



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO


No. 00049

Matrícula: 2151800781

MATERIA OSCURA Y ESTRELLAS
BOSÓNICAS EN EL CONTEXTO DE
GASES ULTRAFRIOS

En la Ciudad de México, se presentaron a las 15:00 horas del día 25 del mes de mayo del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. DARIO NUÑEZ ZUÑIGA
DR. MARIO ALBERTO RODRIGUEZ MEZA
DR. ABEL CAMACHO QUINTANA



BELEM CARVENTE MENDOZA
ALUMNA

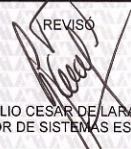
Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (FISICA)


DE: BELEN CARVENTE MENDOZA

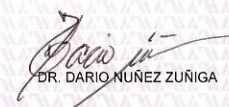
y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:


Aprobar

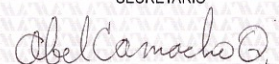
REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISION DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. DARIO NUÑEZ ZUÑIGA

VOCAL

DR. MARIO ALBERTO RODRIGUEZ MEZA

SECRETARIO

DR. ABEL CAMACHO QUINTANA

Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

**Materia Oscura y Estrellas Bosónicas
en el contexto de gases ultrafríos**

Tesis que presenta
Fís. Belen Carvente Mendoza
Para obtener el grado de
Maestra en Ciencias (Física)



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Asesor: Dr. Abel Camacho Quintana

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Darío Núñez Zúñiga

Secretario: Dr. Abel Camacho Quintana

Vocal: Dr. Mario Alberto Rodríguez Meza

Ciudad de México, Mayo 2017

“El mar era perfectamente visible en un radio de una milla alrededor del Nautilus. ¡Qué espectáculo! ¿Qué pluma podría describirlo?”
Julio Verne

Índice general

Resumen	v
Introducción	vii
Motivación	vii
1. Modelo de gases ultrafríos	1
1.1. Antecedentes: El modelo usual	1
1.2. Modelo propuesto	4
1.2.1. Estado base	6
1.2.2. Primer estado excitado	7
1.2.3. Estados superiores de energía	8
2. Modelo Matemático	11
2.1. Interacción gravitacional y potencial atrapante	11
2.2. Ecuación de movimiento	16
3. Materia oscura	19
3.1. Antecedentes teóricos	20
3.1.1. Derivando las curvas de rotación observacionales	20
3.1.2. Derivando las curvas de rotación teóricas	21
3.2. Dedución de propiedades microscópicas	23
3.2.1. Equilibrio mecánico	23
3.2.2. Curvas de rotación	29
3.2.3. Deflexión luminosa	30
4. Estrellas bosónicas: deducción de masas críticas y propiedades microscópicas	33
4.1. Condiciones generales del modelo	34

4.2. Cotas sobre las masas	36
4.3. Propiedades microscópicas	38
5. Resultados y conclusiones	41
5.1. Materia oscura como condensado	41
5.2. Estrellas bosónicas newtonianas	43
5.3. Gas diluido y límite de Thomas-Fermi	46
5.4. Gas diluido y método variacional	47
6. Trabajo a futuro	49
6.1. Trabajo analítico	49
6.2. Trabajo numérico	50
A. Derivación de la ecuación de Gross–Pitaevskii	51
Agradecimientos	53

Resumen

Según el modelo estándar en Cosmología, los principales componentes del Universo son la materia oscura y la energía oscura (la hipótesis más aceptada para explicar la expansión acelerado del Universo) y, sin embargo, poco sabemos de ellos. Es resto es lo que conocemos hasta ahora, apenas el 4 % de todo lo que le compone. Para la materia oscura se tienen varios candidatos viables para explicar su naturaleza, entre los que se encuentran los axiones, las partículas masivas de interacción débil (WIMPs por sus siglas en inglés) y los campos escalares.

Aunque los axiones y los WIMPs logran predecir con éxito la formación de estructura a grandes escalas, éstos presentan problemas respecto a escalas menores, que podrían ser resueltos al considerar bosones (campos escalares) como los constituyentes fundamentales de la materia oscura.

En el presente trabajo se explora esta última posibilidad: se modela materia oscura como un condensado de Bose-Einstein (BEC), considerando una interacción de corto alcance únicamente entre pares de partículas e introduciendo los efectos de la nube térmica en el sistema. Además, la interacción de largo alcance ocasionada por la gravitación, se interpreta aquí como un oscilador armónico isótropo tridimensional.

Por otro lado, la autointeracción de las partículas escalares puede provocar la formación de objetos compactos conocidos como estrellas de bosones (BSs), de tal forma que el modelo matemático propuesto para halos de materia oscura puede describir BSs de forma inmediata.

Para el halo de materia oscura tres condiciones físicas se han impuesto en nuestro modelo, a saber: equilibrio mecánico del condensado, explicación de las curvas de rotación de estrellas pertenecientes a galaxias de bajo brillo superficial (LSB por sus siglas en inglés, *Low*

Surface Brightness) y la deflexión de la luz debida a la presencia de materia oscura. Todo esto con el objetivo de deducir tres propiedades microscópicas de las partículas que componen al halo de materia oscura: masa (m), número de partículas (N) y longitud de dispersión (a). Finalmente el modelo se compara con datos observacionales para obtener valores de los parámetros microscópicos del BEC, dilucidando así la viabilidad de explicar materia oscura como un condensado de Bose-Einstein.

Debido a la falta de evidencia observacional en el ámbito de estrellas bosónicas, la única condición a imponer es el equilibrio mecánico que, junto con la restricción de gas diluido, nos proporciona cotas mínima y máxima para el número de partículas y, por tanto, de la masa total de una BS, siendo estos límites funciones de m y a .

Introducción

Basta con estar frente al mar para que todos nuestros sentidos se asombren, los pies en la arena, el sonido de las olas, su aroma inconfundible. Pero la mirada es la más alerta: si hay algo vasto en la Tierra, es el mar. No parece tener fin y el vaivén de las olas desaparece aún el principio. Lo cierto es que, de todo lo que existe dentro del mar, el 90 % se encuentra en el fondo, lejos de nuestra visión.

“Nuestros sentidos nos permiten percibir solo una pequeña porción del mundo exterior”, dijo Tesla.

Haga el lector una mirada más lejana, donde el azul de ese mar apenas se percibe en la Tierra, donde ya ni el sol se distingue, donde apenas se aprecia la Vía Láctea. Más allá aún, donde el Universo, como el mar, parece no tener principio ni fin.

Lo que conocemos hasta ahora, lo que nuestros instrumentos pueden detectar, apenas es el 5 % de todo lo que constituye al Universo [3]. El resto se divide en energía oscura (DE) y materia oscura (DM) [10], hipótesis mayormente aceptadas para describir comportamientos a estas grandes escalas.

Y es que la Física, más que un lenguaje o una forma de describir al mundo, es un proceso en el cual la adquisición del conocimiento y la creación de una visión del mundo dialogan, bailan y se entrelazan constantemente en ese vaivén de olas marinas. “Los humanos se volvieron científicos para su propia supervivencia”, dice Logan [38], y ese oleaje nos hace sentir bienestar psicológico.

El quinto estado de la materia se estaba descubriendo en 1995 [4] con la prueba experimental de la existencia del condensado de Bose-Einstein y, desde entonces, quedó asentado que los bosones representan partículas idénticas las cuales pueden ocupar el mismo estado base, abriendo un nuevo panorama respecto a la explicación de una

parte de lo desconocido: ¿estas partículas escalares podrían formar parte de la materia oscura? ¿Bajo qué condiciones podrían colapsar gravitacionalmente formando objetos compactos?

Motivación

Es más lo desconocido que lo conocido. Cuando en 1998 las observaciones del Telescopio Hubble mostraron que el Universo se expandía aceleradamente (y no a la inversa, como se esperaba), surgió la necesidad de explicar tal fenómeno; una de las tantas explicaciones requiere que gran parte de la energía en el Universo contenga una componente con presión negativa aparentemente constante (una constante cosmológica Λ), la cual es llamada energía oscura (DE) [38].

La otra misteriosa substancia de gran importancia (alrededor del 27% de la composición del Universo) es la materia oscura (DM)[3]. Ésta es una materia eléctricamente neutra que no es inerte a la fuerza gravitacional. Es indetectable vía radiación electromagnética y resulta de la necesidad de explicar el hecho experimental de que, a través de las curvas de rotación de las galaxias, la materia de éstas continúa creciendo a medida que nos alejamos de su centro para después mantenerse constante y, sin embargo, la materia visible disminuye en estas regiones.

La existencia de DM también se requiere para explicar porqué, como resultado del Big Bang, la materia observable está agrupada en cúmulos de galaxias, galaxias y estrellas; además de que la anisotropía medida por la radiación cósmica de fondo (*Cosmic Microwave Background*, CMB por sus siglas en inglés) sería difícil de explicar sin la presencia de DM.

Los modelos actuales del Universo se basan principalmente en la idea de la existencia de DE y DM. Con ideas que están tan lejos de la posibilidad de confirmación o refutación experimental como lo están las de la gravedad cuántica, debemos ser especialmente cautos en tomar la popularidad de un enfoque como índice real de su validez [45].

Así que, aunque la existencia de DM es admisible, aún queda por determinar su naturaleza. Si ésta estuviera compuesta por bariones,

como agujeros negros, enanas blancas o estrellas de neutrones, el fondo de radiación cósmica tendría una estructura muy diferente a la observada, por lo que la hipótesis queda descartada al igual que aquélla que considera fotones [66, 1]. Parece ser que sus componentes son aún desconocidos y resulta primordial discernir entre los candidatos viables actualmente: en el modelo estándar la DM se modela como un sistema de partículas sin colisionar, los llamados WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles) [61] cuya detección directa no ha sido reportada hasta el momento a pesar de los múltiples esfuerzos invertidos en ello; otra posibilidad es que los axiones sean los componentes de la DM [33]; por otro lado, Bird considera la posibilidad que el agujero negro binario detectado por el proyecto LIGO pueda constituir a la materia oscura [11]; utilizando el argumento de la navaja de Ockham, en [25] se explora la idea de que la materia oscura es una partícula masiva interactuante Planckiana y, por último, tenemos a las partículas escalares de DM con interacción fundamental de espín-0 las cuales pueden formar condensados de Bose-Einstein (BECs) [5].

Los WIMPs y los axiones se comportan como materia oscura fría la cual es muy exitosa al explicar la estructura isótropa a gran escala, la expansión acelerada del Universo y la radiación cósmica de fondo y, sin embargo, parece tener problemas en otros ámbitos: debido a que son partículas pesadas y pequeñas, forman estructuras de todos tamaños en las simulaciones numéricas, incluso estructuras subgalácticas [34]; no obstante, siendo el origen de la materia oscura un problema a escala galáctica, se espera que las estructuras menores sean justamente del tamaño de galaxias.

Aunque los WIMPs se mantienen como los candidatos líderes para la materia oscura y los mayores esfuerzos experimentales se centran en detectarlos en grandes laboratorios como el LHC (Large Hadron Collider) y el experimento LUX (Large Underground Xenon), éstos han probado ser altamente elusivos por al menos 20 años; básicamente los nuevos experimentos se enfocan en mejorar la precisión de los instrumentos, haciendo pensar a algunos que la materia oscura pudiera ser simplemente indetectable.

Frente a este panorama, se vuelve necesario explorar nuevas ideas y dentro de ellas se encuentran los campos escalares, cuya base es

suponer a la materia oscura como un campo escalar real o complejo mínimamente acoplado con gravedad, sometido a un potencial y a una temperatura tal que solo exista interacción gravitacional con el resto de la materia, todas éstas características propias de la DM. El trabajo en esta dirección incluye la aparición de semillas de galaxias como una consecuencia de la presencia del BEC [40], una versión relativista de la ecuación de Gross-Pitaevskii [28], BECs formados por neutrinos considerando que éstos violan el Principio de Exclusión de Pauli y, por tanto, siguen la estadística de Bose [23], etc. Para una revisión más profunda sobre estos temas, véase [13].

El concepto de estados ligados gravitacionalmente compuestos por partículas escalares se propuso por Kaup [32] usando un campo escalar masivo complejo con interacciones gravitacionales en una manera semiclásica y posteriormente, usando cuantización de un campo escalar real considerando el estado base de N partículas, reformulado por Ruffini y Bonazzola [55]; sin embargo, ambos tratamientos (campo real cuantizado y campo complejo) conllevan al mismo resultado macroscópico [57]. En ausencia de autointeracción, debido a que el Principio de Incertidumbre de Heisenberg prohíbe el colapso gravitacional (para ciertas masas), la masa máxima de estas configuraciones es sumamente pequeña. Sin embargo Colpi [20] prueba que con autointeracción las partículas escalares pueden formar objetos compactos, las hipotéticas estrellas de bosones (BSs).

Las BSs se pudieron formar en las etapas tempranas del Universo y se mantienen unidas gracias a su campo gravitacional autogenerado. El reto principal en este ámbito se encuentra en el hecho de que ninguna partícula fundamental escalar ha sido detectada, a excepción del bosón de Higgs. Se necesita una partícula escalar que no decaiga o que si lo hace, como el Higgs, el proceso inverso sea suficientemente eficiente para lograr un estado de equilibrio, como en el decaimiento β de una estrella de bosones [57]; en este sentido, las BSs son similares a las estrellas de neutrones, pero en otros aspectos son distintas [29], con lo cual los astrónomos podrían distinguir a las BSs de otros objetos compactos.

En el presente trabajo consideramos materia oscura en el contexto de un BEC, en presencia de autointeracción (por pares), cuya atrac-

ción gravitacional interpretaremos como una trampa tipo oscilador armónico isótropo tridimensional. Como consecuencia, consideramos una longitud de dispersión no nula y debido a ello, nos vemos obligados a tomar en cuenta no solo el estado base, sino también el primer estado excitado poblado, a diferencia del trabajo que se realiza usualmente en este contexto, donde todas las partículas se encuentran en el estado de más baja energía [16, 13].

Es así que, tomando en cuenta (i) que el halo de materia oscura puede deflectar la luz, (ii) que debe existir un equilibrio entre la presión propia del condensado y la presión gravitacional y (iii) relacionando la velocidad de rotación de estrellas (en galaxias dominadas por la presencia de materia oscura), con los parámetros microscópicos asociados a las partículas que constituyen al BEC, se deducen los órdenes de magnitud para estos parámetros sin hacer ninguna suposición previa de ellos, siendo este último el principal objetivo de nuestro modelo.

