Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Representación de Isomorfismos entre Espacios de Funciones Continuas

Tesis que presenta

Margarita del Carmen Gary Gutiérrez

Para obtener el grado de
Doctora en Ciencias Matemáticas

Asesores:
Dr. Salvador Hernández Muñoz

Dr. Constancio Hernández García

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Richard Gordon Wilson Roberts	UAM-I
Secretario: Dr. Vladimir Tkachuk Vladimirovich	UAM-I
Vocal Dr. Sergey Apetnakovich Antonyan	UNAM
Vocal Dr. Constancio Hernández García	UAM-I
Vocal Dr. Salvador Hernández Muñoz	UJI
Vocal Dr. Ángel Tamariz Mascarúa	UNAM

Ciudad de México, 2 de marzo de 2016

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Fecha : 01/03/2016
Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE DISERTACIÓN PÚBLICA de DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMATICAS) de la alumna MARGARITA DEL CARMEN GARY GUTIERREZ, matrícula 209382516, quien cumplió con los 312 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha dos de marzo del 2016 presentó la DEFENSA de su DISERTACIÓN PÚBLICA cuya denominación es:

REPRESENTACION DE ISOMORFISMOS ENTRE ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 180 créditos y el programa consta de 492 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

aprobar

JURADO

Presidente	Secretario
DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS	DR. VLADIMIR TKACHUK VLADIMIROVICH
Vocal	Vocal
DR. CONSTANCIO HERNANDEZ GARCIA	DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA
Vocal	Vocal
DR. SALVADOR HERNANDEZ MUÑOZ	DR. SERGEY APETNAKOVICH ANTONYAN

Av. San Rafael Atlixco No. 186. Col. Vicentina, Del. Iztapalapa, C.P. 09340, México, D.F. Tels: 5804 4880 y 5804 4883 csera@xanum.uam.mx y cses@xanum.uam.mx http://cse.izt.uam.mx/cse/

Resumen

Este trabajo tiene su punto de partida en el bien conocido teorema de Banach-Stone, que, básicamente, afirma que dos espacios compactos son homeomorfos si, y sólo si, los espacios de Banach de funciones continuas a valores reales generados por ellos son isométricos.

Nos preguntamos qué pasaría si en lugar de considerar isometrías entre espacios de funciones continuas a valores reales y definidas sobre espacios compactos, considerábamos isomorfismos entre subgrupos de espacios de funciones continuas que toman valores en un grupo. Este planteamiento general del teorema de Banach-Stone, se ha desarrollado en esta memoria como sigue: En el primer capítulo, se plasma el teorema de Banach y el teorema de Banach-Stone, información recopilada de [1] y [32], respectivamente. En el segundo capítulo, consideramos isomorfismos entre subgrupos de espacios de funciones continuas definidas sobre espacios compactos y que toman valores en un grupo. En el tercer capítulo, consideramos isomorfismos entre subgrupos de funciones continuas con soporte compacto definidas entre espacios localmente compactos y que toman valores en un grupo. En el cuarto, capítulo, consideramos isomorfismos entre subespacios vectoriales de funciones continuas con soporte compacto definidas entre espacios localmente compactos y que toman valores en un campo finito. En el quinto capítulo, se presentaron las conclusiones obtenidas en este trabajo. La última parte corresponde a un anexo. En éste se describió, en forma muy breve y generalizada, un proyecto en el que se pretende generalizar los resultados conseguidos en esta tesis. En el segundo y tercer capítulo se obtuvieron homeomorfimos entre los espacios base como en el teorema de Banach-Stone, bajo la hipótesis que los respectivos subgrupos y subespacios de funciones separan puntos. Más aún, obtuvimos representaciones de los isomorfismos (definidos entre los respectivos subconjuntos de funciones continuas) que, automáticamente, los volvían continuos.

El problema que solucionamos en el cuarto capítulo es aún más interesante porque en él se resuelve el caso en que los espacios de funciones no separan puntos. En este caso se dispone de menos información que en el teorema de Banach- Stone y aún así pudimos relacionar los espacios base. En este capítulo, se obtuvo una representación para cualquier isometría de Hamming, donde por isometría de Hamming nos referimos a aquel isomorfismo lineal entre subespacios vectoriales de funciones continuas con soporte compacto que preserva el peso, en la definición (4.1.3) se podrá ver con mayor precisión lo que significa ser una isometría de Hamming.

Finalmente, no podemos dejar de mencionar que parte de los resultados, obtenidos como fruto de la investigación desarrollada en este trabajo, han sido publicados en dos artículos de

las revistas Journal of Function Spaces y Journal of Mathematical Analysis and Applications (ver [7] y [8]). El trabajo publicado en la primera revista, corresponde al segundo capítulo y el publicado en la segunda revista corresponde a lo desarrollado en el cuarto capítulo de esta memoria.

Cabe anotar que se han distribuido los capítulos con autocontenido, permitiendo así al lector analizarlos independientemente uno del otro.

Contenido

Introducción

La investigación desarrollada en la presente memoria tiene su punto de partida en el clásico y bien conocido teorema de Banach-Stone que, cuando G es el campo de los números reales o complejos, afirma que si X y Y son espacios compactos y los espacios de Banach de funciones continuas $C(X, G)$ y $C(Y, G)$ (dotados con la norma del supremo) son linealmente isométricos, entonces X y Y son homeomorfos. Más aún, toda isometría lineal de $H: C(X, G) \to C(Y, G)$ es de la forma $H(f)(y) = \omega(y)f(h(y))$, para cualesquiera $y \in Y$ y $f \in C(X, G)$, donde $h: Y \to X$ es un homeomorfismo y $\omega \in C(Y, G)$.

En 1932 en su libro titulado: Theory of Linear Operations (ver p. 104, teorema 3 de [1]), S. Banach demostró que para que dos espacios métricos compactos sean homeomorfos es necesario y suficiente que los espacios de Banach (con la norma del supremo) de funciones continuas a valores reales generados por cada uno de ellos, respectivamente, sean isométricos. En la demostración de este hecho se probó que si dicha isometría es lineal, entonces puede representarse como un operador composición con peso.

Más adelante, en 1937, M. Stone extendió el teorema enunciado por Banach a espacios compactos Hausdorff (ver p. 469, teorema 83 de [32]). A esta nueva versión, la llamamos actualmente teorema de Banach- Stone.

Con el teorema de Banach-Stone se estudia la relación topológica entre dos espacios dados a partir del estudio de ciertas propiedades entre los espacios de funciones a valores reales generados por ellos.

Este resultado ha sido generalizado en diversas direcciones. Para nuestros propósitos, la de mayor relevancia es debida a los doctores S. Hernández y J. Font quienes establecen en ([12]) lo siguiente:

Sean X y Y espacios Hausdorff, completamente regulares y localmente compactos y $C_0(X)$ (resp. $C_{00}(X)$) el álgebra de Banach (con la norma supremo) de las funciones continuas real-valuadas definidas sobre X y que se anulan en el infinito (resp. el álgebra de Banach de las funciones continuas real-valuadas definidas sobre X con soporte compacto). Del mismo modo se definen $C_0(Y)$ y $C_{00}(Y)$. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subálgebras de $C_0(X)$ y de $C_0(Y)$, respectivamente, que contienen a $C_{00}(X)$ y $C_{00}(Y)$, respectivamente y existe una biyección separadora $T: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, entonces T es continua y existen una aplicación continua e inyectiva $h: Y \to X$ y una aplicación continua $\alpha: h(Y) \subseteq X \to \mathbb{R}$ tales que $T(f)(y) = \alpha(y) \cdot f(h(y))$, para cualequiera $f \in \mathcal{A}$ y $y \in Y$. Es decir, T se puede representar como un operador composición con peso.

¿Qué pasa si en lugar de considerar subálgebras, consideramos subgrupos o subespacios vectoriales? Y, ¿qué pasa si en lugar de considerar el campo de los números reales, consideramos un grupo discreto o un campo finito?

En nuestro intento por resolver estos interrogantes surgieron los cinco capítulos capítulos que conforman esta memoria y que, en realidad, corresponden a dos artículos publicados como fruto de nuestra investigación.

A continuación presentaremos una breve descripción de cada uno de ellos.

En el primer capítulo estudiamos algunos conceptos y resultados que preceden al obtenido por Banach (teorema de Banach), en 1932, y también incluimos conceptos que preceden al resultado obtenido por Stone (teorema de Banach-Stone) en su artículo, en 1937.

En el segundo capítulo de esta memoria estudiaremos bajo qué condiciones un isomorfismo definido entre dos subgrupos de funciones continuas que toman valores en un grupo discreto y definidas sobre espacios compactos, se puede representar como un operador composición con peso y que además, resulte automáticamente continuo. Para ello introducimos la noción de subconjunto soporte, estudiando algunas propiedades de dichos conjuntos (proposición (2.3.2)). Estudiamos el concepto de aplicación separadora y damos condiciones para que el soporte mínimo de un homomorfismo separador tenga un único elemento (proposición (2.3.4)). Este resultado nos permitirá definir, más adelante, la aplicación soporte asociada a una aplicación que preserva disyunciones. Demostraremos, además que dicha aplicación es continua y describiremos bajo qué condiciones resulta ser un homeomorfismo (proposición (2.4.5)). En los resultados posteriores a lo anterior, se prepara el camino para obtener una representación completa del homomorfismo que preserva disjunciones a partir de la aplicación soporte asociada que, además, lo haga continuo; llegando así al resultado principal de este capítulo que corresponde al teorema (2.5.1).

En el tercer capítulo, se establecen condiciones para que todo isomorfismo entre subgrupos de funciones continuas de soporte compacto, definidas sobre espacios localmente compactos y que toman valores en un grupo discreto, se pueda representar como un operador composición con peso y que además, resulte continuo. Como datos que se puedan resaltar en este capítulo, además del uso de las respectivas compactificaciones de Alexandroff de cada uno de los espacios, tenemos que la definición de aplicación separadora se debe adecuar al contexto en el que ahora nos encontramos, por lo que se hace necesario dar una definición equivalente a la usada en capítulos anteriores.

En el cuarto capítulo, establecemos condiciones para que toda isometría de Hamming se pueda representar como un operador composición con peso. Aquí los espacios considerados son localmente compactos, por lo que consideramos pertinente usar la compactificación de Alexandroff (la compactificación de un punto) de cada uno de ellos y trabajamos en gran medida con dichas compactificaciones intentando trasladar las técnicas usadas en el capítulo anterior para obtener los resultados requeridos en éste. En este mismo sentido, otra herramienta importante que usamos a lo largo del capítulo es la definición de una relación de equivalencia sobre cada uno de los espacios localmente compactos. Introducimos el concepto de conjunto saturado y demostramos, en particular, que cada elemento de la clase de equivalencia (de cada conjunto localmente compacto) es un conjunto compacto y saturado. Por otra parte, los espacios de funciones con los que aquí trabajamos son subespacios vectoriales del espacio de funciones continuas con soporte compacto definidas sobre los espacios localmente compactos, antes mencionados, y que toman valores en un campo finito. Un resultado muy importante en este capítulo es la proposición (4.4.13), pues nos brinda condiciones suficientes que garantizan la existencia de un homeomorfismo entre los espacios generados por las clases de equivalencia definidas sobre los espacios localmente compactos, considerados por hipótesis.

Capítulo 1
Preliminares

En este capítulo se presentarán algunas definiciones y resultados básicos, necesarios para la comprensión de esta memoria. Las referencias que son fundamentales en este capítulo se pueden ver en los capítulos IV y XI de ([1]).

1.1. Espacios normados

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial E se dice *normado* si existe un función $\| \,\| : E \to \mathbb{R}$ llamada *norma* que satisface las siguientes condiciones:

1. $\| \theta \| = 0$ y $\| x \| > 0$, si $x \neq \theta$, donde θ es el elemento neutro de E.

2. Para todo $x, y \in E$, se tiene que $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

3. $\| tx \| = |t| \cdot \| x \|$, para todo escalar t.

Si definimos la distancia entre dos elementos x y y de E por la fórmula

$$d(x, y) = \| x - y \|$$

claramente, obtenemos un espacio métrico. Si, además, es completo, es decir, siempre que (x_p) es una sucesión tal que $\lim_{p,q\to\infty} \| x_p - x_q \| = 0$, decimos que es un *espacio de Banach.*

Las definición que se incluirá a continuación se encuentra en la página 13 de ([1]).

Definición 1.1.2. Diremos que un espacio métrico completo E es un *grupo topológico* si cumple lo siguiente:

1. A cada par (x, y) de elementos del espacio E le corresponde un único elemento z de E llamado la *suma* de x y y y que denotaremos con el símbolo $x + y$.

2. E es un grupo bajo esta operación, es decir, $(x+y)+z = x+(y+z)$, existe en E un único elemento neutro θ y cada elemento x de E tiene un inverso $-x$ tal que $x + (-x) = \theta$.

3. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ implica $\lim_{n\to\infty} (-x_n) = -x$.

4. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ implica $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

Definición 1.1.3 (Ver p.14 de [1])**.** Sean E y E_1 grupos topológicos y $U\colon E \to E_1$ una función. La función U es llamada *aditiva* u operador aditivo, cuando $U(x+y) = U(x)+U(y)$, para cualesquiera $x, y \in E$.

Observe que si U es un operador aditivo, entonces

$$U(x) = U(x + \theta_E) = U(x) + U(\theta_E)$$

Por lo tanto, $U(\theta_E) = \theta_{E_1}$, donde θ_E (resp., θ_{E_1}) denota al elemento neutro de E (resp., E_1). Además, puesto que $\theta_{E_1} = U(\theta_E) = U(x + (-x)) = U(x) + U(-x)$, tenemos que $U(-x) = -U(x)$.

Definición 1.1.4. Sean E y E_1 grupos topológicos y U un operador definido en E y cuyo codominio es E_1. Decimos que U es *lineal* si es aditivo y continuo.

A continuación se mencionarán algunas propiedades de los operadores lineales definidos entre espacios vectoriales normados, no necesariamente completos.

1.1.1. Propiedades de operadores lineales.

Teorema 1.1.5 (Cap. IV, teorema 1 de [1])**.** *Sean E, G y E_1 espacios vectoriales normados tales que $G \subseteq E$. Si $U\colon G \to E_1$ es un operador aditivo, entonces U es lineal si, y sólo si, existe un número M tal que*

$$\| U(x) \| \leq M \| x \|, \text{ para todo } x \in G.$$

Sean E y E_1 espacios vectoriales normados. Para un operador lineal $U\colon G \to E_1$, definido sobre un espacio vectorial $G \subseteq E$, la *norma* del operador U en G, denotada por $\| U \|_G$, es el número real más pequeño, M, que satisface la siguiente condición:

$$\| U(x) \| \leq M \| x \|, \text{ para todo } x \in G.$$

Si $G = E$, podemos escribir, simplemente, $\| U \|$ en lugar de $\| U \|_E$. Por lo tanto, tenemos que $\| U(x) \| \leq \| U \|_G \cdot \| x \|$, para todo $x \in G$, y se puede demostrar que

$$\| U \|_G = \sup\{\| U(x) \| : x \in G,\ \| x \| \leq 1\}.$$

Observación 1.1.6. En términos modernos, el término *lineal* no implica, generalmente, que el operador U al que nos referimos sea *continuo*. Si U es continuo, o, equivalentemente, $\| U \| < \infty$, decimos que U es un *operador lineal continuo* u *operador lineal acotado*.

La pregunta que surge es si existe, para cada espacio vectorial normado E, un operador lineal (continuo o acotado), $f\colon E \to \mathbb{R}$, que no es idénticamente cero. Existen una serie de resultados que permiten dar una respuesta afirmativa a la anterior pregunta, sin embargo, sólo mencionaremos dos porque para nuestros propósitos son los que resultan de mayor interés.

Teorema 1.1.7 (Cap. IV, teorema 2 de [1]). *Sean E un espacio vectorial normado y $f\colon G \to \mathbb{R}$ un operador lineal (acotado), definido en el espacio vectorial $G \subseteq E$. Entonces existe un operador lineal $F\colon E \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:*

(i) Para todo $x \in G$, $F(x) = f(x)$.

(ii) $\| F \| = \| f \|_G$.

Teorema 1.1.8 (Cap. IV, teorema 3 de [1]). *Sea E un espacio vectorial normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq \theta$, existe un operador lineal $F\colon E \to \mathbb{R}$ tal que*

$$F(x_0) = \| x_0 \| \text{ y } \| F \| = 1.$$

La siguiente sección corresponde al capítulo XI de [1].

1.2. Isometría, equivalencia, isomorfismo

1.2.1. Isometría

Sean (E, d) y (E_1, d') espacios métricos y $U\colon E \to E_1$ una aplicación de E en E_1. Esta aplicación es *isométrica* o es llamada una *isometría*, en el sentido de Banach, si es biyectiva y no cambia distancias, esto es, cuando

$$d(x_1, x_2) = d'(U(x_1), U(x_2)),$$

para todo par de elementos x_1, x_2 de E.

Puesto que los espacios vectoriales normados son espacios métricos, tiene sentido considerar transformaciones isométricas entre ellos.

1.2.2. Transformaciones isométricas entre espacios vectoriales normados

Teorema 1.2.1 (Cap. XI, teorema 2 de [1]). *Sean E y E_1 espacios vectoriales normados. Si $U\colon E \to E_1$ es una isometría tal que $U(0_E) = 0_{E_1}$, entonces U es un operador lineal acotado.*

1.2.3. Espacios de funciones continuas cuyo codominio son los números reales

Para cualquier espacio métrico compacto Q, el conjunto $E(Q) = \{f\colon Q \to \mathbb{R} / f \text{ es continua } \}$ (de todas las funciones continuas con dominio en Q y codominio en $\mathbb{R}$), puede ser considerado un espacio de Banach, cuando la adición y multiplicación por un escalar son definidas en la forma usual (punto por punto) y la norma considerada es la del supremo.

En esta subsección, Q denotará un espacio métrico compacto y $E(Q)$ denotará al espacio de Banach de funciones continuas cuyo dominio es Q y cuyo codominio es $\mathbb{R}$.

Lema 1.2.2 (Cap. XI, página 103 de [1]). *Sean $f \in E$ y $q \in Q$. Para un elemento dado, $q_0 \in Q$, la desigualdad*

$$|f(q_0)| > |f(q)|, \text{ para todo } q \neq q_0,$$

se verifica si, y sólo si,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f + hg \| - \| f \|}{h}$$

existe para todo $g \in E$. Más aún, si la función f safisface la desigualdad anterior, tenemos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f + hg \| - \| f \|}{h} = g(q_0) \cdot \operatorname{sign} f(q_0), \text{ para todo } g \in E.$$

Definición 1.2.3. Dos espacios topológicos X y Y son *homeomorfos* cuando existe una función biyectiva $f\colon X \to Y$ de tal forma que tanto f como su función inversa f^{-1} son continuas. A tal biyección se le llama *homeomorfismo*.

En el siguiente teorema $E(X)$ (resp., $E(Y)$) denota al espacio de Banach de funciones continuas cuyo dominio es X (resp., Y) y cuyo codominio es el conjunto de los números reales. Su demostración puede consultarse en el capítulo XI, página 104 de ([1]).

Teorema 1.2.4 (de Banach). *Sean X y Y espacios métricos compactos. Entonces X y Y son homeomorfos si, y sólo si, $E(X)$ y $E(Y)$ son isométricos.*

Observación 1.2.5. La prueba del anterior teorema muestra que si $U\colon E(X) \to E(Y)$ es una isometría y $U(0_{E(X)}) = 0_{E(Y)}$, entonces existen un homeomorfismo $f\colon X \to Y$ y una función continua $\omega \in E(Y)$, con $|\omega(y)| = 1$, tales que

$$[U(g)](y) = \omega(y) \cdot g(f^{-1}(y))$$

para cualesquiera $g \in E(X)$ y $y \in Y$.

1.3. Teorema de Banach-Stone

En el siguiente teorema $C(X)$ (resp., $C(Y)$), denota al anillo de funciones continuas con dominio en X (resp., en Y) y con codominio en el conjunto de los números reales. Su demostración se puede consultar en la página 469, teorema 83 de ([32]).

A continuación enunciaremos el teorema de Banach-Stone, probado por M. Stone en 1937 en ([32]).

Teorema 1.3.1 (de Banach-Stone). *Sean X y Y espacios compactos. Entonces la aplicación $U\colon C(X) \to C(Y)$ es una isometría si, y sólo si, existe un homeomorfismo $f\colon X \to Y$ tal que*

$$f(x) = U(1_{E(X)})(y)[U(f)(y) - U(0_{E(X)})(y)], \text{ para todo } y \in Y,$$

donde $|U(1_{E(X)})| = 1$.

Nos preguntamos ¿qué sucede si en lugar de considerar al campo de los números reales o complejos, como codominio de las funciones continuas usadas en el teorema de Banach-Stone, se consideraba el campo finito $\mathbb{Z}_2$?
La inquietud anterior nos llevó a la siguiente sección.

1.4. Representación de aplicaciones lineales entre espacios de funciones continuas que toman valores en $\mathbb{Z}_2$

En esta sección estudiaremos las condiciones que debe cumplir una aplicación entre dos espacios de funciones continuas definidas sobre espacios compactos y que toman valores en el campo discreto $\mathbb{Z}_2$, de manera que dicha aplicación se pueda representar como un operador composición con peso.

Definición 1.4.1. Un espacio topológico X es llamado *compacto* si es Hausdorff y toda cubierta abierta tiene una subcubierta finita.

Teorema 1.4.2. *Un espacio Hausdorff X es compacto si, y sólo si, toda red en X tiene un punto de acumulación.*

Lema 1.4.3. *Sean X y Y espacios compactos. Entonces $f\colon X \to Y$ es continua en x_0 si, y sólo si, para toda red $\{x_d\}_{d\in D}$ en X que converge a x_0, existe $\{f(x_{d_k})\}_{d_k\in D'}$, subred de $\{f(x_d)\}_{d\in D}$, que converge a $f(x_0)$.*

Recordemos que la *cuasicomponente* de un punto $x \in X$ es la intersección de todos los conjuntos abiertos-cerrados que lo contienen.

Definición 1.4.4. Un espacio topológico X es *totalmente disconexo* si la cuasicomponente de cualquier punto $x \in X$ está formada sólo por dicho punto.

Definición 1.4.5. Un espacio topológico X es de *dimensión cero* o *cero-dimensional* si es T_0 y tiene una base de conjuntos abiertos-cerrados.

Dado un espacio topológico X, un espacio normado E y una función $f\colon X \to E$ llamaremos *cocero* asociado a la función f al conjunto $\operatorname{coz}(f) := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Al complemento del $\operatorname{coz}(f)$ se le llama *cero* de f y se denota $Z(f)$. Es decir, $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Cabe resaltar que si X es cero-dimensional y $\mathbb{F}$ es un campo finito, tanto los conjuntos ceros como los conjuntos coceros de las funciones son conjuntos abiertos-cerrados.

De aquí y hasta el final de este capítulo, X y Y denotarán espacios compactos y cero-dimensionales, $\mathbb{F}$ denotará al campo finito $\mathbb{Z}_2$ y e denotará a la función constante 1. Supondremos, además, que $H\colon C(X,\mathbb{F}) \to C(Y,\mathbb{F})$ es una aplicación lineal.

Diremos que H es *separadora* si, para cualesquiera $f, g \in C(X, \mathbb{F})$, $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$ implica $\mathrm{coz}(H(f)) \bigcap \mathrm{coz}(H(g)) = \emptyset$. La aplicación lineal H es biseparadora si es separadora, biyectiva y H^{-1} también es separadora.

Diremos que la aplicación lineal H es una *aplicación composición con peso* si existen un homeomorfismo $h \colon Y \to X$ y una aplicación $w \in C(Y, \mathbb{F})$ tales que $[H(f)](y) = w(y) \cdot f(h(y))$, para cualesquiera $f \in C(X, \mathbb{F})$ y $y \in Y$, donde a w se le denomina *peso.*

Sea $y \in Y$. Entonces, $\delta_y \colon C(Y, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ denota la aplicación evaluación sobre $C(Y, \mathbb{F})$, es decir, dado $g \in C(Y, \mathbb{F})$, se tiene que $\delta_y(g) = g(y)$. Definimos $Y^* = \{\delta_y : y \in Y\}$. Llamaremos $\delta_y \circ H$ a la restricción de la aplicación adjunta de H sobre Y^*. Entonces

$$(\delta_y \circ H)(f) = \delta_y(H(f)) = [H(f)](y), \text{ para toda } f \in C(X, \mathbb{F})$$

Las dos definiciones que siguen se pueden consultar en [11].

Definición 1.4.6. Sea $y \in Y$. Un subconjunto abierto V de X es un *anulador* para $\delta_y \circ H$ si cumple que, para todo $f \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f) \subset V$, se tiene que $[H(f)](y) = (\delta_y \circ H)(f) = 0$.

Definición 1.4.7. El conjunto $X \setminus \bigcup\{V \subset X : V \text{ es un anulador para } \delta_y \circ H\}$ se denomina *soporte* de $\delta_y \circ H$ y será denotado por $\mathrm{supp}(\delta_y \circ H)$.

Lema 1.4.8. *Sea $y \in Y$. Entonces* $\mathrm{supp}(\delta_y \circ H) = \{x \in X : $ *para toda vecindad abierta V de x, existe $f \in C(X, \mathbb{F})$ que cumple* $\mathrm{coz}(f) \subset V$ *y* $[H(f)](y) \neq 0\}$.

Demostración. Llamamos M a la segunda parte de la igualdad. Sea $x \in M$. Suponemos que $x \in V$, donde V es un anulador para $\delta_y \circ H$. Por ser V anulador, V es un entorno abierto de x. Por hipótesis, existe $f \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $H[(f)](y) \neq 0$ y $\mathrm{coz}(f) \subset V$. Esto es una contradicción porque V es anulador para $\delta_y \circ H$. De donde,

$$x \in X \setminus \bigcup\{V \subset X : V \text{ es anulador para } \delta_y \circ H\}$$

Recíprocamente, sea $x \in \mathrm{supp}(\delta_y \circ H)$. Supongamos, por contradicción, que existe un entorno abierto V de x tal que para todo $f \in C(X, \mathbb{F})$ con $\mathrm{coz}(f) \subset U$ se cumple que $[H(f)](y) = 0$. Entonces V es anulador para $\delta_y \circ H$. Esto es una contradicción, porque, por hipótesis,

$$x \notin \bigcup\{V \subset X : V \text{ es anulador para } \delta_y \circ H\}.$$

Por lo tanto, dada una vecindad abierta U de x, con $x \in \mathrm{supp}(\delta_y \circ H)$, existe $f \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $[H(f)](y) \neq 0$. □

Proposición 1.4.9. *Sea H una aplicación lineal, biyectiva y separadora. Entonces, para todo $y \in Y$, el soporte de $\delta_y \circ H$ es no vacío y tiene un único elemento.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Para ver que el soporte de $\delta_y \circ H$ es no vacío supondremos, por contradicción, que $\mathrm{supp}(\delta_y \circ H) = \emptyset$. Entonces, por definición de soporte, $X = \bigcup\{V : V \text{ es un anulador para } \delta_y \circ H\}$. Así, para cada $x \in X$ existe V_x, anulador para $\delta_y \circ H$, tal que $x \in V_x$ y como X es cero dimensional, existe un conjunto abierto-cerrado W_x tal que $x \in W_x \subset V_x$; por lo que, W_x también es un anulador para $\delta_y \circ H$. De lo anterior, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los anuladores para $\delta_y \circ H$ son conjuntos abiertos-cerrados. Puesto que X es compacto, existen $V_1, \dots, V_n$ anuladores (además, son conjuntos abiertos-cerrados) para $\delta_y \circ H$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Así, la familia $\{O_i\}_{i=1}^{n}$, donde $O_i := V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \subset V_i$ es un conjunto abierto-cerrado para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, es una partición de X. Ahora bien, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definamos $f_i \colon X \to \mathbb{F}$ por $f_i(x) = \chi_{O_i}$. Entonces $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de funciones continuas de X en $\mathbb{F}$ tal que $\sum_{i=1}^{n} f_i = e$ y $f_i(X \setminus O_i) = \{0\}$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Por último, tomemos $f \in C(X, \mathbb{F})$. Entonces $f = \sum_{i=1}^{n} f_i f$, además, $\mathrm{coz}(f_i f) \subset V_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y, como V_i es un anulador para $\delta_y \circ H$ y $f_i f \in C(X, \mathbb{F})$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $[H(f_i f)](y) = 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. En consecuencia, $[H(f)](y) = [H(\sum_{i=1}^{n} f_i f)](y) = \sum_{i=1}^{n}[H(f_i f)](y) = 0$. En resumen, para todo $f \in C(X, \mathbb{F})$, $[H(f)](y) = 0$. En particular, para $f = H^{-1}e$, tenemos que $0 = [H(f)](y) = [H(H^{-1}e)](y) = 1$, lo cual es una contradicción, por lo que $\mathrm{supp}(\delta_y \circ H) \neq \emptyset$.

Para ver que el soporte de $\delta_y \circ H$ tiene un único elemento, supongamos que existen $x_1, x_2 \in \mathrm{supp}(\delta_y \circ H)$, con $x_1 \neq x_2$. Entonces existen V_1 y V_2 vecindades abiertas de x_1 y x_2, respectivamente, tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Puesto que x_1 y x_2 son elementos de $\mathrm{supp}(\delta_y \circ H)$, por el lema anterior, existen f_1 y f_2 en $C(X, \mathbb{F})$ tales que $\mathrm{coz}(f_1) \subset V_1$, $\mathrm{coz}(f_2) \subset V_2$ y $[H(f_1)](y) \neq 0 \neq [H(f_2)](y)$. De lo anterior, se tiene que $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$ y $y \in \mathrm{coz}(H(f_1)) \cap \mathrm{coz}(H(f_2))$, lo cual contradice que H es separadora. Por lo que el soporte de $\delta_y \circ H$ tiene un único elemento. □

Teniendo en cuenta la proposición anterior, para cada aplicación lineal, biyectiva y separadora $H \colon C(X, \mathbb{F}) \to C(Y, \mathbb{F}))$ tiene sentido definir la aplicación $h \colon Y \to X$ por $h(y) = \mathrm{supp}(\delta_y \circ H)$, para cada $y \in Y$. A la aplicación h la llamaremos *aplicación soporte* asociada a H.

A continuación estudiaremos algunas propiedades que cumple la aplicación soporte asociada a H, h.

