



Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

**Método de elementos finitos mixtos
para flujo monofásico en medios porosos**

Tesis que presenta

Judith Yareli Sánchez Lozada

Para obtener el grado de:

Maestra en Ciencias
(Matemáticas Aplicadas e Industriales)

Asesora:

Dra. María Luisa Sandoval Solís

Ciudad de México
Junio 2020

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, quienes con su esfuerzo y dedicación hicieron posible que yo llegue a este momento tan importante de mi vida, por sus consejos y palabras de aliento cuando más lo necesité, por estar a mi lado en cada etapa de mi vida, dándome su amor incondicional. A mis hermanos, que junto con mis papás han sido mi ejemplo, por apoyarme y brindarme su confianza para lograr esta meta. Agradezco a mis sobrinos por alegrar mis días con su risa y cariño.

Agradezco a mis compañeros de la MCMAI, en especial a Joel, Eleazar, Minerva y Ricardo, por las pláticas que hicieron más amenos los días de trabajo, por su apoyo en momentos complicados y su bonita amistad. Agradezco a todos mis amigos, en particular a Irasema, Natalia y Juan por escucharme y levantarme el ánimo cuando fue necesario.

Agradezco a mi asesora de tesis Dra. María Luisa Sandoval Solís por su tiempo, paciencia, conocimientos y sobre todo por su empeño para llevar a cabo este trabajo. A los miembros del jurado calificador Dr. Martín Días Viera, Dr. Héctor Juárez Valencia, por sus contribuciones a esta tesis y por el tiempo que invirtieron para revisarla.

A la maestría en ciencias (Matemáticas Aplicadas e Industriales) y a sus profesores que compartieron su conocimiento conmigo y mis compañeros. A CONACYT por el apoyo económico brindado para realizar mis estudios.

Resumen

La modelación numérica de un flujo multifásico en medio poroso se aplica en problemas de ingeniería petrolera, suelos y aguas subterráneas. En particular trabajamos el modelo de flujo en una fase, el cual se formula en términos de la presión y velocidad, basándose en argumentos de conservación de masa y la ley de Darcy. Nosotros consideramos dos casos. El primero consiste en suponer que se tiene un flujo incompresible y el segundo es considerar un flujo ligeramente compresible. Para modelar este problema es primordial contar con aproximaciones precisas y estables de la presión y la velocidad. Por esto, hemos estudiado dos estrategias: Elemento finito estándar (FE, por sus siglas en inglés) y el método de elemento finito mixto (MFE).

Con el método FE primero se aproxima la presión resolviendo un problema elíptico y después se aproxima la velocidad con una formulación variacional a nivel nodal. En particular usamos elementos lineales y bilineales. Para calcular la velocidad se tienen dos opciones, una es usar la fórmula de Green en la forma débil y la otra es no usarla y calcular derivadas de presión. Encontramos que la mejor es la primera opción. Ahora, para aproximar las integrales probamos cuadraturas cerradas y abiertas y se obtuvo que las cerradas aproximan mejor las integrales. El método de elemento finito mixto plantea la formulación variacional como un problema de punto silla, lo cual permite aproximar la velocidad y la presión simultáneamente. En esta tesis, solamente usamos los elementos de Raviart-Thomas de bajo orden (RT_0) en triángulos y cuadriláteros. Dado que para mallas triangulares conocemos explícitamente la forma de las funciones base, pudimos trabajar directamente con los elementos de la malla, lo cual nos permitió verificar que se implementó correctamente el método mixto. En el caso de cuadriláteros, como no conocemos a las funciones de forma explícitamente, usamos un elemento de referencia, que es mapeado a cada elemento de la malla mediante la transformación de Piola.