Adicionalmente, y debido a que las BSs son puramente teóricas, para el tratamiento de estrellas bosónicas se establece la cota máxima y mínima para el contenido de materia en este tipo de objeto compacto, resaltando el hecho de que estos resultados descartan la formación de agujeros negros en el ámbito de gas diluido y además la formación de estructura subgaláctica (siendo éste un resultado que contradice lo aceptado), pues la cota mínima impedirá la formación de dichas estructuras.

Capítulo 1

Modelo de gases ultrafríos

Parece haber un consenso acerca de que el estimado de la energía en el Universo puede ser categorizada como materia ordinaria, materia oscura (DM) y energía oscura (DE) [9]. Mediciones en la radiación cósmica de fondo (CMB) muestran, además, que la DM cubre el 27 % de este estimado, mientras que la materia bariónica (ordinaria) solamente contribuye con el 5 % aproximadamente [3]. La evidencia de esto es, sin embargo, totalmente indirecta.

De acuerdo con las curvas de rotación de las galaxias, el perfil de masa de estas estructuras tiene una dependencia lineal en términos del parámetro de distancia radial $M(r) \sim \frac{rv_t^2}{G}$, siendo de especial interés las regiones donde v_t , la velocidad tangencial de las estrellas que conforman una galaxia, permanece constante y la cantidad de masa bariónica parece ser muy pequeña. Para explicar este comportamiento, Sin [59] propone en 1992 que las partículas de materia oscura podrían modelarse como partículas ultraligeras que conforman un BEC y cuya extensión relativista consiste en la obtención de estructuras estables de campos escalares que se formaron en las etapas tempranas del Universo, las llamadas estrellas bosónicas [35]. A continuación esbozaremos la forma usual de abordar tal descripción.

1.1. Antecedentes: El modelo usual

Los modelos usados frecuentemente para materia oscura en el contexto de condensado buscan deducir propiedades macroscópicas tales como la masa total del halo (M), puesto que éstas son las que tienen que dar una explicación a, por ejemplo, las curvas de rotación de galaxias.

Se parte comúnmente de la ecuación de Gross-Pitaevskii [47] que describe las propiedades de un gas bosónico con la aproximación de Hartree: cuando no se toman en cuenta interacciones entre grados de libertad que corresponden a escalas de longitudes menores al espaciamiento entre partículas. Así que, en esta aproximación, todos los átomos están en el estado base del Hamiltoniano de partícula individual correspondiente y el sistema se puede describir por un solo parámetro de orden $\psi(\mathbf{r}, t)$ a través de la ya mencionada ecuación de Gross-Pitaevskii:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}, t) + m\Phi_{tot}(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.1)$$

Además, en las analogías entre materia oscura y BECs [16, 13] suele escribirse al potencial como la suma del potencial gravitacional Φ y un potencial efectivo $h(\rho) = gNm|\psi|^2$:

$$\Phi_{tot} = \Phi + h(\rho), \quad (1.2)$$

para llegar a un sistema de Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP):

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + m(\Phi + h(\rho))\psi, \\ \nabla^2\Phi &= 4\pi G\rho = 4\pi GNm|\psi|^2 = 4\pi GNmA^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde A es una función real tal que $|\psi|^2 = |A|^2$.

Cabe mencionar que el sistema (1.3) no tiene solución analítica hasta el momento.

El paso siguiente es usar la transformación de Madelung para reescribir el sistema GPP de una forma equivalente a las ecuaciones de la hidrodinámica. Para ello, se suele expresar la función de onda como la densidad veces la exponencial de una fase:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t)e^{iS(\mathbf{r}, t)/\hbar}, \quad (1.4)$$

y con (1.4) en (1.1) se puede separar la parte real e imaginaria, respectivamente:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla h - \nabla\Phi - \frac{1}{m}\nabla Q, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0, \quad (1.6)$$

donde podemos notar que (1.5) es una ecuación tipo Euler con un término extra, Q , denominado potencial cuántico, asociado a la energía cinética del estado base del sistema; mientras que (1.6) no es más que una ecuación de conservación y ambas expresiones (llamadas ecuaciones “hidrodinámicas”) son equivalentes al sistema GPP [16]. El estado estacionario de la ecuación (1.5), obtenida al imponer $\partial_t = 0$ y $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, satisface:

$$\nabla p + \rho \nabla \Phi - \frac{\hbar^2 \rho}{2m^2} \nabla \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

donde $p(\mathbf{r}, t)$ es una presión que satisface la ecuación de estado:

$$p = \frac{2\pi a \hbar^2}{m^3} \rho^2. \quad (1.8)$$

Si además, en esta versión hidrodinámica, se introduce la aproximación de Thomas-Fermi (es decir, se considera nula la energía cinética del estado base y, por tanto, se desprecia al potencial cuántico), considerando una longitud de dispersión $a > 0$, (1.5) se reduce a la condición de equilibrio hidrostático usual [13]:

$$\nabla p + \rho \nabla \Phi = \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

Esta última ecuación, combinada con la ecuación de Poisson en (1.3) nos permite obtener la ecuación fundamental de equilibrio hidrostático:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = 4\pi G \rho, \quad (1.10)$$

la cual nos permite, con la ecuación de estado (1.8), llegar finalmente a una ecuación tipo Lane-Emden

$$\nabla^2 \rho + \frac{Gm^3}{a\hbar^2} \rho = 0, \quad (1.11)$$

cuya solución implica una distribución de densidad relacionada con la función de Bessel esférica de orden 0, $\rho(r) \sim \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi r}{R}\right)}{\frac{\pi r}{R}}$ [13].

Es importante señalar en este punto que, para que la aproximación de Thomas-Fermi (T-F) pueda ser introducida, se necesita una condición adicional que involucra al número total de partículas (N), la

longitud de dispersión (a) y la longitud característica (ℓ) del potencial atrapante [47]:

$$\frac{Na}{\ell} > 1.$$

Esta aproximación de T-F se asume, sin embargo, como cierta aún antes de saber algo al respecto de N , a y ℓ . Este último punto es de las principales motivaciones del presente trabajo, cuyo principal objetivo se centra en deducir las propiedades microscópicas sin asumir ningún comportamiento a priori de ellas.

1.2. Modelo propuesto

Siguiendo con la analogía del mar, los modelos usuales suponen ciertas propiedades acerca de sus constituyentes de tal forma que lo que se puede observar en la superficie sea una consecuencia de estas suposiciones, pero nuestro objetivo es otro; buscamos deducir a partir de algo que podemos medir propiedades aún desconocidas de aquel abismo marino, es decir: deducir las propiedades microscópicas del sistema: el número de partículas (N), la masa (m) y la longitud de dispersión (a) de la partícula de materia oscura, sin suponer desde el principio nada acerca de éstas.

Al igual que en los modelos habituales, asumimos que la temperatura es prácticamente nula y partimos del sistema GPP (1.3). Debido a que para éste no existen soluciones analíticas conocidas, suele utilizarse un ansatz gaussiano que es común en el planteamiento de la relación masa-radio de las estrellas enanas blancas, el cual define una expresión aproximada para el perfil de densidad en forma de una gaussiana [13, 16]. Sin embargo, nuestro modelo ofrece un argumento que explica la Física detrás de esta suposición como consecuencia del hecho de que, en una aproximación burda, la autointeracción gravitacional del halo de DM puede interpretarse como un BEC inmerso en una trampa tipo oscilador armónico isótropo en tres dimensiones.

Además se mostrará que, siguiendo este argumento, podemos recuperar el orden de magnitud del radio de un BEC (para el caso en el que la longitud de dispersión es nula), lo que permite confirmar indirectamente la validez de la interpretación de la gravitación como un

potencial externo tipo oscilador armónico. En este sentido, el problema se simplifica al desacoplar el sistema GPP y se reduce a resolver solamente Gross-Pitaevskii.

Como consecuencia de esta aproximación nos podemos deslindar de usar, como suele hacerse, la aproximación de T-F y con ello evitamos presuponer comportamiento alguno respecto a las propiedades microscópicas del condensado.

Por otro lado, los efectos de la longitud de dispersión se verán reflejados en la disminución de la frecuencia del oscilador armónico que mimetiza la trampa gravitacional. Esto puede entenderse desde una perspectiva intuitiva: la fuerza gravitacional (y por tanto la interpretación de trampa tipo oscilador) tiende a comprimir el halo del condensado, pero la longitud de dispersión intenta expandirlo, lo que resulta en una nube de gas más grande que aquélla en ausencia de autointeracción, es decir, en una frecuencia efectiva menor.

Debido a que utilizamos teoría de campo medio, todas las partículas están descritas por la misma función de onda ψ , en tanto que la teoría de gases ultrafríos nos muestra que si la longitud de dispersión es no nula necesariamente habrá partículas poblando estados excitados [48], nuestro modelo toma en cuenta no solo la energía del estado base sino aquélla del primer estado excitado; en otras palabras, nuestro modelo toma en cuenta la nube térmica del halo y analiza sus consecuencias.

Ya que deseamos obtener información acerca de tres parámetros microscópicos, necesitamos al menos tres expresiones independientes que relacionen a éstos con datos observacionales. Para ello, hemos impuesto tres condiciones al BEC: (i) equilibrio mecánico en el condensado, (ii) concordancia del modelo con las curvas de rotación de estrellas pertenecientes a algunas galaxias LSB y (iii) la deflexión de la luz debido a la presencia de materia oscura. Nuestro procedimiento es básicamente el siguiente: la energía del gas será calculada y con ésta se deducirá el equilibrio mecánico (al imponer igualdad entre las presiones inherentes al halo y la presión gravitacional). Además, relacionamos la velocidad tangencial en galaxias con el contenido de materia del halo de materia oscura y, finalmente, consideramos un pulso de luz moviéndose hacia el halo y entonces la deflexión debida al condensado es obtenida.

Para el caso de estrellas bosónicas, únicamente se ha tomado en cuenta el equilibrio mecánico ya que estas configuraciones representan un ente puramente teórico y no se cuenta con ninguna observación astronómica al respecto. Sin embargo veremos que con esta condición y la imposición (por hipótesis) de tener un sistema con gas diluido, es posible obtener cotas para el número de partículas de una BS, descartando por completo que bajo las hipótesis aquí presentadas sea plausible obtener un agujero negro compuesto por BECs.

1.2.1. Estado base

La ecuación de Gross-Pitaevskii permite describir las propiedades de un gas de Bose no uniforme, es decir, en presencia de autointeracción, cuando la longitud característica a es mucho menor que el espaciamiento medio entre partículas [47]. En la aproximación más burda y a temperaturas muy bajas la función de onda del condensado (también llamada parámetro de orden) es simplemente un campo clásico $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ puesto que en éste la gran mayoría de átomos se encuentra en el mismo estado. Además, suponiendo que $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$ varía lentamente en distancias del orden del alcance de las fuerzas interatómicas, la ecuación a utilizar es [48]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_0(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}, t) + U_0 |\Psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi_0(\mathbf{r}, t), \quad (1.12)$$

donde $U_0 = \int V_{eff}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$. Podemos expresar esta integral en términos de la longitud de dispersión a , con el fin de que éste corresponda al parámetro relevante de interacción, como se muestra:

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (1.13)$$

La ecuación (1.12) toma una forma simple en el caso de soluciones estacionarias, cuando el parámetro de orden evoluciona con el tiempo de acuerdo con

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\right), \quad (1.14)$$

donde el potencial químico μ es

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N}, \quad (1.15)$$

de forma que la ecuación de G-P se reduce a su versión independiente del tiempo que veremos más adelante:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) - \mu + U_0 |\Psi_0(\mathbf{r})|^2 \right) \Psi_0(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.16)$$

La ecuación (1.12) fue obtenida independientemente por Gross y por Pitaevskii en el año 1961 y tiene la forma usual de una ecuación de campo medio donde el parámetro de orden debe ser calculado en una forma autoconsistente. Además, esta ecuación juega un papel análogo a las ecuaciones de Maxwell en Electrodinámica Clásica en el sentido de que la función de onda del condensado, $\Psi_0(\mathbf{r}, t)$, representa el límite clásico de una onda de de Broglie, donde la naturaleza corpuscular de la materia ya no representa una característica importante.

Otra característica importante de la ecuación de Gross-Pitaevskii (1.12) es la clara no linealidad debida a la interacción entre partículas. Esta característica mencionada tiene su análogo con la óptica no lineal en el sentido de que la coherencia correspondiente a esta última y los efectos de la interacción en el caso de BECs son características importantes que pueden ser estudiadas a partir de la ecuación de Gross-Pitaevskii, dotándole a la Física de los BEC's un área de estudio experimental y teóricamente vasta [48].

1.2.2. Primer estado excitado

Debido a que nuestra ecuación de partida es en realidad la ecuación de Gross-Pitaevskii y que ésta describe únicamente a las partículas en el estado base del sistema, debemos hacer algunas consideraciones respecto al primer estado excitado.

Ya que el sistema a analizar es equivalente a un BEC confinado a una trampa tipo oscilador armónico debemos recordar que aún en el caso de temperatura idealmente nula, la presencia de $a \neq 0$ implica que los estados excitados también deben estar poblados [48].

La deducción de la energía del primer estado excitado se entenderá como una consecuencia de un proceso perturbativo relacionado direc-

tamente con el oscilador armónico isótropo tridimensional. Los efectos de considerar una longitud de dispersión no nula para el estado base se codifica en un tratamiento perturbativo, en el sentido de que la energía de interacción por partícula en el estado base es estrictamente menor que la energía del estado base asociada al hamiltoniano de un oscilador armónico tridimensional isótropo sin perturbar:

$$| \langle 0, 0 | \hat{W} | 0, 0 \rangle | < \frac{3\hbar\omega}{2}, \quad (1.17)$$

donde \hat{W} es el operador asociado al potencial de interacción de dos partículas en el estado de mínima energía, lo que nos permite asegurar que para el primer estado excitado tendremos exactamente la misma condición, a saber

$$| \langle 1, 1 | \hat{W} | 1, 1 \rangle | < \frac{5\hbar\omega}{2}. \quad (1.18)$$

No sobra decir que en las últimas dos ecuaciones, ω representa a la frecuencia modificada debido a los efectos de haber considerado una longitud de dispersión distinta a cero por lo que las energías asociadas a ambos estados no anulan la energía cinética (pues si así fuera, debido al Teorema del virial que establece igualdad entre valores de expectación de las energías cinética y potencial [27], tendríamos un sistema con energías trivialmente nulas) por lo que el formalismo presentado aquí no recupera la aproximación de Thomas Fermi.

1.2.3. Estados superiores de energía

¿Y será cierto que las partículas en un condensado se acumulan en un mismo estado? ¿Por qué no comparten varios estados degenerados? De hecho, la condensación de Bose-Einstein no es un efecto de gas ideal, sino que implica la interacción en las partículas [41]. De hecho las interacciones de corto alcance modifican a la función de onda del condensado a distancias cortas entre partículas, resultando de aquí el llamado *depletion term*, del que hablaremos más adelante.