Proposición 1.4.10. *Si $H \colon C(X, \mathbb{F}) \to C(Y, \mathbb{F}))$ es una aplicación lineal, biyectiva y separadora, entonces la aplicación soporte inducida por H, h, es continua.*

Demostración. Veamos que si $\{y_d\}_{d \in D}$ es una red en Y que converge a y, entonces existe una subred $\{h(y_{d_k})\}_{d_k \in D'}$ de $\{h(y_d)\}_{d \in D}$ que converge a $h(y)$. En efecto, como X es compacto y $\{h(y_d)\}_{d \in D}$ es una red en X, entonces $\{h(y_d)\}_{d \in D}$ tiene un punto de acumulación z; por lo que existe una subred $\{h(y_{d_k})\}_{d_k \in D'}$ de $\{h(y_d)\}_{d \in D}$ que converge a z. Veamos que $z = h(y)$. Para ello, supongamos, por contradicción, que $z \neq h(y)$. Entonces existen V_1 y V_2 abiertos de X tales que $z \in V_1$, $h(y) \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Puesto que $h(y) \in V_2$, existe $f_2 \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f_2) \subset V_2$ y $[H(f_2)](y) = 1$. Como $H(f_2)$ es continua y $\{y_d\}_{d \in D}$ converge a y, entonces $\big\{[H(f_2)](y_d)\big\}_{d \in D}$ converge a $[H(f_2)](y) = 1$. Entonces existe $d_0 \in D$ tal que $[H(f_2)](y_d) = 1$, para todo $d \geq d_0$. Puesto que $\{h(y_{d_k})\}_{d_k \in D'}$ converge a z y V_1 es una vecindad abierta de z, existe $d_1 \in D'$ tal que $h(y_{d_t}) \in V$, para todo $d_t \geq d_1$. Por otra parte, como $\{h(y_{d_k})\}_{d_k \in D'}$ es una subred de $\{h(y_d)\}_{d \in D}$, existe una función $f \colon D' \to D$ tal que $h(y_{d_k}) = h(y_{f(d_k)})$ y, para todo $d \in D$, existe $d' \in D'$ tal que, si $m \geq d'$, entonces $f(m) \geq d$, donde m es un elemento de D'. De aquí tenemos, puesto que $d_0 \in D$, que existe $d' \in D'$ tal que si $m \geq d'$, entonces $f(m) \geq d_0$, para cualquier $m \in D'$. Ahora bien, como d_1 y d' son elementos del conjunto dirigido D', existe $d_2 \in D'$ tal que $d_2 \geq d_1$ y $d_2 \geq d'$. Por lo tanto, $h(y_{d_2}) \in V$, $h(y_{d_2}) = h(y_{f(d_2)})$ y $f(d_2) \geq d_0$. Sea $r = f(d_2)$. Entonces $r \geq d_0$ y $h(y_r) \in V$, por lo que $H(f_2)(y_r) = 1$ y existe $f_1 \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f_1) \subset V_1$ y $H(f_1)(y_r) = 1$. En resumen, $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$ y $y_r \in \mathrm{coz}(H(f_1)) \cap \mathrm{coz}(H(f_2))$, lo cual contradice que H es separadora. Por lo tanto, $z = h(y)$, lo cual implica que $h(y)$ es punto límite de $\{h(y_{d_k})\}_{d_k \in D'}$, como se quería demostrar. □

Proposición 1.4.11. *Supongamos que se cumplen las hipótesis de la proposición (1.4.10). Si h es la aplicación soporte asociada a H, se tiene que $h(Y)$ es denso en X si, y sólo si, para todo abierto U de X, existe $f \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $H(f)$ es no nula.*

Demostración. En efecto, supongamos que $h(Y)$ es denso en X y sea U un abierto de X. Entonces $h(Y) \cap U \neq \emptyset$ por lo que existe $x \in h(Y)$ y $x \in U$. Así, $x = h(y) \in U$ para algún $y \in Y$, por lo que existe $f \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $[H(f)](y) = 1$, con lo que tenemos que $H(f)$ es no nula. Recíprocamente, supongamos que para todo abierto U de X existe $f \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $H(f)$ es no nula. Veamos que $h(Y)$ es denso en X. Supongamos, por contradicción, que no lo es. Entonces existe $x \in X$ tal que $x \notin \overline{h(Y)} = h(Y)$, luego, existen V y W, abiertos en X, tales que $x \in V$, $\overline{h(Y)} \subset W$ y $V \cap W = \emptyset$. Como V es abierto en X, la hipótesis implica que existe $f_1 \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f_1) \subset V$ y $H(f_1)$ es no nula, por lo que existe $y \in Y$ tal que $[H(f_1)](y) = 1$. Pero $y \in Y$ implica que $h(y) \in h(Y) = \overline{h(Y)} \subset W$. Así, existe $f_2 \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f_2) \subset W$ y $[H(f_2)](y) = 1$. Por lo tanto, $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) \subset V \cap W = \emptyset$ y $y \in \mathrm{coz}(H(f_1)) \cap \mathrm{coz}(H(f_2))$, lo cual contradice que H es separadora. Así, $h(Y)$ es denso en X. Para ver que h es sobre debemos probar que $h(Y) = \overline{h(Y)} = X$, esto es, $h(Y)$ es denso en X. Usando la afirmación anterior, supongamos que U es un abierto de X. Entonces, por ser X cero dimensional, existe $W \neq \emptyset$, conjunto abierto-cerrado en X, tal que $W \subset U$. Definamos $f = \chi_W$. Entonces $f \in C(X, \mathbb{F})$, $\mathrm{coz}(f) = W \subset U$ y $H(f)$ es no nula, porque si $H(f) \equiv 0$, por la linealidad e inyectividad de H, tenemos que $f \equiv 0$ por lo que $\emptyset \neq W = \mathrm{coz}(f) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Así, existe $f \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $H(f)$ es no nula. Por lo tanto, $h(Y)$ es denso en X, como se quería demostrar. □

La proposición que enunciaremos a continuación, se usará más adelante como una herramienta en la demostración de la inyectividad de la aplicación soporte asociada a H, h.

Proposición 1.4.12. *Para todo par de elementos $x, y \in Y$, si $x \neq y$, entonces existen $f_1, f_2 \in C(X, \mathbb{F})$ tales que $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$ y $[H(f_1)](x) \cdot [H(f_2)](y) = 1$*

Demostración. Como $x \neq y$, existen un par de conjuntos abiertos-cerrados, ajenos, W_1 y W_2 que contienen a x y y, respectivamente. Definamos $g_1 = \chi_{W_1}$ y $g_2 = \chi_{W_2}$. Entonces g_1 y g_2 son elementos de $C(Y, \mathbb{F})$, además, coz $g_1 = W_1$ y coz $g_2 = W_2$. Sean $f_1 = H^{-1}(g_1)$ y $f_2 = H^{-1}(g_2)$. Entonces $f_1, f_2 \in C(X, \mathbb{F})$, además, $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$, puesto que H^{-1} es separadora. En resumen, si $x \neq y$, existen $f_1, f_2 \in C(X, \mathbb{F})$ tales que $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$ y $[H(f_1)](x) \cdot [H(f_2)](y) = [H(H^{-1}g_1)](x) \cdot H(H^{-1}g_2)](y) = g_1(x) \cdot g_2(y) = 1 \neq 0$. □

Proposición 1.4.13. *Supongamos que se cumplen las hipótesis de la proposición (1.4.10). Entonces, para todo $f \in C(X, \mathbb{F})$, se tiene que $h(\mathrm{coz}(H(f))) \subseteq \mathrm{coz}(f)$.*

Demostración. Supongamos que existe $z \in \mathrm{coz}(H(f))$ tal que $h(z) \notin \mathrm{coz}(f)$, entonces $[H(f)](z) = 1$ y $f(h(z)) = 0$. Por la continuidad de f, existe V, vecindad abierta de $h(z)$, tal que $f(V) = \{0\}$, lo cual implica que $V \cap \mathrm{coz}(f) = \emptyset$. Por otra parte, como V es una vecindad abierta de $h(z)$, existe $g \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(g) \subset V$ y $[H(g)](z) = 1$. Por lo tanto, $\mathrm{coz}(g) \cap \mathrm{coz}(f) = \emptyset$ y $z \in \mathrm{coz}(H(g)) \cap \mathrm{coz}(H(f))$, lo cual contradice que H es separadora. Por lo tanto, $h(\mathrm{coz}(H(f))) \subseteq \mathrm{coz}(f)$. $\square$

A continuación, enunciaremos el resultado principal de este capítulo.

1.5. Resultado principal

Teorema 1.5.1. *Sean X y Y espacios cero-dimensionales, compactos y $F = \mathbb{Z}_2$. Si $H \colon C(X, \mathbb{F}) \to C(Y, \mathbb{F})$ es una aplicación lineal, biyectiva y biseparadora, entonces H es una aplicación composición con peso. Es decir, existen un homeomorfismo $h \colon Y \to X$ y una función continua $w \colon Y \to \mathbb{F}$ tales que $[H(f)](y) = w(y) \cdot f(h(y))$, para cualesquiera $f \in C(X, \mathbb{F})$ y $y \in Y$.*

Demostración. Sean $f \in C(X, \mathbb{F})$ y $y \in Y$. Puesto que H es una biyección, lineal y biseparadora, existe $h \colon Y \to X$, la aplicación soporte asociada a H. Veamos que h es un homeomorfismo y, además, construyamos una aplicación $w \in C(Y, \mathbb{F})$ de tal forma que $[H(f)](y) = w(y) \cdot f(h(y))$. Ahora, por la proposición (1.4.10), tenemos que h es continua.

Veamos que h es inyectiva. En efecto, sean $x, y \in Y$ tales que $x \neq y$. Entonces, por la proposición (1.4.12), existen $f_1, f_2 \in C(X, \mathbb{F})$ tales que $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$ y $[H(f_1)](x) \cdot [H(f_2)](y) = 1$. Y, puesto que $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, se tiene que $[H(f_1)](x) = 1 = [H(f_2)](y)$; así, $x \in \mathrm{coz}(H(f_1))$ y $y \in \mathrm{coz}(H(f_2))$, lo cual implica, por la proposición (1.4.13), que $h(x) \in h(\mathrm{coz}(H(f_1))) \subseteq \mathrm{coz}(f_1)$ y $h(y) \in h(\mathrm{coz}(H(f_2))) \subseteq \mathrm{coz}(f_2)$ y, puesto que $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$, concluimos que $h(x) \neq h(y)$, lo cual demuestra que h es inyectiva.

Ahora, veamos que h es suprayectiva. Para ver que h es sobre debemos probar que $h(Y) = \overline{h(Y)} = X$, esto es, $h(Y)$ es denso en X. Usando la proposición (1.4.11), es suficiente demostrar que para todo abierto U de X, existe $f \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz}(f) \subset U$ y $H(f)$ es no nula. En efecto, sea U un abierto de X. Entonces, por ser X cero dimensional, existe $W \neq \emptyset$, conjunto abierto-cerrado, en X tal que $W \subset U$. Definamos $f = \chi_W$. Entonces $f \in C(X, \mathbb{F})$, $\mathrm{coz} f = W \subset U$ y $H(f)$ es no nula, porque si $H(f) \equiv 0$, por la linealidad e inyectividad de H, tenemos que $f \equiv 0$ por lo que $\emptyset \neq W = \mathrm{coz} f = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Así, existe $f \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\mathrm{coz} f \subset U$ y $H(f)$ es no nula, lo cual implica que $h(Y)$ es denso en X, como se quería demostrar.

Finalmente, veamos que $[H(f)](y) = [H(e)](y) \cdot f(h(y))$ para todo $y \in Y$ y $f \in C(X, \mathbb{F})$. Sean $y \in Y$ y $f \in C(X, \mathbb{F})$. Entonces $f(h(y)) = 0$ ó $f(h(y)) = 1$. Supongamos que $f(h(y)) = 0$. Entonces, por la continuidad de f, existe una vecindad de $h(y)$, U_0, tal que $f(U_0) = \{0\}$. Como X es cero dimensional, existe un conjunto abierto-cerrado V_0 tal que

$h(y) \in V_0 \subset U_0$. Así, existe $f_0 \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\operatorname{coz}(f_0) \subset V_0$ y $[H(f_0)](y) = 1$. Afirmamos que $f \cdot f_0 \equiv 0$, puesto que si existe $x \in X$ tal que $(f \cdot f_0)(x) = 1$, entonces $f(x) = 1 = f_0(x)$. Luego, $x \in \operatorname{coz}(f_0) \subset V_0 \subset U_0$, de donde, $f(x) \in f(U_0) = \{0\}$, es decir, $f(x) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $H(f) \cdot H(f_0) \equiv 0$ y como $[H(f_0)](y) = 1$, entonces $[H(f)](y) = 0$. En este caso, $[H(f)](y) = [H(e)](y) \cdot f(h(y)) = 0$. Supongamos, ahora, que $f(h(y)) = 1$. Definamos $g = f - e$. Entonces $g(h(y)) = 0$ y, por la afirmación anterior, $[H(g)](y) = 0$. Así,

$$
\begin{aligned}
0 &= [H(g)](y) \\
&= [H(f-e)](y) \\
&= [H(f) - H(e)](y) \\
&= [H(f)](y) - [H(e)](y) \cdot 1 \\
&= [H(f)](y) - [H(e)](y) \cdot f(h(y))
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $[H(f)](y) = [H(e)](y) \cdot f(h(y))$. Sea $w = H(e)$. Entonces, para cualesquiera $y \in Y$ y $f \in C(X, \mathbb{F})$, existen un homeomorfismo $h \colon Y \to X$ y una aplicación continua $w \colon Y \to \mathbb{F}$ tales que $[H(f)](y) = w(y) \cdot f(h(y))$, como se quería ver. $\square$

Capítulo 2
Representación de isomorfismos entre subgrupos de funciones continuas

2.1. Introducción

Sean G un grupo discreto y X y Y espacios topológicos. Si $\mathcal{A}$ es un subgrupo de funciones continuas con dominio en X y con codominio en G y $\mathcal{B}$ es un subgrupo de funciones continuas con dominio en Y y con codominio en G, decimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *equivalentes* cuando existe un homeomorfismo $h\colon Y \to X$ y una aplicación continua $\omega\colon Y \to \mathrm{Aut}(G)$ tales que la aplicación $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definida por $H(f)(y) = \omega[y](f(h(y)))$, para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$ y $y \in Y$, es un isomorfismo de grupos de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$. Aquí $\mathrm{Aut}(G)$ está equipado con la topología de la convergencia puntual. En este caso, decimos que H está representado como un *operador composición con peso*. En la literatura existen muchos resultados relacionados con la representación de operadores lineales como aplicaciones composición con peso y la equivalencia de grupos específicos de funciones continuas. Por ejemplo, en ([15]) los autores demuestran que si X y Y son espacios compactos y Hausdorff, entonces toda aplicación separadora y biyectiva $T\colon C(X) \to C(Y)$ es un operador composición con peso, donde $C(X)$ (resp. $C(Y)$) es el espacio vectorial de funciones continuas con dominio en X (resp. en Y) y que toman valores en los números reales (o complejos). En ([18]), el autor demuestra que si los espacios X y Y son espacios uniformes, metrizables y completos, entonces toda isometría $T\colon C^*(X) \to C^*(Y)$ se puede representar como un operador composición con peso, donde $C^*(X)$ (resp., $C^*(Y)$) es el espacio de Banach de todas las aplicaciones uniformemente continuas y acotadas que tienen como dominio a X (resp., Y) y que toman valores en el conjunto de los números complejos. En esta sección, nosotros sólo mencionaremos el clásico teorema de Banach-Stone que, cuando G es el campo de los números reales o complejos, establece que si los espacios de Banach de funciones continuas $C(X,G)$ y $C(Y,G)$ son isométricos, entonces son equivalentes y la isometría puede ser representada como un operador composición con peso. Otro ejemplo importante aparece en teoría de códigos, donde el bien conocido teorema de equivalencia de MacWilliams afirma que cuando G es un campo finito y X y Y son conjuntos finitos, dos códigos (subespacios lineales) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de G^X y G^Y, respectivamente, son equivalentes cuando ellos son isométricos por la métrica de Hamming (ver [4], [22] y [23]). Este resultado ha sido generalizado a códigos convolucionales en ([17]) y también tiene sentido en otras áreas, por ejemplo, análisis funcional y sistemas dinámicos lineales (ver [10],[14],[30] y [34]). La motivación principal de esta investigación ha sido extender el teorema de equivalencia de MacWilliams a situaciones más generales y explorar la posible aplicación de estos métodos al estudio de los códigos convolucionales o sistemas dinámicos lineales. Sin embargo, a lo largo de este trabajo sólo nos ocuparemos de los espacios cero dimensionales X y Y, inicialmente considerados compactos y luego localmente compactos; y G será considerado un grupo discreto. Existen muchos precedentes en el estudio de la representación de homomorfismos de grupos para funciones continuas que toman valores en un grupo. Entre ellos, y a nuestro parecer, las más relevantes se pueden consultar en [5], [9], [20], [24], [26], [29], [36] y [37]. La mayoría de los hechos básicos y las nociones relacionadas con propiedades topológicas se pueden encontrar en [6].

2.2. Notación

En este capítulo G representa un grupo discreto y denotaremos su elemento neutro con e_G (en ocasiones, este mismo símbolo denotará la función constante de X en G con valor e_G). Los símbolos X y Y representan espacios topológicos compactos, Hausdorff y cero-dimensionales. La expresión $C(X,G)$ (resp. $C(Y,G)$) denota al grupo de todas las funciones continuas de X en G, (resp. de Y en G) dotado con la suma usual de funciones definida punto por punto. Para cada $f \in C(X,G)$, el *cocero* de f es el conjunto $\mathrm{coz}(f) = \{x \in X : f(x) \neq e_G\}$, el *cero* de f es el conjunto $Z(f) = X \setminus \mathrm{coz}(f)$ y el *soporte* de f es el conjunto $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{coz}(f)$. Puesto que G es discreto, tanto $\mathrm{coz}(f)$ como $Z(f)$ son conjuntos abiertos-cerrados. Sea $\mathcal{A}$ un subgrupo de $C(X,G)$ y definamos $Z(\mathcal{A}) = \{Z(f) : f \in \mathcal{A}\}$. Entonces $\sigma(Z(\mathcal{A}))$ denota la menor colección de subconjuntos de X que contienen al $Z(\mathcal{A})$ y que es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas (resp., $\mathrm{coz}(\mathcal{A}) = \{\mathrm{coz}(f) : f \in \mathcal{A}\}$ y $\sigma(\mathrm{coz}(f))$ denota la menor colección de subconjuntos de X que contienen al $\mathrm{coz}(\mathcal{A})$ y que es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas). En general, para una familia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\sigma(\mathcal{D})$ denota la menor colección de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{D}$ y que es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas. Decimos que $\mathcal{A}$ *separa puntos* en X si para cualesquier par de puntos $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$, existe una aplicación $f \in \mathcal{A}$ tal que $x_1 \in \mathrm{coz}(f)$ y $x_2 \in Z(f)$. Decimos que $\mathcal{A}$ *separa puntos fuertemente en* X si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$, existen aplicaciones $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $x_i \in \mathrm{coz}(f_i)$ para $i \in \{1,2\}$ y $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$.

En el caso en que G fuese un grupo finito, se podría pensar que $\mathrm{coz}(\mathcal{A})$ y $\sigma(\mathrm{coz}(\mathcal{A}))$ deben coincidir. Sin embargo, ésto no siempre sucede como se muestra en el siguiente ejemplo. Obviamente, por las leyes de De Morgan es suficiente probar que $Z(\mathcal{A}) \neq \sigma(Z(\mathcal{A}))$.

Ejemplo 2.2.1. Sea G el grupo con dos elementos $\{0,1\}$ y tomemos $X = G^{\mathbb{N}}$, dotado con la topología producto. Se puede ver que X es un espacio compacto homeomorfo al conjunto de Cantor, que es cero-dimensional. Sea $p_m \in C(X,G)$ la m-ésima proyección sobre X y el conjunto $\mathcal{A}$ denotará al subgrupo de $C(X,G)$ generado por la colección $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2$ y $H_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_j) \in X : x_1 = \cdots = x_n = 0\}$. Se puede verificar que H_n es un elemento de $\sigma(Z(\mathcal{A}))$. No obstante, tomemos un elemento arbitrario, pero fijo,

$f \in \mathcal{A}$. Denotemos por e_k al elemento en X tal que $p_m(e_k) = 0$ si $m \neq k$ y $p_k(e_k) = 1$ y consideremos al conjunto $\sup(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} : f(e_k) = 1\}$. Si $\{1, \ldots, n\} \subsetneq \sup(f)$, entonces existe $l < n$ tal que $l \notin \sup(f)$. Por lo tanto, $f(e_l) = 0$, lo cual implica que $f \in Z(f) \setminus H_n$. Por otra parte, si $\{1, \ldots, n\} \subseteq \sup(f)$ y tomamos $1 \leq n_1 < n_2 \leq n$, tenemos que $f(e_{n_1} + e_{n_2}) = 0$, lo cual implica que $e_{n_1} + e_{n_2} \in Z(f) \setminus H_n$. En cualquier caso, se obtiene que $Z(f) \neq H_n$. Así, $H_n \in \sigma(Z(\mathcal{A})) \setminus Z(\mathcal{A})$, lo que completa la prueba.

Denotemos por $\delta_x \colon \mathcal{A} \to G$ a la aplicación evaluación, esto es, $\delta_x(f) = f(x)$ para todo $f \in \mathcal{A}$. Diremos que $\mathcal{A}$ es *puntualmente denso* cuando $\delta_x(\mathcal{A})$ es denso en G para todo $x \in X$.

Diremos que $\mathcal{A} \subseteq C(X, G)$ es *controlable* si para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$ y $D_1, D_2 \in \sigma(Z(\mathcal{A}))$ tales que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, existen $D \in \sigma(\operatorname{coz}(\mathcal{A}))$ y $g \in \mathcal{A}$ tales que $D_1 \subseteq D \subseteq X \setminus D_2$, $f|_{D_1} = g|_{D_1}$ y $g|_{Z(f) \cup (X \setminus D)} \equiv e_G$.

Lema 2.2.2. *Sea $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos cerrados de X que forma una subbase para los subconjuntos cerrados de X. Entonces para cualesquiera A y B subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $A \cap B = \emptyset$, existen D_A y D_B en $\sigma(\mathcal{D})$ tales que $A \subseteq D_A$, $B \subseteq D_B$ y $D_A \cap D_B = \emptyset$ siempre que $A \cap B = \emptyset$.*

Demostración. Sean A y B subconjuntos cerrados y no vacíos de X tales que $A \cap B = \emptyset$. Sea $a \in A$. Entonces $a \notin B$ y, como $\mathcal{D}$ es una subbase de cerrados de X, existen $D_1^{(a)}, \ldots, D_{n_a}^{(a)} \in \mathcal{D}$, tales que $a \notin \bigcup_{i=1}^{n_a} D_i^{(a)}$ y $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_a} D_i^{(a)}$. Sea $D_a \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{n_a} D_i^{(a)}$. Entonces $D_a \in \sigma(\mathcal{D})$, $a \notin D_a$ y $B \subseteq D_a$. Luego, $A \subseteq \bigcup_{a \in A} (X \setminus D_a)$ y, puesto que A es compacto, existe un conjunto finito $F_A \subseteq A$ tal que $A \subseteq \bigcup_{a \in F_A} (X \setminus D_a) = X \setminus \bigcap_{a \in F_A} D_a$. Sea $D_B \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{a \in F_A} D_a$. Entonces $D_B \in \sigma(\mathcal{D})$, $A \cap D_B = \emptyset$ y $B \subseteq D_B$. Ahora, puesto que D_B y A son cerrados y disyuntos, podemos aplicar el procedimiento anterior en ellos y, para cada $x \in D_B$, obtener $D'_x = \bigcup_{j=1}^{m_x} D_j$, donde $D_j \in \mathcal{D}$, para $j \in \{1, \ldots, m_x\}$, tal que $x \notin D'_x$ y $A \subseteq D_x$. Usando la compacidad de D_B, obtenemos $D'_A \in \sigma(\mathcal{D})$ tal que $A \subseteq D'_A$ y $D_B \cap D'_A = \emptyset$. En resumen, existen $D'_A, D_B \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $A \subseteq D'_A$, $B \subseteq D_B$ y $D'_A \cap D_B = \emptyset$, lo que concluye la prueba. $\square$

Ejemplo 2.2.3. Si $\mathcal{A}$ es un subgrupo de $C(X, G)$ que separa fuertemente los puntos de X, entonces $\mathcal{D} = \operatorname{coz}(\mathcal{A})$ satisface el lema (2.2.2).

Demostración. En efecto, sean $B \subseteq X$ un cerrado y $x \in X \setminus B$. Entonces $x \neq b$, para todo $b \in B$. Puesto que $\mathcal{A}$ separa fuertemente los puntos de X, existen $f_{x,b}$ y $g_{x,b}$ en $\mathcal{A}$ tales que $x \in \operatorname{coz}(f_{x,b})$, $b \in \operatorname{coz}(g_{x,b})$ y $\operatorname{coz}(f_{x,b}) \cap \operatorname{coz}(g_{x,b}) = \emptyset$. Entonces $x \notin \operatorname{coz}(g_{x,b})$, para todo $b \in B$, y $B \subseteq \bigcup_{b \in B} \operatorname{coz}(g_{x,b})$. Como B es compacto, existe un subconjunto finito $F \subseteq B$ tal que $B \subseteq \bigcup_{b \in F} \operatorname{coz}(g_{x,b})$ y $x \notin \bigcup_{b \in F} \operatorname{coz}(g_{x,b})$. En resumen, existe una cantidad finita de elementos de $\mathcal{D} = \operatorname{coz}(\mathcal{A})$, $\{\operatorname{coz}(g_{x,b})\}_{b \in F}$, de tal forma que $x \notin \bigcup_{b \in F} \operatorname{coz}(g_{x,b})$ y $B \subseteq \bigcup_{b \in F} \operatorname{coz}(g_{x,b})$, lo cual demuestra que $\mathcal{D}$ es una subbase de cerrados para X y, por lo tanto, satisface el lema (2.2.2). $\square$

Ejemplo 2.2.4. Sea $\mathcal{A}$ un subgrupo de $C(X, G)$ que separa los puntos de X. Entonces $\mathcal{D} = Z(\mathcal{A})$ satisface el lema (2.2.2).

Demostración. Sean $B \subseteq X$ un cerrado y $x \in X \setminus B$. Entonces $x \neq b$, para todo $b \in B$. Puesto que $\mathcal{A}$ separa los puntos de X, existe $f_{x,b} \in \mathcal{A}$ tal que $x \in \mathrm{coz}(f_{x,b})$ y $b \in Z(f_{x,b})$. Es claro que $x \notin Z(f_{x,b})$, para todo $b \in B$; además, $B \subseteq \bigcup_{b\in B} Z(f_{x,b})$ y, puesto que B es compacto, existe un subconjunto finito $F \subseteq B$ tal que $B \subseteq \bigcup_{b\in F} Z(f_{x,b})$ y $x \notin \bigcup_{b\in F} Z(f_{x,b})$. Hemos demostrado que existe una cantidad finita de elementos de $\mathcal{D} = Z(\mathcal{A})$, $\{Z(f_{x,b})\}_{b\in F}$, de tal forma que $x \notin \bigcup_{b\in F} Z(f_{x,b})$ y $B \subseteq \bigcup_{b\in F} Z(f_{x,b})$, lo cual significa que $\mathcal{D} = Z(\mathcal{A})$ es una subbase de cerrados para X y, por lo tanto, satisface el lema (2.2.2). □

Ejemplo 2.2.5. Sea $\mathcal{A}$ un subgrupo de $C(X,G)$ que separa los puntos de X. Entonces $\mathcal{D} = \{f^{-1}(g) : g \in G, f \in \mathcal{A}\}$ satisface el lema (2.2.2).

Demostración. En efecto, sean $B \subseteq X$ un cerrado y $x \in X \setminus B$. Entonces $x \neq b$, para todo $b \in B$. Puesto que $\mathcal{A}$ separa los puntos de X, existe $g_{x,b} \in \mathcal{A}$ tal que $x \in \mathrm{coz}(g_{x,b})$ y $b \in Z(g_{x,b}) = g_{x,b}^{-1}(e_G)$. Es claro que $x \notin g_{x,b}^{-1}(e_G)$, para todo $b \in B$; además, $B \subseteq \bigcup_{b\in B} g_{x,b}^{-1}(e_G)$ y, puesto que B es compacto, existe un subconjunto finito $F \subseteq B$ tal que $B \subseteq \bigcup_{b\in F} g_{x,b}^{-1}(e_G)$ y $x \notin \bigcup_{b\in F} g_{x,b}^{-1}(e_G)$. En resumen, existe una cantidad finita de elementos de $\mathcal{D} = \{f^{-1}(g) : g \in G, f \in \mathcal{A}\}$, $\{g_{x,b}^{-1}(e_G)\}_{b\in F}$, de tal forma que $x \notin \bigcup_{b\in F} g_{x,b}^{-1}(e_G)$ y $B \subseteq \bigcup_{b\in F} g_{x,b}^{-1}(e_G)$, lo cual demuestra que $\mathcal{D} = \{f^{-1}(g) : g \in G, f \in \mathcal{A}\}$ es una subbase de cerrados para X y, por lo tanto, satisface el lema (2.2.2). □

En lo que sigue, y a lo largo de este capítulo, denotaremos por $\mathcal{D}'$ a la familia de subconjuntos cerrados de Y que forma una base para los subconjuntos cerrados de éste. Entonces por el lema 2.2.2, para cualesquiera A y B subconjuntos cerrados y no vacíos de Y, existen D'_A y D'_B en $\sigma(\mathcal{D}')$ tales que $A \subseteq D'_A$, $B \subseteq D'_B$ y $D'_A \cap D'_B = \emptyset$ siempre que $A \cap B = \emptyset$.

La siguiente proposición muestra que en los subgrupos controlables coinciden la noción de separar puntos y separar puntos fuertemente.