Las pruebas de cuadratura y formas de aproximar la velocidad con el método de elemento finito se realizaron en el modelo de flujo monofásico incompresible, ya que las ecuaciones y dominio de este son más sencillas. También se usó este flujo para probar el método MFE con elementos RT_0 en triángulos, sin y con elemento de referencia. Para resolver flujo

monofásico ligeramente compresible con el método FE usamos cuadraturas cerradas y la fórmula de Green para la velocidad; además para el método MFE se empleó solamente el elemento de referencia, para los dos tipos de mallas; en ambos métodos implícitos para discretizar el tiempo. De los resultados numéricos se deduce que los elementos bilineales aproximan mejor la presión, en cambio el menor orden de error para la velocidad se obtiene con los elementos RT_0 en cuadriláteros, sin embargo estas aproximaciones son comparables con las que tenemos con el método FE en cuadriláteros, pero el tiempo de computo y la memoria que se usa para resolver el mismo problema es mayor con el método MFE.

Palabras clave: métodos de elemento finito mixto, elementos de Raviart-Thomas, transformación de Piola, flujo monofásico.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Objetivo general	3
1.2. Objetivos particulares	3
1.3. Estructura de la tesis	4
2. Planteamiento de problemas	5
2.1. Preliminares	5
2.2. Problema: flujo monofásico incompresible	7
2.3. Problema: flujo monofásico ligeramente compresible	15
3. Método de Elemento Finito Estándar	29
3.1. Definición de espacios	29
3.2. Formulación variacional de problemas	30
3.3. Triangularización del dominio y espacios discretos	33
3.4. Discretización de la formulación variacional	35
3.5. Funciones de forma	42
3.6. Transformación isoparamétrica	43
3.7. Integración Numérica	47
4. Método de Elemento Finito Mixto	51
4.1. Definición de espacios	52
4.2. Formulación variacional mixta	52
4.3. Discretización de espacios	55

4.4. Discretización de la formulación variacional	56
4.5. Funciones base	61
4.6. Transformación de Piola	64
4.7. Integración Numérica	76
4.8. Aproximación de la presión y velocidad en los vértices	77
5. Resultados numéricos	79
5.1. Cuadraturas de integración	79
5.2. Flujo monofásico incompresible	81
5.3. Flujo monofásico ligeramente compresible	93
5.4. Tiempo de cómputo	110
6. Conclusiones	111
A. Minimización de problemas con restricciones	113
A.1. Problemas de minimización	113
A.2. Problemas de punto silla	116
B. Propiedades de las funciones de forma para elementos RT_0 en triángulos.	119
C. Ecuación de conservación de masa	123
C.1. Propiedades extensivas e intensivas	123
D. Problemas bien planteados	125
Bibliografía	129

Capítulo 1.

Introducción

La modelación numérica de un flujo multifásico en medio poroso se aplica en la ingeniería petrolera, ya que puede ayudar a complementar el estudio de las técnicas usadas en la recuperación secundaria o mejorada del hidrocarburo, como ejemplos tenemos la modelación de pruebas de trazadores o el desprendimiento de finos por agua de baja salinidad. Se conoce que los términos de transporte y de difusión/dispersión en el flujo son gobernadas por las velocidades de fluidos, es por eso que para modelar el flujo de un fluido es primordial contar con aproximaciones de la presión y velocidad que sean precisas y estables (ver [12]), por esta razón hemos estudiado dos métodos numéricos: el método de Elemento Finito estándar (FE, por sus siglas en inglés) y el método de Elemento Finito Mixto (MFE). Con la finalidad de hacer una comparación entre estos métodos, se resuelve el problema de flujo en una fase sobre medio poroso, teniendo en cuenta dos casos, el primero supone que el flujo es incompresible y en el otro caso se piensa el fluido es ligeramente compresible. Para ambos modelos se calcula una solución analítica, con la cual se comparan los resultados obtenidos con cada método numérico. Para trabajar con el tiempo se usa la técnica de Euler hacia atrás, dando lugar a un esquema implícito.

