*\*3\*\*, 3476 \(2013\)](#).
- <sup>122</sup>X.-Q. Zhao, N. Liu y J.-Q. Liang, First-Order Quantum Phase Transition for Dicke Model Induced by Atom-Atom Interaction\*, [Communications in Theoretical Physics \*\*67\*\*, 511 \(2017\)](#).
- <sup>123</sup>G. Jaeger, The Ehrenfest Classification of Phase Transitions: Introduction and Evolution, [Archive for History of Exact Sciences \*\*53\*\*, 51-81 \(1998\)](#).
- <sup>124</sup>F. Haake, S. Gnutzmann y M. Kuś, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer, 2018).
- <sup>125</sup>M. Kloc, P. Stránský y P. Cejnar, Quantum phases and entanglement properties of an extended Dicke model, [Annals of Physics \*\*382\*\*, 85-111 \(2017\)](#).
- <sup>126</sup>P. Stránský, M. Kloc y P. Cejnar, Excited-state quantum phase transitions and their manifestations in an extended Dicke model, [AIP Conference Proceedings \*\*1912\*\*, 020018 \(2017\)](#).
- <sup>127</sup>M. A. Bastarrachea-Magnani, A Relaño, S Lerma-Hernández, B. L. del Carpio, J Chávez-Carlos y J. G. Hirsch, Adiabatic invariants for the regular region of the Dicke model, [Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical \*\*50\*\*, 144002 \(2017\)](#).



- <sup>128</sup>M. A. Bastarrachea-Magnani, O Castaños, E Nahmad-Achar, R López-Peña y J. G. Hirsch, Fidelity, susceptibility and critical exponents in the Dicke model, [Journal of Physics: Conference Series](#) **492**, 012012 (2014).
- <sup>129</sup>M. O. Scully y M. S. Zubairy, *Quantum optics* (American Association of Physics Teachers, 1999).
- <sup>130</sup>C. Gerry, P. Knight y P. L. Knight, *Introductory quantum optics* (Cambridge university press, 2005).
- <sup>131</sup>L. Mandel, *Coherence and Quantum Optics: Proceedings of the Third Rochester Conference on Coherence and Quantum Optics Held at the University of Rochester, June 21–23, 1972* (Springer Science & Business Media, 2012).
- <sup>132</sup>B. M. Pimentel y A. H. Zimmerman, Phase transitions in some Dicke-type models, [Il Nuovo Cimento B \(1971-1996\)](#) **30**, 43-54 (1975).
- <sup>133</sup>V. N. Popov y S. Fedotov, Behavior of the partition function of Dicke type models in the limit of a large number of atoms, [Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika](#) **51**, 73-85 (1982).
- <sup>134</sup>V. N. Popov, *Functional integrals and collective excitations* (Cambridge University Press, 1987).
- <sup>135</sup>A. D. Ribeiro, M. A. M. de Aguiar y A. F. R. de Toledo Piza, The semiclassical coherent state propagator for systems with spin, [Journal of Physics A: Mathematical and General](#) **39**, 3085 (2006).
- <sup>136</sup>P. R. Eastham y P. B. Littlewood, Bose condensation of cavity polaritons beyond the linear regime: The thermal equilibrium of a model microcavity, [Phys. Rev. B](#) **64**, 235101 (2001).
- <sup>137</sup>H. W. Eves, *Elementary matrix theory* (Courier Corporation, 1980).
- <sup>138</sup>D. J. Amit y V. Martin-Mayor, *Field theory, the renormalization group, and critical phenomena: graphs to computers* (World Scientific Publishing Company, 2005).





Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00147

Matrícula: 2221801209

Modos de fase y amplitud en el modelo de Dicke anisotrópico con interacciones materiales.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:30 horas del día 4 del mes de noviembre del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. LUIS ALBERTO HERNANDEZ ROSAS
- DR. MARIO ALAN QUIROZ JUAREZ
- DR. MIGUEL ANGEL BASTARRACHEA MAGNANI

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

DE: RICARDO HERRERA ROMERO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



RICARDO HERRERA ROMERO  
ALUMNO

REVISÓ  
  
MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. LUIS ALBERTO HERNANDEZ ROSAS

VOCAL

DR. MARIO ALAN QUIROZ JUAREZ

SECRETARIO

DR. MIGUEL ANGEL BASTARRACHEA  
MAGNANI