Proposición 2.2.6. *Si $\mathcal{A}$ es un subgrupo controlable de $C(X,G)$ que separa los puntos de X, entonces $\mathcal{A}$ separa fuertemente los puntos de X.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. En efecto, puesto que $\mathcal{A}$ separa puntos en X, podemos conseguir funciones $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $x \in \mathrm{coz}(f_1)$, $y \in \mathrm{coz}(f_2)$, $y \in Z(f_1)$ y $x \in Z(f_2)$. Sea $\mathcal{D} = Z(\mathcal{A})$. Entonces como $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$, por el ejemplo (2.2.4), existen $D_x, D_y \in \sigma(Z(\mathcal{A}))$ tales que $x \in D_x$, $y \in D_y$ y $D_x \cap D_y = \emptyset$. Aplicando la controlabilidad de $\mathcal{A}$ a f_1, D_x y D_y, obtenemos $g_1 \in \mathcal{A}$ y $D_1 \in \sigma(\mathrm{coz}(\mathcal{A}))$ tales que $D_x \subseteq D_1 \subseteq X \setminus D_y$, $f_1|_{D_x} = g_1|_{D_x}$ y $g_1|_{Z(f)\cup(X\setminus D_1)} \equiv e_G$. Como $x \in D_x$, tenemos que $g_1(x) = f_1(x) \neq e_G$, por lo cual, $x \in \mathrm{coz}(g_1) \subseteq D_1$. Ahora, como D_1 es un conjunto abierto-cerrado, en particular es cerrado y puesto que $\mathcal{D}$ es una subbase de cerrados, entonces D_1 resulta estar contenido en una unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{D}$, disyunta con D_y. Pero, por ser D_1 compacto, esta unión arbitraria se reduce a una unión finita de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{D}$. Así, afirmamos que existe $D'_1 \in \sigma(\mathcal{D})$ tal que $D_1 \subseteq D'_1$ y $D'_1 \cap D_y = \emptyset$. Aplicando, la controlabilidad de $\mathcal{A}$ a f_2, D'_1 y D_y, obtenemos $D_2 \in \sigma(\mathrm{coz}(\mathcal{A}))$ y $g_2 \in \mathcal{A}$ tales que $D_y \subseteq D_2 \subseteq X \setminus D'_1$, $f_2|_{D_y} = g_2|_{D_y}$ y $g_2|_{Z(f_2)\cup(X\setminus D_2)} \equiv e_G$. Como $y \in D_y$, se tiene que $g_2(y) = f_2(y) \neq e_G$; así, $y \in \mathrm{coz}(g_2) \subseteq D_2 \subseteq (X \setminus D'_1) \subseteq (X \setminus D_1)$ y, puesto que $\mathrm{coz}(g_1) \subseteq D_1$, tenemos que $\operatorname{coz}(g_1) \cap \operatorname{coz}(g_2) = \emptyset$. En resumen, existen $g_1, g_2 \in \mathcal{A}$ tales que $x \in \operatorname{coz}(g_1)$, $y \in \operatorname{coz}(g_2)$ y $\operatorname{coz}(g_1) \cap \operatorname{coz}(g_2) = \emptyset$, lo cual demuestra que $\mathcal{A}$ separa fuertemente los puntos de X. $\square$

2.3. Subconjuntos soportes

Definición 2.3.1. Sean $\mathcal{A}$ un subgrupo de $C(X, G)$ y $\varphi \colon \mathcal{A} \to G$ un homomorfismo de grupos. Un subconjunto S de X es un *soporte* para φ si para todo $f \in \mathcal{A}$ tal que $S \subseteq Z(f)$ se verifica que $\varphi(f) = e_G$.

Obsérvese que si S es un soporte para φ, entonces $\overline{S}$ también lo es, por lo que no se pierde generalidad al asumir que los soportes son cerrados y, por lo tanto, compactos.

Algunas propiedades básicas de los conjuntos soportes se muestran en la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2. *Sea $\varphi \colon \mathcal{A} \to G$ un homomorfismo de grupos no nulo. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. *X es un soporte para φ.*

2. *Si S es un soporte para φ, entonces $S \neq \emptyset$.*

3. *Si S es un soporte para φ y $S \subseteq R$, entonces R es un soporte para φ.*

4. *Sean S un soporte para φ y $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $f_1|_S = f_2|_S$. Entonces $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$.*

Si, además, $\mathcal{A}$ es controlable y separa puntos en X, tenemos lo siguiente:

5. *Sean R y S soportes para φ, entonces $S \cap R \neq \emptyset$.*

Demostración.

1. Sea $f \in \mathcal{A}$ tal que $X \subseteq Z(f)$. Entonces $f(x) = e_G$, para todo $x \in X$. Luego, $f \equiv e_G$ y como φ es un homomorfismo, tenemos que $\varphi(f) = e_G$.

2. Sea S un soporte para φ. Supongamos que $S = \emptyset$. Entonces $S \subseteq Z(f)$ para todo $f \in \mathcal{A}$, lo cual implica que $\varphi(f) = e_G$, para todo $f \in \mathcal{A}$. Esto es una contradicción, pues φ es no nulo.

3. Se sigue directamente de la definición.

4. Puesto que $f_1|_S = f_2|_S$, entonces $S \subseteq Z(f_1 - f_2)$, lo cual implica que $\varphi(f_1 - f_2) = e_G$ y, por lo tanto, $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$.

5. Sean R y S soportes para φ. Supongamos que $R \cap S = \emptyset$. Puesto que $\mathcal{A}$ separa puntos en X, por el lema (2.2.2) y la proposición (2.2.6), existen $D_R, D_S \in \sigma(Z(\mathcal{A}))$ tales que $R \subseteq D_R$, $S \subseteq D_S$ y $D_R \cap D_S = \emptyset$. Puesto que φ es un homomorfismo no nulo, consideremos $f \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(f) \neq e_G$. Aplicando la controlabilidad de $\mathcal{A}$ a f, D_R y D_S obtenemos $D \in \sigma(\operatorname{coz}(\mathcal{A}))$ y $g \in \mathcal{A}$ tales que $D_R \subseteq D \subseteq X \setminus D_S$, $f|_{D_R} = g|_{D_R}$ y $g|_{Z(f)\cup(X\setminus D)} \equiv e_G$. Como $S \subseteq D_S \subseteq X \setminus D \subseteq Z(g)$, se tiene que $\varphi(g) = e_G$. Por otra parte, como $f|_{D_R} = g|_{D_R}$ y $R \subseteq D_R$, entonces $f|_R = g|_R$ y, como R es soporte para φ, el inciso anterior implica que $\varphi(g) = \varphi(f) \neq e_G$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $S \cap R \neq \emptyset$. □

Definición 2.3.3. Sean $\mathcal{A}$ un subgrupo de $C(X, G)$. Decimos que una aplicación $\varphi\colon \mathcal{A} \to G$ es *separadora* si $\operatorname{coz}(f) \cap \operatorname{coz}(g) = \emptyset$ implica $\varphi(f) = e_G$ o $\varphi(g) = e_G$ para cualesquiera $f, g \in \mathcal{A}$.

En lo que sigue probaremos que todo homomorfismo de grupos, separador y no nulo, $\phi\colon \mathcal{A} \to G$, donde $\mathcal{A}$ es controlable y separa puntos, tiene un soporte mínimo. Para este propósito, definimos

$$\mathcal{S} = \{S \subseteq X : S \text{ es un soporte compacto para } \phi\}$$

Por el inciso (1) de la proposición (2.3.2), es claro que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Existe un orden parcial canónico que puede ser definido sobre $\mathcal{S}$: $S \leq R$, $S, R \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $R \subseteq S$. Es claro que toda cadena en $\mathcal{S}$ está acotada superiormente. En efecto, sea $\mathcal{S}'$ una cadena de $\mathcal{S}$. Entonces $S_0 = \bigcap_{S\in\mathcal{S}'} S$ es una cota superior para $\mathcal{S}'$. Sólo falta ver que $S_0 \in \mathcal{S}'$, es decir, S_0 es un soporte para φ. Sea $f \in \mathcal{A}$ tal que $S_0 \subseteq Z(f)$. Entonces $\operatorname{coz} f \subseteq X \setminus S_0 = \bigcup_{S\in\mathcal{S}'}(X \setminus S)$. Como $\operatorname{coz} f$ es compacto, existe un subconjunto finito $\mathcal{S}''$ de $\mathcal{S}'$ tal que $\operatorname{coz} f \subseteq \bigcup_{S\in\mathcal{S}''}(X \setminus S) = X \setminus \bigcap_{S\in\mathcal{S}''} S$, de donde, $S_1 = \bigcap_{S\in\mathcal{S}''} S \subseteq Z(f)$ y como S_1 es un soporte para φ (por ser $\mathcal{S}'$ una cadena), se tiene que $\varphi(f) = e_G$; lo cual implica que S_0 es un soporte para φ como se quería ver. Puesto que toda cadena de $\mathcal{S}$ está acotada superiormente, el lema de Zorn implica que $\mathcal{S}$ tiene un elemento $\leq$-maximal. Es decir, existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $S \nleq S'$ para todo $S' \in \mathcal{S}$, o, equivalentemente, $S' \nsubseteq S$ para todo $S' \in \mathcal{S}$, lo cual implica que S es $\subseteq$-minimal en $\mathcal{S}$ y, puesto que, cuando $\mathcal{A}$ es controlable, dos soportes siempre se intersectan, entonces S resulta $\subseteq$-mínimo.

Proposición 2.3.4. *Sea $\varphi\colon \mathcal{A} \to G$ un homomorfismo de grupos separador y no nulo. Si $\mathcal{A}$ es controlable y separa los puntos de X, entonces existe un soporte mínimo para φ que consta de un único elemento.*

Demostración. Por lo argumentado anteriormente, φ tiene un elemento $\subseteq$-mínimo, S. Veamos que S consta de un único elemento. En efecto, supongamos que existen s_1 y s_2 en S tales que $s_1 \neq s_2$. Entonces, puesto que X es Hausdorff, existen abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$ tales que $s_1 \in U_1$, $s_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Así, $S \setminus U_i$ no es un soporte para φ, para $i = 1, 2$, pues de serlo $S \subseteq S \setminus U_i$, para $i = 1, 2$ y, puesto que $S \setminus U_i \subseteq S$, para $i = 1, 2$, se tendría que $S = S \setminus U_i$, para $i = 1, 2$; lo cual implica que $S \subseteq X \setminus U_i$, para $i = 1, 2$ y esto es una contradicción, ya que $s_i \in S$ y $s_i \notin X \setminus U_i$, para $i = 1, 2$. Por lo tanto, existen $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $S \setminus U_1 \subseteq Z(f_1)$, $S \setminus U_2 \subseteq Z(f_2)$ pero $\varphi(f_1) \neq e_G \neq \varphi(f_2)$. Como φ es un homomorfismo separador, se tiene que

$A = \operatorname{coz} f_1 \cap \operatorname{coz} f_2 \neq \emptyset$. Luego, $S \cap A = \emptyset$, pues si existe $a \in S \cap A$, entonces $a \in \operatorname{coz}(f_i) \subseteq U_i$, para $i = 1, 2$, lo que es una contradicción, pues $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por lo tanto, $S \cap A = \emptyset$ y como S y A son compactos, por el lema 2.2.2, existen $D_S, D_A \in \sigma(Z(\mathcal{A}))$ tales que $S \subseteq D_S$, $A \subseteq D_A$ y $D_S \cap D_A = \emptyset$. Aplicando el hecho de que $\mathcal{A}$ es controlable a f_1, D_S y D_A, obtenemos $g_1 \in \mathcal{A}$ y $D \in \sigma(\operatorname{coz}(\mathcal{A}))$ tales que $D_S \subseteq D$, $D \cap D_A = \emptyset$, $f_1|_{D_S} = g_1|_{D_S}$ y $g_1|_{Z(f_1) \cup (X \setminus D)} \equiv e_G$. Como $S \subseteq D_S$, entonces $f_1|_S = g_1|_S$ y, por el inciso 4 de la proposición (2.3.2), tenemos que $\varphi(f_1) = \varphi(g_1)$; puesto que $\varphi(f_1) \neq e_G$, entonces $\varphi(g_1) \neq e_G$, además, $A \subseteq D_A \subseteq X \setminus D$. Como φ es separador y $\varphi(f_2) \neq e_G \neq \varphi(g_1)$, obtenemos que $\operatorname{coz} f_2 \cap \operatorname{coz} g_1 \neq \emptyset$. Sea $x \in X$ tal que $x \in \operatorname{coz} f_2$ y $x \in \operatorname{coz} g_1 \subseteq \operatorname{coz} f_1 \cap D$. Entonces $x \in \operatorname{coz} f_1 \cap \operatorname{coz} f_2 = A$ y $x \in D$, lo que es una contradicción, pues $A \subseteq X \setminus D$. Por lo tanto, $s_1 = s_2$, lo cual implica que S tiene un único elemento. $\square$

Definición 2.3.5. Una aplicación $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es *separadora* o *preserva disyunciones*, si para cada par de aplicaciones $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $f_1^{-1}(e_G) \cup f_2^{-1}(e_G) = X$, se tiene que $H(f_1^{-1}(e_G)) \cup H(f_2^{-1})(e_G) = Y$ (equivalentemente, $\operatorname{coz}(f_1) \cap \operatorname{coz}(f_2) = \emptyset$ implica $\operatorname{coz}(H(f_1)) \cap \operatorname{coz}(H(f_2)) = \emptyset$, para cualesquiera $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$). Si H es biyectiva y tanto H como H^{-1} son separadoras, diremos que H es *biseparadora*.

Observe que la anterior definición tiene sentido y extiende de forma natural al concepto dado para las aplicaciones $\varphi\colon \mathcal{A} \to G$.

Observación 2.3.6. Originalmente, aplicaciones separadoras para funciones continuas a valores escalares fueron definidas como esas aplicaciones H tales que $fg \equiv 0$ implica $H(f)H(g) \equiv 0$. Si interpretamos el elemento nulo 0 como la identidad e del grupo, entonces aplicaciones separadoras podrían ser definidas como aquellas aplicaciones que si satisfacen $f(x)g(x) = e$, para todo $x \in X$, entonces $H(f)(y)H(g)(y) = e$, para todo $y \in Y$, o que $H(f^{-1}) = (H(f))^{-1}$, para todo $f \in \mathcal{A}$. Obviamente, esta definición sería vacua aquí puesto que, a lo largo de este capítulo, asumimos que H es un homomorfismo de grupos. Por lo tanto, esta definición nos llevaría un asunto más general: la representación de los isomorfismos de grupos definidos entre grupos de funciones continuas sin ningún requisito adicional. Infortunadamente, esto es imposible en general. En efecto, un resultado notable debido a Milutin ([25]) establece que si K es un espacio métrico, compacto y numerable, entonces $C(K, \mathbb{C})$ es linealmente isomorfo a $C([0,1], \mathbb{C})$. Por lo tanto, es fundamental imponer alguna condición adicional, ya sea geométrica o algebraica sobre el isomorfismo H con el fin de ser capaz de representarlo por aplicaciones continuas definidas sobre los espacios compactos K y $[0,1]$. En este sentido, la conexión con isomorfismos separadores se deriva de ([19]), donde se demostró que toda isometría lineal es un isomorfismo separador.

2.4. Homomorfismos separadores

En esta sección $\mathcal{A}$ (resp., $\mathcal{B}$) es un subgrupo controlable de $C(X, G)$ (resp., $C(Y, G)$) que separa los puntos de X (resp., Y). Sea $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de grupos separador. Las aplicaciones $\delta_y \circ H\colon \mathcal{A} \to G$ son homomorfismos de grupos separadores, para cada $y \in Y$. Además, puesto que $\mathcal{A}$ es controlable y separa los puntos de X, podemos aplicar la proposición (2.3.4) para obtener que cada conjunto $\mathcal{S}_y = \{S \subseteq X : S \text{ es un soporte compacto para } \delta_y \circ H\}$, ordenado parcialmente, tiene un elemento mínimo con cardinalidad 1, denotado por $h(y)$. Por lo tanto, podemos hacer corresponder cada $y \in Y$ con el respectivo $h(y) \in X$ y así definir la *aplicación soporte* asociada a H, $h\colon Y \to X$.

A continuación estudiaremos algunas propiedades que cumple la aplicación soporte asociada a H, h.

Proposición 2.4.1. *La aplicación soporte asociada a H, h, es continua.*

Demostración. Sea $(y_d)_{d\in D}$ una red en Y que converge a un punto $y \in Y$. Veamos que existe una subred $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ de $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ que converge a $h(y)$. En efecto, como X es compacto y $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ es una red en X, entonces $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ tiene un punto de acumulación z; por lo que existe una subred $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ de $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ que converge a z. Veamos que $z = h(y)$. Para ello, supongamos, por contradicción, que $z \neq h(y)$. Como X es Hausdorff, existen V_1 y V_2 abiertos de X tales que $z \in V_1$, $h(y) \in V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Puesto que $h(y) \in V_2$, existe $f_2 \in \mathcal{A}$ tal que $\operatorname{coz}(f_2) \subset V_2$ y $[H(f_2)](y) \neq e_G$. Como $H(f_2)$ es continua y $\{y_d\}_{d\in D}$ converge a y, entonces $\left\{[H(f_2)](y_d)\right\}_{d\in D}$ converge a $[H(f_2)](y) \neq e_G$. Entonces existe $d_0 \in D$ tal que $[H(f_2)](y_d) \neq e_G$, para todo $d \geq d_0$. Puesto que $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ converge a z y V_1 es una vecindad abierta de z, existe $d_1 \in D'$ tal que $h(y_{d_t}) \in V_1$, para todo $d_t \geq d_1$. Por otra parte, como $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ es una subred de $\{h(y_d)\}_{d\in D}$, existe una función $f\colon D' \to D$ tal que $h(y_{d_k}) = h(y_{f(d_k)})$ y, para todo $d \in D$, existe $d' \in D'$ tal que, si $m \geq d'$, entonces $f(m) \geq d$, donde m es un elemento de D'. De aquí tenemos, puesto que $d_0 \in D$, que existe $d' \in D'$ tal que si $m \geq d'$, entonces $f(m) \geq d_0$, para cualquier $m \in D'$. Ahora bien, como d_1 y d' son elementos del conjunto dirigido D', existe $d_2 \in D'$ tal que $d_2 \geq d_1$ y $d_2 \geq d'$. Por lo tanto, $h(y_{d_2}) \in V_1$, $h(y_{d_2}) = h(y_{f(d_2)})$ y $f(d_2) \geq d_0$. Sea $r = f(d_2)$. Entonces $r \geq d_0$ y $h(y_r) \in V_1$, por lo que $H(f_2)(y_r) \neq e_G$ y existe $f_1 \in C(X, \mathbb{F})$ tal que $\operatorname{coz}(f_1) \subset V_1$ y $H(f_1)(y_r) \neq e_G$. En resumen, $\operatorname{coz}(f_1) \cap \operatorname{coz}(f_2) = \emptyset$ y $y_r \in \operatorname{coz}(H(f_1)) \cap \operatorname{coz}(H(f_2))$, lo cual contradice que H es separadora. Por lo tanto, $z = h(y)$, lo cual implica que $h(y)$ es punto límite de $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$, como se quería demostrar. □

Proposición 2.4.2. *Si S es un subconjunto propio de X, abierto y no vacío, $f \in \mathcal{A}$ y $S \subseteq Z(f)$, entonces $h^{-1}(S) \subseteq Z(H(f))$.*

Demostración. Sea $y \in h^{-1}(S)$. Entonces $h(y) \in S$, por lo que $X - S$, subconjunto compacto y no vacío de X, no es soporte para $\delta_y \circ H$, lo cual implica que existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $X \setminus S \subseteq Z(g)$ y $H(g)(y) \neq e_G$. Por lo tanto, $\operatorname{coz}(g) \subseteq S$ y, como $\operatorname{coz}(f) \subseteq X \setminus S$, tenemos que $\operatorname{coz}(f) \cap \operatorname{coz}(g) = \emptyset$. Puesto que H es separadora, concluimos que $\operatorname{coz}(Hf) \cap \operatorname{coz}(Hg) = \emptyset$. Por lo tanto, $H(f)(y) = e_G$, esto es, $y \in Z(Hf)$, como se quería ver. □

Proposición 2.4.3. *Para todo $f \in \mathcal{A}$, se verifica lo siguiente:*

$$h(\operatorname{coz}(H(f))) \subseteq \operatorname{coz}(f).$$

Demostración. Sea $x \in h(\operatorname{coz}(H(f)))$. Entonces $x = h(y)$, para algún $y \in \operatorname{coz}(H(f))$. Como $\{h(y)\}$ es soporte para $\delta_y \circ H$ se tiene que $x \notin Z(f)$ o, equivalentemente, $x \in \operatorname{coz}(f)$. □

Proposición 2.4.4. *Si H es inyectiva, entonces h es sobre.*

Demostración. Supongamos que $h(Y) \neq X$ y tomemos $x \in X$ tal que $x \notin h(Y)$. Puesto que h es continua y Y es compacto, tenemos que $h(Y)$ es un subconjunto propio, y además compacto, de X. Aplicando el lema (2.2.2), existen elementos disjuntos, D_x y D_Y, en $\sigma(Z(\mathcal{A}))$ tales que $x \in D_x$, $h(Y) \subseteq D_Y$. Además, como $\mathcal{A}$ separa puntos en X, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq e_G$. Aplicando la controlabilidad de $\mathcal{A}$ a f, D_x y D_Y, obtenemos $g \in \mathcal{A}$ y $D \in \sigma(\mathrm{coz}(\mathcal{A}))$ tales que $D_x \subseteq D \subseteq X \setminus D_Y \subseteq X \setminus h(Y)$, $g|_{D_x} = f|_{D_x}$ y $g|_{Z(f) \cup X \setminus D} \equiv e_G$. Así, $g(x) = f(x) \neq e_G$ y $h(Y) \subseteq X \setminus D \subseteq Z(g)$. De esta última afirmación, se obtiene, por la definición de soporte, que $H(g)(y) = e_G$ para todo $y \in Y$, es decir, $H(g) \equiv e_G$. Puesto que H es inyectiva, esntonces $g \equiv e_G$ lo que es una contradicción porque $g(x) \neq e_G$. Por lo tanto, $h(Y) = X$. □

La siguiente proposición establece bajo qué condiciones la aplicación soporte h, inducida por H, es un homeomorfismo.

Proposición 2.4.5. *Sea H una biyección. Entonces si H es biseparadora se tiene que $h \colon Y \to X$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Por la proposición (2.4.1), tenemos que h es continua y como X y Y son compactos (y Hausdorff), tenemos que h es abierta. Además, puesto que H es inyectiva, la proposición anterior implica que h es sobre, por lo que sólo falta ver que h es inyectiva y con esto quedará demostrado que h es un homeomorfismo. En efecto, sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $y_1 \neq y_2$. Por demostrar que $h(y_1) \neq h(y_2)$. Puesto que $\mathcal{B}$ separa los puntos de Y, existen $D_1, D_2 \in \sigma(Z(\mathcal{B}))$ tales que $y_1 \in D_1$, $y_2 \in D_2$ y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Puesto que $H(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, existe $f_i \in \mathcal{A}$ tal que $H(f_i)(y_i) \neq e_G$ para $i = 1, 2$. Como $\mathcal{B}$ es controlable, existen $D \in \sigma(\mathrm{coz}(\mathcal{B}))$ y $g_1 \in \mathcal{A}$ tales que $y_1 \in D_1 \subseteq D \subseteq Y \setminus D_2$, $H(g_1)|_{D_1} = H(f_1)|_{D_1}$ y $H(g_1)|_{Z(H(f_1)) \cup (Y \setminus D)} \equiv e_G$. Puesto que D_2 y D son cerrados en Y y $D_2 \cap D = \emptyset$, existen D_2' y D' en $\sigma(Z(\mathcal{B}))$ tales que $D_2 \subseteq D_2'$, $D \subseteq D'$ y $D_2' \cap D' = \emptyset$. Así, existe $D' \in \sigma(Z(\mathcal{B}))$ tal que $D \subseteq D'$ y $D_2 \cap D' = \emptyset$. Aplicando la controlabilidad de $\mathcal{B}$ a $H(f_2)$, D_2 y D', tenemos que existen $D'' \in \sigma(\mathrm{coz}(\mathcal{B}))$ y $g_2 \in \mathcal{A}$ tales que $y_2 \in D_2 \subseteq D'' \subseteq Y \setminus D' \subseteq Y \setminus D$, $H(g_2)|_{D_2} = H(f_2)|_{D_2}$ y $H(g_2)|_{Z(H(f_2)) \cup (Y \setminus D'')} \equiv e_G$. Por lo tanto, puesto que $\mathrm{coz}(H(g_1)) \cap \mathrm{coz}(H(g_2)) \subseteq D \cap D'' = \emptyset$ y H es biseparadora, se obtiene que $\mathrm{coz}(g_1) \cap \mathrm{coz}(g_2) = \emptyset$. Por otra parte, tenemos que $H(g_i)(y_i) = H(f_i)(y_i) \neq e_G$, para $i = 1, 2$, esto es, $y_i \in \mathrm{coz}(H(g_i))$, para $i = 1, 2$, lo cual implica, por la proposición (2.4.3), que $h(y_i) \in \mathrm{coz}(g_i)$, para $i = 1, 2$ y, como $\mathrm{coz}(g_1) \cap \mathrm{coz}(g_2) = \emptyset$, se concluye que $h(y_1) \neq h(y_2)$, como se quería demostrar. □

Hemos visto cómo un homomorfismo de grupos separador tiene asociada una aplicación continua h que asigna a cada punto $y \in Y$ el subconjunto soporte de $\delta_y \circ H$. Nuestro próximo objetivo es obtener una representación completa de H a través de la aplicación soporte h. Teniendo lo anterior en mente, definamos el siguiente conjunto:

$$G_{h(y)} = \{f(h(y)) : f \in \mathcal{A}\}$$

que es un subgrupo de G, para todo $y \in Y$, y denotemos por $Hom(G_{h(y)}, G_y)$ al conjunto de todos los homomorfismos de grupos de $G_{h(y)}$ y que toman valores en G_y. Definamos, ahora, al conjunto

$$\mathcal{G} = \bigcup_{y \in Y} \mathrm{Hom}(G_{h(y)}, G_y)$$

Podemos pensar en los elementos de $\mathcal{G}$ como funciones parciales sobre G. Es decir, funciones $\alpha\colon \mathrm{Dom}(\alpha) \subseteq G \to G$ cuyo dominio es un subconjunto (no necesariamente propio) de G. Puesto que G es discreto, podemos equipar a $\mathcal{G}$ con la topología producto (o de la convergencia puntual) como sigue. Sea $[\alpha; g_1, \ldots, g_n] = \{\beta \in G^G : \alpha(g_i) = \beta(g_i) \in G, 1 \leq i \leq n\}$, donde $g_i \in G$, para $1 \leq i \leq n$. Lo anterior define una vecindad básica de una aplicación $\alpha \in G^G$. Ahora, si α es una aplicación parcial, podemos restringir esta vecindad básica a $\mathcal{G}$ tomando $[\alpha; g_1, \ldots, g_n]$ como el conjunto de todas las aplicaciones parciales $\beta\colon \mathrm{Dom}(\beta) \subseteq G \to G$ tales que $g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{Dom}(\beta)$ y $\alpha(g_i) = \beta(g_i)$, $1 \leq i \leq n$. Se puede verificar que esto produce una extensión de la topología de convergencia puntual sobre $\mathcal{G}$ (ver [27]). Con esta notación definimos $\omega\colon Y \to \mathcal{G}$ por

$$\omega[y](f(h(y))) = H(f)(y)$$

para cada $y \in Y$. A continuación, veremos que ω está bien definida y es continua.

Proposición 2.4.6. *Con la terminología establecida anteriormente, las siguientes afirmaciones se verifican.*

1. $\omega[y]\colon G_{h(y)} \to G_y$ *es un homomorfismo de grupos bien definido, para todo* $y \in Y$.

2. ω *es continua cuando equipamos a* $\mathcal{G}$ *con la topología de la convergencia puntual.*

Demostración.

1. Para probar que $\omega[y]$ está bien definida, tomemos $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $f_1(h(y)) = f_2(h(y))$. Por la proposición (2.3.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \omega[y](f_1(h(y))) &= H(f_1)(y) \\ &= H(f_2)(y) \\ &= \omega[y](f_2(h(y))). \end{aligned}$$

Por otra parte, es fácil ver que $\omega[y]$ es un homomorfismo de grupos para cada $y \in Y$. En efecto, sean $y \in Y$ y $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega[y](f_1(h(y)) - f_2(h(y))) &= \omega[y]((f_1 - f_2)(h(y))) \\ &= H(f_1 - f_2)(y) \\ &= (H(f_1) - H(f_2))(y) \\ &= H(f_1)(y) - H(f_2)(y) \\ &= \omega[y](f_1(h(y))) - \omega[y](f_2(h(y))) \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

2. Sea $(y_d)_{d\in D}$ una red que converge a $y \in Y$. Si g es un elemento arbitrario en $\mathrm{Dom}(\omega[y]) = G_{h(y)}$, entonces $g = f(h(y)) \in G_{h(y)}$ para algún $f \in \mathcal{A}$. Puesto que h es continua, por la proposición (2.4.1), se tiene que $f \circ h \in C(Y,G)$ y $(f \circ h)^{-1}(g)$ es una vecindad abierta-cerrada de $y \in Y$. Puesto que G es discreto, existe $d_1(g) \in D$ tal que $f(h(y_d)) = g$, para todo $d \geq d_1(g)$. Así, $g \in \mathrm{Dom}(\omega[y_d])$, para todo $d \geq d_1(g)$. En forma similar, como $\omega[y](g) = H(f)(y) = g_y \in G$ y $H(f) \in C(Y,G)$, tenemos que $(H(f))^{-1}(g_y)$ es una vecindad abierta-cerrada de y. Por lo que existe $d_2 \geq d_1(g)$ tal que $H(f)(y_d) = g_y$, para todo $d \geq d_2$. Así, $\omega[y_d](g) = H(f)(y_d) = g_y = H(f)(y) = \omega[y](g)$, para todo $d \geq d_2$. Esto significa que la red $(\omega[y_d])_{d\in D}$ converge a $\omega[y]$ en la topología de la convergencia puntual sobre $\mathcal{G}$. □

Observe que puesto que G es discreto, los subconjuntos compactos en G son finitos. Por lo tanto, hemos probado que ω también es continua con respecto a la topología compacto abierta sobre $\mathcal{G}$.

Ahora estamos en posición de establecer un resultado importante en este capítulo.

Teorema 2.4.7. *Sea $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de grupos separador. Entonces existen aplicaciones continuas $h\colon Y \to X$ y $\omega\colon Y \to \bigcup_{y\in Y} \mathrm{Hom}(G_{h(y)}, G_y)$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada $y \in Y$ y todo $f \in \mathcal{A}$ se verifica que*

$$H(f)(y) = \omega[y](f(h(y))).$$

2. *H es continua con respecto a la topología de la convergencia puntual.*

3. *H es continua con respecto a la topología compacto abierta.*

4. *Si H es biyectiva y H^{-1} es una aplicación separadora, entonces h es un homeomorfismo.*

Demostración. Puesto que el inciso (1) es consecuencia de la definición de ω, el inciso (2) se sigue de la afirmación (2) en la proposición (2.4.6) y el inciso (4) corresponde, exactamente, a la proposición (2.4.5), sólo queda verificar el inciso (3).