El modelo de flujo en una fase sobre medio poroso es formulado en términos de la presión y la velocidad, basado en argumentos de conservación de masa y la ley de Darcy, ver [8]. La ley de Darcy de un fluido, que describe una relación lineal entre la tasa volumétrica del fluido (velocidad de Darcy) y el gradiente de la presión (potencial), ha sido el principio fundamental en flujo y proceso de transporte en medio poroso. En problemas prácticos, el dominio puede ser geoméricamente complejo, lo que hace complicado encontrar una solución exacta al modelo. El método de elemento finito (FE) es una técnica poderosa para obtener soluciones aproximadas con buena precisión en dominios complejos (Ver [10]). Este método es una estrategia general para aproximar soluciones a problemas con valores en la frontera. El método divide el dominio en subdominios simples, llamados elementos finitos, y usa conceptos variacionales para construir una aproximación de la solución sobre la colección de elementos finitos [13]. En el método FE se debe definir una estrategia de discretización y los algoritmos de solución para el o los sistemas de ecuaciones

que aparecen. La estrategia de discretización es un conjunto de procedimientos que cubren (a) la creación de mallas de elementos finitos, (b) la definición de las funciones base, y (c) la asignación de elementos de referencia en los elementos de la malla. Para la solución de los sistemas de ecuaciones hay varias técnicas, que pueden ser iterativas o directas, en nuestro caso usamos un solver de MATLAB.

El método que llamaremos estándar resuelve el problema de flujo de una fase en dos etapas. La primera consiste en generar una formulación débil para la presión, aproximándola con FE, en particular usaremos elementos lineales y bilineales. Una vez que se tiene la solución numérica de la presión se aproxima la velocidad a nivel nodal, para esto tenemos dos opciones, una es usar la fórmula de Green para evitar calcular el gradiente de la presión, y la otra es no usarla. La comparación entre estas dos técnicas se realiza únicamente en el problema de flujo monofásico incompresible, pues las ecuaciones y la región de estudio de este modelo son más sencillas, con base en esto, decidimos que para flujo monofásico ligeramente compresible, usaremos la fórmula de Green en la formulación variacional de la velocidad, pues con esta se tienen mejores aproximaciones. Por otro lado, para aproximar las integrales tenemos cuadraturas cerradas y abiertas. En el caso de flujo monofásico ligeramente compresible, que se obtiene la matriz de masa, las cuadraturas abiertas generan a esta como una matriz no diagonal, por lo que se utiliza Mass Lumping para diagonalizarla. Para decidir cuál cuadratura usar, tomamos como ejemplo la ecuación de calor con cuadraturas cerradas y cuadraturas abiertas con y sin Mass Lumping, así, se tomó la decisión de usar cuadraturas cerradas ya que con estas se tienen ordenes de error más pequeño. En el modelo de flujo monofásico ligeramente compresible empleamos un método implícito para discretizar el tiempo.

Los métodos de elemento finito mixto (MFE) han ganado gran popularidad en las últimas décadas por dos razones. Primero, dan aproximaciones con gran exactitud de dos cantidades físicas (la variable primaria y su flujo). Segundo, conservan la masa localmente, es decir, en cada elemento, ver [14] y [21]. Los métodos MFE, que son una generalización del método de elemento finito estándar, fueron introducidos inicialmente por los ingenieros Fraeijs de Veubeke, Hellan y Hermann en los años 60 para resolver problemas en sólidos continuos. Desde entonces, se han aplicado en muchas áreas, particularmente en mecánica de sólidos y fluidos. Los métodos mixtos son desarrollados para aproximar una variable vectorial y una escalar (en nuestro caso, velocidad y presión) simultáneamente. En lugar del espacio individual usado en el método estándar, el método mixto usa dos espacios diferentes. Estos dos espacios satisfacen una condición inf-sup para que el método MFE sea estable. Raviart y Thomas en 1977 introdujeron la primera familia de espacios de elementos finitos mixtos para problemas elípticos de segundo orden en el caso de dos dimensiones llamados RT_p . Después Nedelec en 1980 extendió estos espacios a problemas tridimensionales [3].