El número de átomos en el condensado puede ser calculado a partir

de [48]:

$$N_0 = N - \sum_{\mathbf{p} \neq 0} n_{\mathbf{p}}, \quad (1.19)$$

donde el número de ocupación de partículas a $T = 0$ está dado por

$$n_{\mathbf{p}} = \frac{p^2/2m + mc^2}{2\epsilon(p)} - \frac{1}{2}, \quad (1.20)$$

siendo $\epsilon(p)$ la ley de dispersión de Bogoliubov para las excitaciones elementales del sistema, a saber,

$$\epsilon(p) = \left[\frac{U_0 N}{Vm} p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.21)$$

Nótese que la distribución de partículas (1.20), para momentos lineales grandes, se comporta como $1/p^4$, lo que permite asegurar finalmente que el parámetro $\sqrt{Na^3/V}$ que caracteriza la primera corrección a la energía del estado base es suficiente, ver ecuación (3.11); en otras palabras, nuestro modelo requiere únicamente del primer estado excitado así como del estado base de energía puesto que podemos asegurar que el número de partículas ocupando el primer estado excitado es mayor que aquél en el segundo estado excitado y así sucesivamente.

Capítulo 2

Modelo Matemático

Ahora resulta necesario adentrarse en las aguas matemáticas de nuestro modelo. Como ya se ha dicho, éste es válido dentro del concepto de gases ultrafríos y en el ámbito de gas diluido tanto para halos de materia oscura, como para estrellas bosónicas.

2.1. Interacción gravitacional y potencial atrapante

Como mencionamos anteriormente, consideramos un sistema compuesto por N partículas de masa m y longitud de dispersión a que forman un cuerpo esféricamente simétrico de radio R . La simetría esférica se impone en el entendido de que todas las interacciones externas al sistema son despreciadas y entonces ninguna dirección es privilegiada, resultando así que la única configuración posible de la geometría del sistema (halo de DM o BS) es la esférica.

Para resolver analíticamente el sistema inicial Gross-Pitaevskii-Poisson (1.3) es usual que se introduzca una suposición adicional para la densidad de masa del sistema que es, generalmente, una función gaussiana [16]. Esta suposición es útil y, sin embargo, requiere una explicación adicional, ¿cuál es el argumento físico capaz de explicar esta estructura funcional de la densidad de masa?

Consideremos un cuerpo esférico de masa M y radio R , el cual tiene una pequeña cavidad a lo largo del diámetro coincidente con el eje z . Dicha esfera tiene una función de densidad con simetría esférica, es decir, ésta es solo función de la variable radial $\rho = \rho(r)$ y, por tanto, no tiene un soporte compacto de tal forma que exploraremos la estructura funcional de dicha densidad partiendo de una expansión

de Taylor alrededor del centro del cuerpo.

Como primera posibilidad, supongamos que dicha expansión es un polinomio, de tal forma que

$$\rho(r) = \rho(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{(n)}(0)r^n}{n!}, \quad (2.1)$$

tal que $\exists s \in \mathbb{N} : \rho^{(n)}(0) = 0, \forall n \geq s$. Así que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Nótese que (2.2) no representa una condición física plausible, lo cual implica que la densidad no puede ser representada por un polinomio. Dicho de otra manera, $\forall l \in \mathbb{N}, \exists s \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^{(s)}(0) \neq 0$, con $s \geq l$, es decir, la densidad se puede representar por una serie.

El significado físico de este hecho es que la densidad se anule lejos del centro geométrico del sistema (del cuerpo esférico), un escenario imposible de reproducir con un polinomio.

Es entonces necesario describir el movimiento de una partícula moviéndose a lo largo de la cavidad del sistema, al menos en una forma aproximada. Así que consideremos una suposición adicional sobre $\rho(r)$: su máximo global se encuentra en $r = 0$; esta condición tiene fundamento en el hecho de que, debido a la presencia de la gravedad, se espera que el máximo de la densidad se encuentre justo en el centro geométrico del cuerpo en cuestión.

Consideremos, pues, una partícula de masa m moviéndose a lo largo de dicha cavidad y determinemos el movimiento clásico de ésta. El origen de coordenadas es situado en el centro geométrico del cuerpo y, debido a la geometría del problema, recurrimos a coordenadas esféricas. Así que la ecuación de movimiento es:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{mM(r)}{r^2}, \quad (2.3)$$

donde $M(r)$ indica la masa dentro de la esfera de radio r . Debido a que el máximo global se encuentra en el origen, la primera derivada

allí es nula, por lo que

$$\begin{aligned} M(r) &= 4\pi \int_0^r \rho(x)x^2 dx \\ &= 4\pi \left[\frac{\rho(0)r^3}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{(n)}(0)}{(n+3)n!} r^{n+3} \right]. \end{aligned}$$

Y así obtenemos la ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{4\pi}{3} G\rho(0)r \left[1 + 3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{(n)}(0)}{\rho(0)(n+3)n!} r^n \right] = 0. \quad (2.4)$$

Por hipótesis, la serie en (2.4) existe y entonces podemos definirla como

$$f(r) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\rho^{(n)}(0)}{\rho(0)(n+3)n!} r^n, \quad (2.5)$$

así, por condición de convergencia, tenemos que $\forall \delta > 0, \exists l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| f(r) - \sum_{n=2}^s \frac{\rho^{(n)}(0)}{\rho(0)(n+3)n!} r^n \right| < \delta, \quad \forall s \geq l. \quad (2.6)$$

La condición (2.6) implica que

$$\left| \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\rho^{(n)}(0)}{\rho(0)(n+3)n!} r^n \right| < \delta, \quad \forall s \geq l. \quad (2.7)$$

Y en este punto debemos hacer una elección del parámetro δ en el entendido de que, mientras más pequeño sea éste, el parámetro s deberá ser más grande. Si $\delta_1 = 10^{-1}$, entonces $\exists l_1 \in \mathbb{N}$, (donde $l_1 = l_1(\delta_1)$) tal que

$$\left| \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{\rho^{(n)}(0)}{\rho(0)(n+3)n!} r^n \right| < 10^{-1}, \quad \forall s \geq l_1. \quad (2.8)$$

lo que nos permite establecer una desigualdad para la ecuación de movimiento (2.4):

$$-\frac{d^2 r}{dt^2} \leq \frac{4\pi}{3} G\rho(0)r \left[\frac{13}{10} + 3 \sum_{n=2}^{l_1} \frac{\rho^{(n)}(0)}{\rho(0)(n+3)n!} r^n \right]. \quad (2.9)$$

Recordemos las características de la función densidad de masa: no tiene soporte compacto (es decir, es una función integrable en todo el espacio) y su máximo global se encuentra en el origen de coordenadas. Estas características son compartidas por varios tipos de funciones, por ejemplo, las gaussianas, las lorentzianas y todas las eigenfunciones de orden par del oscilador armónico; todas ellas, además, tienen como característica común:

$$\left| \frac{\rho^{(n)}(0)}{\rho(0)} \right| \sim \frac{1}{R^n}, \quad (2.10)$$

donde R es el radio característico de la región, que comprende la mayor parte (al menos el 84 %) de las partículas de DM.

Ahora, como el movimiento de la partícula de prueba se suscita en la región definida por $r \in [0, R]$, la ecuación de movimiento puede ser aproximada por la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{4\pi}{3} G \rho(0) r \left[\frac{13}{10} + 3 \sum_{n=2}^{l_1} \left(\frac{r}{R} \right)^n \right] = 0. \quad (2.11)$$

Notemos que el término con el factor $13/10$ define justamente un oscilador armónico tridimensional, mientras que el término adicional puede ser interpretado como una parte perturbativa, al menos en el régimen donde $r < R$.

Al despreciar entonces este término adicional, podemos identificar una frecuencia de

$$\omega_{(0)} = \sqrt{\frac{52\pi G \rho(0)}{30}}. \quad (2.12)$$

Con esto hemos mostrado que, en una burda aproximación, el movimiento de la partícula de prueba está relacionado con un oscilador armónico isótropo cuya frecuencia (2.12) depende de la densidad central del sistema $\rho(0)$, la masa m y el número de partículas N , como se verá en (2.15)

Dado este resultado clásico, procederemos ahora a cuantizar al sistema. Consideremos los efectos gravitacionales de $N - 1$ partículas de masa m (es decir, una masa total $M = (N - 1)m$) sobre una partícula de la misma masa m . La ecuación de Schrödinger independiente del

tiempo correspondiente es:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{m\omega_{(0)}^2}{2}r^2\psi. \quad (2.13)$$

Ahora, se sabe que el estado base en (2.13) es una función gaussiana [18]. Recordemos que usualmente se recurre a la aproximación de Hartree, donde todas las partículas se encuentran en el estado base y, por tanto, todas son descritas vía funciones gaussianas; como consecuencia, la densidad de masa comparte esta característica con las eigenfunciones. Entonces podemos concluir que el ansatz gaussiano usado comúnmente puede ser entendido como una aproximación en la cual la gravedad define un oscilador armónico tridimensional. Además, los efectos de la gravedad en el sistema (halo de DM o BS) pueden ser considerados como una trampa externa tipo oscilador armónico isótropo.

Sumado a ello, para el caso de halos de DM, podemos estimar el radio de la configuración (en este caso definiremos al radio como la distancia al centro geométrico del sistema tal que la derivada de la velocidad rotacional de estrellas en las galaxias en cuestión sea nula). De tal forma, el volumen descrito por este radio contiene una buena parte de las partículas, digamos el 90 % de ellas. Véase que la función de onda del estado base en (2.13) es, como ya se había puntualizado, una función gaussiana y ésta nos proporciona la densidad de masa:

$$\rho(r) = \frac{mN}{\sqrt{\pi^3}\ell^3} \exp(-r^2/\ell^2), \quad (2.14)$$

donde $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{(0)}}}$ es la longitud característica de la trampa tipo oscilador armónico.

Si consideramos la densidad central tal que la expresión de la frecuencia en (2.12) sea

$$\omega_{(0)} = \sqrt{\frac{0.9GmN}{\ell^3}}, \quad (2.15)$$

entonces ésta queda especificada por

$$\rho(0) = (0.16)\frac{mN}{\ell^3}. \quad (2.16)$$

2.2. Ecuación de movimiento

Ya hemos dicho que en el modelo propuesto tomamos en cuenta el caso en el que la longitud de dispersión no es nula y por tanto, representa un elemento esencial en el planteamiento de la ecuación de movimiento. Retomaremos aquí la interpretación de la autointeracción gravitacional del sistema como un oscilador armónico isótropo, por lo que nuestro sistema se ve reducido al caso, en el sentido del análisis matemático, de un BEC terrestre. Entonces, en concordancia a ello, el Hamiltoniano correspondiente (sin olvidar que estamos en el límite de gas diluido) está dado por [47]:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_{(i)}^2}{2m} + \frac{m\omega_{(0)}^2}{2} r_{(i)}^2 \right] + U_{(0)} \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_{(i)} - \mathbf{r}_{(j)}). \quad (2.17)$$

La información acerca de la autointeracción de las partículas está contenida en $U_{(0)} = 4\pi\hbar^2 a/m$, pues en este modelo consideramos a la interacción entre pares como la única relevante (todos los grados de libertad de longitud de onda menor a la distancia entre partículas son descartados [63]) en un tratamiento de campo medio acorde con gas diluido (y en el régimen de temperaturas muy bajas), pues solo estas interacciones son las relevantes para la dinámica del sistema [47].

Ya mencionamos en la sección anterior que la ecuación, en el contexto de la aproximación de Hartree, independiente del tiempo y solo válida, en principio, para el estado base, es la de Gross-Pitaevskii:

$$\mu\psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{m\omega_{(0)}^2}{2} r^2 + U_{(0)} |\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}), \quad (2.18)$$

$$N = \int |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}. \quad (2.19)$$

Notemos que en (2.18), μ es el potencial químico del sistema. Esta ecuación podemos reescribirla, debido a que $\rho(\mathbf{r}) = m|\psi(\mathbf{r})|^2$:

$$\mu\psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{m\omega_{(0)}^2}{2} r^2 + U_{(0)} \rho(\mathbf{r})/m \right] \psi(\mathbf{r}). \quad (2.20)$$

La inexistencia de resultados analíticos en este contexto [37] hacen necesaria la utilización de alguna aproximación para (2.18), o su equivalente en el formalismo de Madelung, siendo recurrente el llamado *ansatz* gaussiano [16].

Aquí dos consideraciones son tomadas en cuenta. La primera es la interpretación ya explicada de los efectos de la presencia de la gravedad como un oscilador armónico cuya frecuencia no está ligada a la longitud de dispersión a (véase (2.12)), lo cual permite desacoplar el sistema de Gross-Pitaevskii-Poisson y así el confinamiento del sistema se puede tratar de una forma matemáticamente conocida [48].

La segunda consideración es la introducción de la longitud de dispersión a como un elemento fundamental de la descripción del sistema. Veamos cómo se consigue ello.

Nótese que, debido a que

$$|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})/m, \quad (2.21)$$

la estructura gaussiana de la densidad puede introducirse en términos de una serie de Taylor alrededor del origen, donde se espera que la densidad sea máxima:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{N}{(\sqrt{\pi}\ell)^3} \left\{ 1 - \frac{r^2}{\ell^2} \right\} + \mathcal{O}(r^3), \quad (2.22)$$

de tal forma que (2.20) se reescribe como

$$\tilde{\mu}\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{m\omega^2}{2}r^2\psi, \quad (2.23)$$

donde $\tilde{\mu}$ es el potencial químico efectivo,

$$\tilde{\mu} = \mu - \frac{NU_{(0)}}{\sqrt{\pi^3}\ell^3}, \quad (2.24)$$

el cual sufre una modificación debido a la presencia de autointeracción por pares en el sistema y

$$\omega^2 = \omega_{(0)}^2 - 2\frac{NU_{(0)}}{m\sqrt{\pi^3}\ell^5}, \quad (2.25)$$

es la frecuencia del oscilador armónico tridimensional descrito por la ecuación de movimiento (2.23), pero esta vez modificada por la introducción de una longitud de dispersión no nula.

En la literatura podemos encontrar trabajos sobre BECs en los cuales se toma en cuenta la interacción entre las partículas y cuyo tratamiento se realiza a través de Teoría de Perturbaciones [7], lo que conduce a la conclusión de que el sistema corresponde a un oscilador armónico cuya frecuencia es modificada debido a la presencia de una longitud de dispersión. En este sentido, podemos afirmar que las aproximaciones codificadas en (2.23) - (2.25) son equivalentes a un método perturbativo al menos en el sentido de que ambos describen sistemas de osciladores armónicos tridimensionales.