(3) Sea $(f_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{A}$ una red que converge a e_G en la topología compacto abierta. Si K es un subconjunto compacto de Y, entonces, puesto que h es continua, $h(K)$ es un conjunto compacto en X. Por lo tanto, $(f_d)_{d\in D}$ es eventualmente la función constante e_G en $h(K)$. Aplicando el inciso 1, se sigue que $(H(f_d))_{d\in D}$ es eventualmente la función constante e_G en K, lo que completa la prueba. □

Corolario 2.4.8. *Sea $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de grupos separador, donde $\mathcal{A}$ es puntualmente denso en G. Entonces existen aplicaciones continuas $h\colon Y \to X$ y $\omega\colon Y \to \mathrm{End}(G)$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada $y \in Y$ y todo $f \in \mathcal{A}$ se verifica que*

$$H(f)(y) = \omega[y](f(h(y))).$$

2. *H es continua con respecto a la topología de la convergencia puntual.*

3. *H es continua con respecto a la topología compacto abierta.*

4. *Si H es biyectiva y H^{-1} es una aplicación separadora, entonces h es un homeomorfismo.*

A continuación, enunciamos el resultado principal en este capítulo.

2.5. Resultado principal

Teorema 2.5.1. *Sean X y Y espacios compactos, Hausdorff, cero-dimensionales y G un grupo discreto. Supongamos que $\mathcal{A} \subseteq C(X,G)$ y $\mathcal{B} \subseteq C(Y,G)$ son subgrupos controlables, puntualmente densos y, además, $\mathcal{A}$ separa los puntos de X. Si $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un isomorfismo de grupos, biseparador, entonces existen aplicaciones continuas $h\colon Y \to X$ y $\omega\colon Y \to \mathrm{Aut}(G)$ que tienen las siguientes propiedades:*

1. *h es un homeomorfismo de Y en X.*

2. *Para cada $y \in Y$ y todo $f \in \mathcal{A}$ se verifica que*

$$H(f)(y) = \omega[y](f(h(y))).$$

3. *H es un isomorfismo continuo con respecto a la topología de la convergencia puntual.*

4. *H es un isomorfismo continuo con respecto a la topología compacto abierta.*

Demostración. Después del teorema (2.4.7) y del corolario (2.4.8), sólo debemos demostrar que $\omega[y] \in \mathrm{Aut}(G)$, para todo $y \in Y$. Aplicando el corolario (2.4.8) a H^{-1}, obtenemos las aplicaciones

$$\rho\colon X \to \mathrm{End}(G),$$

$$\kappa\colon X \to Y$$

tales que, para cualesquiera $x \in X$ y $g \in \mathcal{B}$, tenemos que $H^{-1}(g)(x) = \rho[x](g(\kappa(x)))$. Así, para todo $f \in \mathcal{A}$ y $x \in X$, tenemos que

$$f(x) = H^{-1} \circ (H(f))(x) = \rho[x](H(f)(\kappa(x))) = \rho[x](\omega[\kappa(x)](f(h(\kappa(x)))))$$

lo cual significa que el soporte de $\delta_x \circ (H^{-1} \circ H)$ es a la vez x y $h(\kappa(x))$. Puesto que el soporte mínimo es único, tenemos que $h \circ \kappa = id_X$, lo cual implica que κ es una inversa a derecha de h. En forma análoga, para cualesquiera $g \in \mathcal{B}$ y $y \in Y$, tenemos que

$$g(y) = H \circ (H^{-1}(g))(y) = \omega[y](H^{-1}(g(h(y)))) = \omega[y](\rho[h(y)](g(\kappa(h(y)))))$$

esto significa que y y $\kappa(h(y))$ son soportes de $\delta_y \circ (H \circ H^{-1})$ y, puesto que el soporte mínimo es único, concluimos que κ es una inversa a izquierda de h. De donde, $\kappa = h^{-1}$. Por lo tanto,

$$f(x) = H^{-1} \circ (H(f))(x) = \rho[x](H(f)(\kappa(x))) = \rho[x](\omega[\kappa(x)](f(x))),$$

$$g(y) = H \circ (H^{-1}(g))(y) = \omega[y](H^{-1}(g(h(y)))) = \omega[y](\rho[h(y)](g(y))).$$

Aplicando la primera igualdad a $x = h(y)$, obtenemos que $\rho[h(y)] \circ \omega[y] = id_G$, para todo $y \in Y$; y de la segunda igualdad, tenemos que $\omega[y] \circ \rho[h(y)] = id_G$. De lo anterior, se concluye que $\omega[y]$ tiene inversa a izquierda y derecha y, por lo tanto, es un automorfismo sobre G lo que completa la prueba. □

Corolario 2.5.2. *Sean X y Y espacios compactos, Hausdorff, cero-dimensionales y G un grupo discreto. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subgrupos controlables y puntualmente densos de funciones continuas G-valuadas que separan los puntos de X y de Y, respectivamente. Si existe un isomorfismo de grupos, biseparador, $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, entnonces $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son equivalentes.*

Demostración. La demostración de este resultado se sigue directamente del teorema (2.5.1) □

Otro corolario que surge del anterior teorema (2.5.1) es el siguiente.

Corolario 2.5.3. *Sean X y Y espacios compactos, Hausdorff, cero-dimensionales y G un grupo discreto. Supongamos que los conjuntos $\mathcal{A} \subseteq C(X, G)$ y $\mathcal{B} \subseteq C(Y, G)$ son subgrupos controlables y puntualmente densos de funciones continuas y, además, $\mathcal{B}$ separa los puntos de Y. Si $H^{-1}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ es un isomorfismo de grupos, biseparador y no nulo, entonces existen aplicaciones continuas $h'\colon X \to Y$ y $\omega'\colon X \to \mathrm{Aut}(G)$ que tienen las siguientes propiedades:*

1. *h' es un homeomorfismo.*
2. *Para cualesquiera $x \in X$ y $g \in \mathcal{B}$, se verifica que*
$$H^{-1}(g)(x) = \omega'[x](g(h'(x))).$$
3. *H^{-1} es un isomorfismo continuo, con respecto a la topología de la convergencia puntual.*
4. *H^{-1} es un isomorfismo continuo, con respecto a la topología compacto abierta.*

Demostración. La demostración se sigue directamente del teorema (2.5.1). □

Capítulo 3

Representación de isomorfismos entre subgrupos de funciones continuas con soporte compacto

3.1. Introducción

En este capítulo, estamos interesados en la representación de isomorfismos, entre subgrupos de funciones continuas con soporte compacto (definidas en espacios topológicos localmente compactos y que toman valores en un grupo), como operadores composición con peso.

Sean G un grupo discreto y X y Y espacios topológicos localmente compactos. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subgrupos de funciones continuas, con soporte compacto, G-valuadas y $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un homomorfismo, decimos que H es representado como un *operador composición con peso* cuando existen un homeomorfismo $h\colon Y \to X$ y una aplicación continua $\omega\colon Y \to \mathrm{Aut}(G)$ tales que $H(f)(y) = \omega[y](f(h(y)))$, para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$ y $y \in Y$. Aquí $\mathrm{Aut}(G)$ está equipado con la topología de la convergencia puntual.

El estudio relacionado con la representación de operadores lineales como aplicaciones composición con peso ha sido abordado por muchos autores y en diferentes direcciones. Sin embargo, en esta ocasión sólo mencionaremos el clásico teorema de Banach-Stone que, cuando G es el campo de los números reales o complejos, establece que si los espacios de Banach de funciones continuas $C(X, G)$ y $C(Y, G)$ (dotados con la norma del supremo) son linealmente isométricos, entonces dicha isometría puede ser representada como un operador composición con peso. Otro ejemplo importante aparece en teoría de códigos, donde el bien conocido teorema de equivalencia de MacWilliams afirma que cuando G es un campo finito y X y Y son conjuntos finitos, cualquier isometría (por la métrica de Hamming) entre dos códigos (subespacios lineales) $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de G^X y G^Y, respectivamente, puede ser representada como un operador composición con peso (ver [4], [22] y [23]). Este resultado ha sido generalizado a códigos convolucionales y también tiene sentido en otras áreas, por ejemplo, análisis funcional y sistemas dinámicos lineales.

La motivación principal de este apartado ha sido extender el teorema de MacWilliams a situaciones más generales y explorar la posible aplicación de estos métodos al estudio de los códigos convolucionales o sistemas dinámicos lineales. Sin embargo, a lo largo de este capítulo, sólo nos ocuparemos de los espacios cero-dimensionales y localmente compactos X y Y; y G será considerado un grupo discreto.

Existen muchos precedentes en el estudio de la representación de homomorfismos de grupos para funciones continuas que toman valores en un grupo. Se pueden consultar, como se dijo en el segundo capítulo, en las siguientes referencias (ver [5], [9], [20], [24], [26], [29], [36], [37]). La mayoría de los hechos básicos y las nociones relacionadas con propiedades topológicas se pueden encontrar en [6].

Definición 3.1.1. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ subgrupos de $C_{00}(X,G)$ y $C_{00}(Y,G)$, respectivamente, y $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo. Decimos que H es un *operador composición con peso* si existen un homeomorfismo $h\colon Y \to X$ y una función continua $\omega\colon Y \to \mathrm{Aut}(G)$ tales que $H(f)(y) = \omega[y](f(h(y)))$, para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$ y $y \in Y$, donde $\mathrm{Aut}(G)$ está dotado con la topología de la convergencia puntual.

El principal interrogante que abordamos en este capítulo es el siguiente:

¿Qué condiciones deben cumplir X, Y, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, G y H para que esta última aplicación se pueda representar como un operador composición con peso?

A continuación introduciremos algunas notaciones y terminología pertinente.

3.2. Notación

En este capítulo G representa un grupo discreto con elemento neutro e_G, X y Y son espacios Hausdorff, localmente compactos y cero-dimensionales. Definimos $C_{00}(X,G)$ como el conjunto formado por todas las funciones $f \in C(X,G)$ tales que existe un conjunto compacto $C_f \subseteq X$ que satisface lo siguiente: Para cada $x \in X$, si $x \notin C_f$, entonces $f(x) = e_G$, es decir, $\{x \in X : f(x \neq e_G)\}$ es compacto, ya que G es discreto. El conjunto $C_{00}(X,G)$ dotado con la suma usual de funciones, definida punto por punto, es un grupo. En forma análoga, definimos $C_{00}(Y,G)$. Cabe anotar que usamos la suma por comodidad en la notación, no para indicar que $C_{00}(X,G)$ (resp. $C_{00}(Y,G)$) es abeliano.

Si X es un espacio localmente compacto, entonces X^* denota la *compactificación de Alexandroff* de X, es decir, $X^* = X \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un punto conveniente. Se puede ver que todo subconjunto cerrado de X^* es la unión de un subconjunto cerrado de X con $\{\infty\}$ o es un subconjunto compacto de X.

Si $f \in C_{00}(X,G)$, como en el segundo capítulo, el *cocero* de f es el conjunto $\mathrm{coz}(f) = \{x \in X : f(x) \neq e_G\}$ y el *soporte* de f es el conjunto $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{coz}(f)$. Puesto que G es discreto, tanto $\mathrm{coz}(f)$ como $Z(f) = X \setminus \mathrm{coz}(f)$ son subconjuntos abiertos-cerrados de X. Además, para cada $f \in C_{00}(X,G)$, se tiene que $\mathrm{coz}(f)$ es compacto. En efecto, como $f \in C_{00}(X,G)$, existe un subconjunto compacto de X, C, tal que para todo $x \in X$, si $x \notin C$, entonces $f(x) = e_G$, o equivalentemente, para cada $x \in X$, si $x \in \mathrm{coz}(f)$, entonces $x \in C$, es decir, existe un compacto C tal que $\mathrm{coz}(f) \subseteq C$. En consecuencia, $\mathrm{coz}(f)$ es compacto. Del mismo modo, para cada $g \in C_{00}(Y,G)$, se tiene que $\mathrm{coz}(g)$ es compacto.

Sea $\mathcal{A}$ un subgrupo de $C_{00}(X,G)$. Para cada $x \in X$, denotemos por $\delta_x \colon \mathcal{A} \to G$ a la *evaluación canónica* definida como sigue:

$$\delta_x(f) = f(x), \text{ para toda } f \in \mathcal{A}.$$

y consideraremos los conjuntos

$$I_x \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{A} : f(x) = e_G\} \text{ y}$$

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : I_x \neq \mathcal{A}\}.$$

Así, $S = \bigcup_{f\in\mathcal{A}} \operatorname{coz}(f)$. Puesto que S es un conjunto abierto, es un espacio localmente compacto cuando lo equipamos con la topología heredada de X. Por lo que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $S = X$. Esto es,

$$\text{para todo } x \in X, \text{ existe } f \in \mathcal{A} \text{ tal que } f(x) \neq e_G. \tag{3.1}$$

Diremos que $\mathcal{A}$ es *puntualmente denso* si $\delta_x(\mathcal{A})$ es denso en G, para cada $x \in X$.

Definimos $Z(\mathcal{A})$ y $\operatorname{coz}(\mathcal{A})$ como en el capítulo anterior, es decir,

$$Z(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{Z(f) : f \in \mathcal{A}\} \text{ y}$$

$$\operatorname{coz}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{\operatorname{coz}(f) : f \in \mathcal{A}\}$$

Además, $\sigma(\mathcal{D})$ denotará al anillo más pequeño, de subconjuntos de X, que contiene a $\operatorname{coz}(\mathcal{A})$ y que es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas.

En forma análoga, se definen $Z(\mathcal{B})$ y $\operatorname{coz}(\mathcal{B})$. Además, $\sigma(\mathcal{D}')$ denotará al anillo más pequeño, de subconjuntos de Y, que contiene a $\operatorname{coz}(\mathcal{B})$ y que es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas.

Decimos que $\mathcal{A}$ *separa puntos* en X si para cualesquiera par de puntos $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$, existe una aplicación $f \in \mathcal{A}$ tal que $x_1 \in \operatorname{coz}(f)$ y $x_2 \in Z(f)$ y viceversa.

Definición 3.2.1. Decimos que $\mathcal{A} \subseteq C_{00}(X,G)$ es *controlable* si para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$ y $D_1, D_2 \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, existen $D \in \sigma(\mathcal{D})$ y $g \in \mathcal{A}$ tales que $D_1 \subseteq D \subseteq X \setminus D_2$, $f|_{D_1} = g|_{D_1}$ y $g|_{Z(f)\cup(X\setminus D)} \equiv e_G$.

Lema 3.2.2. *Supongamos que $\mathcal{A}$ separa los puntos de X y que P y Q son subconjuntos compactos de X. Si $P \cap Q = \emptyset$, entonces existen $D_P, D_Q \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $P \subseteq D_P$, $Q \subseteq D_Q$ y $D_P \cap D_Q = \emptyset$.*

Demostración. Sean $p \in P$ y $q_0 \in Q$. Como $P \cap Q = \emptyset$, entonces $p \neq q_0$ y, puesto que $\mathcal{A}$ separa los puntos de X, existe $f_{pq_0} \in \mathcal{A}$ tal que $q_0 \in \operatorname{coz}(f_{pq_0})$ y $p \in Z(f_{pq_0})$. Así, $P \subseteq \bigcup_{p\in P}(X \setminus \operatorname{coz}(f_{pq_0}))$ y como P es compacto, existen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}$ tales que $P \subseteq \bigcup_{i=1}^n (X \setminus \operatorname{coz}(f_i)) = X \setminus \bigcap_{i=1}^n \operatorname{coz}(f_i)$ y $q_0 \in \operatorname{coz}(f_i)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $D_{q_0} = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{coz}(f_i)$. Entonces $D_{q_0} \in \sigma(\mathcal{D})$ y $q_0 \in D_{q_0} \subseteq X \setminus P$. De esta manera obtenemos, para cada $q \in Q$, el conjunto $D_q \in \sigma(\mathcal{D})$ tal que $q \in D_q \subseteq X \setminus P$. Por lo que $Q \subseteq \bigcup_{q\in Q} D_q$ y, puesto que Q es compacto, existe un conjunto finito $F \subseteq Q$ tal que $Q \subseteq \bigcup_{q\in F} D_q \subseteq X \setminus P$. Sea $D_Q = \bigcup_{q\in F} D_q$. Entonces $D_Q \in \sigma(\mathcal{D})$ y $Q \subseteq D_Q \subseteq X \setminus P$. Ahora bien, como D_Q y P son compactos y ajenos, podemos repetir el procedimiento anterior y obtener $D_P \in \sigma(\mathcal{D})$ tal que $P \subseteq D_P \subseteq X \setminus D_Q$. En resumen, existen D_P y D_Q en $\sigma(\mathcal{D})$ tales que $P \subseteq D_P$, $Q \subseteq D_Q$ y $D_P \cap D_Q = \emptyset$, como se quería demostrar. □

3.3. Subconjuntos soportes y funcionales separadores

Definición 3.3.1. Sea $\mathcal{A}$ un subgrupo de $C_{00}(X, G)$ y $\varphi\colon \mathcal{A} \to G$ un homomorfismo de grupos. Un conjunto $K \subseteq X$ es un *soporte* para φ si para todo $f \in \mathcal{A}$ tal que $K \subseteq Z(f)$ se verifica que $\varphi(f) = e_G$.

Observe que si K es un soporte para φ, entonces $\mathrm{cl}_X(K)$ también lo es, por lo que no se pierde generalidad, si de aquí en adelante consideramos los conjuntos soportes como subconjuntos cerrados de X.

Los conjuntos soportes gozan de propiedades muy interesantes como se muestra a continuación.

Proposición 3.3.2. *Sea $\varphi\colon \mathcal{A} \to G$ un homomorfismo de grupos no nulo. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones.*

1. *X es un soporte para φ.*
2. *Si K es un soporte para φ, entonces $K \neq \emptyset$.*
3. *Sean K un soporte para φ y $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $f_1|_K = f_2|_K$. Entonces $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$.*
4. *Si $\mathcal{A}$ es controlable y K_1 y K_2 son soportes para φ, entonces $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.*

Demostración.

1. Esta afirmación es clara, puesto que si $f \in \mathcal{A}$ es tal que $X \subseteq Z(f)$, entonces $f(x) = e_G$, para todo $x \in X$, lo cual implica que $f \equiv e_G$ y, como φ es un homomorfismo, se tiene que $\varphi(f) = e_G$.
2. Supongamos que $K = \emptyset$. Entonces $\emptyset = K \subseteq Z(f)$, para todo $f \in \mathcal{A}$, y por ser K un soporte para φ, tenemos que $\varphi(f) = e_G$, para todo $f \in \mathcal{A}$. Esto es una contradicción, puesto que φ es no nulo.
3. Supongamos que $f_1|_K = f_2|_K$. Entonces $K \subseteq Z(f_1 - f_2)$ y, por ser K un soporte para φ, se tiene que $\varphi(f - g) = e_G$. Por lo tanto, $\varphi(f) = \varphi(g)$.
4. Supongamos que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Como φ es no nulo, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(f) \neq e_G$. Entonces $C_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{coz}(f) \cap K_1$ y $C_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{coz}(f) \cap K_2$ son subconjuntos, no vacíos, de X, compactos y disjuntos. Luego, por el lema (3.2.2), existen D_1 y $D_2 \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que

$C_i \subseteq D_i$, para $i = 1, 2$, y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Aplicando la controlabilidad de $\mathcal{A}$ a f, D_1 y D_2, obtenemos $D \in \sigma(\mathcal{D})$ y $g \in \mathcal{A}$ tales que $D_1 \subseteq D \subseteq X \setminus D_2 \subseteq X \setminus C_2$, $f|_{D_1} = g|_{D_1}$ y $g|_{(Z(f) \cup X \setminus D)} \equiv e_G$.

Afirmamos que $f|_{K_1} = g|_{K_1}$, pues si existe $x \in K_1$ tal que $f(x) \neq g(x)$, entonces $x \notin D_1$, lo cual implica que $x \notin C_1 = \operatorname{coz}(f) \cap K_1$ y, por lo tanto, $x \notin \operatorname{coz}(f)$; de donde, $x \in Z(f) \subseteq Z(g)$, así, $f(x) = e_G = g(x)$, lo que es una contradicción. Además, $K_2 \subseteq Z(g)$, pues si existe $y \in K_2$ tal que $y \notin Z(g)$, entonces $y \notin Z(f)$ y $y \notin (X \setminus D) \supseteq D_2 \supseteq C_2$. Esto implica que $y \in \operatorname{coz}(f)$ y $y \notin C_2 = \operatorname{coz}(f) \cap K_2$, lo que es una contradicción. En resumen, $f|_{K_1} = g|_{K_1}$ y $K_2 \subseteq Z(g)$. Entonces, por el inciso anterior y por la definición de soporte, respectivamente, tenemos que $\varphi(g) = \varphi(f) \neq e_G$ y $\varphi(g) = e_G$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. $\square$

Definición 3.3.3. Sea $\mathcal{A}$ un subgrupo de $C_{00}(X, G)$. Decimos que una aplicación $\varphi\colon \mathcal{A} \to G$ es *separadora* cuando $\operatorname{coz}(f_1) \cap \operatorname{coz}(f_2) = \emptyset$ implica $\varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) = e_G$, para cualesquiera $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$.

En lo que sigue probaremos que todo homomorfismo de grupos, separador y no nulo, $\varphi\colon \mathcal{A} \to G$, donde $\mathcal{A}$ es controlable y separa puntos, tiene un soporte mínimo. Para este propósito, definimos

$$\mathcal{S} = \{K \subseteq X : K \text{ es un soporte para } \varphi\}.$$

Por el inciso (1) de la proposición (3.3.2), se tiene que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Existe un orden parcial canónico que puede ser definido sobre $\mathcal{S}$: $K_1 \leq K_2$, con $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $K_2 \subseteq K_1$. Es claro que toda cadena en $\mathcal{S}$ está acotada superiormente. En efecto, sea $\mathcal{S}'$ una cadena, no vacía, de $\mathcal{S}$. Entonces $S_0 = \bigcap_{S \in \mathcal{S}'} S$ es una cota superior para $\mathcal{S}'$. Sólo falta ver que $S_0 \in \mathcal{S}'$, es decir, S_0 es un soporte para φ. Sea $f \in \mathcal{A}$ tal que $S_0 \subseteq Z(f)$. Entonces $\operatorname{coz} f \subseteq X \setminus S_0 = \bigcup_{S \in \mathcal{S}'} (X \setminus S)$. Como $f \in \mathcal{A} \subseteq C_{00}(X, G)$, existe $C \subseteq X$, compacto, tal que, para todo $x \in X$, si $x \notin C$, entonces $f(x) = e_G$, lo cual implica que $\operatorname{coz}(f) \subseteq C$; por lo que $\operatorname{coz} f$ es compacto. Así, existe un subconjunto finito $\mathcal{S}''$ de $\mathcal{S}'$ tal que $\operatorname{coz} f \subseteq \bigcup_{S \in \mathcal{S}''} (X \setminus S) = X - \bigcap_{S \in \mathcal{S}''} S$, de donde, $S_1 = \bigcap_{S \in \mathcal{S}''} S \subseteq Z(f)$ y, como S_1 es un soporte para φ (por ser $\mathcal{S}'$ una cadena), se tiene que $\varphi(f) = e_G$; lo cual implica que S_0 es un soporte para φ, como se quería ver. Ahora bien, puesto que toda cadena de $\mathcal{S}$ está acotada superiormente, el Lema de Zorn implica que $\mathcal{S}$ tiene un elemento $\leq$-maximal. Es decir, existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $S \leq S'$, para todo $S' \in \mathcal{S}$, o, equivalentemente, $S' \nsubseteq S$, para todo $S' \in \mathcal{S}$, lo cual implica que S es $\subseteq$-minimal en $\mathcal{S}$ y, puesto que dos soportes siempre se intersectan, entonces S resulta $\subseteq$-mínimo.

Proposición 3.3.4. *Sea $\varphi\colon \mathcal{A} \to G$ un homomorfismo de grupos separador y no nulo. Si $\mathcal{A}$ es controlable y separa los puntos de X, entonces existe un soporte mínimo para φ que consta de un único elemento.*

Demostración. Por lo argumentado anteriormente, φ tiene un soporte $\subseteq$-mínimo, S. Veamos que S consta de un único elemento. Supongamos que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1, x_2 \in S$ y $x_1 \neq x_2$. Como X es Hausdorff, existen $U_1, U_2 \subseteq X$, abiertos, tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Es claro que $S \setminus U_i$ no es un soporte para φ, para $i = 1, 2$, ya que $S \setminus U_i \subsetneq S$ y S

es $\subseteq$-mínimo soporte. Como $S \setminus U_i$ no es un soporte para φ, para $i = 1,2$, existen $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $S \setminus U_i \subseteq Z(f_i)$ y $\varphi(f_i) \neq e_G$, para $i = 1,2$. Puesto que φ es separadora, esta última afirmación implica que $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) \neq \emptyset$. Sea $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2)$. Entonces A es un subconjunto compacto de X. Es claro que $A \cap S = \emptyset$, pues si existe $x \in A$ tal que $x \in S$, entonces $x \notin Z(f_1)$ y $x \notin Z(f_2)$, lo cual implica que $x \notin S \setminus U_i$, para $i = 1,2$; de donde, $x \in U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Sea $S' \stackrel{\text{def}}{=} S \cap (\mathrm{coz}(f_1) \cup \mathrm{coz}(f_2))$. Entonces $S' \neq \emptyset$, pues si $S' = \emptyset$, entonces $S \subseteq Z(f_1) \cap Z(f_2)$, esto es $S \subseteq Z(f_1)$ y $S \subseteq Z(f_2)$ y, por definición de soporte, lo anterior implica que $\varphi(f_1) = e_G = \varphi(f_2)$, lo que es una contradicción. Ahora, puesto que A y S' son compactos en X y disjuntos, entonces, por el lema (3.2.2), existen $D_A, D_{S'} \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $A \subseteq D_A$, $S' \subseteq D_{S'}$ y $D_A \cap D_{S'} = \emptyset$. Aplicando la controlabilidad de $\mathcal{A}$ a f_1, D_A y $D_{S'}$, obtenemos $D \in \sigma(\mathcal{D})$ y $g \in \mathcal{A}$ tales que $S' \subseteq D_{S'} \subseteq D \subseteq X \setminus D_A \subseteq X \setminus A$, $f_1|_{D_{S'}} = g|_{D_{S'}}$ y $g|_{(Z(f_1) \cup X \setminus D)} \equiv e_G$. Es claro que $f_1|_S = g|_S$, en efecto, sea $s \in S$. Entonces $s \in S'$ o $s \notin S'$. Si $s \in S'$, entonces $s \in D_{S'}$, con lo que se da trivialmente la igualdad, pues $f_1|_{D_{S'}} = g|_{D_{S'}}$. Si $s \notin S'$, entonces $s \notin \mathrm{coz}(f_1)$, lo cual implica que $s \in Z(f_1) \subseteq Z(g)$, es decir, $f_1(s) = e_G = g(s)$, como se quería ver. Así, $S \subseteq Z(f_1 - g)$, lo cual implica que $\varphi(f_1 - g) = e_G$. De donde, $\varphi(g) = \varphi(f_1) \neq e_G$ y, como φ es separador, tenemos que $\mathrm{coz}(f_2) \cap \mathrm{coz}(g) \neq \emptyset$. Sea $x \in X$ tal que $x \in \mathrm{coz}(f_2)$ y $x \in \mathrm{coz}(g) \subseteq \mathrm{coz}(f_1) \cap D$. Entonces $x \in A \subseteq D_A$ y $x \in D \subseteq X \setminus D_A$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $x_1 = x_2$. Así, S consta de un único elemento. $\square$

Definición 3.3.5. Una aplicación $H \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es *separadora* o *preserva disyunciones*, si para cada par de aplicaciones $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $f_1^{-1}(e_G) \cup f_2^{-1}(e_G) = X$, se tiene que $H(f_1^{-1}(e_G)) \cup H(f_2^{-1})(e_G) = Y$ (equivalentemente, $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$ implica $\mathrm{coz}(H(f_1)) \cap \mathrm{coz}(H(f_2)) = \emptyset$ para cualesquiera $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$). Si H es biyectiva y tanto H como H^{-1} son separadoras, diremos que H es *biseparadora*.

Observe que la anterior definición tiene sentido y extiende de forma natural al concepto dado para las aplicaciones $\varphi \colon \mathcal{A} \to G$.

3.4. Aplicaciones separadoras

En esta sección $\mathcal{A}$ (resp., $\mathcal{B}$) es un subgrupo controlable de $C_{00}(X, G)$ (resp., $C_{00}(Y, G)$) que separa los puntos de X . Sea $H \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de grupos separador y no nulo. Las aplicaciones $\delta_y \circ H \colon \mathcal{A} \to G$ son homomorfismos de grupos separadores y no nulos, para cada $y \in Y$. Además, puesto que $\mathcal{A}$ es controlable y separa los puntos de X, podemos aplicar la proposición (3.3.4) para obtener que cada conjunto $\mathcal{S}_y = \{S \subseteq X : S \text{ es un soporte para } \delta_y \circ H\}$, ordenado parcialmente, tiene un elemento mínimo con cardinalidad 1, denotado por $\{h(y)\}$. Por lo tanto, podemos hacer corresponder cada $y \in Y$ con el respectivo $h(y) \in X$ y así definir la *aplicación soporte* asociada a H, $h \colon Y \to X$.

A continuación estudiaremos algunas propiedades que cumple la aplicación h.