En este trabajo, usamos elementos de Raviart-Thomas de bajo orden (RT_0) para triángulos y cuadriláteros, los cuales aproximan la presión con polinomios de grado cero en los

baricentros de cada elemento y las componentes normales de la velocidad con polinomios de grado uno en los puntos medios de cada arista. Dado que para mallas triangulares conocemos explícitamente la forma de las funciones base, pudimos trabajar directamente con los elementos de la malla, lo cual nos permitió verificar que se implementó correctamente el método mixto. En el caso de cuadriláteros, como no conocemos a las funciones de forma explícitamente, usamos un elemento de referencia, que es mapeado a cada elemento de la malla mediante la transformación de Piola, pues la transformación isoparamétrica no es suficiente para mapear y conservar las propiedades de los espacios que se usan. Una vez que vimos que las dos formas de trabajar en el método mixto nos generan aproximaciones iguales, para flujo monofásico ligeramente compresible empleamos el elemento de referencia en ambos tipos de mallas, y un método implícito para discretizar el tiempo. Dado que solo conocemos la presión en los baricentros de cada elemento, y las componentes normales de la velocidad en los puntos medios de cada arista, es necesario hacer una formulación variacional que nos permita conocer la presión y la velocidad en cada nodo de la malla.

Una vez resueltos los problemas de flujos incompresibles y ligeramente compresible, con ambos métodos, se hace una comparación entre estos, la cual evalúa el orden del error de aproximación, el tiempo que tarda cada método en encontrar las soluciones aproximadas y el tamaño de los sistemas de ecuaciones que deben resolverse.

1.1. Objetivo general

Aproximar numéricamente la presión y velocidad para flujo monofásico en medio poroso empleando los métodos de elemento finito estándar y elemento finito mixto. Como ejemplos se utilizan los flujos monofásicos incompresible y ligeramente compresible.

1.2. Objetivos particulares

Con el fin de cubrir el objetivo general de la tesis y entender la teoría de los métodos de elemento finito mixto se definen los siguientes objetivos particulares:

1. Estudiar problemas de optimización con y sin restricciones para espacios de dimensión infinita. En particular el problema de punto silla.
2. Estudiar y programar el método de elemento finito estándar para los flujos monofásicos incompresible y ligeramente compresible.
3. Estudiar la teoría del método de elemento finito mixto (MFE) para elementos de RT_0 en triángulos y cuadriláteros.

4. Programar el método de elemento finito mixto para dominios rectangulares. Probarlo para el flujo monofásico incompresible.
5. Programar el método MFE para dominios irregulares. Probarlo para los flujos monofásicos incompresible y ligeramente compresible.
6. Comparar ambos métodos.

1.3. Estructura de la tesis

Este documento consta de 6 capítulos. En el primero se encuentra la introducción, que presenta los métodos numéricos con los que se resuelven los modelos matemáticos que se desarrollan en este trabajo.

En el capítulo 2 se describe la región de estudio de cada uno de los modelos matemáticos, así como la derivación de cada uno, su adimensionalización y la solución analítica de estos.

El tercer capítulo muestra la discretización de los modelos usando el método de elemento finito estándar, el cual incluye la definición de los espacios en los que se trabaja con este método, las formulaciones variacionales de cada modelo, funciones de forma, transformación isoparamétrica y las cuadraturas de integración.

En el cuarto capítulo se discretizan los modelos expuestos, con el método de elemento finito mixto, incluyendo, la definición de los espacios con los que se trabaja, las funciones de forma, formulación variacional para cada modelo, transformación de Piola, integración numérica y aproximación de la presión y velocidad en los nodos.

El capítulo 5 exhibe los resultados numéricos obtenidos, con cada uno de los métodos numéricos, para cada modelo, describiendo el comportamiento de las soluciones aproximadas comparadas con sus soluciones analíticas así como los errores de aproximación.

Por último en el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2.

Planteamiento de problemas

Este capítulo inicia con algunos preliminares para conocer las propiedades de la roca y de los fluidos en un yacimiento. Después se presentan los dos problemas que se estudian en este trabajo: flujo monofásico incompresible y ligeramente compresible. En cada uno de estos se describe la región de estudio, la derivación del modelo y su adimensionalización.