Hasta este punto, resulta conveniente ahondar un poco más acerca de las diferencias entre el modelo usual [13] y el propuesto, en cuanto a la no necesidad de introducir la aproximación de Thomas-Fermi. Esta aproximación requiere la introducción de una condición que involucra al número total de partículas del sistema (N), la longitud de dispersión (a) y la longitud característica (ℓ) relacionada con el potencial atrapante, a saber, $(Na)/\ell > 1$. Esta condición es asumida aún sin saber los valores correspondientes de N , a y ℓ . Como ya se mencionó, debido a que en este trabajo no suponemos nada inicial sobre los parámetros microscópicos del sistema, no nos es posible introducir tal aproximación y, en este sentido, nuestro tratamiento es más general que los que actualmente se llevan a cabo. Sumado a esto, es importante mencionar que la aproximación de Thomas-Fermi desprecia la energía cinética al compararla con las energías de interacción o del propio oscilador; mientras que en nuestro modelo, debido a la estructura del Hamiltoniano correspondiente, los valores esperados de la energía cinética y potencial son iguales [27], según el Teorema del virial. Por lo tanto, si usamos la aproximación mencionada y, por tanto, suponemos la energía cinética nula, estaremos pidiendo implícitamente que la energía potencial también lo sea. En conclusión, la comparación de los resultados obtenidos en el presente trabajo, con aquéllos que supongan la aproximación de Thomas-Fermi simplemente no puede ser hecha.

Capítulo 3

Materia oscura

Imaginémonos como buzos a punto de sumergirnos en las aguas desconocidas: sin duda alguna tendremos los sentidos alertas y las emociones a flor de piel. Pero antes de hacerlo, debemos saber aunque sea lo mínimo sobre la superficie para comprender lo que deberíamos esperar acerca del inexplorado mar.

Entonces, en la primera sección estableceremos lo que sabemos acerca de las curvas de rotación, por qué existe un déficit de materia relacionada con éstas y los principales modelos para la parte bariónica en las galaxias (el gas y las estrellas que las componen).

Para el caso de halos de DM, nuestro principal objetivo es deducir las propiedades microscópicas de éstos a partir de relacionar dos conjuntos de parámetros: las características micro y macroscópicas y esto se explorará en la segunda sección del presente capítulo. La idea es considerar condiciones relacionadas con el equilibrio mecánico del halo, su relación con la velocidad tangencial de las estrellas en galaxias LSB y, finalmente, cómo un rayo de luz es deflectado por la presencia de DM. Estas últimas condiciones tienen un carácter claramente macroscópico y se expresarán en términos de las propiedades microscópicas: la masa y la longitud de dispersión de las partículas de DM además del número total de partículas contenido en el halo. Así tendremos tres expresiones independientes para las tres variables microscópicas en términos de características que tienen una posibilidad observacional plausible.

3.1. Antecedentes teóricos

3.1.1. Derivando las curvas de rotación observacionales

La distribución de masa en las galaxias puede ser estudiada al medir la velocidad tangencial $v_t(r)$ como una función de la distancia r al centro. Las llamadas curvas de rotación no son resultado de una observación directa sino que la cantidad observable es la componente de la velocidad tangencial relacionada con nuestra línea de visión. Al mapa en el cual estas componentes de v_t son graficadas con respecto a la posición en el espacio (x, y) se le llama Campo de Velocidad Radial.

De acuerdo con el modelo de ajuste *Tilted-ring* [8], los parámetros que definen el Campo de Velocidad son

- Las coordenadas del centro de la galaxia (x_0, y_0) .
- La velocidad del centro de la galaxia respecto al sol, llamada velocidad sistémica v_0 .
- La velocidad circular v_c .
- El ángulo de posición respecto al eje mayor ϕ : tomado en sentido antihorario entre la dirección norte del cielo y el eje mayor de la galaxia.
- El ángulo i entre la normal al plano de la galaxia y la línea de visión, llamado ángulo de inclinación.

Ya que tanto los ángulos de orientación ϕ como la velocidad tangencial v_c pueden ser función del radio r , se asume que la galaxia se puede dividir en una serie de anillos concéntricos los cuales se caracterizan por un valor de i, v_c, ϕ específico. Así que, para un anillo dado, las velocidades tangenciales registradas en un conjunto de coordenadas celestes (x, y) están relacionadas con los parámetros básicos por [8]:

$$v(x, y) = v_0 + v_t(r) \sin(i) \cos(\theta), \quad (3.1)$$

donde θ es el ángulo azimutal en el plano de la galaxia, relacionado con los parámetros i, ϕ, x_0 y y_0 a través de:

$$\cos(\theta) = \frac{-(x - x_0) \sin(\phi) + (y - y_0) \cos(\phi)}{r}, \quad (3.2)$$

$$\sin(\theta) = \frac{-(x - x_0) \cos(\phi) + (y - y_0) \sin(\phi)}{r \cos(i)}. \quad (3.3)$$

Luego, el ajuste (o *fit* en inglés) se lleva a cabo en el lado norte y sur de la galaxia separadamente y entonces se obtienen valores finales de la velocidad tangencial, inclinación y posición de la galaxia al promediar los resultados del **fit** para cada hemisferio.

3.1.2. Derivando las curvas de rotación teóricas

El modelo descrito en la sección anterior es útil para determinar las curvas de rotación según los datos observacionales con los que contamos, tomando en cuenta distintos parámetros que modificarían las velocidades tangenciales de cada galaxia.

Por otro lado, las curvas de rotación que predicen los componentes observables de la materia que contiene una galaxia toman en cuenta la contribución del gas y las estrellas que la constituyen. Para ello contamos con modelos distintos en la literatura, que a continuación se describirán.

Contribución del gas

Esta contribución proviene de los datos fotométricos del disco de gas (HI) el cual se asume infinitamente delgado y cuya masa total está dada por

$$M_{gas} = \frac{4}{3} M_{HI}, \quad (3.4)$$

donde el factor de 4/3 es la densidad del gas corregida por la presencia de Helio, determinada a partir de la nucleosíntesis del Big Bang [14] y el valor de M_{HI} es

$$M_{HI} = 2.36 \times 10^5 D^2 \int S dv [M_{\odot}], \quad (3.5)$$

donde $\int S dv$ es la densidad de flujo del hidrógeno neutral (HI) en unidades de Jy km/s medido del perfil global de HI, tomado de la columna (15) de la Tabla 2 de Verheijen (1965) [65] y D es la distancia de la galaxia en Mpc.

Por otro lado, Randriamampandry y Carignan [52] usan observaciones del VLA (Telescopio *Very Large Array* en Nuevo México) para calcular el perfil de densidad de masa del gas HI usando el paquete de software GIPSY (GNSS-Inferred Positioning System and Orbit Analysis Simulation Software) y los parámetros cinemáticos de anillo inclinado de Blok et al. [22]. El Perfil de HI es corregido también por un factor de 1.4 para tomar en cuenta Helio y otros metales. Los resultados son luego usados en el paquete ROTMOD para calcular la contribución del gas en un modelo para la masa de la galaxia, asumiendo un disco gaseoso infinitamente delgado.

Contribución de las estrellas

Para modelar la contribución proveniente de las estrellas, Randriamampandry [52] usa perfiles de luminosidad en la banda 3.6 micras debido a que ésta posee la mayor parte de la emisión de la población de estrellas viejas y, además, es menos afectada por la presencia de polvo, por lo que representa la mayor parte de la masa estelar. Para convertir el perfil de luminosidad en perfil de densidad de masa, el autor usa el método de Oh [43] el cual consiste en convertir primero las unidades del perfil de luminosidad superficial dado en $\text{mag}/\text{arcsec}^2$ a unidades de L_{\odot}/pc^2 y después usarlo para la conversión a perfil de densidad de masa con la siguiente expresión:

$$\Sigma[M_{\odot}\text{pc}^{-2}] = (M/L)_{*}^{3.6} x 10^{-0.4x(\mu_{3.6}-C^{3.6})}, \quad (3.6)$$

donde $(M/L)_{*}^{3.6} = 0.45$ es la razón luz-masa estelar en la banda de 3.6 micras [56], $\mu_{3.6}$ el perfil de luminosidad superficial y $C^{3.6}$ es solo una constante que se usa para convertir las unidades de $\text{mag}/\text{arcsec}^2$ a L_{\odot}/pc^2 :

$$C^{3.6} = M_{\odot}^{3.6} + 21.56, \quad (3.7)$$

donde $M_{\odot}^{3.6} = 3.24$ es la magnitud absoluta del Sol en la banda 3.6 micras. por otro lado, Brownstein [14] asume que el disco de estrellas está descrito por la ley de Vander Kruit y Searle [64] para la densidad del disco como función de su altura vertical desde el plano de éste, z , dada por:

$$\Sigma(z) = \text{sech}^2(z/z_0)/z_0, \quad (3.8)$$

donde z_0 es llamada la escala de altura vertical del disco estelar y se asume como el 20 % de la escala de longitud exponencial del disco (ver, por ejemplo, [65], Tabla 2, Columna 13).

Entonces, la estructura de los halos de DM puede ser determinada de las curvas de rotación si la contribución del gas y de las estrellas es debidamente entendida. Nótese además, que hemos asumido un razón luz-masa constante, estimada por McGaugh & Schombert (2014) usando la relación bariónica Tully-Fisher para estimar la masa estelar a partir de la masa bariónica menos la masa del gas. El valor medio de su muestra es $M/L = 0.45 \pm 0.15$, valor que es cercanamente de acuerdo con otros modelos, lo que hace que asumir a M/L como constante en la luminosidad 3.6 de la galaxia sea “la estimación más acertada y repetible” [56].

3.2. Deducción de propiedades microscópicas

3.2.1. Equilibrio mecánico

La primera condición a imponer tiene que ver con la expresión que define la condición de equilibrio mecánico del BEC. Esta condición es usada como la primera de las tres expresiones utilizadas en el tratamiento de DM, sin embargo será útil también en el capítulo 4, donde se trata el caso de BSs.

Notemos que en el sistema se suscitan dos cosas: mientras que la gravedad tiende a colapsar el BEC, el Principio de Incertidumbre de Heisenberg y la propia interacción de las partículas que lo conforman, ejercen una presión hacia afuera. Así que el equilibrio mecánico se consigue cuando las presiones asociadas a estos dos procesos son iguales.

La energía del sistema debido a la presencia de $N_{(0)}$ partículas en el estado base está dada por

$$E_{(0)} = \frac{3}{2} \hbar \omega N_{(0)}, \quad (3.9)$$

donde la frecuencia ω está dada por la expresión (2.25). Cabe recordar que en (3.9), no se ha despreciado el término cinético y por tanto no es compatible con la aproximación de Thomas-Fermi [47].

Ya que nuestro sistema es equivalente a un BEC terrestre en el sentido ya mencionado (la trampa es un oscilador armónico tridimensional e isótropo), debemos recordar que aún en el caso ideal de $T = 0$, la presencia de $a \neq 0$ obliga a considerar partículas en estados excitados y no solo en el estado base, una consecuencia física de la presencia de una longitud de coherencia finita [48].

Es entonces que se requiere un formalismo más realista en este sentido que nos obliga a introducir el llamado *depletion term* [47], que es la variable que contiene la información del número de partículas ocupando los estados excitados:

$$N_{(e)} = \frac{8}{3}N \left(\frac{Na^3}{\pi V} \right)^{1/2}. \quad (3.10)$$

Este resultado es válido para cuando el BEC se encuentra atrapado por paredes, no por un oscilador armónico. Así que se vuelve necesario encontrar una expresión para el *depletion term* en nuestro modelo.

Empecemos estableciendo que hay, aproximadamente, una partícula excitada por volumen ξ^3 , siendo ξ la llamada *healing length* [47]. La definición de *healing length* en presencia de paredes dicta: es la distancia a la cual la función de onda tiende a su valor máximo cuando está sujeta a una perturbación localizada. Matemáticamente esto se describe como $\frac{\hbar^2 m}{\xi^2} = nU_{(0)}$. Ahora, bajo la presencia de un potencial atrapante con la estructura de oscilador armónico, esta condición debe incluir la energía resultante de la interacción de cada partícula con la trampa, es decir: $\frac{\hbar^2 m}{\xi^2} = nU_{(0)} + m\omega^2(\xi - \ell)^2/2$. Asumiendo que las energías de la autointeracción y aquéllas provenientes de la trampa son similares en el orden de magnitud, podemos afirmar que $nU_{(0)} \sim m\omega^2(\xi - \ell)^2/2$ y entonces simplemente $\frac{\hbar^2 m}{\xi^2} = 2nU_{(0)}$, por lo que el caso del potencial atrapante tipo oscilador tiene el mismo orden de magnitud que aquél en donde el sistema está confinado a paredes. De hecho, la única diferencia radica en un factor de $\sqrt{2}$. Así que el *depletion term* para nuestro modelo es simplemente

$$N_{(e)} = \frac{2^{7/2}}{3}N \left(\frac{Na^3}{\pi V} \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Esto último nos permite afirmar que, en un esquema simplificado y para el caso en el que un potencial atrapante no trivial está presen-

te, la estructura de la *healing length* es la misma que para el caso homogéneo.

Estas partículas en los estados excitados ejercen una presión que tiene que ser incluida en el cálculo del equilibrio mecánico. Debe ser claro que $N_{(e)}$ partículas en la nube térmica inducen una presión mayor que el mismo número de partículas en el estado base y la razón está relacionada al hecho de que en el estado excitado éstas tienen un momento mayor. Así que podemos conjeturar que la inclusión del *depletion term* se verá reflejada en la predicción de sistemas conformados por más partículas (y por tanto, mayor masa total) que aquellos en donde solo se han incluido partículas en el estado base. En consecuencia, el sistema tendrá un volumen mayor pues las partículas excitadas relacionadas con estados ligados ocupan regiones mayores que aquéllas en el estado base. Es decir, la presencia del *depletion term* nos permite conjeturar que obtendremos sistemas más grandes y masivos que los obtenidos en tratamientos usuales.