Lema 3.4.1. *Para cada $f \in \mathcal{A}$ se cumple que $h(\mathrm{coz}(H(f)))$ es un subconjunto de $\mathrm{coz}(f)$.*

Demostración. Sea $x \in h(\mathrm{coz}(H(f)))$. Entonces $x = h(y)$, para algún $y \in \mathrm{coz}(H(f))$. Como $\{h(y)\}$ es soporte para $\delta_y \circ H$ se tiene que $x \notin Z(f)$ o, equivalentemente, $x \in \mathrm{coz}(f)$. $\square$

Proposición 3.4.2. *La aplicación soporte asociada a H, h, es continua.*

Demostración. Sea $(y_d)_{d\in D}$ una red en Y que converge a un punto $y \in Y$. Veamos que existe una subred $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ de $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ que converge a $h(y)$. Como $\{h(y_d)\}_{d\in D} \subseteq X \subseteq X^*$ y X^* es compacto, la red $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ tiene un punto de acumulación $p \in X^*$, por lo que existe una subred $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ de $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ que converge a p. Veamos que $p = h(y)$. Supongamos que $p \neq h(y)$. Es claro que $h(y) \neq \infty$. Como X^* es Hausdorff, existen V_p y $V_{h(y)}$, abiertos de X^*, tales que $p \in V_p$, $h(y) \in V_{h(y)}$ y $V_p \cap V_{h(y)} = \emptyset$. Como $h(y) \in V_{h(y)}$ se tiene que $X \setminus (V_{h(y)} \cap X)$ no es un soporte para $\delta_y \circ H$, por lo que existe $f_1 \in \mathcal{A}$ tal que $X \setminus (V_{h(y)} \cap X) \subseteq Z(f_1)$ y $H(f_1)(y) \neq e_G$. Además, puesto que $H(f_1)$ es una función continua y $\{y_d\}_{d\in D}$ converge a y, entonces $\{H(f_1)(y_d)\}_{d\in D}$ converge a $H(f_1)(y) \neq e_G$. Como G es discreto, existe $d_0 \in D$ tal que $H(f_1)(y_d) \neq e_G$, para todo $d \geq d_0$. Ahora bien, puesto que $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ converge a p y V_p es una vecindad abierta de p, existe $d_1 \in D'$ tal que $h(y_{d'_t}) \in V_p$, para todo $d'_t \geq d_1$. Por otra parte, como $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ es una subred de $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ existe una función $f\colon D' \to D$ que cumple las siguientes condiciones: Para todo $d_k \in D$, $h(y_{d_k}) = h(y_{f(d_k)})$ y para todo $d \in D$, existe $d' \in D'$ tal que si $m \geq d'$, entonces $f(m) \geq d$, donde m es un elemento arbitrario de D'. Como $d_0 \in D$, existe $d_2 \in D'$ tal que si $m \geq d_2$, entonces $f(m) \geq d_0$, para cualquier $m \in D'$. Ahora bien, como d_1 y d_2 son elementos del conjunto dirigido D', existe $d' \in D'$ tal que $d' \geq d_1$ y $d' \geq d_2$. Por lo tanto, $h(y_{d'}) \in V_p$, $h(y_{d'}) = h(y_{f(d')})$ y $f(d') \geq d_0$. Sea $r = f(d')$. Entonces $r \geq d_0$ y $h(y_r) \in V_p$, por lo que $H(f_1)(y_r) \neq e_G$ y $(X \setminus (V_p \cap X))$ no es un soporte para $\delta_{y_r} \circ H$; de donde, existe $f_2 \in \mathcal{A}$ tal que $X \setminus (V_p \cap X) \subseteq Z(f_2)$ y $H(f_2)(y_r) \neq e_G$. Por lo tanto, $y_r \in \mathrm{coz}(H(f_1)) \cap \mathrm{coz}(H(f_2))$, lo cual implica, puesto que H es separadora, que $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) \neq \emptyset$. Sea $a \in X$ tal que $a \in \mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2)$. Entonces $a \notin X \setminus (V_p \cap X)$ y $a \notin X \setminus (V_{h(y)} \cap X)$; de donde, $a \in V_p \cap X \cap V_{h(y)} = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $p = h(y)$. $\square$

Lema 3.4.3. *Si el homomorfismo H es inyectivo y además se cumplen las mismas condiciones que en la proposición (3.3.4), tenemos que $h(Y)$ es denso en X.*

Demostración. Supongamos que $\mathrm{cl}_X(h(Y)) \neq X$. Entonces existe $x \in X$ tal que $x \notin \mathrm{cl}_X(h(Y))$. Puesto que $x \in X$, por 3.1, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $x \in \mathrm{coz}(f)$. Sea $B = \mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{cl}_X(h(Y))$. Entonces B es un subconjunto compacto de X, no vacío, pues si $B = \emptyset$, entonces $h(Y) \subseteq \mathrm{cl}_X(h(Y)) \subseteq Z(f)$, lo cual implica que $H(f)(y) = e_G$, para cada $y \in Y$, de donde, $H(f) \equiv e_G$ y, como H es un homomorfismo, tenemos que $f \equiv e_G$, lo que es una contradicción, pues $f(x) \neq e_G$. Por otra parte, como $B \cap \{x\} = \emptyset$, el lema (3.2.2) implica que existen $D_x, D_B \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $x \in D_x$, $B \subseteq D_B$ y $D_x \cap D_B = \emptyset$. Sea $D = D_x \cap \mathrm{coz}(f)$. Entonces $D \in \sigma(\mathcal{D})$, $x \in D$ y $D \cap \mathrm{cl}_X(h(Y)) = \emptyset$, pues si existe $d \in D$ tal que $d \in \mathrm{cl}_X(h(Y))$, entonces $d \in D_x \cap B \subseteq D_x \cap D_B = \emptyset$, lo que es una contradicción. Ahora, aplicando la controlabilidad de $\mathcal{A}$ a f, D y D_B, obtenemos $g \in \mathcal{A}$ y $D_0 \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $x \in D \subseteq D_0 \subseteq X \setminus D_B \subseteq X \setminus B$, $f|_{D_0} = g|_{D_0}$ y $g|_{(Z(f)\cup X\setminus D_0)} \equiv e_G$. De aquí, tenemos que $B \cap D_0 = \emptyset$ y $\mathrm{coz}(g) \subseteq \mathrm{coz}(f) \cap D_0$. Además, $\mathrm{coz}(g) \cap \mathrm{cl}_X(h(Y)) \subseteq D_0 \cap \mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{cl}_X(h(Y)) = D_0 \cap B = \emptyset$; en consecuencia,

$\mathrm{cl}_X(h(Y)) \subseteq Z(g)$, lo cual implica $H(g) \equiv e_G$ y, puesto que H es inyectiva, tenemos que $g \equiv e_G$. Lo anterior es una contradicción, puesto que $f|_{D_0} = g|_{D_0}$, $x \in D_0$ y $f(x) \neq e_G$. En conclusión, $\mathrm{cl}_X\, h(Y) = X$. $\square$

Para cada $y \in Y$, definimos $G_{h(y)} = \{f(h(y)) \in G : f \in \mathcal{A}\}$ que es un subgrupo de G y denotamos por $Hom(G_{h(y)}, G)$ al conjunto de todos los homomorfismos de grupos de $G_{h(y)}$ en G, dotado con la topología de la convergencia puntual. Consideramos, ahora, el conjunto

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{y \in Y} Hom(G_{h(y)}, G)$$

Podemos ver a los elementos de $\mathcal{G}$ como funciones parciales en G. Esto es, funciones $\alpha\colon Dom(\alpha) \subseteq G \to G$ cuyo dominio es subconjunto (no necesariamente propio) de G. Puesto que el grupo G es discreto, podemos equipar a $\mathcal{G}$ con la topología producto (o de la convergencia puntual) como sigue:

Sea $[\alpha; g_1, \ldots, g_n] = \{\beta \in G^G : \beta(g_i) = \alpha(g_i), 1 \leq i \leq n\}$, donde $g_1, \ldots, g_n \in G$ y $n \in \mathbb{N}$, una vecindad básica de una aplicación $\alpha \in G^G$. Si ahora α es una aplicación parcial, podemos restringir esta vecindad básica a $\mathcal{G}$, tomando $[\alpha; g_1, \ldots, g_n]$ como el conjunto de todas las aplicaciones parciales $\beta\colon Dom(\beta) \subseteq G \to G$ tales que $g_1, \ldots, g_n \in Dom(\beta)$ y $\beta(g_i) = \alpha(g_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Con esta notación, definimos $\omega\colon Y \to \mathcal{G}$ por

$$\omega[y](f(h(y))) = Hf(y)$$

para cada $y \in Y$. Demostraremos que ω está bien definida y es continua.

Proposición 3.4.4. *Con la notación establecida anteriormente, las siguientes afirmaciones se verifican.*

1. *Para todo $y \in Y$, $\omega[y]\colon G_{h(y)} \to G$ es un homomorfismo de grupos bien definido.*

2. *ω es continua cuando $\mathcal{G}$ es dotado con la topología de la convergencia puntual.*

Demostración.

1. Sea $y \in Y$. Para probar que $\omega[y]$ está bien definida, tomemos $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $f_1(h(y)) = f_2(h(y))$. Por el inciso (3) de la proposición (3.3.2), tenemos que $\omega[y](f_1(h(y))) = H(f_1)(y) = H(f_2)(y) = \omega[y](f_2(h(y)))$. Es fácil ver que $\omega[y]$ es un homomorfismo de grupos. En efecto, sean $y \in Y$ y $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$. Entonces

$$\begin{aligned} \omega[y](f_1(h(y)) - f_2(h(y))) &= \omega[y]((f_1 - f_2)(h(y))) \\ &= H(f_1 - f_2)(y) \\ &= (H(f_1) - H(f_2))(y) \\ &= H(f_1)(y) + H(f_2)(y) \\ &= \omega[y](f_1(h(y))) - \omega[y](f_2(h(y))). \end{aligned}$$

2. Sea $(y_d)_{d\in D}$ una red que converge a $y \in Y$. Sea $g \in G_{h(y)}$. Entonces existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $g = f(h(y))$. Puesto que $f \circ h$ es continua y G es discreto, se tiene que $(f \circ h)^{-1}(g)$ es una vecindad abierta de y y, como $(y_d)_{d\in D}$ converge a $y \in Y$, existe $d_1(g) \in D$ tal que, para todo $d \geq d_1(g)$, $y_d \in (f \circ h)^{-1}(g)$, esto es, $f(h(y_d)) = g$, para todo $d \geq d_1(g)$. En forma similar, como $(\omega[y])(g) = H(f)(y) \overset{\text{def}}{=} g' \in G$, $H(f)$ es continua y G es discreto, entonces $(H(f))^{-1}(g')$ es una vecindad abierta de y, por lo que existe $d_2(g') \in D$ tal que para todo $d \geq d_2(g')$, se tiene que $y_d \in (H(f))^{-1}(g')$, esto es, $H(f)(y_d) = g'$, para todo $d \geq d_2(g')$. Sea $d_0 = \max\{d_1(g), d_2(g')\}$. Entonces $g = f(h(y_d))$ y $H(f)(y_d) = g'$, para todo $d \geq d_0$. Por lo tanto, para todo $d \geq d_0$, se tiene que $\omega[y_d](g) = \omega[y_d](f(h(y_d))) = H(f)(y_d) = g' \overset{\text{def}}{=} H(f)(y) = \omega[y](f(h(y))) = \omega[y](g)$. Lo cual significa que la red $(\omega[y_d])_{d\in D}$ converge a $\omega[y]$ en la topología de la convergencia puntual sobre $\mathcal{G}$, como queríamos ver. □

Observe que puesto que G es discreto, los subconjuntos compactos en G son finitos. Por lo tanto, hemos probado que ω también es continua con respecto a la topología compacto abierta sobre $\mathcal{G}$.

Teorema 3.4.5. *Sea $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de grupos separador. Si $\mathcal{A}$ es controlable y separa los puntos de X, entonces existen aplicaciones continuas $h\colon Y \to X$ y $\omega\colon Y \to \bigcup_{y\in Y} \mathrm{Hom}(G_{h(y)}, G)$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Para cada $y \in Y$ y todo $f \in \mathcal{A}$ se verifica que*

$$H(f)(y) = \omega[y](f(h(y))).$$

2. *H es continua con respecto a la topología de la convergencia puntual.*

3. *H es continua con respecto a la topología compacto abierta.*

Demostración. Con las proposiciones (3.4.2) y (3.4.4) garantizamos la existencia y continuidad de las aplicaciones h y ω. Puesto que el inciso 1 es consecuencia de la definición de ω y el inciso 2 se sigue de la afirmación 2 en la proposición (3.4.4), sólo queda por verificar el inciso 3.

(3) Sea $(f_d)_{d\in D} \subseteq \mathcal{A}$ una red que converge uniformemente a la función constante e_G en la topología compacto abierta. Si K es un subconjunto compacto de Y, entonces, puesto que h es continua, $h(K)$ es un conjunto compacto en X. Por lo tanto, $(f_d)_{d\in D}$ es eventualmente igual a la función constante e_G en $h(K)$. Aplicando el inciso 1, concluimos que $(H(f_d))_{d\in D}$ es eventualmente la función constante e_G en K. En efecto, sea $y \in K$. Entonces $H(f_d)(y) = \omega[y](f_d(h(y))) = \omega[y](e_G) = e_G$, lo que completa la prueba. □

Corolario 3.4.6. *Supongamos que se cumplen las mismas condiciones que en el teorema (3.4.5). Si $\mathcal{A}$ es puntualmente denso en G, entonces existen aplicaciones continuas $h\colon Y \to X$ y $\omega\colon Y \to \mathrm{End}(G)$ que satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Para cualesquiera $y \in Y$ y $f \in \mathcal{A}$ se verifica que*

$$H(f)(y) = \omega[y](f(h(y))).$$

2. *H es continua con respecto a la topología de la convergencia puntual.*

3. *H es continua con respecto a la topología compacto abierta.*

Demostración. Como se cumplen las condiciones del teorema (3.4.5), existen aplicaciones continuas

$$\begin{aligned} h\colon Y \to &\quad X, \\ \omega\colon Y \to &\quad \bigcup_{y \in Y} \mathrm{Hom}(G_{h(y)}, G) \end{aligned}$$

que satifacen los incisos (1), (2) y (3). Sólo falta demostrar que $\omega[Y] \subseteq \mathrm{End}(G)$ para así tener la aplicación $\omega\colon Y \to \mathrm{End}(G)$, con lo que se completaría la prueba. Procedamos, entonces, a verificar que $\omega[Y] \subseteq \mathrm{End}(G)$. En efecto, sea $y \in Y$. Entonces $\omega[y] \in \mathrm{Hom}(G_{h(y)}, G)$, por lo que sólo debemos demostrar que $G_{h(y)} = G$. Sea $g \in G$. Veamos que $g \in G_{h(y)}$. Como $\mathcal{A}$ es puntualmente denso en G, tenemos que $\delta_{h(y)}(\mathcal{A})$ es denso en G, así, $g \in G = \mathrm{cl}_G(\delta_{h(y)}(\mathcal{A}))$. Puesto que G es discreto, $g \in G_{h(y)} = \delta_{h(y)}(\mathcal{A})$, por lo que existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $g = \delta_{h(y)}(f)$; esto es, $g = f(h(y))$, lo cual implica que $g \in G_{h(y)}$, como se quería demostrar. $\square$

Consideremos a Y^* y a X^*, las compactificaciones de Alexandroff de Y y X, respectivamente. Entonces existe una forma canónica de extender h a la aplicación $h^*\colon Y^* \to X^*$, definida por $h^*|_Y = h$ y $h^*(\infty) = \infty$.

El siguiente resultado nos brinda condiciones para que esta aplicación resulte ser un homeomorfismo.

Teorema 3.4.7. *Sea $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un isomorfismo de grupos separador y no nulo. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son controlables, $\mathcal{A}$ separa los puntos de X y $\omega[y] \in \mathrm{Aut}(G)$, para cada $y \in Y$, entonces la aplicación $h^*\colon Y^* \to X^*$ definida por*

$$h^*(y) = \begin{cases} h(y), & si \;\; y \in Y \\ \infty, & si \;\; y = \infty \end{cases}$$

es un homeomorfismo.

Demostración.

(i) h^* es continua. Para probar la continuidad de h^*, por la proposición (3.4.2), sólo falta demostrar que h^* es continua en ∞. En efecto, supongamos que h^* no es continua en ∞. Entonces existe un subconjunto compacto $K \subseteq X$ tal que $\infty \in \mathrm{cl}_{Y^*}(h^{-1}(K))$, lo cual implica que existe una red $(y_d)_{d \in D} \subseteq h^{-1}(K)$ que converge a ∞; como K es compacto, existe una subred $(h(y_{d_i}))_{d_i \in D}$ de $(h(y_d))_{d \in D}$ que converge a un punto $k \in K$. Sea $f \in \mathcal{A}$. Entonces, puesto que f es continua, se tiene que $(f(h(y_{d_i})))_{d_i \in D}$

converge a $f(k)$ y, por ser G discreto, existe $m_1 \in D$, donde m_1 depende de f, tal que $f(h(y_{n_1})) = f(k)$, para todo $n_1 \geq m_1$. Por otra parte, $\mathrm{coz}(H(f))$ es compacto en Y y, por lo tanto, cerrado en Y^*, entonces $Y^* \setminus \mathrm{coz}(H(f))$ es un abierto en Y^* que contiene a ∞ y como $(y_d)_{d\in D}$ converge a ∞, se tiene que existe $m_2 \in D$ tal que $y_{n_2} \in (Y^* \setminus \mathrm{coz}(H(f))) \cap Y$, para todo $n_2 \geq m_2$. Esto es, $H(f)(y_{n_2}) = e_G$, para todo $n_2 \geq m_2$. Sea $d' \geq \max\{m_1, m_2\}$ (d' es un índice en la subred). Entonces, en la subred, $f(h(y_{d'})) = f(k)$ y $\omega[y_{d'}](f(h(y_{d'}))) = H(f)(y_{d'}) = e_G$. Así, $\omega[y_{d'}](f(k)) = e_G$ y, puesto que $\omega[y_{d'}] \in \mathrm{Aut}(G)$, concluimos que $f(k) = e_G$, para cualquier f en $\mathcal{A}$, lo cual contradice 3.1. Por lo tanto, h^* es continua en ∞.

(ii) h^* es suprayectiva. En efecto, como h^* es continua, se tiene que $h^*(Y^*)$ es cerrado en X^*, además, puesto que H es inyectivo, el lema (3.4.3) implica que $\mathrm{cl}_X(h(Y)) = X$, así $h^*(Y^*) = \mathrm{cl}_{X^*}(h^*(Y^*)) = \mathrm{cl}_X(h(Y)) \cup \{\infty\} = X \cup \{\infty\} = X^*$.

Observe que es muy fácil ver que $\mathrm{cl}_{X^*}(h^*(Y^*)) = \mathrm{cl}_X(h(Y)) \cup \{\infty\}$. En efecto, $\mathrm{cl}_{X^*}(h^*(Y^*)) = h^*(Y^*) = h^*(Y) \cup \{\infty\} \subseteq X \cup \{\infty\} = \mathrm{cl}_X\, h(Y) \cup \{\infty\} \subseteq \mathrm{cl}_{X^*}(h(Y)) \cup \{\infty\} \subseteq \mathrm{cl}_{X^*}\, h^*(Y^*) = h^*(Y^*)$, lo que completa la prueba.

(iii) h^* es inyectiva. Es claro que $h^*(\infty) = \infty$ y $h^*(y) \neq \infty$ para todo $y \in Y$. Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $h^*(y_1) = h^*(y_2)$. Veamos que $y_1 = y_2$. Como $y_1, y_2 \in Y$, entonces $h^*(y_1) = h(y_1)$ y $h^*(y_2) = h(y_2)$; así, $h(y_1) = h(y_2)$. Supongamos que $y_1 \neq y_2$. Entonces, por un resultado análogo al lema (3.2.2) (pero aplicado a Y, en lugar de X), obtenemos $D_1, D_2 \in \sigma(\mathcal{D}')$, tales que $y_1 \in D_1$, $y_2 \in D_2$ y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Por otra parte, puesto que $h(y_1), h(y_2) \in X$, por (3.1) tenemos que existen $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $f_1(h(y_1)) \neq e_G$ y $f_2(h(y_2)) \neq e_G$ y, puesto que $\omega[y_1], \omega[y_2] \in \mathrm{Aut}(G)$, entonces, por el inciso (1) del teorema (3.4.5), tenemos que $H(f_1)(y_1) \neq e_G \neq H(f_2)(y_2)$. Así, existen $g_1, g_2 \in \mathcal{B}$, con $g_1 = H(f_1)$ y $g_2 = H(f_2)$, tales que $g_1(y_1) \neq e_G$ y $g_2(y_2) \neq e_G$. Aplicando el hecho de que $\mathcal{B}$ es controlable a D_1, D_2 y a g_1, existe $D \in \sigma(D')$ y $g \in \mathcal{B}$ tales que $D_1 \subseteq D \subseteq Y \setminus D_2$, $g_1|_{D_1} = g|_{D_1}$ y $g|_{(Z(g_1)\cup Y\setminus D)} \equiv e_G$. Como $\mathrm{coz}(g) \cap D_2 = \emptyset$ y $\mathrm{coz}(g) \in \sigma(\mathcal{D}')$, podemos aplicar nuevamente la controlabilidad de $\mathcal{B}$, pero, en esta ocasión, a g_2, $\mathrm{coz}(g)$ y D_2, obteniendo así $D_3 \in \sigma(\mathcal{D}')$ y $g' \in \mathcal{B}$ tales que $D_2 \subseteq D_3 \subseteq Y \setminus \mathrm{coz}(g)$, $g'|_{D_2} = g_2|_{D_2}$ y $g'|_{(Z(g_2)\cup Y\setminus D_3)} \equiv e_G$. Puesto que $D_3 \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$ y $\mathrm{coz}(g') \subseteq D_3$, entonces $\mathrm{coz}(g') \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$. Ahora bien, como H es suprayectiva, existen $f, f' \in \mathcal{A}$ tales que $H(f) = g$ y $H(f') = g'$; además, $h(\mathrm{coz}(H(f))) \subseteq \mathrm{coz}(f)$ y $h(\mathrm{coz}(H(f'))) \subseteq \mathrm{coz}(f')$. Puesto que $y_2 \in D_2$, entonces $g'(y_2) = g_2(y_2) \neq e_G$, por lo que $y_2 \in \mathrm{coz}(g') = \mathrm{coz}(H(f'))$; en forma similar, puesto que $y_1 \in D_1$, $g_1|_{D_1} = g|_{D_1}$ y $g_1(y_1) \neq e_G$, tenemos que $y_1 \in \mathrm{coz}(g) = \mathrm{coz}(H(f))$. Así, $h(y_1) \in \mathrm{coz}(f)$ y $h(y_2) \in \mathrm{coz}(f')$ y como $h(y_1) = h(y_2)$, concluimos que $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(f') \neq \emptyset$. Por otra parte, como $D \cap D_2 = \emptyset = D_3 \cap \mathrm{coz}(g)$, entonces $y_1 \in Y \setminus D_3$ y $y_2 \in Y \setminus D$, lo cual implica, puesto que $g|_{(Z(g_1)\cup Y\setminus D)} \equiv e_G$ y $g'|_{(Z(g_2)\cup Y\setminus D_3)} \equiv e_G$, que $y_1 \in Z(g')$ y $y_2 \in Z(g)$. Es decir, $\omega[y_1](f'(h(y_1))) = H(f')(y_1) = e_G$ y $\omega[y_2](f(h(y_2))) = H(f)(y_2) = e_G$ y, puesto que $\omega[y_1], \omega[y_2] \in \mathrm{Aut}(G)$, lo anterior implica que $f'(h(y_1)) = e_G = f(h(y_2))$ y, como $h(y_1) = h(y_2)$, tenemos que $f'(h(y_2)) = e_G = f(h(y_1))$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $y_1 = y_2$, lo que demuestra la inyectividad de h^*.

(iv) h^* es abierta. Consideremos al conjunto abierto $U \subseteq Y^*$. Entonces, puesto que h^* es biyectiva, tenemos que $X^* \setminus h^*(U) = h^*(Y^* \setminus U)$; y como Y^* es compacto, h^* es continua y X^* es Hausdorff, tenemos que $h^*(Y^* \setminus U)$ es un cerrado en X^*. Por lo tanto, $h^*(U)$ es un abierto en X.

Puesto que h^* es continua, biyectiva y abierta, se concluye que h^* es un homeomorfismo, como se quería demostrar. □

Corolario 3.4.8. *Sea $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de grupos separador y no nulo. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son controlables, $\mathcal{A}$ separa los puntos de X, el homomorfismo H es biyectivo y $\omega[y] \in \mathrm{Aut}(G)$, para cada $y \in Y$, entonces la aplicación aplicación soporte asociada a H, $h\colon Y \to X$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Puesto que se cumplen todas las hipótesis del teorema anterior, tenemos que h^* es un homeomorfismo. Además, es claro que $h^*(Y) \subseteq X$, pues si existe $y \in Y$ tal que $h^*(y) \notin X$, entonces $h^*(y) = \infty \in X^*$ y, por la forma en que está definida h^*, lo anterior implica que $y = \infty \notin Y$, lo que es una contradicción. Ahora, como $h^*(Y) \subseteq X$, $h^*|_Y = h$ y h^* es un homeomorfismo, concluimos que h es un homeomorfismo, como se quería ver. □

Ahora, estamos interesados en conseguir condiciones que nos permitan establecer cuándo $\omega[y] \in \mathrm{Aut}(G)$, para cada $y \in Y$. La siguiente proposición nos brinda una respuesta a este interrogante.

Proposición 3.4.9. *Asumamos que se cumplen las mismas condiciones de la proposición (3.3.4). Supongamos que H es un homomorfismo de grupos biseparador. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son puntualmente densos en G, entonces $\omega[y] \in \mathrm{Aut}(G)$, para cada $y \in Y$.*

Demostración. Puesto que H es biseparador, la aplicación H^{-1} es separadora y, como $\mathcal{B}$ es puntualmente denso en G, el corolario (3.4.6) implica que existen aplicaciones continuas

$$k\colon X \to Y,$$

$$\omega'\colon X \to \mathrm{End}(G)$$

tales que $H^{-1}(f')(x) = \omega'[x](f'(k(x)))$, para cualesquiera $f' \in \mathcal{B}$ y $x \in X$. Queremos demostrar que $k = h^{-1}$ y usar esto para probar, finalmente, que, para cada $y \in Y$, $\omega[y]$ tiene inversa a derecha y a izquierda, lo cual implica que $\omega[y] \in \mathrm{Aut}(G)$. Procedamos a ello.

Para cada $x \in X$ y $f \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= [(H^{-1} \circ H)(f)](x) \\ &= [H^{-1}(H(f))](x) \\ &= \omega'[x](H(f)(k(x))) \\ &= \omega'[x](\omega[k(x)](f(h(k(x))))) \end{aligned}$$

puesto que $H(f)(k(x)) = \omega[k(x)](f(h(k(x))))$, por el corolario (3.4.6). De lo anterior, concluimos que tanto x como $h(k(x))$ son soportes para $\delta_x \circ (H^{-1} \circ H)$, puesto que

si $\{x\} \subseteq Z(f)$, es decir, $f(x) = e_G$, entonces $(H^{-1} \circ H)(f)(x) = f(x) = e_G$; y si $\{h(k(x))\} \subseteq Z(f)$, es decir, $f(h(k(x))) = e_G$, entonces $\omega[k(x)](f(h(k(x)))) = e_G$, por ser $\omega[k(x)]$ un homomorfismo, y, puesto que $\omega'[x]$ también es un homomorfismo, tenemos que $(H^{-1} \circ H)(f)(x) = \omega'[x](\omega[k(x)](f(h(k(x))))) = \omega'[x](e_G) = e_G$. Como el soporte mínimo es único, tenemos que $x = h(k(x))$, lo cual implica que $h \circ k = \mathrm{id}_X$. Por lo tanto, k es una inversa a derecha de h. En forma análoga, se demuestra que para cualesquiera $f' \in \mathcal{B}$ y $y \in Y$, se tiene que $f'(y) = (H \circ H^{-1})(f')(y) = \omega[y](\omega'[h(y)](f'(k(h(y)))))$, lo cual implica que y y $k(h(y))$ son soportes para $\delta_y \circ (H \circ H^{-1})$, de donde (por la unicidad del soporte mínimo), $y = k(h(y))$, lo cual implica que $k \circ h = \mathrm{id}_Y$, esto es, k es una inversa a izquierda de h. Por lo tanto, $k = h^{-1}$.
Así, para cualesquiera $x \in X$ y $f \in \mathcal{A}$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= (H^{-1} \circ H)(f)(x) \\ &= \omega'[x](H(f)(k(x))) \\ &= \omega'[x](\omega[k(x)](f(x))). \end{aligned}$$

Y para cualesquiera $y \in Y$ y $f' \in \mathcal{B}$ se tiene

$$\begin{aligned} f'(y) &= (H \circ H^{-1})(f')(y) \\ &= \omega[y](H^{-1}(f')(h(y))) \\ &= \omega[y](\omega'[h(y)](f'(y))) \end{aligned}$$

Sea $y \in Y$. Entonces $h(y) \in X$, luego aplicando la primera igualdad a $h(y)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(h(y)) &= \omega'[h(y)](\omega[k(h(y))](f(h(y)))) \\ &= \omega'[h(y)](\omega[y](f(h(y)))) \\ &= (\omega'[h(y)] \circ \omega[y])(f(h(y))) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\omega'[h(y)]$ es una inversa a izquierda de $\omega[y]$.
Aplicando la segunda igualdad a y, tenemos que

$$\begin{aligned} f'(y) &= \omega[y](\omega'[h(y)](f'(y))) \\ &= (\omega[y] \circ \omega'[h(y)])(f'(y)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\omega'[h(y)]$ es una inversa a derecha de $\omega[y]$. En conclusión, $\omega[y]$ tiene inversa a izquierda y a derecha, lo cual implica que $\omega[y]$ es un automorfismo de G, lo que completa la prueba. $\square$

Ahora estamos en condiciones de enunciar nuestro resultado principal.

3.5. Resultado principal

Teorema 3.5.1. *Sean X y Y espacios localmente compactos, Hausdorff, cero-dimensionales y G un grupo discreto. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subgrupos controlables y puntualmente* *densos de funciones continuas con soporte compacto, con dominio en X y Y, respectivamente, y cuyo codominio es G; además, $\mathcal{A}$ separa los puntos de X. Si $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un isomorfismo de grupos, biseparador y no nulo, entonces existen aplicaciones continuas $h\colon Y \to X$ y $\omega\colon Y \to \mathrm{Aut}(G)$ que tienen las siguientes propiedades:*

1. *h es un homeomorfismo.*

2. *Para cualesquiera $y \in Y$ y $f \in \mathcal{A}$, se verifica que*

$$H(f)(y) = \omega[y](f(h(y))).$$

3. *H es un isomorfismo continuo, con respecto a la topología de la convergencia puntual.*

4. *H es un isomorfismo continuo, con respecto a la topología compacto abierta.*

Demostración. Puesto que se cumplen las hipótesis del corolario (3.4.6), existen aplicaciones continuas $h\colon Y \to X$ y $\omega\colon Y \to \mathrm{End}(G)$ que cumplen los incisos $(2), (3)$ y (4). Ahora bien, como se cumplen las condiciones de la proposición (3.4.9), tenemos que $\omega[y] \in \mathrm{Aut}(G)$, para cada $y \in Y$. Por lo tanto, la aplicación ω queda definida así

$$\omega\colon Y \to \mathrm{Aut}(G).$$

En resumen, existen aplicaciones continuas $h\colon Y \to X$ y $\omega\colon Y \to \mathrm{Aut}(G)$, que cumplen los incisos (2), (3) y (4). Finalmente, como se cumplen las condiciones del corolario (3.4.8), obtenemos el inciso (1), es decir, h es un homeomorfismo, lo que completa la prueba. □

El anterior teorema es aplicable a H^{-1}, por lo que surge el siguiente corolario.

Corolario 3.5.2. *Sean X y Y espacios localmente compactos, Hausdorff, cero-dimensionales y G un grupo discreto. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son subgrupos controlables y puntualmente densos de funciones continuas con soporte compacto, definidas en X y Y, respectivamente, y con codominio en G. Si $\mathcal{B}$ separa los puntos de Y y $H^{-1}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ es un isomorfismo de grupos, biseparador y no nulo, entonces existen aplicaciones continuas $h'\colon X \to Y$ y $\omega'\colon X \to \mathrm{Aut}(G)$ que tienen las siguientes propiedades:*

1. *h' es un homeomorfismo.*

2. *Para cualesquiera $x \in X$ y $g \in \mathcal{B}$, se verifica que*

$$H^{-1}(g)(x) = \omega'[x](g(h'(x))).$$

3. *H^{-1} es un isomorfismo continuo, con respecto a la topología de la convergencia puntual.*

4. *H^{-1} es un isomorfismo continuo, con respecto a la topología compacto abierta.*

Demostración. La demostración se sigue directamente del teorema (3.5.1). □

Capítulo 4

Representación de isomorfismos entre subespacios vectoriales de funciones continuas con soporte compacto

4.1. Introducción

En este capítulo, como su nombre lo indica, estamos interesados en la representación de isomorfismos lineales definidos entre subespacios vectoriales de funciones continuas que toman valores en un espacio vectorial $\mathbb{F}^n$ sobre un campo finito $\mathbb{F}$. El punto de partida, y nuestra principal motivación, se deriva de dos, muy célebres y aparentemente desconectados, resultados, cuya formulación es sorprendentemente similar. El primero es el teorema de equivalencia de MacWilliams, que describe completamente las isometrías entre códigos de bloque (ver [22] y [23]). A continuación recordaremos sus principales características. Sea $\mathbb{F}$ un campo finito. Dos códigos lineales C_1 y C_2 sobre un campo $\mathbb{F}$ de longitud n son *equivalentes* si existe una transformación monomial H de $\mathbb{F}^n$ tal que $H(C_1) = C_2$. Aquí, una transformación monomial es un isomorfismo lineal H de la forma

$$H(a_1, \ldots, a_n) = (a_{\sigma(1)}w_1, \ldots, a_{\sigma(n)}w_n),\ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}^n,$$

donde σ es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y $(w_1, \ldots, w_n) \in (\mathbb{F} \setminus \{0\})^n$.

El peso de Hamming $\mathrm{wt}(x)$ de un vector $x \in \mathbb{F}^n$ es definido como el número de coordenadas de x que son distintas de cero. El siguiente resultado clásico establece la relación entre isometrías de Hamming y códigos equivalentes.

Teorema 4.1.1 (MacWilliams)**.** *Dos códigos C_1 y C_2 de dimensión k en $\mathbb{F}^n$ son equivalentes si, y sólo si, existe un isomorfismo $\mathbb{F}$-lineal, abstracto, $f\colon C_1 \to C_2$ que preserva pesos, es decir,* $\mathrm{wt}(f(x)) = \mathrm{wt}(x)$*, para todo $x \in C_1$.*

Por consiguiente, dos códigos de bloque son isométricos si, y sólo si, ellos son monomialmente equivalentes. Más precisamente, isomorfismo que preservan peso entre códigos son dados por una permutación y reajuste de las coordenadas.

Este importante resultado ha sido extendido, por muchos autores, en diferentes direcciones (ver [2], [4], [33] y [35]). En particular, Heide Gluesing-Luerssen ha establecido una variante del teorema de MacWilliams para códigos convolucionales uno-dimensionales y las isometrías definidas entre ellos que respetan la estructura de módulo de los códigos (ver [17]). Queda abierta la representación general de $\mathbb{F}$-isometrías definidas entre códigos convolucionales (ver en [17] y en el capítulo 8 de [28]).

El segundo resultado que nos ocupa en este trabajo es el teorema de Banach-Stone, el cual establece que toda isometría lineal definida entre dos espacios compactos es un operador composición con peso. Este teorema se ha convertido en un resultado clásico que se ha extendido en muchas direcciones (ver en [1] y [32]).

La analogía entre los teoremas de MacWilliams y Banach-Stone es evidente y nuestra motivación ha sido explorar la aplicación de métodos de análisis funcional con el fin de ampliar el teorema de equivalencia de MacWilliams a un contexto más general. También nos interesa con la aplicación de estas técnicas describir $\mathbb{F}$-isomorfismos definidos entre códigos convolucionales (posiblemente multidimensionales).

En aras de la simplicidad, a pesar de que muchos de nuestros resultados se verifican para espacios de funciones continuas que toman valores en un grupo, a lo largo de este trabajo sólo nos ocuparemos de funciones continuas que toman valores en un espacio vectorial sobre un campo finito (ver [7]).

Sea X un espacio Hausdorff, cero-dimensional y localmente compacto, dotado con una medida de Borel, regular y estrictamente positiva, μ, y designemos con $C_{00}(X, \mathbb{F}^n)$ al espacio de funciones continuas definidas sobre X, que toman valores en $\mathbb{F}$ y con soporte compacto. Para cualquier $f \in C_{00}(X, \mathbb{F}^n)$ definimos

$$\mathrm{wt}(f(x)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\{j : \pi_j(f(x)) \neq 0\}|$$

$$\mathrm{wt}(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_X \mathrm{wt}(f(x)) d\mu(x).$$

Tenga en cuenta que esta integral es finita porque $\mathrm{wt}(f(x))$ es continua y tiene soporte compacto.

La aplicación

$$d(f, g) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{wt}(f - g)$$

define una métrica sobre el espacio vectorial $C_{00}(X, \mathbb{F}^n)$ que es compatible con su estructura de grupo aditivo. Puesto que esta métrica extiende la bien conocida distancia introducida por Hamming en teoría de códigos, la llamamos *métrica de Hamming*.

Cabe resaltar que si $f \in C_{00}(X, \mathbb{F})$, entonces $\mathrm{wt}(f(x)) = 1$, si $f(x) \neq 0$; en otro caso, $\mathrm{wt}(f(x)) = 0$. Así, $\mathrm{wt}(f(x)) \in \{0, 1\}$.

Definición 4.1.2. Sea $\mathcal{A}$ un subespacio vectorial de $C_{00}(X, \mathbb{F})$. Decimos que dos puntos $x_1, x_2 \in X$ están *relacionados*, y escribimos $x_1 \sim x_2$, si para toda $f \in \mathcal{A}$ con $f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$ se tiene que $f(x_1) = 0 = f(x_2)$.

Denotemos por $\widetilde{X}$ al conjunto formado por las clases de equivalencia $X/\sim$ dotado con la topología cociente heredada de X. Todo elemento $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ está asociado al subconjunto $[x] \subseteq X$

que consta de todos los elementos de X que están relacionados con x. Para simplificar, vamos a utilizar el mismo símbolo, $[x]$, para denotar tanto al elemento $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ como al subconjunto de X antes mencionado.

Obsérvese que, para cualquier $x \in X$, si $x_1, x_2 \in [x]$, entonces $I_{x_1} = I_{x_2}$. Lo anterior implica que si $x \in Z(f)$, para cualquier $f \in \mathcal{A}$, entonces $[x] \in Z(f)$. Además, se puede verificar que si $x \in \operatorname{coz}(f)$, entonces $[x] \in \operatorname{coz}(f)$. Más adelante introducimos una definición que nos permitirá formalizar esta observación en la proposición (4.2.5).

Denotemos con $\mathrm{Gr}[h] \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{y \in Y}(h(y) \times \{y\}) = \{(x,y) \in \widetilde{X} \times Y : x \in h(y), y \in Y\}$ a la gráfica de h dotada con la topología heredada como un subespacio de $\widetilde{X} \times Y$.

Definición 4.1.3. Sean X y Y espacios localmente compactos, Hausdorff y cero-dimensionales. Supongamos que X está dotado con una medida de Borel, regular y estrictamente positiva Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ subespacios vectoriales de $C_{00}(X, \mathbb{F})$ y $C_{00}(Y, \mathbb{F})$, respectivamente, y $H \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal.

H es llamada *isometría de Hamming* si es un isomorfismo lineal y $\mathrm{wt}(f) = \mathrm{wt}(H(f))$, para todo $f \in \mathcal{A}$.

Decimos que H es un *operador composición con peso* si existen funciones continuas $h \colon Y \to \widetilde{X}$ y $\omega \colon \mathrm{Gr}[h] \to \mathbb{F} \setminus \{0\}$ tales que $H(f)(y) = \omega(x,y)f(x)$, para cualesquiera $y \in Y$, $x \in h(y)$ y $f \in \mathcal{A}$.

El principal interrogante que abordamos en este capítulo es el siguiente:
¿Es toda isometría de Hamming representable como un operador composición con peso?
A continuación introduciremos algunas notaciones y terminología pertinente.

4.2. Notación

A lo largo de este capítulo, X y Y denotarán espacios localmente compactos, Hausdorff y cero-dimensionales. El espacio X estará dotado de una medida de Borel, regular y estrictamente positiva. El símbolo $\mathbb{F}$ denotará un campo finito (discreto) y $\mathbb{F}^n$ al espacio vectorial de dimensión n. La *compactificación de Alexandroff* de X, será denotada por X^*, es decir, $X^* = X \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un punto conveniente.

Para $f \in C(X, \mathbb{F}^n)$, el conjunto

$$\operatorname{coz}(f) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Puesto que $\mathbb{F}^n$ es discreto $\operatorname{coz}(f)$ y $Z(f) = X \setminus \operatorname{coz}(f)$ son subconjuntos abiertos-cerrados de X.

Sea $\mathcal{A}$ un subespacio lineal de $C_{00}(X, \mathbb{F}^n)$. Para cada $x \in X$, denotemos por $\delta_x \colon \mathcal{A} \to \mathbb{F}^n$ a la *evaluación canónica* definida como sigue:

$$\delta_x(f) \overset{\text{def}}{=} f(x), \text{ para todo } f \in \mathcal{A}.$$

y consideraremos los conjuntos

$$I_x \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{A} : f(x) = 0\} \text{ y}$$

$$S \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : I_x \neq \mathcal{A}\} = \bigcup_{f \in \mathcal{A}} \operatorname{coz}(f).$$

Por lo tanto, S es un conjunto abierto de X y, en consecuencia, también es un espacio localmente compacto, cuando lo equipamos con la topología heredada de X. Por lo que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $S = X$. Así, para cada subespacio lineal de funciones continuas considerado a lo largo de este capítulo, se supone que

$$\text{para todo } x \in X, \text{ existe } f \in \mathcal{A} \text{ tal que } f(x) \neq 0. \tag{4.1}$$

Definimos $Z(\mathcal{A}) \overset{\text{def}}{=} \{Z(f) : f \in \mathcal{A}\}$ y $\operatorname{coz}(\mathcal{A}) \overset{\text{def}}{=} \{\operatorname{coz}(f) : f \in \mathcal{A}\}$ Además, $\sigma(\mathcal{D})$ denotará al anillo más pequeño, de subconjuntos de X, que contiene a $\operatorname{coz}(\mathcal{A})$ y que es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas.

En teoría de códigos, decimos que un código convolucional es *controlable* cuando cualquier sucesión de códigos puede ser alcanzada por la sucesión cero en un intervalo finito (ver [10], [14], [30] y [34]).

La esencia de la controlabilidad se puede transmitir en una forma natural a subespacios de funciones continuas definidas sobre un espacio topológico. De manera informal, decimos que un subespacio vectorial de funciones continuas es controlable cuando cualesquiera de las funciones continuas pueden ser alcanzadas desde la función cero módulo un subconjunto abierto relativamente compacto. Resulta que esta noción es un ingrediente esencial en el enfoque que hemos adoptado en este capítulo.

Definición 4.2.1. Decimos que $\mathcal{A} \subseteq C_{00}(X, \mathbb{F}^n)$ es *controlable* si para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$ y $D_1, D_2 \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, existen $D \in \sigma(\mathcal{D})$ y $g \in \mathcal{A}$ tales que $D_1 \subseteq D \subseteq X \setminus D_2$, $f|_{D_1} = g|_{D_1}$ y $g|_{Z(f)\cup(X\setminus D)} \equiv 0$.

Decimos que $\mathcal{A}$ *separa puntos* en X si para cualesquiera par de puntos $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$, existe una aplicación $f \in \mathcal{A}$ tal que $x_1 \in \operatorname{coz}(f)$ y $x_2 \in Z(f)$ y viceversa.

A lo largo de este trabajo, nos ocupamos de funciones con valores escalares. El caso de funciones vector-valuadas será considerado en un futuro trabajo.

A continuación introduciremos algunas nociones topológicas que se necesitarán en el resto del capítulo.

Recordemos que dos puntos $x_1, x_2 \in X$ están *relacionados*, y escribimos $x_1 \sim x_2$, si para toda $f \in \mathcal{A}$ con $f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$, se tiene que $f(x_1) = 0 = f(x_2)$.

Como se dijo anteriormente, denotaremos por $\widetilde{X}$ al conjunto formado por las clases de equivalencia $X/\sim$ dotado con la topología cociente heredada de X. Todo elemento $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ está asociado al subconjunto $[x] \subseteq X$ que consta de todos los elementos de X que están relacionados con x. Para simplificar, vamos a utilizar el mismo símbolo, $[x]$, para denotar tanto al elemento $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ como al subconjunto de X antes mencionado.

Proposición 4.2.2. *Sea $[x]$ una clase de equivalencia en X. Si $x_1, x_2 \in [x]$, entonces existe un único elemento $\lambda(x_1, x_2) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ tal que $f(x_1) = \lambda(x_1, x_2) f(x_2)$, para todo $f \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{A}$. Entonces $f \notin \mathcal{A} \setminus I_x$ o $f \in \mathcal{A} \setminus I_x$.

Supongamos que $f \in \mathcal{A} \setminus I_x$. Entonces $f(x) \neq 0$. Luego, puesto que $x_2 \sim x$, se tiene que $f(x) \cdot f(x_2) \neq 0$, por lo que $f(x_2) \neq 0$. Así, $f(x_1) = f(x_1) \cdot ((f(x_2))^{-1} \cdot f(x_2))$. Sea $\lambda_f(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1) \cdot (f(x_2))^{-1}$; luego, $f(x_1) = \lambda_f(x_1, x_2) \cdot f(x_2)$. Sólo falta ver que la forma en que se definió $\lambda_f(x_1, x_2)$ no depende de la f elegida en $\mathcal{A} \setminus I_x$, para poder garantizar que es ese el $\lambda(x_1, x_2)$ que estamos buscando. En efecto, sea $g \in \mathcal{A} \setminus I_x$ y tomemos $h \stackrel{\text{def}}{=} (f(x_2))^{-1} f - (g(x_2)^{-1}) g$. Entonces $h \in \mathcal{A}$ y $h(x_2) = 0$ y como $x_2 \sim x$, tenemos que $[x] \subseteq Z(h)$. Así,

$$
\begin{aligned}
0 &= h(x_1) \\
&= (f(x_2))^{-1} \cdot f(x_1) - (g(x_2)^{-1}) \cdot g(x_1) \\
&= (f(x_2))^{-1} \cdot \lambda_f(x_1, x_2) \cdot f(x_2) - (g(x_2))^{-1} \cdot \lambda_g(x_1, x_2) \cdot g(x_2) \\
&= \lambda_f(x_1, x_2) - \lambda_g(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\lambda_f(x_1, x_2) = \lambda_g(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x_2)$. Así, existe un único $\lambda(x_1, x_2) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ tal que $f(x_1) = \lambda(x_1, x_2) \cdot f(x_2)$.

En el caso en que $f \notin \mathcal{A} \setminus I_x$, se tiene que $f(x) = 0$, lo cual implica, por la observación anterior, que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pero, por 4.1, siempre existe $f_0 \in \mathcal{A}$ tal que $f_0(x) \neq 0$ y procediendo como en el caso anterior, obtenemos un único elemento $\lambda(x_1, x_2) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ (donde, $\lambda(x_1, x_2) = f_0(x_1) \cdot (f_0(x_2))^{-1}$) tal que $f(x_1) = \lambda(x_1, x_2) f(x_2)$, como se quería demostrar. $\square$

Se puede ver fácilmente que la aplicación $\lambda(\ , \ )$ tiene las siguientes propiedades:

- $\lambda(x_2, x_1) = [\lambda(x_1, x_2)]^{-1}$
- $\lambda(x_1, x_2) = \lambda(x_1, x) \lambda(x, x_2)$.

Lema 4.2.3. *Si $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \not\sim x_2$, entonces existe $f_{x_1 x_2}$ tal que $x_1 \in \operatorname{coz}(f_{x_1 x_2})$ y $x_2 \in Z(f_{x_1 x_2})$.*

Demostración. Puesto que $x_1 \not\sim x_2$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$ y $f(x_1) \neq 0$ o $f(x_2) \neq 0$.

Si $f(x_1) \neq 0$ y $f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$, entonces $f(x_2) = 0$ y, en este caso, hacemos $f_{x_1 x_2} = f$.

Si $f(x_2) \neq 0$ y $f(x_1) \cdot f(x_2) = 0$, entonces $f(x_1) = 0$. Como, por 4.1, existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x_1) \neq 0$, se tiene que $h \stackrel{\text{def}}{=} g(x_2) f - f(x_2) g$ es un elemento de $\mathcal{A}$ tal que $h(x_2) = 0$ y $h(x_1) \neq 0$. En este caso, hacemos $f_{x_1 x_2} = h$, con lo que se concluye la prueba. $\square$

Definición 4.2.4. Un subconjunto $A \subseteq X$ es llamado *saturado* si, y sólo si, $x \in A$ implica $[x] \subseteq A$.

La prueba del siguiente resultado es fácil. La incluimos por mantener la completitud del trabajo.

Proposición 4.2.5. *Para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$ y $x \in X$, tenemos:*

1. *Los conjuntos $Z(f)$ y $\operatorname{coz}(f)$ son saturados.*

2. *El conjunto $[x]$ es un subconjunto de X compacto y saturado.*

Demostración.

1. La prueba de esta afirmación se sigue directamente de la definición (4.2.4) y de la forma en que se definió $[x]$.

2. Sea $x \in X$. Es claro que $[x]$ es saturado. Para ver que $[x]$ es compacto en X, primero veamos que $[x]$ es cerrado en X. En efecto, sea $y \in X \setminus [x]$. Entonces $y \not\sim x$ y, por el lema (4.2.3), existe una función $f \in \mathcal{A}$ tal que $y \in \operatorname{coz}(f) \subseteq X \setminus [x]$ y $x \in Z(f)$. Y puesto que $\operatorname{coz}(f)$ es un conjunto abierto en X, queda demostrado que $X \setminus [x]$ es abierto en X. Por lo tanto, $[x]$ es cerrado en X. Por otra parte, como por 4.1, se tiene que $x \in \operatorname{coz}(g)$ para algún $g \in \mathcal{A}$, entonces $[x] \subseteq \operatorname{coz}(g)$; y como $\operatorname{coz}(g)$ es compacto en X, concluimos que $[x]$ es compacto en X, como se quería ver. □

Denotaremos por $\pi_{\mathcal{A}}\colon X \to \widetilde{X}$ a la aplicación canónica cociente asociada a la relación de equivalencia $\sim$ y dotemos a $\widetilde{X}$ con la topología cociente canónica. Afirmamos que $\pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$ y $\pi_{\mathcal{A}}(Z(f))$ son conjuntos abiertos-cerrados en $\widetilde{X}$, para todo $f \in \mathcal{A}$. En efecto, sabemos que $U \subseteq \widetilde{X}$ es abierto si, y sólo si, $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(U)$ es abierto en X. Observemos que $Z(f) = \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(\pi_{\mathcal{A}}(Z(f)))$ es un abierto en X, puesto que $\mathbb{F}$ es discreto. Del mismo modo, $\operatorname{coz}(f) = \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(\pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f)))$ es un abierto en X. Por lo tanto, $\pi_{\mathcal{A}}(Z(f))$ y $\pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$ son abiertos en $\widetilde{X}$. En forma análoga, con el uso de complementos, se demuestra que $\pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$ y $\pi_{\mathcal{A}}(Z(f))$ son cerrados en $\widetilde{X}$.

Proposición 4.2.6. *El conjunto $\widetilde{X}$ dotado con la topología cociente canónica es un espacio localmente compacto y Hausdorff.*

Demostración.

(i) Veamos que $\widetilde{X}$ es localmente compacto. Sea $[x_0] \in \widetilde{X}$. Veamos que existe una vecindad de $[x_0]$ cuya cerradura es compacta. Como $x_0 \in X$, por 4.1, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x_0) \neq 0$; así, $x_0 \in \operatorname{coz}(f)$. Por otra parte, consideremos la aplicación canónica $\pi_{\mathcal{A}}\colon X \to \widetilde{X}$, dada por $\pi_{\mathcal{A}}(x) = [x]$. Puesto que $\pi_{\mathcal{A}}$ es continua y $\operatorname{coz}(f)$ es compacto, puesto que $\mathcal{A} \subseteq C_{00}(X, \mathbb{F})$, se tiene que $\pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$ es compacto y $\pi_{\mathcal{A}}(x_0) = [x_0] \in \pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$; además, por lo demostrado arriba, $\pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$ es un conjunto abierto-cerrado en $\widetilde{X}$. Por lo tanto, $\pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$ es una vecindad de $[x_0]$ cuya cerradura es compacta, como se quería demostrar.

(ii) Afirmamos que $\widetilde{X}$ es un espacio de Hausdorff. En efecto, sean $[x], [y] \in \widetilde{X}$ tales que $[x] \neq [y]$. Entonces $x \not\sim y$ y, por el lema (4.2.3), existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $x \in \operatorname{coz}(f)$ y $y \in Z(f)$. Luego, $[x] = \pi_{\mathcal{A}}(x) \in \pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$ y $[y] = \pi_{\mathcal{A}}(y) \in \pi_{\mathcal{A}}(Z(f))$. Puesto que $\pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$ y $\pi_{\mathcal{A}}(Z(f))$ son abiertos y disjuntos en $\widetilde{X}$, pues si existe $a \in \pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f))$ y $a \in \pi_{\mathcal{A}} Z(f)$, entonces existen $a_1 \in \operatorname{coz}(f)$ y $a_2 \in Z(f)$ tales que $a = \pi_{\mathcal{A}}(a_1) = [a_1]$ y $a = \pi_{\mathcal{A}}(a_2) = [a_2]$. Así, $[a_1] = [a_2]$, lo cual implica que $a_1 \sim a_2$ y, puesto que $f(a_1) \neq 0$, se tiene que $f(a_1) \cdot f(a_2) \neq 0$; de donde, $f(a_2) \neq 0$, lo cual contradice que $a_2 \in Z(f)$. Con lo anterior, queda demostrada la afirmación. □

En la prueba del siguiente lema se usa un argumento de compacidad estándar. Sin embargo, la incluimos por mantener la completitud de este trabajo.

Lema 4.2.7. *Sean K_1 y K_2 subconjuntos compactos de X tales que $x_1 \not\sim x_2$, para cualesquiera $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$. Entonces existen $D_1, D_2 \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $K_1 \subseteq D_1$, $K_2 \subseteq D_2$ y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.*

Demostración. Sea $x_0 \in K_1$ fijo. Entonces $x_0 \not\sim x$, para todo $x \in K_2$ y, por el lema (4.2.3), para cada $x \in K_2$, existe $f_x \in \mathcal{A}$ tal que $[x] \subseteq Z(f_x)$ y $[x_0] \subseteq \mathrm{coz}(f_x)$. Entonces $K_2 \subseteq \bigcup_{[x]\in\pi_{\mathcal{A}}(K_2)} Z(f_x)$. Puesto que K_2 es compacto y $Z(f_x)$ es abierto, se tiene que $K_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Z(f_{x^{(i)}})$ Además, $[x_0] \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{coz}(f_{x^{(i)}}) = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Z(f_{x^{(i)}}) \subseteq X \setminus K_2$.

Sea $D_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{coz}(f_{x^{(i)}})$. Entonces D_{x_0} es un subconjunto abierto-cerrado y saturado de X tal que $[x_0] \subseteq D_{x_0}$, $D_{x_0} \in \sigma(\mathcal{D})$ y $D_{x_0} \cap K_2 = \emptyset$. Así, para cada $x_0 \in K_1$, existe D_{x_0} tal que $x_0 \in D_{x_0}$, en consecuencia, $K_1 \subseteq \bigcup_{[x]\in\pi_{\mathcal{A}}(K_1)} D_x$ y $D_x \cap K_2 = \emptyset$, para todo $[x] \in \pi_{\mathcal{A}}(K_1)$. Como K_1 es compacto y D_x es un conjunto abierto-cerrado, para cada $[x] \in \pi_{\mathcal{A}}(K_1)$, tenemos que $K_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} D_{x_{(j)}}$.

Sea $D_1 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^{m} D_{x_{(j)}}$. Entonces D_1 es un conjunto abierto-cerrado en X tal que $K_1 \subseteq D_1$, $D_1 \in \sigma(\mathcal{D})$ y $D_1 \cap K_2 = \emptyset$. Además, D_1 es saturado y compacto en X. Repitiendo el mismo proceso, pero esta vez aplicado a D_1 y K_2, se obtiene $D_2 \in \sigma(\mathcal{D})$ tal que $K_2 \subseteq D_2$ y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, lo que completa la prueba. □

Notemos que el lema anterior se aplica a cualquier par de conjuntos compactos y saturados de X que sean disjuntos.

Observación 4.2.8. Todo $D \in \sigma(\mathcal{D})$ es un subconjunto compacto, y saturado, de X y $\pi_{\mathcal{A}}(D)$ es un conjunto abierto-cerrado en $\widetilde{X}$. Más aún, la colección $\{\pi_{\mathcal{A}}(D) : D \in \sigma(\mathcal{D})\}$ es una base de abiertos para $\widetilde{X}$.

4.3. Subconjuntos soportes y funcionales separadores

La siguiente definición tiene sentido para todo subconjunto de X, no obstante, nos restringimos a los subconjuntos saturados porque en este capítulo trabajeremos con dichos conjuntos.

Definición 4.3.1. Sea $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ una aplicación. Un subconjunto cerrado y saturado K de X es un *soporte* para φ si para todo $f \in \mathcal{A}$ tal que $K \subseteq Z(f)$ se verifica que $\varphi(f) = 0$.

Los conjuntos soportes gozan de propiedades muy diversas como se muestra a continuación.

Proposición 4.3.2. *Sea $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ un funcional lineal, separador y no nulo. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *X es un soporte para φ.*

2. Si K es un soporte para φ, entonces $K \neq \emptyset$.

3. Sean K un soporte para φ y $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $f_1|_K = f_2|_K$. Entonces $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$.

4. Si $\mathcal{A}$ es controlable y K_1 y K_2 son soportes para φ, entonces $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

Demostración.

1. Esta afirmación es clara puesto que si $f \in \mathcal{A}$ es tal que $X \subseteq Z(f)$, entonces $f(x) = 0$, para todo $x \in X$, lo cual implica que $f \equiv 0$ y por ser φ lineal, se concluye que $\varphi(f) = 0$.

2. Supongamos que $K = \emptyset$. Entonces $K \subseteq Z(f)$, para todo $f \in \mathcal{A}$, y por ser K un soporte, tenemos que $\varphi(f) = 0$, para todo $f \in \mathcal{A}$. Esto es una contradicción, puesto que φ es no nulo.

3. Supongamos que $f_1|_K = f_2|_K$. Entonces $K \subseteq Z(f_1 - f_2)$ y, por ser K un soporte para φ, se tiene que $\varphi(f - g) = 0$. Esto implica, por la linealidad de φ, que $\varphi(f) = \varphi(g)$.

4. Supongamos que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Como φ es no nulo, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(f) \neq 0$. Entonces $C_1 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coz}(f) \cap K_1$ y $C_2 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{coz}(f) \cap K_2$ son conjuntos compactos, al ser cerrados en $\operatorname{coz}(f)$, que es compacto; y no vacíos, porque de ser ambos vacíos, $K_i \subseteq Z(f)$, para $i \in \{1, 2\}$, lo cual implica que $\varphi(f) = 0$, lo que es una contradicción. Además, C_1 y C_2 son saturados, puesto que $\operatorname{coz}(f)$, K_1 y K_2 son saturados. Más aún, puesto que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, se tiene que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y, por el lema (4.2.7), existen D_1 y $D_2 \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $C_i \subseteq D_i$, para $i = 1, 2$, y $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Aplicando la controlabilidad de $\mathcal{A}$ a f, D_1 y D_2, obtenemos $D \in \sigma(\mathcal{D})$ y $g \in \mathcal{A}$ tales que $D_1 \subseteq D \subseteq X \setminus D_2 \subseteq X \setminus C_2$, $f|_{D_1} = g|_{D_1}$ y $g|_{(Z(f) \cup X \setminus D)} \equiv 0$.

   Afirmamos que $f|_{K_1} = g|_{K_1}$, pues si existe $x \in K_1$ tal que $f(x) \neq g(x)$, entonces $x \notin D_1$, lo cual implica que $x \notin C_1 = \operatorname{coz}(f) \cap K_1$ y, por lo tanto, $x \notin \operatorname{coz}(f)$; de donde, $x \in Z(f) \subseteq Z(g)$, así, $f(x) = 0 = g(x)$, lo que es una contradicción. Además, $K_2 \subseteq Z(g)$, pues si existe $y \in K_2$ tal que $y \notin Z(g)$, entonces $y \notin Z(f)$ y $y \notin (X \setminus D) \supseteq D_2 \supseteq C_2$. Esto implica que $y \in \operatorname{coz}(f)$ y $y \notin C_2 = \operatorname{coz}(f) \cap K_2$, de donde, $y \notin K_2$, lo que es una contradicción. En resumen, $f|_{K_1} = g|_{K_1}$ y $K_2 \subseteq Z(g)$. Entonces, por el inciso anterior y por la definición de soporte, respectivamente, tenemos que $\varphi(g) = \varphi(f) \neq 0$ y $\varphi(g) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. $\square$

Definición 4.3.3. Un funcional $\varphi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ es llamado *separador* cuando $\operatorname{coz}(f_1) \cap \operatorname{coz}(f_2) = \emptyset$ implica $\varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2) = 0$, para cualesquiera $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$.