Para obtener la energía de las partículas excitadas, hemos ya dejado establecido en la sección 1.2.2 las razones por las cuales ésta también pertenece al oscilador armónico tridimensional que describe la ecuación (2.23). Así, una partícula en el primer estado excitado de este sistema tendrá una energía $\epsilon_{(1)} = \frac{5}{2}\hbar\omega$ y, en consecuencia, la nube térmica simplemente tiene una energía igual a

$$E_{(1)} = \frac{5}{2}\hbar\omega N_{(e)}. \quad (3.12)$$

La energía total, en nuestro modelo, está dada por

$$E_{(T)} = E_{(0)} + E_{(1)}, \quad (3.13)$$

y la presión debida a (3.13) está dada por la expresión $P_{(c)} = -\frac{\partial E_{(T)}}{\partial V}$ y, ya que estamos considerando un cuerpo esféricamente simétrico de volumen V , este parámetro es función de la longitud característica y, por ende, debe ser deducido.

Hasta este momento no hemos usado ninguna característica propia de los halos de DM, pero es ahora cuando se presenta la necesidad de ello, al considerar el contenido de DM en aquellos puntos en los cuales la velocidad rotacional de las estrellas en una galaxia toma su valor máximo, es decir, el cuerpo esférico tendrá un tamaño tal que

cualquier estrella localizada en su superficie tiene una velocidad rotacional cuya derivada (con respecto a la distancia al centro geométrico del halo) es nula. La razón física detrás de esto se explica en la sección 3.2.2, en conexión con uno de los parámetros astronómicos.

La relación funcional entre velocidad y DM está dada por

$$v^2(r) = \frac{GM(r)}{r} \quad (3.14)$$

Aquí $M(r)$ se refiere al total de DM contenida en una esfera de radio r , es decir, $M(r) = M_{(0)}(r) + M_{(e)}(r)$ la suma de las masas de las partículas en el estado base y estados excitados, respectivamente. Ya que nuestro modelo es, matemáticamente, un oscilador armónico isótropo tridimensional, entonces (y suponiendo que únicamente el primer estado excitado está poblado), tenemos que

$$M_{(0)}(r) = \frac{4mN_{(0)}}{\sqrt{\pi}\ell^3} \int_0^r z^2 \exp(-z^2/\ell^2) dz, \quad (3.15)$$

$$M_{(e)}(r) = \frac{8mN_{(e)}}{3\sqrt{\pi}\ell^5} \int_0^r z^4 \exp(-z^2/\ell^2) dz. \quad (3.16)$$

La condición antes mencionada, $dv^2/dr = 0$ nos conduce a:

$$M_{(0)}(r = R) + M_{(e)}(r = R) = \frac{4m}{\sqrt{\pi}\ell^3} \left(N_{(0)}R^3 + \frac{2N_{(e)}}{3\ell^2}R^5 \right) \exp(-R^2/\ell^2) \quad (3.17)$$

Así que, si ahora integramos por partes las ecuaciones (3.15) y (3.16), obtenemos una expresión equivalente a (3.17):

$$\begin{aligned} & \left(N_{(0)}(R/\ell)^3 + \frac{2}{3}N_{(e)}(R/\ell)^5 \right) \exp(-R^2/\ell^2) = \\ & - \left(\frac{N}{2}(R/\ell) + \frac{N_{(e)}}{3}(R/\ell)^3 \right) \exp(-R^2/\ell^2) + \frac{N}{2\ell} \int_0^R \exp(-z^2/\ell^2) dz \end{aligned} \quad (3.18)$$

La integral que observamos en esta última ecuación está relacionada directamente con la llamada integral de probabilidad ($\Phi(z)$), y de todas sus posibles representaciones, usaremos la siguiente:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2^s z^{2s+1}}{(2s+1)!!}. \quad (3.19)$$

Con el objetivo de obtener una expresión analítica, consideramos esta última serie hasta $s = 3$. Una condición adicional ha de imponerse sobre la expresión (3.18) pues la Teoría de gases ultrafríos establece que $N_{(0)} > N_{(e)}$. Finalmente, la ecuación a resolver se reduce a:

$$(R/\ell)^3 - \frac{1}{5}(R/\ell)^5 - \frac{2}{35}(R/\ell)^7 = 0 \quad (3.20)$$

cuya solución es

$$R = 1.67 \ell \quad (3.21)$$

Así que el contenido de DM dentro de la esfera de radio R es

$$M(r = R) = \frac{4mN_{(0)}}{\sqrt{\pi}\ell^3} \left(\frac{\ell^3}{2} \int_0^{1.67} \exp(-w^2)dw - \frac{1.67}{2}(0.061)\ell^3 \right) + \frac{8mN_{(e)}}{3\sqrt{\pi}\ell^5} \left(\frac{3\ell^5}{4} \int_0^{1.67} \exp(-w^2)dw - \frac{14.3}{4}(0.061)\ell^5 \right) \quad (3.22)$$

Recurriendo a las tablas [2], obtenemos que

$$\int_0^{1.67} \exp(-w^2)dw = 0.87. \quad (3.23)$$

Finalmente, la masa buscada es

$$M(r = R) = (0.87)mN \left[1 - \frac{2^{3/2}}{3} \sqrt{\frac{Na^3}{\pi V}} \right]. \quad (3.24)$$

En este momento ya podemos volver a la deducción de la presión del condensado si el volumen lo definimos, por las razones anteriormente expuestas, como $V = \frac{4\pi}{3}(1.67\ell)^3$. El resultado obtenido, finalmente, es

$$P_{(c)} = \frac{6\hbar^2 N}{13.4\pi m R^5} + \frac{6U_{(0)} N^2}{13.4\pi^{5/2} R^6} + \frac{14\hbar^2 N}{10\pi m R^5} \sqrt{\frac{2Na^3}{\pi V}}. \quad (3.25)$$

Esta presión $P_{(c)}$, asociada a las características del condensado tiende a separar las partículas que lo conforman. En equilibrio mecánico, ésta deberá contrarrestarse con la presión asociada a la atracción gravitacional del halo, la cual está directamente relacionada con el equilibrio de un cuerpo esféricamente simétrico con densidad, presión, campo de velocidades y potencial gravitacional ρ , P , \mathbf{v} y Φ , respectivamente. Las ecuaciones correspondientes a la estructura interna del

sistema son [49]:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \nabla \Phi - \nabla P, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.27)$$

Para que el sistema está cerrado, se requiere además la ecuación de estado, es decir, la dependencia funcional entre la presión, densidad, temperatura, etc. El potencial gravitacional newtoniano de un cuerpo esférico de radio R es

$$\nabla \Phi(t, r) = \frac{GM(t, r)}{r} + 4\pi \int_r^R \rho(t, r') dr', \quad (3.28)$$

donde $M(t, r)$ es la masa contenida en una esfera (que coincide con nuestro sistema) de radio r . Ahora consideremos solo la superficie de esa esfera y calculamos el cambio en su potencial gravitacional debido a un cambio en el volumen, proceso por el cual calculamos la presión asociada ($P_{(g)} = -\frac{\partial \Phi}{\partial V}$).

$$P_{(g)} = \frac{GM^2}{4\pi R^4}. \quad (3.29)$$

En general, la presión es una función no constante de la distancia radial [49] y, en consecuencia, debemos identificar el valor de r relacionado con (3.29). Como esta es la presión deducida después de evaluar el potencial gravitacional en la superficie del cuerpo, entonces ésta representa la presión en su superficie. La condición matemática que determina el equilibrio mecánico es la igualdad entre las dos presiones asociadas a las expresiones (3.25) y (3.29).

Como consecuencia de la igualdad $P_{(c)} = P_{(g)}$, se obtiene R como función de m , a y N . En otras palabras, si tenemos el tamaño del halo a través de cualquier tipo de parámetro astronómico o astrofísico, tenemos también la primera de nuestras expresiones requeridas. De hecho, esto proporciona una explicación de índole física para la elección hecha en la deducción del parámetro R . Debido a las observaciones astronómicas existentes en galaxias, se deduce el contenido de materia y el tamaño (como función de la longitud característica ℓ), para halos de DM, en donde la derivada de $v^2(r)$ se anula, justo como lo muestran las expresiones (3.21 y (3.24).

3.2.2. Curvas de rotación

Una vez deducida la primera expresión que relaciona una cantidad macroscópica, R , en función de las demás (microscópicas), nos resulta necesario y natural recurrir a las curvas de rotación de galaxias LSB pues éstas representan uno de los principales orígenes de DM [10]. En consecuencia, debemos incluir la explicación de ellas como parte fundamental del presente trabajo así que en esta sección deduciremos la relación entre estas curvas y el contenido de DM en nuestro modelo.

Consideremos primero la velocidad orbital de una estrella que, de acuerdo con la dinámica newtoniana, está proporcionada por

$$v_t^2(r) = \frac{GM^{(T)}(r)}{r}. \quad (3.30)$$

En esta última expresión $M^{(T)}$ representa la masa total dentro de la órbita de radio r , es decir, incluye tanto la masa bariónica como la materia oscura. Ahora consideraremos la densidad de la masa bariónica dentro del halo ($\rho^{(b)}$) y la DM en sus estados base y excitados ($\rho^{(0)}$ y $\rho^{(e)}$, respectivamente):

$$M^{(T)}(r) = M^{(b)} + \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\rho^{(0)}(r') + \rho^{(e)}(r')] r'^2 dr' d\Omega. \quad (3.31)$$

$$M^{(b)}(r) = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^{(b)}(r') r'^2 dr' d\Omega. \quad (3.32)$$

Es importante señalar que aquí $\rho^{(e)}$ se deduce de la función de onda relacionada al primer estado excitado de un oscilador armónico tridimensional [18].

La expresión (3.30) implica que

$$\frac{d(v_t^2(r))}{dr} = -\frac{v_t^2(r)}{r} + \frac{G}{r} \frac{d(M^{(T)}(r))}{dr}. \quad (3.33)$$

Denotemos por $r = R$, donde $R = 1.67$ según la expresión (3.21)), al valor de la coordenada radial en la cual (3.33) se anula. Entonces

obtenemos la siguiente condición:

$$v_t^2(R) = 4\pi\rho^{(b)}(R)R^2 + \frac{4\pi mNG}{(\sqrt{\pi}\ell)^3} \left[1 + \sqrt{\frac{32a^3N}{3\pi^2\ell^3}} \left(-1 + \frac{2R^2}{3\ell^2} \right) \right] R^2 \exp\left(-\frac{R^2}{\ell^2}\right). \quad (3.34)$$

Podemos ver en esta última expresión que si sabemos el valor de la coordenada radial a la cual la velocidad tangencial tiene su máximo valor, entonces tenemos una segunda expresión (la cual es medible) y que depende de m , a , y N . Es decir, hasta ahora tenemos dos parámetros que pueden ser detectados y medidos experimentalmente, los cuales son funciones de las variables del BEC. La última expresión que requerimos es la deflexión de un rayo de luz debido al contenido de DM.

3.2.3. Deflexión luminosa

La meta ahora es determinar la deflexión de un haz luminoso debido a la presencia de DM. Para un cuerpo esférico con masa total $M^{(T)}$, en el límite de campo débil, el elemento de línea para puntos fuera de este cuerpo es:

$$ds^2 = -\left(1 - 2\frac{M^{(T)}}{r}\right)dt^2 + \left(1 + 2\frac{M^{(T)}}{r}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.35)$$

El origen de coordenadas del sistema coincide con el centro geométrico de nuestro halo esféricamente simétrico. Para propósitos de claridad, consideramos un haz luminoso moviéndose a lo largo del plano $z = 0$ el cual se aproxima al halo viniendo de $x \rightarrow -\infty$. Las condiciones iniciales provocan que tengamos $p^{(z)} = 0$, $|p(y)| \ll |p^{(x)}|$, y $p^{(0)} \approx p^{(x)}$ a lo largo de toda la trayectoria. El parámetro de impacto es $y = R$. En otras palabras, el haz, respecto a su posición en el eje y , tiene una distancia igual al tamaño del halo. Bajo estas condiciones, el ángulo de deflexión queda como [39]

$$\Delta\phi = \frac{4GM^{(T)}}{c^2R}. \quad (3.36)$$

En esta última expresión $M^{(T)}$ incluye la contribución bariónica y la de DM. La contribución al ángulo de deflexión debida únicamente a

la DM ($\Delta\phi^{(dm)}$) es fácilmente calculada notando que la velocidad de rotación en $r = R$ satisface la relación $v^2(r = R) = GM^{(dm)}/R$ [12]. Ya que la masa contenida dentro de la esfera de radio R ya ha sido calculada, ver (3.24), el ángulo de deflexión correspondiente entonces es

$$\frac{3.48mNG}{c^2R} = 2\pi \frac{v^2(r = R)}{c^2}. \quad (3.37)$$

Claramente ésta es la tercera expresión buscada que relaciona m , a , y N con un parámetro que puede ser detectado astronómicamente, el lado derecho de nuestro último resultado.

Capítulo 4

Estrellas bosónicas: deducción de masas críticas y propiedades microscópicas

El concepto de estrella bosónica (BS) surge a finales de los años 60 [32, 55] y por un tiempo su interés simplemente se centraba en entender las leyes que rigen su comportamiento. La estructura de la autointeracción de sus constituyentes básicos es uno de los elementos (la simetría espacio-temporal también debe ser incluida) que definen el tipo de BS a modelar, cargada, rotando, etc. Un punto a destacar en estos modelos se relaciona con la existencia de una cota máxima para la masa que define una región debajo de la cual una BS no puede colapsar en un agujero negro [57].

Los gases ultrafríos han sido considerados para la descripción de DM, como ya se ha mencionado, y también para las BSs [13, 16], situaciones que pueden ser consideradas en este sentido, teóricamente hermanas. En este contexto la descripción actual para estos sistemas acepta la posibilidad de una masa infinita encerrada en un volumen finito (ver expresión (95) en [16]).

Es entonces cuando surge la pregunta acerca del origen de la discrepancia entre estos dos modelos: ¿se debe solo a la diferencia intrínseca en la forma de describir a las BSs o hay algo más detrás de ello? En esta sección, donde analizamos BSs en el contexto de gases ultrafríos en el régimen de gas diluido, se pretende dar una respuesta analítica a esta pregunta haciendo uso todo el tiempo de las condiciones matemáticas que definen la situación diluida. Probaremos que no solo hay un límite

superior para la masa, sino uno inferior. Estos dos parámetros surgen de la restricción física fundamental detrás de nuestro modelo, en la cual el volumen de la estrella, el número de partículas que lo conforman y la longitud de dispersión, relacionada con la autointeracción, satisfacen una desigualdad.