En lo que sigue probaremos que todo funcional lineal, separador y no nulo, $\varphi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{F}$, donde $\mathcal{A}$ es controlable, tiene un soporte mínimo. Para este propósito, definimos

$$\mathcal{S} = \{K \subseteq X : K \text{ es un soporte para } \varphi\}.$$

Por el inciso (1) de la proposición (4.3.2), tenemos que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Existe un orden parcial canónico que puede ser definido sobre $\mathcal{S}$: $K_1 \leq K_2$, $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$ si, y sólo si, $K_2 \subseteq K_1$. Es claro que toda cadena en $\mathcal{S}$ está acotada superiormente. En efecto, sea $\mathcal{S}'$ una cadena, no vacía, de $\mathcal{S}$. Entonces $S_0 = \bigcap_{S\in\mathcal{S}'} S$ es una cota superior para $\mathcal{S}'$. Sólo falta ver que $S_0 \in \mathcal{S}'$, es decir, S_0 es un soporte para φ. Sea $f \in \mathcal{A}$ tal que $S_0 \subseteq Z(f)$. Entonces $\operatorname{coz} f \subseteq X \setminus S_0 = \bigcup_{S\in\mathcal{S}'}(X \setminus S)$. Como $\operatorname{coz} f$ es compacto, existe un subconjunto finito $\mathcal{S}''$ de $\mathcal{S}'$ tal que $\operatorname{coz} f \subseteq \bigcup_{S\in\mathcal{S}''}(X \setminus S) = X - \bigcap_{S\in\mathcal{S}''} S$, de donde, $S_1 = \bigcap_{S\in\mathcal{S}''} S \subseteq Z(f)$ y como S_1 es un soporte para φ (por ser $\mathcal{S}'$ una cadena), se tiene que $\varphi(f) = 0$; lo cual implica que S_0 es un soporte para φ como se quería ver. Puesto que toda cadena de $\mathcal{S}$ está acotada superiormente, el Lema de Zorn implica que $\mathcal{S}$ tiene un elemento $\leq$-maximal. Es decir, existe $S \in \mathcal{S}$ tal que $S \nleq S'$ para todo $S' \in \mathcal{S}$, o, equivalentemente, $S' \nsubseteq S$ para todo $S' \in \mathcal{S}$, lo cual implica que S es $\subseteq$-minimal en $\mathcal{S}$ y puesto que dos soportes siempre se intersectan, entonces S resulta $\subseteq$-mínimo.

Proposición 4.3.4. *Sea $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{F}$ un funcional lineal, separador y no nulo. Si $\mathcal{A}$ es controlable, entonces existe $x \in X$ tal que $K = [x]$ es un soporte para φ.*

Demostración. Por lo argumentado anteriormente, $\mathcal{S}$ tiene un elemento $\subseteq$-mínimo, K, y, por la proposición (4.3.2), $K \neq \emptyset$. Sólo falta ver que K consta de un único elemento. Supongamos que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $[x_1] \neq [x_2]$ y que están contenidos en K. Puesto que X es Hausdorff y K es saturado, usando el lema (4.2.7), podemos seleccionar dos subconjuntos abiertos, disjuntos y saturados $V_1, V_2 \subseteq X$ tales que $[x_1] \subseteq V_1$ y $[x_2] \subseteq V_2$. Puesto que K es minimal, el subconjunto $K \setminus V_i$ es un subconjunto cerrado y saturado de X que no es soporte para φ, para $i = 1, 2$, por lo que existen $f_i \in \mathcal{A}$ tales que $K \setminus V_i \subseteq Z(f_i)$ y $\varphi(f_1) \neq 0$, $1 \leq i \leq 2$. Como φ es un funcional separador, el subconjunto $A = \operatorname{coz}(f_1) \cap \operatorname{coz}(f_2)$ es un subconjunto no vacío, compacto y saturado de X. Afirmamos que $K \cap A = \emptyset$, pues si existe $a \in K \cap A$, entonces $[a] \subseteq K \cap A$. Si $[a] \subseteq V_1$, entonces $[a] \subseteq K \setminus V_2$ y $[a] \subseteq Z(f_2)$, lo que es una contradicción. Por otra parte, si $[a] \nsubseteq V_1$, entonces $[a] \subseteq K \setminus V_1$ y $[a] \subseteq Z(f_1)$, lo que de nuevo es una contradicción. Por lo tanto tenemos que $K \cap A = \emptyset$.

Ahora, tomemos $B = K \cap (\operatorname{coz}(f_1) \cup \operatorname{coz}(f_2))$. Si $B = \emptyset$, entonces $K \cap \operatorname{coz}(f_i) = \emptyset$ y $K \subseteq Z(f_i)$, lo cual implica que $\varphi(f_i) = 0$, $1 \leq i \leq 2$, y obtenemos una contradicción. Por lo que $B \neq \emptyset$. Así, B es un subconjunto compacto de X tal que $A \cap B = \emptyset$. Aplicando el lema (4.2.7), podemos seleccionar dos subconjuntos disjuntos D_A, $D_B \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $A \subseteq D_A$ y $B \subseteq D_B$. Aplicando que $\mathcal{A}$ es controlable a D_A, D_B y f_1, obtenemos $U \in \sigma(\mathcal{D})$ y $f' \in \mathcal{A}$ tales que $B \subseteq D_B \subseteq U \subseteq X \setminus D_A \subseteq X \setminus A$, lo cual implica que $U \cap A = \emptyset$, además, $f_1|_{D_B} = f'|_{D_B}$ y $f'|_{(Z(f_1)\cup(X\setminus U))} \equiv 0$.

Veamos que $f'|_K = f_1|_K$. En efecto, si $x \in K \setminus \operatorname{coz}(f_1)$, entonces $f'(x) = 0 = f_(x)$ y si $x \in K \cap \operatorname{coz}(f_1) \subseteq D_B$, entonces $f'(x) = f_1(x) \neq 0$. Por proposición (4.3.2), $\varphi(f') = \varphi(f_1) \neq 0$. Puesto que φ es separador, $\emptyset \neq \operatorname{coz}(f') \cap \operatorname{coz}(f_2) \subseteq \operatorname{coz}(f_1) \cap \operatorname{coz}(f_2) = A$. Pero esto es una contradicción porque $A \subseteq Z(f')$. Por proposición (4.2.5), se sigue que K sólo puede contener una clase de equivalencia $K = [x]$ para algún punto $x \in X$, lo que completa la prueba. $\square$

4.4. Aplicaciones separadoras

Recordemos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ representan subespacios lineales de $C_{00}(X, \mathbb{F})$ y $C_{00}(Y, \mathbb{F})$, respectivamente. Observe que para todo $y \in Y$, la composición $\delta_y \circ H$ es un funcional lineal y separador de $\mathcal{A}$ en $\mathbb{F}$.

Definición 4.4.1. Una aplicación $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es *separadora* o *preserva disyunciones*, si para cada par de aplicaciones $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ tales que $\mathrm{coz}(f_1) \cap \mathrm{coz}(f_2) = \emptyset$ implica $\mathrm{coz}(H(f_1)) \cap \mathrm{coz}(H(f_2)) = \emptyset$.

El enlace entre isomorfismos que preservan peso y las aplicaciones separadoras es dado por el siguiente lema. Se sigue fácilmente teniendo en cuenta que el peso de una función coincide con la medida de su conjunto soporte cuando ésta tiene como codominio un campo finito. Esbozamos la prueba en aras de la compeltitud de este trabajo.

Lema 4.4.2. *Para cualesquiera $f, g \in \mathcal{A}$, se tiene que*

$$\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset \text{ si, y sólo si, } \mathrm{wt}(f+g) = \mathrm{wt}(f) + \mathrm{wt}(g).$$

Demostración. Supongamos que $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$. Entonces, para cada $x \in X$, $\mathrm{wt}(f(x) + g(x)) = \mathrm{wt}(f(x)) + \mathrm{wt}(g(x))$. Por lo tanto, $\mathrm{wt}(f+g) = \mathrm{wt}(f) + \mathrm{wt}(g)$. El recíproco es consecuencia de que $\mathrm{coz}(f+g) \subseteq \mathrm{coz}(f) \cup \mathrm{coz}(g)$. $\square$

Corolario 4.4.3. *Toda isometría de Hamming es un isomorfismo lineal y separador.*

Demostración. Sea H una isometría de Hamming. Entonces es un isomorfismo lineal y $\mathrm{wt}(f) = \mathrm{wt}(H(f))$. Veamos que H es una aplicación separadora. En efecto, supongamos que $\mathrm{coz}(f) \cap \mathrm{coz}(g) = \emptyset$. Entonces, por el lema anterior, $\mathrm{wt}(f+g) = \mathrm{wt}(f) + \mathrm{wt}(g)$ y, puesto que $\mathrm{wt}(f) = \mathrm{wt}(H(f))$, tenemos que $\mathrm{wt}(H(f+g)) = \mathrm{wt}(f+g) = \mathrm{wt}(f) + \mathrm{wt}(g) = \mathrm{wt}(H(f)) + \mathrm{wt}(H(g))$. De donde, $\mathrm{wt}(H(f) + H(g)) = \mathrm{wt}(H(f)) + \mathrm{wt}(H(g))$, lo cual implica, por el lema anterior, que $\mathrm{coz}(H(f)) \cap \mathrm{coz}(H(g)) = \emptyset$. Por lo tanto, H es separadora. $\square$

Ahora bien, trasladando a Y y a $\mathcal{B}$ la relación de equivalencia $(\leq)$ definida anteriormente para X y $\mathcal{A}$ y aplicando las proposiciones (4.3.2) y (4.3.4) a $\delta_y \circ H$, obtenemos lo siguiente:

Proposición 4.4.4. *Sea $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal y separadora. Si K es un soporte para $\delta_y \circ H$ y $y' \in [y]$, entonces K es un soporte para $\delta_{y'} \circ H$.*

Demostración. Ahora, supongamos que K es un soporte para $\delta_y \circ H$ y tomemos $y' \in [y]$. Veamos que K es un soporte para $\delta_{y'} \circ H$. En efecto, sea $f \in \mathcal{A}$ tal que $K \subseteq Z(f)$. Puesto que K es soporte para $\delta_y \circ H$, tenemos que $y \in Z(H(f))$ y, como todo cero de $\mathcal{B}$ es saturado, $[y] \subseteq Z(H(f))$. Así, $y' \in [y] \subseteq Z(H(f))$, esto es, $H(f)(y') = 0$, lo cual implica que K es soporte para $\delta_{y'} \circ H$, como se quería demostrar. $\square$

Aplicando la proposición (4.3.4) a $\delta_y \circ H$, para cada $y \in Y$, estamos en condiciones de definir la *aplicación soporte* $h\colon Y \to \widetilde{X}$ que está asociada a H. Una vez más, para simplificar la notación, usaremos el símbolo $h(y)$ para denotar tanto a un subconjunto de X como al soporte mínimo para $\delta_y \circ H$ (como se estudió anteriormente) que es un elemento de $\widetilde{X}$ y consiste en una clase de equivalencia.

Proposición 4.4.5. *Sea $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal y separadora que satisface lo siguiente: para todo $y \in Y$, existe $f_y \in \mathcal{A}$ tal que $H(f_y)(y) \neq 0$. Si $\mathcal{A}$ es controlable, entonces existe una aplicación $h\colon Y \to \widetilde{X}$ tal que*

1. *Para todo $f \in \mathcal{A}$, si $f|_{h(y)} = 0$, entonces $H(f)(y) = 0$.*
2. *Si $y \sim y'$, entonces $h(y) = h(y')$, para cualesquiera $y, y' \in Y$.*
3. *Si $A \subset \widetilde{X}$ es abierto, $f \in \mathcal{A}$ y $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) \subseteq Z(f)$, entonces $h^{-1}(A) \subseteq Z(H(f))$.*
4. *Para todo $f \in \mathcal{A}$ se tiene que $h(\mathrm{coz}(H(f))) \subseteq \pi_{\mathcal{A}}(\mathrm{coz}(f))$.*

Demostración. Como $\mathcal{A}$ es controlable, se puede aplicar la proposición (4.3.4) para definir la aplicación $h\colon Y \to \widetilde{X}$ como sigue:

$$h(y) = [x], \text{ donde } [x] \text{ es el soporte mínimo para } \delta_y \circ H.$$

Ahora procedamos a demostrar los incisos (1) al (4).

1. Esta afirmación se sigue directamente de la definición de la aplicación h.
2. Sea $h(y) = [x_y]$ y $h(y') = [x_{y'}]$, donde $[x_y]$ y $[x_{y'}]$ representan a los soportes mínimos de $\delta_y \circ H$ y $\delta_{y'} \circ H$, respectivamente. Como $[x_y]$ es un soporte para $\delta_y \circ H$ y $y' \in [y]$ (pues $y' \sim y$), la proposición (4.4.4) implica que $[x_y]$ es soporte para $\delta_{y'} \circ H$ y, puesto que $[x_{y'}]$ es el soporte mínimo para $\delta_{y'} \circ H$, tenemos que $[x_{y'}] \subseteq [x_y]$. En forma análoga, se demuestra que $[x_y] \subseteq [x_{y'}]$. Por lo tanto, $h(y) = [x_y] = [x_{y'}] = h(y')$.
3. Supongamos que $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) \subseteq Z(f)$. Veamos que $h^{-1}(A) \subseteq Z(H(f))$. Sea $y \in h^{-1}(A)$. Entonces $h(y) \in A$, por lo que $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(y)) \in Z(f)$. Así, $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(\widetilde{X} \setminus A)$ es un conjunto, no vacío, cerrado y saturado de X (puesto que si $x \in [y]$, donde $y \in \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(\widetilde{X} \setminus A)$, entonces $[y] = \pi_{\mathcal{A}}(y) \in \widetilde{X} \setminus A$, pero $[x] = [y]$, ya que $x \sim y$; así, $\pi_{\mathcal{A}}(x) = [x] \in \widetilde{X} \setminus A$, lo cual implica que $x \in \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(\widetilde{X} \setminus A)$). Además, $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(\widetilde{X} \setminus A)$ no es soporte para $\delta_y \circ H$, puesto que de serlo, entonces $h(y) = [x_y] \subseteq \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(\widetilde{X} \setminus A)$, donde $[x_y] \subseteq X$ es el soporte mínimo para $\delta_y \circ H$, pero tenemos también que $\pi_{\mathcal{A}}(x_y) = [x_y] \in \widetilde{X}$. Ahora, como $x_y \in [x_y]$, entonces $\pi_{\mathcal{A}}(x_y) \in \widetilde{X} \setminus A$, así, $h(y) = [x_y] = \pi_{\mathcal{A}}(x_y) \in \widetilde{X} \setminus A$, lo que es una contradicción, pues $h(y) \in A$. Por lo tanto, existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(\widetilde{X} \setminus A) \subseteq Z(g)$ y $H(g)(y) \neq 0$. Así, tenemos que $\mathrm{coz}(g) \subseteq \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A)$ y $\mathrm{coz}(f) \subseteq X \setminus \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A)$. Puesto que H es una aplicación separadora, $\mathrm{coz}(H(f)) \cap \mathrm{coz}(H(g)) = \emptyset$. En consecuencia, $H(f)(y) = 0$, lo que demuestra la afirmación.

4. Sea $[x] \in h(\mathrm{coz}(H(f)))$. Entonces existe $y \in \mathrm{coz}(H(f))$ tal que $[x] = h(y)$. Veamos que $[x] \in \pi_{\mathcal{A}}(\mathrm{coz}(f))$. Como $H(f)(y) \neq 0$ y $h(y)$ es soporte para $\delta_y \circ H$, entonces $[x] \nsubseteq Z(f)$, por lo que existe $x_0 \in [x]$ tal que $x_0 \notin Z(f)$, luego $x_0 \in \mathrm{coz}(f)$; así $[x_0] = \pi_{\mathcal{A}}(x_0) \in \pi_{\mathcal{A}}(\mathrm{coz}(f))$, pero $[x] = [x_0]$, pues $x \sim x_0$. Por lo tanto, $[x] \in \pi_{\mathcal{A}}(\mathrm{coz}(f))$, como se quería demostrar. $\square$

Denotemos por $\mathrm{Gr}[h] \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{y\in Y}(h(y) \times \{y\}) = \{(x, y) \in \widetilde{X} \times Y : x \in h(y), y \in Y\}$ a la gráfica de h dotada con la topología heredada como un subespacio de $\widetilde{X} \times Y$. Usando la aplicación $\lambda(\ ,\ )$ definida en la proposición (4.2.2), tenemos la siguiente representación de aplicaciones lineales y separadoras.

Proposición 4.4.6. *Sea $H \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal y separadora que satisface lo siguiente: para todo $y \in Y$, existe $f_y \in \mathcal{A}$ tal que $H(f_y)(y) \neq 0$. Si $\mathcal{A}$ es controlable, entonces existe una aplicación $\omega \colon \mathrm{Gr}[h] \to \mathbb{F} \setminus \{0\}$ que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$ y $(x, y) \in \mathrm{Gr}[h]$, se tiene que $H(f)(y) = \omega(x, y)f(x)$.*

2. *Para cualesquiera $y \sim y'$ y $(x, y), (x', y') \in \mathrm{Gr}[h]$, se tiene que $\omega(x', y') = \lambda(y', y)$ $\omega(x, y)\lambda(x, x')$.*

3. *La aplicación ω es continua.*

Demostración.

1. Sean $(x, y) \in \mathrm{Gr}[h]$. Por hipótesis, existe $f' \in \mathcal{A}$ tal que $H(f')(y) \neq 0$. Entonces $f'(x) \neq 0$, pues en caso contrario, $x \in Z(f')$, y, puesto que $Z(f')$ es saturado, tenemos que $h(y) = [x] \subseteq Z(f')$; como $h(y)$ es soporte para $\delta_y \circ H$, concluimos que $H(f')(y) = 0$, lo que es una contradicción. Sea $\alpha = f'(x) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Entonces $f_x \overset{\mathrm{def}}{=} \alpha^{-1}f'$ es un elemento de $\mathcal{A}$ tal que $f_x(x) = \alpha^{-1}f'(x) = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$. Definamos $\omega(x, y) = H(f_x)(y) = H(\alpha^{-1}f')(y) = \alpha^{-1}H(f')(y) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Veamos que ω está bien definida, es decir, no depende de la elección de $f_x \in \mathcal{A}$, con $f_x(x) = 1$. En efecto, sea $g_x \in \mathcal{A}$, con $g_x(x) = 1$. Queremos ver que $H(g_x)(y) = H(f_x)(y)$. Sea $x_1 \in h(y)$ tal que $x_1 \neq x$. Entonces, por la proposición (4.2.2), existe un único elemento $\lambda(x_1, x) \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ tal que $f_x(x_1) = \lambda(x_1, x)f_x(x) = \lambda(x_1, x) = \lambda(x_1, x)g_x(x) = g_x(x_1)$. Así, $f_x|_{h(y)} = g_x|_{h(y)}$ y, por el inciso (3) de la proposición (4.3.2), tenemos que $H(f_x)(y) = H(g_x)(y)$, como se quería demostrar.
   Consideremos, ahora, una aplicación arbitraria $f \in \mathcal{A}$. Entonces $f(x) = 0$ o $f(x) \neq 0$. Si $f(x) = 0$, puesto que $Z(f)$ es saturado, se tiene que $h(y) = [x] \subseteq Z(f)$, y por ser $h(y)$ soporte para $\delta_y \circ H$, concluimos que $H(f)(y) = 0$. Lo cual implica, de manera trivial, que $H(f)(y) = \omega(x, y)f(x)$. Supongamos que $f(x) = \beta \neq 0$. Entonces $g'_x \overset{\mathrm{def}}{=} \beta^{-1}f$ es un elemento de $\mathcal{A}$ tal que $g'_x(x) = 1$. Puesto que $\omega(x, y)$ no depende de g'_x, se sigue que $H(g'_x)(y) = H(f_x)(y) = \omega(x, y)$, es decir, $H(\beta^{-1}f)(y) = \omega(x, y)$ y, como H es una aplicación lineal, tenemos que $\beta^{-1} \cdot H(f)(y) = \omega(x, y)$. Por lo tanto, $H(f)(y) = \omega(x, y) \cdot \beta = \omega(x, y) \cdot f(x)$. En resumen, si $f \in \mathcal{A}$ y $(x, y) \in \mathrm{Gr}[h]$, entonces $H(f)(y) = \omega(x, y) \cdot f(x)$, como se quería demostrar.

2. Esto es claro después de hacer algunas evaluaciones directas.

3. Sea $(x_d, y_d)_{d\in D}$ una red que converge a $(x, y) \in \mathrm{Gr}[h]$ y tomemos $f_x \in \mathcal{A}$ tal que $f_x(x) = 1$. Puesto que $\mathbb{F}$ es discreto y f_x y $H(f_x)$ son continuas, existe $d_0 \in D$ tal que $f_x(x_d) = 1$ y $H(f_x)(y_d) = H(f_x)(y)$, para todo $d \geq d_0$. Así, $\omega(x_d, y_d) = \omega(x_d, y_d)f_x(x)$ $= \omega(x, y)$, para todo $d \geq d_0$. Esto implica que la red $(x_d, y_d)_{d\in D}$ converge a $\omega(x, y)$. $\square$

Como consecuencia del anterior resultado obtenemos un recíproco para la proposición (4.4.5).

Corolario 4.4.7. *Si $H(f)(y) = 0$, entonces $f(x) = 0$, para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$ y $(x, y) \in \mathrm{Gr}[h]$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{A}$ y $(x, y) \in \mathrm{Gr}[h]$. Entonces por el inciso (1) de la proposición (4.4.6), tenemos que $H(f)(y) = \omega(x, y)f(x)$. Si $H(f)(y) = 0$, entonces, puesto que $\mathrm{ran}(\omega) \subseteq \mathbb{F} \setminus \{0\}$, tenemos la afirmación deseada. $\square$

Nuestro siguiente objetivo es verificar que la aplicación soporte h es continua y suprayectiva, asumiendo las mismas condiciones que en la proposición (4.4.5) y suponiendo, además, que H es inyectiva. Dividimos la prueba en varios lemas para la comodidad del lector.

Lema 4.4.8. *Asumiendo las mismas condiciones que en la proposición (4.4.5), tenemos que la función soporte $h\colon Y \to \widetilde{X}$ es continua.*

Demostración. Sea $(y_d)_{d\in D}$ una red en Y que converge a un punto $y \in Y$. Veamos que existe una subred $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ de $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ que converge a $h(y)$. Sabemos, por la proposición (4.2.6), que $\widetilde{X}$ es localmente compacto y Hausdorff, entonces su compactificación de Alexandroff, $\widetilde{X}^*$, también es Hausdorff. Como $\widetilde{X}^*$ es compacto y $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ es una red en $\widetilde{X} \subseteq \widetilde{X}^*$, existe una subred, $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$, de $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ que converge a $t \in \widetilde{X}^*$ (esto es, $(h(y_d))_{d\in D}$ tiene un punto de acumulación). Veamos que $h(y) = t$.

Supongamos, por el contrario, que $h(y) \neq t$. Como $\widetilde{X}^*$ es Hausdorff, existen $U_{h(y)}$ y U_t abiertos de $\widetilde{X}^*$ tales que $h(y) \in U_{h(y)}$, $t \in U_t$ y $U_{h(y)} \cap U_t = \emptyset$. Puesto que $t \in U_t$ y $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ converge a t, existe $d_0 \in D'$ tal que $h(y_{d'}) \in U_t \cap \widetilde{X}$, para todo $d' \geq d_0$. Es claro que $\pi^{-1}(\widetilde{X} \setminus (U_t \cap \widetilde{X}))$ no es soporte para $\delta_{y_{d'}} \circ H$, para todo $d' \geq d_0$; por lo que, para todo $d' \geq d_0$, existe $f_{y_{d'}} \in \mathcal{A}$ tal que $\pi^{-1}(\widetilde{X} \setminus (U_t \cap \widetilde{X})) \subseteq Z(f_{y_{d'}})$ y $H(f_{y_{d'}})(y_{d'}) \neq 0$. Del mismo modo, como $h(y) \in U_{h(y)}$, el conjunto $U_{h(y)} \cap \widetilde{X}$ es una vecindad abierta de $h(y)$; así, $\pi^{-1}(\widetilde{X} \setminus (U_{h(y)} \cap \widetilde{X}))$ no es un soporte para $\delta_y \circ H$, por lo que existe $f_y \in \mathcal{A}$ tal que $\pi^{-1}(\widetilde{X} \setminus (U_{h(y)} \cap \widetilde{X})) \subseteq Z(f_y)$ y $H(f_y)(y) \neq 0$. Como $(y_d)_{d\in D}$ converge a y y $H(f_y)$ es continua, tenemos que $(H(f_y)(y_d))_{d\in D}$ converge a $H(f_y)(y) \neq 0$, por lo que existe $d_1 \in D$ tal que $H(f_y)(y_d) \neq 0$, para todo $d \geq d_1$. Por otra parte, como $\{h(y_{d_k})\}_{d_k\in D'}$ es una subred de $\{h(y_d)\}_{d\in D}$ existe una función $f\colon D' \to D$ que cumple las siguientes condiciones: Para todo $d_k \in D'$, $h(y_{d_k}) = h(y_{f(d_k)})$ y para todo $d \in D$, existe $d' \in D'$ tal que si $m \geq d'$, entonces $f(m) \geq d$, donde m es un elemento arbitrario de D'. Como $d_1 \in D$, existe $d_2 \in D'$ tal que si $m \geq d_2$, entonces $f(m) \geq d_1$, para cualquier $m \in D'$. Ahora bien, como d_0 y d_2 son elementos del conjunto dirigido D', existe $d' \in D'$ tal que $d' \geq d_0$ y $d' \geq d_2$. Por lo tanto, $h(y_{d'}) \in U_t \cap \widetilde{X}$, $h(y_{d'}) = h(y_{f(d')})$ y $f(d') \geq d_1$. Sea $r = f(d')$. Entonces $r \geq d_1$ y $h(y_r) \in U_t \cap \widetilde{X}$, por lo que $H(f_y)(y_r) \neq e_G$ y $\pi^{-1}(\widetilde{X} \setminus (U_t \cap \widetilde{X}))$ no es un soporte para $\delta_{y_r} \circ H$; de donde, existe $f_2 \in \mathcal{A}$ tal que $\pi^{-1}(\widetilde{X} \setminus (U_t \cap \widetilde{X})) \subseteq Z(f_2)$ y $H(f_2)(y_r) \neq e_G$. Por lo tanto, $y_r \in \mathrm{coz}(H(f_y)) \cap \mathrm{coz}(H(f_2))$, lo cual implica, puesto que H es separadora, que $\mathrm{coz}(f_y) \cap \mathrm{coz}(f_2) \neq \emptyset$. Sea $a \in X$ tal que $a \in \mathrm{coz}(f_y) \cap \mathrm{coz}(f_2)$. Entonces $a \notin \pi^{-1}(\widetilde{X} \setminus (U_t \cap \widetilde{X}))$ y $a \notin \pi^{-1}(\widetilde{X} \setminus (U_{h(y)} \cap \widetilde{X}))$; de donde, $\pi(a) \in U_t \cap \widetilde{X} \cap U_{h(y)} = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $t = h(y)$. □

Lema 4.4.9. *Si la aplicación H es inyectiva y además se cumplen las mismas condiciones que en la proposición (4.4.5), tenemos que $h(Y)$ es denso en $\widetilde{X}$.*

Demostración. Razonando por contradicción, supongamos que $h(Y)$ no es denso en $\widetilde{X}$. Entonces existe $x \in X$ tal que $[x] \in \widetilde{X}$ y $[x] \notin A \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{cl}_{\widetilde{X}}\, h(Y)$. Luego $[x] \cap \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) = \emptyset$. Por otra parte, por 4.1, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $x \in \mathrm{coz}(f)$ y, como $\mathrm{coz}(f)$ es saturado, se tiene que $[x] \subseteq \mathrm{coz}(f)$. Sea $B \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) \cap \mathrm{coz}(f)$. Entonces B es una subconjunto de X, saturado y compacto, puesto que $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A)$ es cerrado y $\mathrm{coz}(f)$ es compacto y saturado. Además, $B \neq \emptyset$, pues si $B = \emptyset$, entonces $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) \subseteq Z(f)$ y, como $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(Y)) \subseteq \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A)$, se tiene que $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(Y)) \subseteq Z(f)$, esto implica que $H(f) \equiv 0$, pues si existe $y \in Y$ tal que $H(f)(y) \neq 0$, entonces, por el inciso (4) de la proposición (4.4.5), $h(y) \in \pi_{\mathcal{A}}(\mathrm{coz}(f))$, por lo que existe $x \in \mathrm{coz}(f)$ tal que $h(y) = \pi_{\mathcal{A}}(x)$; como $x \notin Z(f) \supseteq \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(Y))$, entonces $h(y) = \pi_{\mathcal{A}}(x) \notin h(Y)$, lo que es una contradicción, pues $y \in Y$. Así, $H(f) \equiv 0$ y, por ser H una aplicación lineal e inyectiva, se tiene que $f \equiv 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $B \neq \emptyset$. Ahora, puesto que $B \subseteq \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A)$ y $[x] \cap \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) = \emptyset$, es claro que $[x] \cap B = \emptyset$. Así, por el lema (4.2.7), existen D_x y D_B en $\sigma(\mathcal{D})$ tales que $[x] \subseteq D_x$, $B \subseteq D_B$ y $D_x \cap D_B = \emptyset$. Sea $D \stackrel{\text{def}}{=} D_x \cap \mathrm{coz}(f)$. Entonces $D \in \sigma(\mathcal{D})$, $[x] \subseteq D$ y $D \cap \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) = \emptyset$, pues si existe $d \in D$ tal que $d \in \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A)$, entonces $d \in D_x \cap B \subseteq D_x \cap D_B = \emptyset$, lo que es una contradicción. Aplicando el hecho de que $\mathcal{A}$ es controlable a f, D y D_B, existen $f' \in \mathcal{A}$ y $D' \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que $[x] \subseteq D \subseteq D' \subseteq X \setminus D_B \subseteq X \setminus B$, $f|_D = f'|_D$ y $f'|_{(Z(f) \cup (X \setminus D'))} \equiv 0$. Así, $\mathrm{coz}(f') \subseteq (\mathrm{coz}(f) \cap D')$ y $D' \cap B = \emptyset$. Además, $\mathrm{coz}(f') \cap \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) \subseteq (D' \cap \mathrm{coz}(f)) \cap \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) = D' \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(Y)) \subseteq \pi_{\mathcal{A}}^{-1}(A) \subseteq Z(f')$ y, como se demostró anteriormente, esto implica que $H(f') \equiv 0$, de donde, $f' \equiv 0$, lo que es una contradicción, pues $f'(x) = f(x) \neq 0$, ya que $x \in [x] \subseteq D$ y $f|_D = f'|_D$. En conclusión, $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}}\, h(Y) = \widetilde{X}$, lo que completa la prueba. □

Sean Y^* y $\widetilde{X}^*$ la compactificación de Alexandroff de Y y $\widetilde{X}$, respectivamente. Se puede ver que todo subconjunto cerrado de Y^* es la unión de un subconjunto cerrado de Y con $\{\infty\}$ o es un subconjunto compacto de Y.

Por otra parte, existe una forma canónica de extender h a la aplicación $h^*\colon Y^* \to \widetilde{X}^*$, por $h^*|_Y = h$ y $h^*(\infty) = \infty$. En lo que sigue se demuestra que esta extensión canónica es continua y suprayectiva.