Con el objetivo de proporcionar una motivación física más profunda, procederemos a dar un argumento simple de por qué debe existir un límite superior para la masa de una BS, basado en los fundamentos de gases bosónicos ultrafríos en el régimen de gas diluido. Para ello, asumamos de principio la validez de (95) en [16] para una BS: que para un radio finito, denotado por R_{min} , el sistema no tiene un límite superior para su masa. La masa de la estrella se denota por M y puede ser escrita como el producto de la masa de una sola partícula (m) veces el número total de partículas (N), $M = mN$. Tenemos que remarcar el hecho de que nuestra teoría requiere el cumplimiento de la condición de gas diluido en todo momento, la cual es la base del modelo que estamos considerando [48]. Este requerimiento puede ser escrito de la siguiente forma: $(V/N)^{1/3} > a$, donde V es el volumen del sistema y a la longitud de dispersión de las partículas involucradas, la cual es la responsable de la descripción de las interacciones entre pares que tienen lugar en el gas desde nuestra perspectiva. Claramente, para una longitud de dispersión no nula, si N crece sin ningún tipo de restricción, alcanzará un valor $N^{(max)}$ tal que $(V/N^{(max)}) = a$, mientras que para $N^{(+)} > N^{(max)}$ tenemos que $(V/N^{(+)}) < a$. En otras palabras, la aseveración de que una teoría basada en la ecuación de Gross-Pitaevskii-Poisson, predice la posibilidad de estrellas con masas ilimitadas implica que hemos violentado una de las premisas fundamentales de la teoría, el requerimiento del régimen de gas diluido.

4.1. Condiciones generales del modelo

Tenemos, entonces, N partículas bosónicas cada una de ellas con masa m y autointeracción codificada a través de la longitud de dispersión a , los cuales definen un cuerpo esféricamente simétrico con radio R . Asumiremos que la temperatura de este sistema es menor que su correspondiente condensación y entonces lo podremos describir en el

contexto de gases ultrafríos diluidos [47].

El potencial atrapante de las partículas bosónicas (en el estado base) que componen a la BS se interpreta, justo como en el caso de halos de DM, como un oscilador armónico isótropo tridimensional. De tal forma, regresemos a la ecuación de movimiento (2.23), a saber,

$$\tilde{\mu}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + \frac{m\tilde{\omega}^2}{2}r^2\psi. \quad (4.1)$$

Siendo la energía del sistema, debido a N partículas en el estado base:

$$E_{(0)} = \frac{3}{2}\hbar\tilde{\omega}N - \frac{NU_{(0)}}{\sqrt{\pi^3}\ell^3}, \quad (4.2)$$

donde

$$\tilde{\omega} = \frac{\hbar}{m\ell^2} \quad (4.3)$$

Cabe mencionar que para el caso de la BSs, tomar en cuenta únicamente partículas en el estado base es suficiente para deducir las cotas mínima y máxima del sistema, por lo que para este apartado el número total de partículas se tomará exclusivamente en el estado base.

Ya que, contrario al caso de DM, no contamos con datos astronómicos o astrofísicos que nos permitan deducir las propiedades microscópicas de una BS, nos limitaremos a imponer, sobre el sistema, la condición de equilibrio mecánico únicamente. Análogo al proceso que seguimos en el caso de DM, la presión asociada a la naturaleza del condensado está dada por $P_{(c)} = -\frac{\partial E_{(0)}}{\partial V}$. En este punto vale la pena hacer una pausa para especificar, en este caso, cuál será el volumen del cuerpo esférico asociado a una BS.

En la sección anterior proporcionamos un argumento para relacionar la longitud característica asociada al oscilador armónico (l) con el radio del condensado (R), véase la expresión (3.21). Sin embargo, la ausencia de datos adicionales en el caso de BSs, nos obliga a expresar la dependencia de una con la otra, para este caso, como:

$$R = \alpha l. \quad (4.4)$$

De tal forma que la presión del condensado (que tiende a expandir el sistema) es:

$$P_{(c)} = \frac{3\alpha^2\hbar^2 N}{4\pi m R^5} + \frac{3\alpha^3 U_{(0)} N^2}{4\pi^{5/2} R^6}. \quad (4.5)$$

Esta presión deberá de igualarse, en condiciones de equilibrio mecánico, con la presión asociada al potencial gravitacional, véase (3.29), de tal forma que, al hacerlo, obtenemos una expresión para el radio del condensado (R), en términos de las propiedades microscópicas de éste (N , m y a):

$$R = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2 \hbar^2}{G m^3 N} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16 a N^2 G m^3}{3 \alpha \sqrt{\pi} \hbar^2}} \right\}. \quad (4.6)$$

Por otro lado, la condición de gas diluido implica que $(\frac{V}{N})^{1/3} > a$, con lo cual podemos afirmar que

$$\frac{3}{2} L \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{16 \alpha N^2}{3 \sqrt{\pi} L}} \right\} > \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} N^{4/3}, \quad (4.7)$$

donde $L \equiv \frac{\alpha^2 \hbar^2}{G m^3 a}$.

4.2. Cotas sobre las masas

Reescribamos (4.7) de forma tal que $\beta > \gamma$, donde

$$\beta \equiv \pm \sqrt{1 + \frac{16 \alpha N^2}{3 \sqrt{\pi} L}}, \quad (4.8)$$

y

$$\gamma \equiv \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{N^{4/3}}{L} - 1. \quad (4.9)$$

Así, tenemos tres posibilidades implícitas en (4.7):

1. $\gamma > 0 \wedge \beta > \gamma$
2. $\gamma < 0 \wedge |\beta| > |\gamma|$
3. $\gamma < 0 \wedge |\beta| < |\gamma|$

Supongamos el caso (3), entonces tenemos que

$$-\gamma = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{N^{4/3}}{L} = |\gamma| > 0. \quad (4.10)$$

Lo cual implica que $|\gamma| < 1$; sin embargo, sabemos que $|\beta| > 1$ (véase la definición (4.8)) y llegamos a una contradicción, pues entonces $|\beta| > |\gamma|$, lo cual nos orilla a descartar esta última posibilidad.

Nótese que las condiciones (1) y (2) resultan en una sola al elevar ambos miembros de la desigualdad al cuadrado, con lo que obtenemos:

$$\frac{16\alpha N^2}{3\sqrt{\pi}L} \geq \frac{4}{9L^2} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \frac{N^{8/3}}{L^2} - \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{N^{4/3}}{L}. \quad (4.11)$$

Definamos, entonces, un polinomio sobre una nueva variable $z = N^{2/3}$:

$$P(z) = \frac{z^2}{L} \left\{ \frac{4}{9L} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} z^2 - \frac{16\alpha}{3\sqrt{\pi}} z - \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \right\}, \quad (4.12)$$

donde la condición de gas diluido se cumple sii $P(z) \leq 0$. De las cuatro raíces de (4.12), la única físicamente posible es

$$z_{(+)} = \frac{6\alpha L}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{2/3} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{16\alpha^2}} \right\}. \quad (4.13)$$

Hemos obtenido así una cota máxima para la masa total del condensado, a saber:

$$M_{(+)} = mN_{(+)} = mz_{(+)}^{3/2} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{6}{\sqrt{\pi}} \right)^{3/2} (\alpha L)^{3/2}. \quad (4.14)$$

Sin embargo, no podemos olvidarnos del hecho de que esta solución tiene como premisa el hecho de que

$$\frac{2}{3} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{N^{4/3}}{L} > 1, \quad (4.15)$$

lo cual implica una cota mínima también para el número de partículas y, por tanto, para la masa total de una configuración de BEC:

$$M_{(1)} = m \left[\frac{3}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} L \right]^{4/3}. \quad (4.16)$$

Dicho de otra forma, hemos obtenido cotas mínima y máxima para la masa total de una BS a través de imponer y verificar en todo momento el límite de gas diluido, premisa de trabajo que no puede ser olvidada si queremos modelar sistemas vía la ecuación de Gross-Pitaevskii.

4.3. Propiedades microscópicas

Análogamente al caso de DM, estamos interesados en deducir las propiedades microscópicas de los sistemas que conforman una BS. Debido a que dichos objetos compactos, hasta este momento, son puramente teóricos, nos vemos obligados a usar otros caminos en donde no intervengan cantidades observables puesto que éstas son inexistentes en este caso. Por ejemplo, regresando a la ecuación (4.6), podemos estimar, en una primera aproximación, el parámetro a/m^3 para un radio R dado:

$$\frac{a}{m^3} = \frac{1}{12} \frac{G\sqrt{\pi}}{\alpha^3 \hbar^2} R^2. \quad (4.17)$$

Observando el comportamiento de este parámetro para las partículas que conforman halos de DM y para átomos de materia usual, como función de la masa de cada partícula, podemos notar que éste es el mismo para ambos sistemas. Entonces es plausible que las partículas que conformen BSs tengan el mismo comportamiento para este parámetro y, así, es posible ahora comparar el valor de dicho parámetro en una gráfica para predecir el valor de la masa m de una partícula en el sistema de BS correspondiente, para radios típicos de estrellas conformadas por materia bariónica.

En particular, usaremos los valores de a y m para las galaxias LSB correspondientes al capítulo 3 y reportados en [30] así como para átomos de Na, ^{41}K y Rb [47].

Una vez establecidos los órdenes de magnitud para estos parámetros, podremos expresar las cotas mínima y máxima de las masas de la estrellas bosónicas de forma explícita recordando siempre que éstas son una consecuencia inexorable de haber impuesto la condición de

gas diluido.

Capítulo 5

Resultados y conclusiones

5.1. Materia oscura como condensado

Ahora es momento de retomar las ecuaciones principales que, para el caso de halos de materia oscura, son la igualdad entre (3.25) y (3.29), así como las expresiones (3.34) y (3.37), todas funciones de los parámetros microscópicos N , a y m . Nótese que hemos obtenido tres ecuaciones con tres incógnitas, por lo que es posible deducir los valores para éstas últimas; para obtenerlos fue necesario usar los valores para las velocidades de rotación de estrellas en catorce galaxias reportadas en [36] y los valores correspondientes se muestran en el Cuadro 5.1.

Resulta importante, con el objetivo de comprender más a fondo estas predicciones, calcular el error estadístico para los parámetros m y a puesto que, bajo el supuesto de que todas estas catorce galaxias contienen materia oscura proveniente de un solo tipo de partícula de materia exótica, los valores deducidos no deberían tener una gran dispersión en el sentido estadístico. Procedemos, así, a calcular la desviación estándar (δ) así como la razón entre la varianza y el cuadrado del valor promedio de los parámetros a y m , los cuales se muestran en el cuadro 5.2:

	Promedio \bar{x}	Desviación Estándar δ	δ/\bar{x}	$(\delta/\bar{x})^2$
m	26.0 eV/c ²	12.9	0.50	0.24
a	6.7 x 10 ⁻⁶ m	1.5 x 10 ⁻⁶	0.22	0.05

Cuadro 5.2: *Error estadístico para los parámetros de m y a para partículas de materia oscura.*

Es claro que el error estadístico, codificado arriba, corresponde al 24 % para la masa de la partícula de materia oscura mientras que para

Galaxia	v	R	Nm	m	Δm	N	a	$(V/N)^{1/3}$
			10^9			10^{73}	10^{-6}	10^{-6}
	[km/s]	[kpc]	$[M_\odot]$	[eV/c ²]	[eV/c ²]		[m]	[m]
N0055	86.8	9.82	31.1	21.4	6.2	161.6	7.6	41.6
N0300	97.	9.53	37.7	21.2	8.6	198.3	6.9	37.7
N1090	176.	11.28	146.9	16.8	4.4	975.9	4.8	26.3
N3198	157.	14.05	145.6	15.5	1.4	1049.1	5.8	31.9
N6015	166.	21.04	243.8	12.5	2.3	2179.4	6.9	37.5
U8550	57.8	4.39	6.2	35.5	8.4	19.3	6.9	37.8
U9037	160.0	19.46	209.5	13.1	4.	1784.5	6.8	37.0
DDO64	46.4	2.08	1.9	54.5	9.	3.9	5.6	30.6
U5005	97.1	17.97	71.2	15.4	10.2	514.8	9.5	51.8
U5750	77.6	11.43	28.9	20.4	15.8	157.7	8.9	48.8
U731	73.4	8.19	18.5	24.5	7.0	84.4	7.9	43.1
N2366	53.7	4.16	5.0	37.2	11.1	15.1	7.1	38.8
N3274	82.6	1.89	5.4	49.5	5.6	12.2	3.5	19.0
N5023	82.9	6.15	17.8	27.4	3.9	72.2	6.2	34.1

Cuadro 5.1: *Parámetros microscópicos para partículas de materia oscura y verificación del cumplimiento de la condición de gas diluido para estos parámetros.*

la longitud de dispersión es apenas el 5 %, casi cinco veces más pequeño. En otras palabras, el modelo proporciona valores consistentes para estos dos parámetros mientras que el número total de partículas varía hasta en dos órdenes de magnitud, un resultado esperado pues éste tendría que ser un parámetro propio de cada galaxia, no así de la partícula en cuestión.

Destacamos el hecho de que, en este trabajo, no imponemos ninguno de los valores correspondientes a las propiedades microscópicas del BEC sino que los hemos calculado.

Una segunda prueba a la validez del modelo consiste en notar que el formalismo codificado en nuestra expresión fundamental (2.23) requiere el cumplimiento de la condición de gas diluido, sin lo cual las interacciones que comprendan más de dos partículas se volverían relevantes en la descripción del sistema. Esta condición, como ya se ha visto, está dada por

$$\left(\frac{V}{N}\right)^{1/3} > a, \quad (5.1)$$

y nuestros cálculos muestran que la condición es efectivamente, satis-

fecha.

Resumiendo, se ha modelado materia oscura (DM) como un condensado de Bose-Einstein considerando los efectos de la nube térmica. Por otro lado, los efectos de la interacción gravitacional se han interpretado como un potencial atrapante tipo oscilador armónico isótropo tridimensional mientras que la interacción a corto alcance para bajas energías (es decir, la interacción por pares) también ha sido considerada. La meta principal ha sido la deducción de las propiedades microscópicas, a saber, el número de partículas total en el sistema N , la masa m y la longitud de dispersión a asociadas a las partículas que conforman el condensado correspondiente. Este objetivo se logró introduciendo tres condiciones físicas macroscópicas relacionadas con el halo: equilibrio mecánico del sistema, el hecho de que las curvas de rotación de estrellas pertenecientes a galaxias LSB presenten un máximo global y, finalmente, la deflexión de un haz de luz debido a la presencia de materia oscura. Las expresiones correspondientes nos permitieron expresar las características propias de las partículas en términos de parámetros astrofísicos detectables. Finalmente, el modelo fue aplicado en datos observacionales de catorce galaxias LSB y de esta manera obtuvimos valores para los parámetros microscópicos involucrados. Los valores deducidos muestran un error de 24 % para la masa de la partícula que conforma DM y 5 % en relación a la longitud de dispersión de la misma.

Estos valores presentan un comportamiento que resulta fundamental para deducir las propiedades microscópicas de las partículas que teóricamente conformarían estrellas de bosones, como ya se ha mencionado y como se explicará más profundamente en la siguiente sección.