Lema 4.4.10. *Asumiendo las mismas condiciones que en la proposición (4.4.5) y suponiendo* *que H es inyectiva, tenemos que $h^*\colon Y^* \to \widetilde{X}^*$ definida por*

$$h^*(y) = \begin{cases} h(y), & si \;\; y \in Y \\ \infty, & si \;\; y = \infty \end{cases}$$

es continua y suprayectiva.

Demostración. Puesto que $h^*|_Y = h$ es continua, para probar la continuidad de h^* sólo falta ver que h^* es continua en ∞. Supongamos que h^* no es continua en ∞. Afirmamos que existe un subconjunto compacto, K_0, de $\widetilde{X}$ tal que $\infty \in \mathrm{cl}_{Y^*}(h^{-1}(K_0))$. En efecto, supongamos que no es cierta la anterior afirmación. Es decir, $\infty \notin \mathrm{cl}_{Y^*}(h^{-1}(K))$, para todo subconjunto compacto, K, de $\widetilde{X}$. Sea $W \subseteq \widetilde{X}^*$ un abierto que contiene a $h^*(\infty) = \infty$. Entonces existe un compacto $K \subseteq \widetilde{X}$ tal que $W = \widetilde{X}^* \setminus K$. Como $h^{-1}(K)$ es un subconjunto cerrado de Y, se tiene que $h^{-1}(K) = \mathrm{cl}_Y(h^{-1}(K))$, pero $\mathrm{cl}_Y(h^{-1}(K)) = \mathrm{cl}_{Y^*}(h^{-1}(K)) \cap Y = \mathrm{cl}_{Y^*}(h^{-1}(K))$, pues $\infty \notin \mathrm{cl}_{Y^*}(h^{-1}(K))$. Así, $h^{-1}(K)$ es un subconjunto cerrado de Y^* que no contiene a ∞, por lo que $Y^* \setminus h^{-1}(K)$ es un abierto de Y^* que contiene a ∞ y tal que $h^*(Y^* \setminus h^{-1}(K)) \subseteq \widetilde{X}^* \setminus K = W$, lo cual implica que h^* es continua en ∞, contradiciendo nuestro supuesto. Por lo tanto, existe un subconjunto compacto, K_0, de $\widetilde{X}$ tal que $\infty \in \mathrm{cl}_{Y^*}(h^{-1}(K_0))$ como se afirmó inicialmente. Ahora bien, como $\infty \in \mathrm{cl}_{Y^*}(h^{-1}(K_0))$, existe una red $(y_d)_{d\in D} \subseteq h^{-1}(K_0)$ que converge a ∞. Como K_0 es compacto y $(h(y_d))_{d\in D}$ es una red en K_0, existe una subred $(h(y_{d_i}))_{d_i\in D}$ de $(h(y_d))_{d\in D}$ que converge a $[x_0] \in K_0$. Puesto que para todo $f \in \mathcal{A}$, $\mathrm{coz}(H(f))$ es compacto en Y y, por lo tanto, cerrado en Y^*, para todo $f \in \mathcal{A}$, $Y^* \setminus \mathrm{coz}(H(f))$ es un abierto en Y^* que contiene a ∞; luego, para todo $f \in \mathcal{A}$, existe $d'(f) \in D$ tal que $y_d \in Y^* \setminus \mathrm{coz}(H(f))$, para todo $d \geq d'(f)$. Es decir, para todo $f \in \mathcal{A}$, existe $d'(f) \in D$ tal que $H(f)(y_d) = 0$, para todo $d \geq d'(f)$; lo cual, por el corolario (4.4.7), implica que, para todo $d \geq d'(f)$, $f(x) = 0$, para todo $x \in h(y_d)$, es decir, $f|_{(h(y_d))} = 0$, para todo $d \geq d'(f)$. Así, $h(y_d) \in \pi_{\mathcal{A}}(Z(f))$, para todo $d \geq d'(f)$, por lo que $f(x_0) = 0$, para todo $f \in \mathcal{A}$, pues si $f(x_0) \neq 0$, para alguna $f \in \mathcal{A}$, $[x_0] \in \pi_{\mathcal{A}}(\mathrm{coz}(f))$ y como $(h(y_{d_i}))_{d_i\in D}$ converge a $[x_0]$, existe $d_j \in D$ tal que, para todo $d \geq d_j$, $h(y_d) \in \pi_{\mathcal{A}}(\mathrm{coz}(f))$. Sea $m = \max\{d_j, d'(f)\}$. Entonces $h(y_m) \in \pi_{\mathcal{A}}(\mathrm{coz}(f))$ y $h(y_m) \in \pi_{\mathcal{A}}(Z(f))$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f(x_0) = 0$, para todo $f \in \mathcal{A}$, lo que es una contradicción, pues, por (4.1), siempre existe $g \in \mathcal{A}$ tal que $g(x_0) \neq 0$. En conclusión, h^* es continua en ∞, lo que completa la prueba de la continuidad de h^*.

Para ver que h^* es suprayectiva, haremos uso de su continuidad. En efecto, como h^* es continua, Y^* es compacto y $\widetilde{X}^*$ es Hausdorff, se tiene que $h^*(Y^*)$ es cerrado en $\widetilde{X}^*$, entonces $h^*(Y^*) = \mathrm{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y^*)) = \mathrm{cl}_{\widetilde{X}}(h(Y)) \cup \{\infty\} = \widetilde{X} \cup \{\infty\} = \widetilde{X}^*$, como se quería demostrar. □

Observación 4.4.11. En la demostración del resultado anterior, es fácil ver que $\mathrm{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y^*)) = \mathrm{cl}_{\widetilde{X}}(h(Y)) \cup \{\infty\}$.

En efecto

$$\begin{aligned}
\operatorname*{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y^*)) &= h^*(Y^*) \\
&= h^*(\{\infty\} \cup Y) \\
&= h^*(\{\infty\}) \cup h^*(Y) \\
&= \{\infty\} \cup h(Y) \\
&\subseteq \{\infty\} \cup \operatorname*{cl}_{\widetilde{X}}(h(Y))
\end{aligned}$$

Y, como $\{\infty\} \cup \operatorname{cl}_{\widetilde{X}}(h(Y)) \subseteq \{\infty\} \cup \operatorname{cl}_{\widetilde{X}^*}(h(Y))$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname*{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y^*)) &\subseteq \{\infty\} \cup \operatorname*{cl}_{\widetilde{X}^*}(h(Y)) \\
&= h^*(\{\infty\}) \cup \operatorname*{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y)) \\
&= \operatorname*{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y) \cup h^*(\{\infty\})) \\
&= \operatorname*{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y^*))
\end{aligned}$$

En resumen, $\operatorname{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y^*)) \subseteq \operatorname{cl}_{\widetilde{X}}(h(Y)) \cup \{\infty\} \subseteq \operatorname{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y^*))$, de donde, $\operatorname{cl}_{\widetilde{X}^*}(h^*(Y^*)) = \operatorname{cl}_{\widetilde{X}}(h(Y)) \cup \{\infty\}$.

Del lema anterior se obtiene el siguiente resultado parcial.

Corolario 4.4.12. *Si H es inyectiva y se cumplen las mismas condiciones que en la proposición (4.4.5), se tiene que $h\colon Y \to \widetilde{X}$ es suprayectiva.*

Demostración. Veamos que h es suprayectiva. En efecto, sea $x \in \widetilde{X}$. Entonces $x \in \widetilde{X}^*$ y $x \neq \infty$. Por el lema (4.4.10), tenemos, en particular, que h^* es suprayectiva, por lo que existe $y \in Y^*$ tal que $h^*(y) = x$. Como $x \neq \infty$, por la forma en que se definió h^*, concluimos que $y \neq \infty$, por lo que $y \in Y$. Como consecuencia de la forma en que se definió h^*, tenemos que $h(y) = h^*(y) = x$, lo que completa la prueba. $\square$

Del mismo modo en que se definió una relación de equivalencia, $\sim$, en X, definiremos, en forma análoga, una relación de equivalencia, $\sim_Y$, en Y y denotaremos por $\widetilde{Y}$ al conjunto formado por las clases de equivalencia $Y/\sim_Y$, dotado con la topología cociente heredada de Y. Todo elemento $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$ está asociado al subconjunto $[y] \subseteq Y$ que consta de todos los elementos de Y relacionados con y. Para simplificar, vamos a utilizar el mismo símbolo para denotar tanto al elemento $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$ como al subconjunto de Y antes mencionado.

Denotemos por $\pi_{\mathcal{B}}\colon Y \to \widetilde{Y}$ a la aplicación canónica cociente asociada a la relación de equivalencia $\sim_Y$. Definamos $\tilde{h}\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ por $\tilde{h}([y]) = h(y)$, para todo $[y] \in \widetilde{Y}$, donde $y \in Y$. Se puede ver que la anterior aplicación está bien definida.

En efecto, sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $[y_1] = [y_2]$. Supongamos que $\tilde{h}([y_1]) \neq \tilde{h}([y_2])$. Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $\tilde{h}([y_1]) = h(y_1) = [x_1] \neq [x_2] = h(y_2) = \tilde{h}([y_2])$. Por

lo que $x_1 \not\sim x_2$ y, por el lema (4.2.3), existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $x_1 \in \mathrm{coz}(f)$ y $x_2 \in Z(f)$. Puesto que $Z(f)$ es saturado y $[x_2]$ es un soporte para $\delta_{y_2} \circ H$, tenemos que $H(f)(y_2) = 0$ y, como $y_1 \sim y_2$, por la forma en que se define la relación $\sim$, se tiene que $H(f)(y_1) = 0$. Como $x_1 \in [x_1] = h(y_1)$, el corolario (4.4.7) implica que $f(x_1) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\tilde{h}([y_1]) = \tilde{h}([y_2])$.
Además, es claro que $h = \tilde{h} \circ \pi_{\mathcal{B}}$.

Una consecuencia directa del corolario (4.4.12) es la siguiente proposición.

Proposición 4.4.13. *Si H es una biyección y se cumplen las mismas condiciones que en la proposición (4.4.5), entonces $\tilde{h}$ es un homeomorfismo de $\widetilde{Y}$ en $\widetilde{X}$.*

Demostración.

1. $\tilde{h}$ es continua: Sea $U \subseteq \widetilde{X}$ un abierto. Entonces, por la continuidad de h, $h^{-1}(U) \subseteq Y$ es un abierto y, como $h^{-1}(U) = \pi_{\mathcal{B}}^{-1}((\tilde{h})^{-1}(U))$ y $\pi_{\mathcal{B}}$ es una aplicación cociente, concluimos que $(\tilde{h})^{-1}(U) \subseteq \widetilde{Y}$ es un abierto.

2. $\tilde{h}$ es inyectiva: Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $[y_1] \neq [y_2]$. Veamos que $\tilde{h}(y_1) = h(y_1) = [x_1] \neq [x_2] = h(y_2) = \tilde{h}(y_2)$. Supongamos que $[x_1] = [x_2]$. Como $[y_1] \neq [y_2]$, se tiene que $y_1 \not\sim y_2$, por lo que existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $y_1 \in \mathrm{coz}(H(f))$ y $y_2 \in Z(H(f))$. Así, por el corolario (4.4.7), $f(x_2) = 0$ y, puesto que $x_1 \sim x_2$, se tiene que $f(x_1) = 0$. Así, $x_1 \in Z(f)$, lo cual implica que $[x_1] \subseteq Z(f)$ y, por ser $[x_1]$ un soporte para $\delta_{y_1} \circ H$, entonces $H(f)(y_1) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $[x_1] \neq [x_2]$, es decir, $\tilde{h}([y_1]) \neq \tilde{h}([y_2])$.

3. $\tilde{h}$ es suprayectiva. Esta afirmación se sigue directamente de la suprayectividad de h demostrada en el corolario (4.4.12).

4. $\tilde{h}$ es abierta: Sea $U \subseteq \widetilde{Y}$ un abierto. Entonces $\widetilde{Y} \setminus U$ es un cerrado en $\widetilde{Y}$. Luego, $\widetilde{Y} \setminus U$ es un compacto en $\widetilde{Y}$ o $\widetilde{Y} \setminus U$ no es un compacto en $\widetilde{Y}$. Si $\widetilde{Y} \setminus U$ es un compacto en $\widetilde{Y}$, entonces $\tilde{h}(\widetilde{Y} \setminus U) = \widetilde{X} \setminus \tilde{h}(U)$ es un cerrado en $\widetilde{X}$, por lo que $\tilde{h}(U)$ es un abierto en $\widetilde{X}$. Si $\widetilde{Y} \setminus U$ no es un compacto $\widetilde{Y}$, entonces $(\widetilde{Y} \setminus U) \cup \{\infty\}$ es un subconjunto cerrado (en $\widetilde{Y}^*$) y, por lo tanto, compacto en $\widetilde{Y}^*$.
   Ahora, procedemos como en el lema (4.4.10), con el fin de extender $\tilde{h}$ a una aplicación continua $\tilde{h}^* \colon \widetilde{Y}^* \to \widetilde{X}^*$ como sigue:
$$\tilde{h}^*(y) = \begin{cases} \tilde{h}(y), & \text{si } \ y \in \widetilde{Y} \\ \infty, & \text{si } \ y = \infty \end{cases}$$
   Como $\tilde{h}^*$ es continua, $\tilde{h}(\widetilde{Y} \setminus U) \cup \{\infty\} = \tilde{h}^*((\widetilde{Y} \setminus U) \cup \{\infty\})$ es cerrado en $\widetilde{X}^*$, así $\tilde{h}(\widetilde{Y} \setminus U) = \tilde{h}(\widetilde{Y}) \setminus \tilde{h}(U)$ es cerrado en $\widetilde{X}$. Por lo tanto, $\tilde{h}(U)$ es abierto en $\widetilde{X}$.

De (1), (2), (3) y (4), se concluye que $\tilde{h}$ es un homeomorfismo. □

Observación 4.4.14. En el resultado anterior la prueba de que $\tilde{h}^*$ es continua es totalmente análoga a la prueba de que h^* es continua, realizada en la proposición (4.4.10).

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar un resultado, importante en esta seción, que establece la representación de isomorfismos separadores como operadores composición con peso. Dicho teorema implicará el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.4.15. *Sea $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ una aplicación lineal, separadora y suprayectiva. Si $\mathcal{A}$ es controlable, entonces existen aplicaciones continuas $h\colon Y \to \widetilde{X}$ y $\omega\colon \operatorname{Gr}[h] \to \mathbb{F} \setminus \{0\}$ que cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Para cualesquiera $y \in Y$, $x \in h(y)$ y $f \in \mathcal{A}$ se verifica*
$$H(f)(y) = \omega(x, y) f(x)$$
2. *H es continua con respecto a la topología de la convergencia puntual.*
3. *H es continua con respecto a la topología compacto abierta.*

Demostración. Por hipótesis, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ cumplen la hipótesis general de la proposiciones (4.4.5) y (4.4.6) y como $\mathcal{A}$ es controlable, se verifica la existencia de las aplicaciones $h\colon Y \to \widetilde{X}$ y $\omega\colon \operatorname{Gr}[h] \to \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Esta última aplicación resulta ser continua, por el inciso (3) de la proposición (4.4.6) y la aplicación h resulta ser continua, por el lema (4.4.8). A continuación, demostraremos los incisos (1), (2) y (3).

1. Esta afirmación se sigue directamente del inciso (1) en la proposición (4.4.6).
2. Del inciso anterior y por la continuidad de ω y f, obtenemos la continuidad de H.
3. Sea $(f_d)_{d\in D}$ una red en $\mathcal{A}$ que converge uniformemente a 0 en la topología compacto abierta. Si K es un subconjunto compacto de Y, entonces $h(K)$ es un subconjunto compacto de $\widetilde{X}$, puesto que h es continua. Además, por la observación (4.2.8), el subconjunto $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(K))$ es compacto en X. En efecto, para todo $[x] \in h(K)$, existe $f_x \in \mathcal{A}$ tal que $[x] \in \pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f_x))$. Entonces $h(K) \subseteq \bigcup_{[x]\in h(K)} \pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f_x))$, pero $h(K)$ es compacto y será cubierto por una cantidad finita de dichos elementos, así, $h(K) \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} \pi_{\mathcal{A}}(\operatorname{coz}(f_i))$; de donde, $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(K)) \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} \operatorname{coz}(f_i)$. Como $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(K))$ es cerrado en $\bigcup_{1\le i\le n} \operatorname{coz}(f_i)$, que es compacto, se verifica la compacidad de $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(K))$. Ahora bien, puesto que $(f_d)_{d\in D}$ converge uniformemente a 0, sobre $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(K))$, se sigue que $(f_d)_{d\in D}$ es eventualmente igual a 0, sobre $\pi_{\mathcal{A}}^{-1}(h(K))$. Por lo que $(H(f_d))_{d\in D}$ es eventualmente 0, sobre K, lo que completa la prueba. □

4.5. Resultado principal

Teniendo en cuenta lo anterior, estamos en condiciones de establecer nuestro resultado principal. Es decir, el resultado que nos permite representar las isometrías de Hamming como operadores composición con peso.

Teorema 4.5.1. *Sean X y Y espacios localmente compactos, Hausdorff y cero-dimensionales, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ subespacios vectoriales de funciones continuas con soporte compacto que tienen su dominio en X y Y, respectivamente y su codominio en el campo finito $\mathbb{F}$. Si $\mathcal{A}$ es controlable, entonces toda isometría de Hamming $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un operador composición con peso.*

Demostración. Puesto que H es una isometría de Hamming, el corolario (4.4.3) implica que H es un isomorfismo separador. Aplicando el teorema (4.4.15), tenemos que $H(f)(y) = \omega(x,y)f(x)$, para cualesquiera $f \in \mathcal{A}$, $y \in Y$ y $x \in h(y)$, donde $h\colon Y \to \widetilde{X}$ y $\omega\colon \mathrm{Gr}[h] \to \mathbb{F} \setminus \{0\}$ son aplicaciones continuas, lo cual implica que H es un operador composición con peso. □

Como consecuencia, se deduce la siguiente representación, como operadores composición con peso, de isometrías de Hamming definidas entre subespacios vectoriales de $\mathbb{F}^X$ y $\mathbb{F}^Y$, cuando X y Y son espacios discretos y μ_X y μ_Y son las respectivas medidas de conteo definidas sobre ellos.

Corolario 4.5.2. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos espacios vectoriales de funciones, con soporte finito, que toman valores en un campo $\mathbb{F}$ y que están definidas sobre los espacios discretos, X y Y, respectivamente. Si $\mathcal{A}$ es controlable, entonces toda isometría de Hamming $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es un operador composición con peso.*

Demostración. Aplicando la proposición (4.4.13) y el teorema (4.5.1), se obtiene un homeomorfismo (en particular, una biyección) $\tilde{h}\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ tal que $H(f)(y) = \omega(x,y)f(x)$, para cualesquiera $x \in \tilde{h}([y])$, $[y] \in \widetilde{Y}$ y $f \in \mathcal{A}$.

Afirmamos que $\mu([y]) = \mu(\tilde{h}([y]))$, para todo $[y] \in \widetilde{Y}$. En efecto, tomemos $[x] \in \widetilde{X}$ y consideremos $f \in \mathcal{A}$ tal que $[x] \subseteq \mathrm{coz}(f)$. Para todo $z \in \mathrm{coz}(f)$ tal que $z \notin [x]$ existe $f_z \in \mathcal{A}$ tal que $f_z(z) = 0$ y $f_z(x) \neq 0$. Por consiguiente, $[x] = \mathrm{coz}(f) \cap \{\mathrm{coz}(f_z) : z \in \mathrm{coz}(f), z \notin [x]\}$. Puesto que $\mathrm{coz}(f)$ es finito, tenemos que $[x] \in \sigma(\mathcal{D})$.

Aplicando la controlabilidad de $\mathcal{A}$ a f, $[x]$ y $[z]$, obtenemos $f' \in \mathcal{A}$ y $D \in \sigma(\mathcal{D})$ tales que

$$[x] \subseteq D \subseteq X \setminus [z],\ f|_{[x]} = f'|_{[x]} \text{ y } f'|_{(Z(f)\cup(X\setminus D))} \equiv 0.$$

Así, $[x] \subseteq \mathrm{coz}(f') \subsetneq \mathrm{coz}(f)$. Nuevamente, como $\mathrm{coz}(f)$ es finito, podemos repetir el anterior argumento un número finito de veces con el fin de obtener una aplicación $g \in \mathcal{A}$ tal que $[x] = \mathrm{coz}(g)$. La afirmación ahora es verficada si aplicamos el hecho de que H es una isometría de Hamming y el teorema (4.5.1). Por lo tanto, hemos probado que $|[y]| = |\tilde{h}([y])|$, para todo $[y] \in \widetilde{Y}$. Sea h_y cualquier biyección de $[y]$ en $\tilde{h}([y])$, para todo $[y] \in \widetilde{Y}$. La aplicación $h\colon Y \to X$, definida por $h(y') \overset{\mathrm{def}}{=} h_y(y')$, para $y' \in [y]$, $[y] \in \widetilde{Y}$, es una biyección de X en sí mismo. Ahora, el conjunto

$$w[y] \overset{\mathrm{def}}{=} w(h(y'), y'),\ y' \in [y],\ [y] \in \widetilde{Y}.$$

Por el teorema (4.5.1), tenemos que $H(f)(y') = w[y']f(h(y'))$, para cualesquiera $y' \in X$ y $f \in \mathcal{A}$, lo que completa la prueba. □

Destacamos que los códigos convolucionales son subespacios invariantes de $\mathbb{F}^X$, donde $X = \mathbb{Z}^k$. Las isometrías consideradas por Gluesin-Luerssen en [17] son homomorfismos de módulos con respecto al anillo de polinomios $\mathbb{F}[z]$. En el anterior resultado, nosotros estamos considerando el caso más general de $\mathbb{F}$-isometrías lineales.

Conclusiones

De la investigación realizada a lo largo de este trabajo podemos concluir que:

- Dos espacios topológicos Hausdorff, cero-dimensionales y compactos son homeomorfos si sabemos que existen subgrupos controlables, puntualmente densos, que separen los puntos de sus respectivos espacios base, y que exista un isomorfismo biseparador y no nulo entre dichos subgrupos. Más aún, todo isomorfismo biseparador y no nulo entre dichos subgrupos se puede representar como un operador composición con peso y es continuo con respecto a las topologías de la convergencia puntual y compacto abierta. En pocas palabras, basta la existencia de subgrupos controlables, puntualmente densos, que separen los puntos de sus respectivos espacios base para concluir que dichos espacios son homeomorfos.
- Toda isometría de Hamming se puede representar como un operador composición con peso, siempre que el dominio de dicha isometría sea controlable.
- Dos espacios topológicos Hausdorff, cero-dimensionales y localmente compactos son homeomorfos siempre que los espacios de funciones continuas (generados por ellos) de soporte compacto que toman valores en un grupo discreto tengan subgrupos controlables, puntualmente densos que separen los puntos de los respectivos espacios localmente compactos y que, además, exista un isomorfismo biseparador y no nulo entre dichos subgrupos. Más aún, todo isomorfismo biseparador y no nulo entre dichos subgrupos se puede representar como un operador composición con peso y es continuo con respecto a las topologías de la convergencia puntual y compacto abierta.

Perspectivas

Nuestro propósito a corto plazo es generalizar los resultados obtenidos en esta memoria.

¿Qué pasa si en lugar de considerar espacios topoógicos (ya sean compactos o localmente compactos) (X, τ_X) y (Y, τ_Y), consideramos simplemente conjuntos no vacíos X y Y?

¿Qué pasa si en lugar de considerar subgrupos de $C(X, G)$ y $C(Y, G)$, respectivamente, o subespacios vectoriales de $C_{00}(X, \mathbb{F})$ y $C_{00}(Y, \mathbb{F})$, respectivamente, sólo consideramos subconjuntos de G^X y G^Y, respectivamente?.

El problema que pretendemos resolver es el siguiente:

Sean X y Y conjuntos no vacíos, G un grupo discreto, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ subconjuntos no vacíos de G^X y G^Y, respectivamente, y $H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo de grupos.

¿De cuál topología debe dotarse a X, Y y G y qué condiciones adicionales deben cumplir, X, Y, G, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y H de manera que H se pueda representar como un operador composición con peso, es decir, que existan un homeomorfismo $h\colon Y \to X$ y una aplicación continua $\omega\colon Y \to G$ tales que

$$H(f)(y) = \omega(y) \cdot f(h(y)),$$

para cualesquiera $y \in Y$ y $f \in \mathcal{A}$?

Bibliografía

[1] S. Banach, *Theory of Linear Operations*. North Holland. **Vol. 38** (1987).

[2] K. Bogart, D. Goldberg and J. Gordon, *An elementary proof of the MacWilliams theorem on equivalence of codes*. Information and Computation. **Vol. 37, no. 1** (1978), 19-22.

[3] E. Čech, *On bicompact spaces*. Ann. of Math. **Vol. 38** (1937), 823-844.

[4] H.Q. Dinh and S.R. López-Permouth, *On the equivalence of codes over rings and modules*. Finite Fields and their Applications. **Vol. 10, no.4**, (2004), 615-625.

[5] K. Eda, T. Kiyosawa and H. Ohta, *N-compactness and its applications*. Topics in General Topology. **Vol. 41**, (1989), 459-521. North-Holland, Amsterdam, The Amsterdam, 1989.

[6] R. Engelking, *General Topology*. Polish Scientific, Warsaw, Poland, 1977.

[7] M. Ferrer, M. Gary and S. Hernández, *Representation of Group Isomorphisms: The Compact Case*. Journal of Function Spaces. **Vol 2015, ID 879414** (2015), 6 pages.

[8] M. Ferrer, M. Gary and S. Hernández, *Weight-preserving isomorphisms between spaces of continuous functions: The scalar case*. Journal of Mathematical Analysis and Applications. **Vol 433, Issue 2** (2016), Pages 1659-1672.

[9] M. Ferrer, S. Hernández and A.M. Ródenas, *Automatic continuity of biseparating homomorphisms defined between groups of continuous functions*. Topology and Its Applications.**Vol. 157, no. 8** (2010), 1395-1403.

[10] M. Ferrer, S. Hernández and D. Shakhmatov, *Subgroups of direct products closely approximated by direct sums*. http://arxiv.org/abs/1306.3954.

[11] J. Font, *Continuidad automática de operadores lineales y su representación como aplicaciones composición con peso [Tesis doctoral]*. Universidad Jaume I, (1996).

[12] J. Font and S. Hernández, *On separating maps between locally compact spaces*. Arch. Math. **Vol. 63** (1994), 158-165.

[13] J. Font. and S. Hernández, *Automatic continuity and representation of certain linear isomorphisms between group algebras.*Indagationes Mathematicae. Arch. Math. **Vol. 6, no. 4** (1995), 397-409.

[14] Jr. Forney and M.D. Trott, *The dynamics of group codes: dual abelian group codes and systems*. IEEE Transactions on InformationTheory **Vol. 50, no. 12** (2004), 2935-2965.

[15] H.-L. Gau, J.-S. Jeang and N.-C. Wong, *An algebraic approach to the Banach-Stone theorem for separating linear bijections.*Taiwanese Journal of Mathematics. **Vol. 6, no. 3** (2002), 399-403.

[16] F. González and V.V. Uspenskij, *On homomorphisms of groups of integer-valued functions*. Extracta Mathematicae,**Vol. 14, no. 1** (1999), 19-29.

[17] H. Gluesing-Luerssen, *On isometries for convolutional codes*. Advances in Mathematics of Communications. **Vol. 3, no. 2** (2009), 179-203.

[18] S. Hernández, *Uniformly continuous mappings defined by isometries of spaces of bounded uniformly continuous functions*. Houston Journal of Mathematics. **Vol. 29, no. 1** (2003), 149-155.

[19] S. Hernández, E. Beckenstein and L. Narici, *Banach-Stone theorems and separating maps*. Manuscripta Mathematica. **Vol. 86, no. 4** (1995), 409-416.

[20] S. Hernández and A.M. Ródenas, *Automatic continuity and representation of group homomorphisms defined between groups of continuous functions*. Topology and Its Applications. **Vol. 154, no. 10** (2007), 2089-2098.

[21] K. Jarosz, *Automatic continuity of separating linear isomorphisms* Canadian Mathematical Bulletin.**Vol. 33, no. 2** (1990), 139-144.

[22] F.J. MacWilliams, *Combiantorial problems of elementary abelian groups [Ph.D. thesis]*. Harvard University, (1962).

[23] F.J. MacWilliams, *A theorem on the distribution of weights in a systematic code*. The Bell System Technical Journal. **Vol. 42**, (1963), 79-94.

[24] J. Martínez, $C(X, Z)$ *revisited*. Advances in Mathematics. **Vol. 99, no. 2**, (1993), 152-161.

[25] A.A. Milutin, *Isomoprhisms of spaces of continuous functions on compacts of power continuum* Teoria Funcionalista. **Vol. 2**, (1966), 150-156(Russian).

[26] H. Ohta, *Chains of strongly non-reflexive dual groups of integer-valued continuous functions*. Proceedings of the American Mathematical Society. **Vol. 124, no. 3**, (1996), 961-967.

[27] T. Orenshtein, y B. Tsaban, *Pointwise convergence of partial functions: the Gerlits-Nagy problem*. Advances in Mathematics. **Vol. 232**, (2013), 361-326.

[28] P. Piret, *Convolutional Codes: An Algebraic Approach*. MIT Press, Cambridge, MA. 1988.

[29] A.M. Ródenas, *Grupos de funciones continuas [Ph.D. thesis]*. (2006).

[30] J. Rosenthal, J. Schumacher, and E. York, *On behaviors and convolutional codes*. IEEE Transactions on Information Theory. **Vol. 42, no. 6**, (1996), 1881-1891.

[31] M.H. Stone, *The theory of representations for Boolean algebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **Vol. 40** (1936), 37-111.

[32] M.H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to General Topology*. Trans. Amer. Math. Soc. **Vol. 41** (1937), 375-481.

[33] H.N. Ward and J. Wood, *Characters and the equivalence of codes*. Journal of Combinatorial Theory. Series A. **Vol. 73, no. 2** (1996), 348-352.

[34] J.C. Willems, *From time series to linear systems, parts I,ÄìIII*. Automatica. **Vol. 22** (1986), 561-580, 615-694.

[35] J. Wood, *The structure of linear codes of constant weight*. Trans. Amer. Math. Soc. **Vol. 354, no. 3** (2001), 1007-1026.

[36] J.S. Yang, *Transformation groups of automorphisms of* $C(X, G)$. Proceedings of the American Mathematical Society. **Vol. 39, no. 3** (1973), 619-624.

[37] J.S. Yang, *On isomorphic groups and homeomorphic spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society. **Vol. 43** (1974), 431-438.