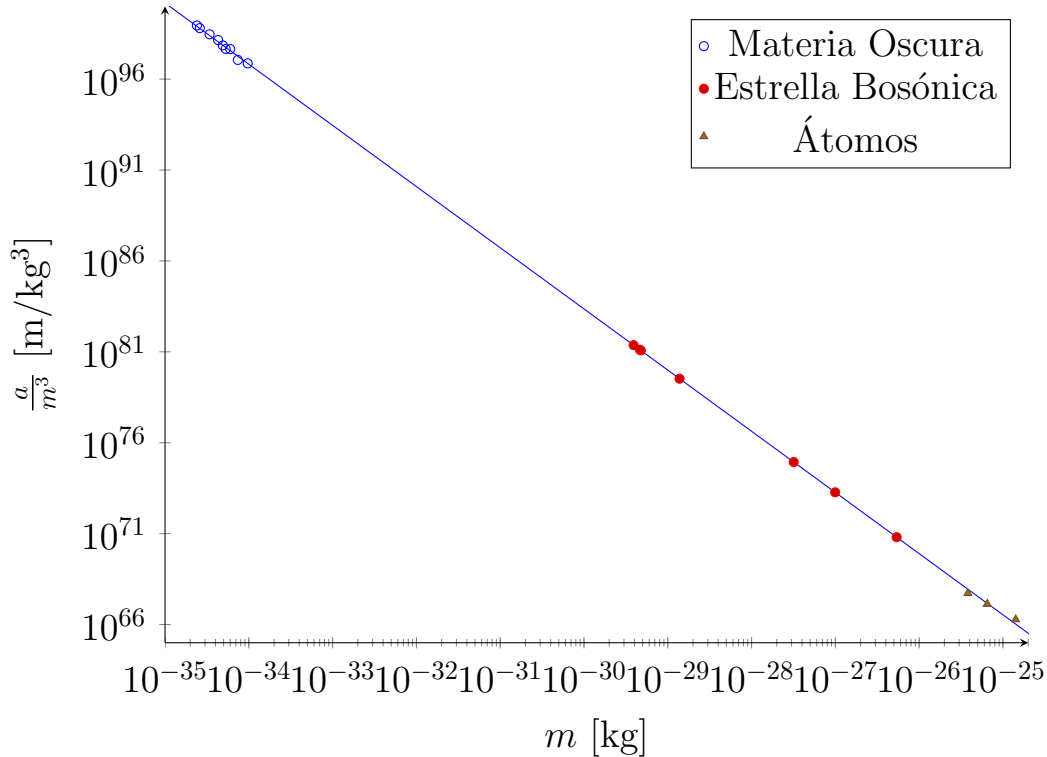
5.2. Estrellas bosónicas newtonianas

Debido a que resultó fundamental el análisis de los órdenes de magnitud para las propiedades microscópicas de las partículas que conforman halos de DM, era natural adentrarse en las mismas aguas que corresponden a las partículas de BSs. Como se mencionó en la sección 4.3, requerimos mirar la ecuación (4.17), la cual es únicamente función de R , el radio de la estrella. Nótese que la elección de un valor para

R define, unívocamente, el valor de a/m^3 . En este punto notamos que este parámetro, tanto para partículas bariónicas tales como átomos de Na, K y Rb, así como para partículas exóticas que forman halos de DM descritas en el capítulo 3 –usando los datos reportados en [30]–, la gráfica de a/m^3 versus m en una versión logarítmica describen una línea recta. Debido a esto, introducimos una suposición adicional: la relación a/m^3 como una función de m constituye una expresión fundamental tanto para materia bariónica como exótica. Entonces, al escoger un valor de R obtendremos un único valor de a/m^3 y, recurriendo a la gráfica a continuación mostrada, deducimos el valor de m para BSs y, en consecuencia, el de a .

Es necesario utilizar un ajuste de rectas por mínimos cuadrados [42] para obtener la curva que determine los valores correspondientes de la masa m de una partícula que pertenezca a una estrella de bosones, con lo cual obtenemos la siguiente gráfica:

Curva logarítmica de a/m^3 vs m



La principal ecuación es ahora (4.17) con la cual es posible, una vez que tenemos el valor para m , establecer el valor de a asociado a la partícula de una BS. Hecho esto, los valores para las cotas en las

masas establecidos en las ecuaciones (4.14) y (4.16) pueden obtener un carácter explícito, y se especifican en el cuadro 5.3.

Estrella	Radio R [m]	a/m^3 [m/kg ³]	m [MeV/c ²]	a [m]	N_1	N_+
Enana blanca	$6. \times 10^6$	6.382×10^{70}	$3. \times 10^3$	$1. \times 10^{-8}$	1.63×10^{39}	$9. \times 10^{44}$
Enana café	4.2×10^7	1.876×10^{73}	5.6×10^2	1.85×10^{-8}	6.15×10^{41}	7.14×10^{47}
Sol	$7. \times 10^8$	8.686×10^{74}	1.8×10^2	2.81×10^{-8}	3.38×10^{43}	6.47×10^{49}
Gigante roja	5.6×10^{10}	3.335×10^{79}	7.8	8.82×10^{-8}	2.1×10^{48}	1.57×10^{55}
Betelgeuse	8.213×10^{11}	1.195×10^{81}	2.7	1.3×10^{-7}	8.69×10^{49}	1.05×10^{57}
Supergigante	3.5×10^{11}	1.303×10^{81}	2.6	1.31×10^{-7}	9.52×10^{49}	1.17×10^{57}
NML Cygni	1.148×10^{12}	2.336×10^{81}	2.2	2.05×10^{-8}	1.75×10^{50}	2.32×10^{57}

Cuadro 5.3: *Parámetros microscópicos para partículas que conforman estrellas de bosones de distintos radios y cotas en la masa total de dichas estrellas.*

Estos resultados muestran que, bajo la teoría de gases ultrafríos, la predicción de la relación entre el radio del sistema y el parámetro a/m^3 es única. De hecho, nótese que estrellas con diferentes radios requieren partículas exóticas con distintas masas y que éstas muestran una discrepancia en cinco órdenes de magnitud entre ellas. Notamos también que los valores para m y a en este caso están muy lejos de aquéllos para partículas de DM (véase la sección anterior), al menos en 4 órdenes de magnitud en el parámetro de la masa de las partículas para el caso de estrellas enormes como Betelgeuse.

Podríamos aceptar, hasta este momento, la posible situación en la que existiera más de un tipo distinto de partícula exótica. Esta suposición abre la posibilidad de tener varias partículas exóticas, una responsable de formar halos de DM y opciones adicionales definiendo BSs con radios distintos. Si asumimos, por el contrario, que solo existe un tipo de partícula no bariónica, entonces debemos aceptar que hay una única estructura posible conformada por partículas exóticas.

Resumiendo, hemos modelado estrellas bosónicas como condensados de Bose-Einstein con el mismo esquema matemático que para halos de materia oscura, recurriendo constantemente al cumplimiento de la condición de gas diluido, pero esta vez considerando únicamente partículas en el estado base, como primera aproximación. Se han deducido cotas inferiores y superiores para la masa total de estas con-

figuraciones las cuales aparecen como una consecuencia natural de las condiciones matemáticas que definen nuestro modelo. Los valores deducidos, sin embargo, muestran una fuerte dependencia en la elección del radio de la BS, un hecho que implica que si aceptamos la posibilidad de tener estrellas bosónicas con distinto radio, entonces el presente trabajo concluye que debe existir una diversidad de partículas exóticas. Pero si aceptamos el hecho de que solo existe un tipo de partícula exótica y ésta se relaciona con las configuraciones de halos de materia oscura, entonces nuestros resultados implican que un condensado de Bose-Einstein diluido evita la formación de estructura subgaláctica, hecho que ha sido discutido al inicio del presente trabajo.

5.3. Gas diluido y límite de Thomas-Fermi

Ya hemos mencionado que los modelos usuales de materia oscura asumen como válida la aproximación de Thomas Fermi (T-F), [13] y [16]. Ésta toma en cuenta que, para sistemas suficientemente grandes, la expresión para la energía del estado base puede ser obtenida a partir de despreciar el término de energía cinética en la ecuación de G-P, con lo cual simplemente tendríamos

$$[V(\mathbf{r}) + U_0|\psi(\mathbf{r})|^2]\psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}). \quad (5.2)$$

Esta aproximación da una descripción bastante buena de las propiedades de una nube de BEC cuando $Na/R > 1$. Sin embargo, en un número importante de problemas de interés en la Física, la energía cinética juega un papel preponderante [47]. Debido a que esta condición involucra no solo a N sino también a los parámetros microscópicos adicionales, nos es imposible suponer su validez en el presente trabajo. En otras palabras, nuestro modelo no contiene información previa acerca del comportamiento de la longitud de dispersión a o del número total N de partículas en el condensado; de hecho, ese es uno de los objetivos: deducirlos a partir de parámetros macroscópicos, por lo que resulta imposible introducir esta suposición adicional y recuperar los resultados reportados en la literatura que relaciona materia oscura con BECs en el límite de T-F.

5.4. Gas diluido y método variacional

En la ausencia interacciones entre las partículas, se puede aplicar un cálculo variacional basado en una función prueba gaussiana [47]. Así, el estado más bajo de una partícula individual tiene la función de onda:

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{3/4}(a_1 a_2 a_3)^{1/2}} e^{-x^2/2a_1^2} e^{-y^2/2a_2^2} e^{-z^2/2a_3^2}, \quad (5.3)$$

donde las longitudes de oscilación $a_i (i = 1, 2, 3)$ están dadas por $a_i^2 = \hbar/m\omega_i$ y la densidad de distribución, $n(\mathbf{r}) = N\phi_0(\mathbf{r})^2$, es claramente una gaussiana. Un estimado en la Teoría de Perturbaciones para la energía del sistema proporciona:

$$E \approx N \sum_i \frac{\hbar\omega_i}{2} + \frac{N^2}{2} \langle 0, 0 | \hat{W} | 0, 0 \rangle, \quad (5.4)$$

donde

$$\langle 0, 0 | \hat{W} | 0, 0 \rangle = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \int d\mathbf{r} |\phi_0(\mathbf{r})|^4 \quad (5.5)$$

es la energía de interacción de dos partículas en el estado base del oscilador. Esta es una buena aproximación siempre que la energía de interacción por partícula sea pequeña comparada con la energía del punto cero. Conforme la interacción se vuelve más fuerte, la nube se expande y entonces la frecuencia correspondiente del oscilador se ve modificada.

Es solo en este sentido que existe una similitud entre nuestro modelo y una aproximación a partir de métodos perturbativos. Examinando la ecuación (2.25) vemos que, efectivamente, la frecuencia del oscilador armónico tridimensional se ve reducida por el término U_0 que depende del valor de la longitud de dispersión a . En otras palabras, ambos tratamientos son similares, al menos en el hecho de que consideran al sistema atrapado por un potencial de oscilador armónico isótropo tridimensional.

Capítulo 6

Trabajo a futuro

Una vez obtenidos los resultados analíticos, el trabajo a futuro, actualmente en desarrollo, se centra en dos líneas complementarias entre sí y complementarias también con el trabajo presentado aquí: una deducción analítica alternativa de los parámetros microscópicos y una deducción a partir de simulaciones numéricas para los mismos parámetros en el modelo de Materia Oscura como Condensado de Bose-Einstein.

Dicho trabajo se realiza en colaboración con el Dr. Ertan Glöklü¹ y Želimir Marojević², del Centro de Tecnología Espacial Aplicada y Microgravedad (ZARM por sus siglas en alemán) en Bremen, Alemania.

6.1. Trabajo analítico

La idea principal es aplicar un proceso variacional alternativo al procedimiento analítico que se hizo en el actual trabajo, comenzando con el operador Hamiltoniano Gran-Canónico [24]:

$$K \equiv H - \mu N = \int dV \psi^\dagger (T + V_{ext} - \mu) \psi + \frac{2\pi a \hbar^2}{m} \int dV \psi^\dagger \psi^\dagger \psi \psi, \quad (6.1)$$

donde H es el hamiltoniano, N el número de partículas en el sistema, μ el potencial químico, $T = -\hbar^2 \nabla^2 / 2m$ la energía cinética y $V_{ext} = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ el potencial atrapante, de acuerdo con la interpretación de los efectos de la autogravitación en un halo de materia oscura efectuada en 2.1 con una longitud característica $\ell_{(0)} = \sqrt{\hbar / m \omega_{(0)}}$.

¹ertan.goeklue@zarm.uni-bremen.de

²zelimir.marojevic@zarm.uni-bremen.de

Una vez obtenida la expresión para la energía del condensado, imponer solo una condición al sistema: el equilibrio mecánico. A partir de ello, se obtendrá una expresión para la velocidad tangencial de una partícula de materia oscura en términos de los parámetros microscópicos a determinar.

El procedimiento subsecuente se basa en que si conocemos la cantidad de materia bariónica contenida en una galaxia dada, podremos aplicar un procedimiento de ajuste (*fitting* en inglés) a través de algún software (por ejemplo, GNUPLOT) y de la ecuación [62]:

$$v_{DM}^2 = v_c^2 - \Upsilon_* v_d^2 + \eta v_{HI}^2. \quad (6.2)$$

En esta ecuación, las velocidades involucradas del lado derecho son todas adjudicables a cantidades observables, mientras que la velocidad del lado izquierdo, v_{DM} , es la cantidad que depende de los parámetros microscópicos a ajustar.

6.2. Trabajo numérico

Por otro lado, el trabajo correspondiente a simulaciones numéricas se centra en buscar funciones propias para el hamiltoniano:

$$H = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 - Gm^2 \int_V dr \frac{|\psi|^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \gamma |\psi|^2 + mU(\mathbf{r}), \quad (6.3)$$

donde el potencial newtoniano está determinado por

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r})_{bar}, \quad (6.4)$$

donde ρ_{bar} está dada en coordenadas cilíndricas por:

$$\rho(r, z) = \Sigma(z) [\Sigma_{stars}(r) + \Sigma_{gas}(r)], \quad (6.5)$$

donde $\Sigma_{stars}(r)$ y $\Sigma_{gas}(r)$ están dados según los modelos descritos en 3.1.2. La idea es resolver el sistema para distintos valores de $m = m^{DM}$ y a_s^{DM} con el código para un paquete de simulación desarrollado dentro del proyecto ATUS para resolver la ecuación de Gross-Pitaevskii, el cual fue originalmente pensado para modelar experimentos de interferometría atómica.

Apéndice A

Derivación de la ecuación de Gross–Pitaevskii

En este apéndice se muestra a detalle la derivación de la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo, la cual describe las propiedades a temperatura cero de un gas de Bose no uniforme cuando la longitud de dispersión a es mucho menor que el espaciamiento medio entre partículas [47]. Para un sistema completamente condensado todas las partículas están en el mismo estado individual $\phi(\mathbf{r})$ tal que $\int d^3r |\phi(\mathbf{r})|^2 = 1$. Si la interacción entre partículas se aproxima mediante campo medio (o aproximación de Hartree), la función de onda que describe al condensado es el producto simetrizado de las funciones de onda de una sola partícula, $\phi(\mathbf{r})$:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i). \quad (\text{A.1})$$

Esta función de onda se verá influenciada por la energía cinética, la energía potencial y la energía de campo medio $U_0 \equiv \frac{4\pi\hbar^2}{m}$ que ejercen $(N - 1)$ partículas del sistema sobre la restante. El hamiltoniano correspondiente se puede escribir:

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right) + U_0 \sum_{i < j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (\text{A.2})$$

Usar directamente este hamiltoniano para encontrar la función de onda del BEC es un problema verdadera difícil; en vez de ello podemos usar un tratamiento variacional: asumimos una función semilla $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N}\phi(\mathbf{r})$ bajo la condición de normalización $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$. Despreciando términos del orden de $1/N$ (pues asumimos gran número

ro de partículas), la funcional de energía para la función de onda de N partículas está dada por

$$E(\phi, \phi^*) = N \int d^3\mathbf{r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r})|\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}NU_0|\phi(\mathbf{r})|^4 \right) \quad (\text{A.3})$$

Así que ahora la función de onda solución puede ser hallada vía la minimización de la funcional bajo variaciones de ϕ bajo la restricción de número de partículas constante, $\int d^3r |\phi(\mathbf{r})|^2 = 1$. Sea μ el multiplicador de Lagrange a usar:

$$X(\phi, \phi^*) = E(\phi, \phi^*) - \mu N \int d^3r |\phi(\mathbf{r})|^2. \quad (\text{A.4})$$

Para encontrar el mínimo en la variación de X imponemos $\delta X = 0$ y, usando solo términos lineales en $\delta\phi$:

$$\delta X = N \int d^3\mathbf{r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\phi \nabla\delta\phi^* + V(\mathbf{r})\phi\delta\phi^* + NU_0|\phi|^2\phi\delta\phi^* - \mu\phi\delta\phi^* \right) + c.c. \quad (\text{A.5})$$

La función de onda tendrá una parte real y otra imaginaria, cuyas variaciones deben ser independientes, es decir, $\delta X = 0$ para $\delta\phi$ y $\delta\phi^*$, y entonces

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + U_0|\Psi(\mathbf{r})|^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = \mu\psi(\mathbf{r}), \quad (\text{A.6})$$

que es precisamente la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo, una ecuación tipo Schrödinger no lineal donde el potencial total consiste en el potencial externo $V(\mathbf{r})$ y el término no lineal $U_0|\Psi(\mathbf{r})|^2$ que describe el potencial de campo medio de $(N - 1)$ átomos. Además, el valor propio μ aunque es el potencial químico, no se trata de la energía promedio por partícula, como lo sería en una ecuación lineal.

Agradecimientos

Hasta aquí llegan las veinte mil leguas de viaje submarino; gracias por llegar hasta el final.

Decía Carl Sagan que “somos el medio para que el cosmos se conozca a sí mismo”. Pues bien, gracias a los colaboradores del presente trabajo: a mi asesor Abel Camacho que me ayudó a conocer del cosmos cómo empezar a surfear por sus grandes olas, a Sergio Gutiérrez por ir todo el tiempo a la par nadando juntos, a Ertan Glöklü por hacer posible juntar dos océanos, a Želimir Marojević por ser mentor y exigencia de una nueva embarcación, la numérica; gracias también a todos mis colegas físicos, los que ayudan a describir el mar, los que son más hábiles y construyen embarcaciones, los que hacen ameno el viaje, los que te retan a sumergirte más profundo y gracias también a los que hacen parecer que la Física es un juego de niños.

Gracias a mis sinodales Darío Núñez y Mario Rodríguez por sus invaluable correcciones en el rumbo de esta embarcación y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para la realización de mis estudios de Maestría (CVU/número de becario: 660893/574365).

“La Física no es lo más importante. El amor lo es”, me enseñó un Feynman y un Orlando Guzmán también. Gracias a mi familia, la de sangre y la que he acumulado por decisión propia en el camino: los Carvente, los Mendoza, los Medina, los Palafox, una López y una Mar (pero qué conveniente apellido). Mi amor por ustedes se adentra hasta donde el mar comienza a hervir.

Gracias, por último, a aquéllos que entienden que el conocimiento es un poder que otorga libertad, un mundo aparte (como el mar para el capitán Nemo); a aquéllos que forman las neuronas del cosmos: la parte del Universo que es consciente de sí mismo.

Bibliografía

- [1] K. Abazajian. Production and evolution of perturbations of sterile neutrino dark matter. *Phys. Rev. D*, 73:063506, 2006.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Inc., 1970.
- [3] P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. and Astrophys.*, 594:A13, 2016.
- [4] J. R. Anglin and W. Ketterle. Bose–Einstein condensation of atomic gases. *Nature*, 416:211, 2002.
- [5] M. R. Baldeschi, G. B. Gelmini, and R. Ruffini. On massive fermions and bosons in galactic halos. *Phys. Lett. B*, 122:221, 1983.
- [6] C. Barceló, S. Liberati, and M. Visser. Analogue gravity from Bose–Einstein condensates. *Class. Quantum. Grav.*, 18:1137, 2001.
- [7] G. Baym and C. J. Pethick. Ground–State properties of magnetically trapped Bose–condensed Rubidium gas. *Phys. Rev. Lett.*, 76:6, 1996.
- [8] K. Begeman. *HI Rotation Curves of Spiral Galaxies*. PhD thesis, Groningen University, 1987.
- [9] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Phys. Rep.*, 405:279, 2005.
- [10] J. Binney and S. Tremainei. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1987.

-
- [11] S. Bird, I. Cholis, J. B. Muñoz, Y. Ali-Haïmoud, M. Kamionkowski, E. D. Kovetz, A. Raccanelli, and A. G. Riess. Did LIGO detect dark matter? *Phys. Rev. Lett.*, 116:201301, 2016.
- [12] R. D. Blandford and R. Narayan. Cosmological applications of gravitational lensing. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 30:311, 1992.
- [13] C. G. Böhrer and T. Harko. Can dark matter be a Bose–Einstein condensate? *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 06:025, 2007.
- [14] J. R. Brownstein and J. W. Moffat. Galaxy rotation curves without nonbaryonic dark matter. *Astrophys. J.*, 636:721, 2006.
- [15] S. Chandrasekhar. *Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover, 1960.
- [16] P. H. Chavanis. Mass-radius relation of Newtonian self-gravitating Bose–Einstein condensates with short–range interactions. I. Analytical results. *Phys. Rev. D*, 84:043531, 2011.
- [17] P. H. Chavanis. Mass-radius relation of Newtonian self-gravitating Bose–Einstein condensates with short–range interactions. II. Numerical results. *Phys. Rev. D*, 84:043532, 2011.
- [18] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum Mechanics Vol. I*. John Wiley and Sons, 1977.
- [19] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Quantum Mechanics Vol. II*. John Wiley and Sons, 1977.
- [20] M. Colpi, S. L. Shapiro, and J. Wasserman. Boson stars: Gravitational equilibria of self–interacting scalar fields. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2485, 1986.
- [21] W. J. G. de Blok and A. Bosma. High–resolution rotation curves of low surface brightness galaxies. *Astron. and Astrophys.*, 385:816, 2002.
- [22] W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, C. Trachternach, S-H. Oh, and R. C. Kennicutt Jr. High–resolution rotation curves and galaxy mass models from THINGS. *Astron. J.*, 136:2648, 2008.

- [23] A. D. Dolgov and A. Y. Smirnov. Possible violation of the spin–statistics relation for neutrinos: Cosmological and astrophysical consequences. *Phys. Lett. B*, 621:1, 2005.
- [24] A. L. Fetter. Ground state and excited states of a confined bose gas. arXiv:cond-mat/9510037v1, 1995.
- [25] M. Garny, M. Sandora, and M. S. Sloth. Planckian interacting massive particles as dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 116:101302, 2016.
- [26] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Tables of integrals, series, and products*. Academic Press, 1980.
- [27] D. J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson Education, 2005.
- [28] J. A. Grifols. Scalar dark matter and cold stars. *Astropart. Phys.*, 25:98, 2006.
- [29] C. Gruber and A. Pelster. Bose–Einstein condensates in compact astrophysical objects. In G. Wunner and A. Pelsteri, editors, *Self-organization in Complex Systems: The Past, Present, and Future or Synergetics*. Springer International Publishing, 2013.
- [30] S. Gutiérrez, B. Carvente, and A. Camacho. Dark matter as a condensate: Deduction of microscopic properties. *Astrophys. Space Sci.*, 2017. DOI: 10.1007/s10509-017-3084-1.
- [31] K. R. W. Jones and D. Bernstein. The self–gravitating Bose–Einstein condensate. *Class. Quantum. Grav.*, 18:1513, 2001.
- [32] D. J. Kaup. Klein–Gordon Geon. *Phys. Rev.*, 172:1331, 1968.
- [33] E. W. Kolb and M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison–Wesley, 1990.
- [34] J-W. Lee. Is dark matter a BEC or scalar field? *J. Kor. Phys. Soc.*, 54:2622, 2009.
- [35] J-W. Lee and I-G. Koh. Galactic halos as boson stars. *Phys. Rev. D*, 53:2236, 1996.

- [36] F. Lelli, S. McGaugh, and J. Schombert. SPARC Spitzer Photometry & Accurate Rotation Curves. <http://astroweb.cwru.edu/SPARC/>. Accessed: 2017-04-21.
- [37] E. H. Lieb, R. Seiringer, J. P. Solovej, and J. Yngvason. *The Mathematics of the Bose Gas and its Condensation*. Birkhäuser-Verlag, 2005.
- [38] R. K. Logan. *The Poetry of Physics and The Physics of Poetry*. World Scientific, 2010.
- [39] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman Press, 1973.
- [40] M. Nishiyama, M-A. Morita, and M. Morikawa. Bose-Einstein condensation as dark energy and dark matter. arXiv:astro-ph/0403571, 2004.
- [41] P. Nozières. Some comments on Bose-Einstein condensation. In A. Griffin, D. W. Snoke, and S. Stringari, editors, *Bose-Einstein Condensation*. Cambridge University Press, 1996.
- [42] B. Oda. *Introducción al análisis gráfico de datos experimentales*. Las prensas de ciencias, 2005.
- [43] S-H. Oh, W. J. G. de Blok, F. Walter, E. Brinks, and R. C. Kennicutt Jr. High-resolution dark matter density profiles of THINGS dwarf galaxies: correcting for noncircular motions. *Astron. J.*, 136:2761, 2008.
- [44] R. K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Butterworth-Heinemann, 1996.
- [45] R. Penrose. *El camino a la realidad*. Debate, 2007.
- [46] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517:565, 1999.
- [47] C. J. Pethick and H. E. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2004.

- [48] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose–Einstein Condensation*. Oxford Science Publications, 2003.
- [49] E. Poisson and C. M. Will. *Gravity: Newtonian, Post–Newtonian, Relativistic*. Cambridge University Press, 2014.
- [50] J. R. Primack and G. R. Blumenthal. What is the dark matter? Implications for galaxy formation and particle physics. In J. Audouze and J. Tran, editors, *Formation and Evolution of Galaxies and Large Structures in the Universe*. D Reidel Publishing Company, 1984.
- [51] C. Raman, M. Köhl, R. Onofrio, D. S. Durfee, C. E. Kuklewicz, Z. Hadzibabic, and W. Ketterle. Evidence for a critical velocity in a Bose–Einstein condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2502, 1999.
- [52] T. H. Randriamampandry and C. Carignan. Galaxy mass models: MOND versus dark matter haloes. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 439:2132, 2014.
- [53] B. Reid, W. J. Percival, D. J. Eisenstein, L. Verde, D. N. Spergel, et al. Cosmological constraints from the clustering of the Sloan Digital Sky Survey DR7 luminous red galaxies. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 404:60, 2010.
- [54] J. Rich. Searches for dark matter. In M. Lachièze-Rey, editor, *Theoretical and Observational Cosmology*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [55] R. Ruffini and S. Bonazzola. Systems of self–gravitating particles in General Relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767, 1969.
- [56] J. M. Schombert and S. McGaugh. Stellar populations and the star formation histories of LSB galaxies: III. Stellar population models. *PASA*, 31:e036, 2014.
- [57] F. E. Schunck and E. W. Mielke. General relativistic boson stars. *Class. Quantum. Grav.*, 20:R301, 2003.
- [58] R. Sharma, S. Karmakar, and S. Mukherjee. Boson star and dark matter. arXiv:0812.3470v1, 2008.

- [59] S-J. Sin. Late-time phase transition and the galactic halo as a Bose liquid. *Phys. Rev. D*, 50:3650, 1994.
- [60] K. Spekkens, R. Giovanelli, and M. P. Haynes. The cusp/core problem in galactic halos: long-slit spectra for a large dwarf galaxy sample. *Astron. J.*, 129:2119, 2005.
- [61] G. Steigman and M. S. Turner. Cosmological constraints on the properties of weakly interacting massive particles. *Nucl. Phys. B*, 253:375, 1985.
- [62] R. A. Swaters, B. F. Madore, F. C. van den Bosch, and M. Balcells. The central mass distribution in dwarf and low surface brightness galaxies. *Astrophys. J.*, 583:732, 2003.
- [63] M. Ueda. *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation*. World Scientific, 2010.
- [64] P. C. van der Kruit and L. Searle. Surface photometry of edge-on spiral galaxies. I. A model for the three-dimensional distribution of light in galactic disks. *Astron. and Astrophys.*, 95:105, 1981.
- [65] M. Verheijen. *The Ursa Major cluster of galaxies. TF-relations and dark matter*. PhD thesis, Groningen University, 1965.
- [66] M. Viel, J. Lesgourgues, M. G. Haehnelt, S. Matarrese, and A. Riotto. Constraining warm dark matter candidates including sterile neutrinos and light gravitinos with WMAP and the Lyman- α forest. *Phys. Rev. D*, 71:063534, 2005.
- [67] J. A. Wheeler. Geons. *Phys. Rev.*, 97:511, 1955.
- [68] C. M. Will. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. Cambridge University Press, 1993.