2.1. Preliminares

En los apartados [2.1.1](#) y [2.1.2](#) se presentan las propiedades de la roca y del fluido en un yacimiento petrolero, para mayor descripción consultar [\[2\]](#).

2.1.1. Propiedades de la roca en un yacimiento

- **Poros.** Son los pequeños pasajes conectados que existen en una roca permeable, típicamente de tamaño 1 a 200 μm y fácilmente visibles en microscopia electrónica. Los poros pueden estar revestidos de minerales diagenéticos como las arcillas.
- **Gargantas de poro.** Es el espacio poral más estrecho entre dos cuerpos porosos separados. El número, tamaño y distribución de las gargantas de poro controlan muchas de las características de resistividad, flujo y presión capilar de la roca. Para mayor información consultar [\[7\]](#).
- **Porosidad.** Es la fracción de roca que es espacio poroso. Hay dos tipos de porosidad: total y efectiva. La **porosidad total** incluye tanto espacios de poros aislados como interconectados, mientras la **porosidad efectiva** incluye solo la segunda y contribuye a que fluya el fluido en un yacimiento.
- **Permeabilidad.** Es la capacidad de una roca para conducir fluidos a través de sus poros interconectados. Esta capacidad de conducción a veces se denomina **per-**

meabilidad absoluta. Se indica comúnmente por \bar{k} , con dimensiones de área y unidades darcy (D) o milidarcy (mD). Para el ingeniero de yacimientos, la permeabilidad es probablemente la cantidad más importante porque su distribución dicta la conectividad y el flujo de fluidos en un depósito.

2.1.2. Propiedades del fluido en un yacimiento

- **Fase.** Cualquier combinación de componentes que se mueven a una velocidad diferente, por ejemplo, oleosa (aceite), acuoso (principalmente agua) o gas.
- **Componente.** Es una sola especie química que puede estar presente en una fase. Por ejemplo, la fase acuosa contiene componentes de agua (H_2O), cloruro de sodio ($NaCl$) y oxígeno disuelto (O_2).

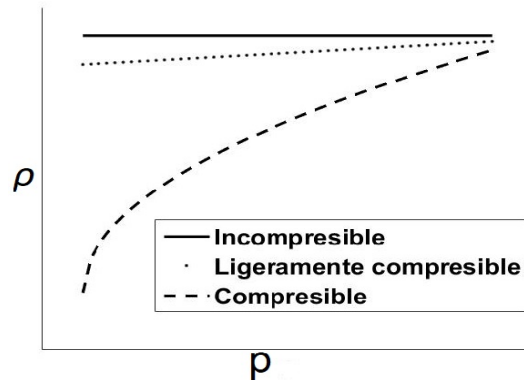


Figura 2.1: Relación densidad-presión.

- **Tipo de fluidos en un yacimiento.** En general, agua, aceite y gas puede existir simultáneamente en un yacimiento de hidrocarburo. Estos fluidos pueden clasificarse como incompresibles, ligeramente compresibles, o compresibles, dependiendo de cómo responden a la presión. Un fluido incompresible tiene compresibilidad cero, su densidad es independiente de la presión. Agua y aceite libre de gas (muerto) pueden ser incompresibles. Un fluido ligeramente compresible tiene una pequeña, pero constante compresibilidad que típicamente está en el rango de 10^{-5} a 10^{-6} psi^{-1} . Un fluido compresible tiene compresibilidad típicamente en el rango 10^{-3} a 10^{-4} psi^{-1} ; su densidad aumenta conforme incrementa la presión, pero tiende a ser estable en presiones altas (ver fig. [2.1](#)).

2.2. Problema: flujo monofásico incompresible

En este apartado se presenta el problema de flujo monofásico incompresible que consiste en modelar la presión y velocidad de un flujo laminar de un fluido newtoniano (viscosidad constante) y estacionario, para un líquido incompresible, que sale a través de un tubo cilíndrico.

A continuación se describe la región de estudio, el modelo matemático, su adimensionalización y la deducción de su solución analítica.

2.2.1. Región de estudio

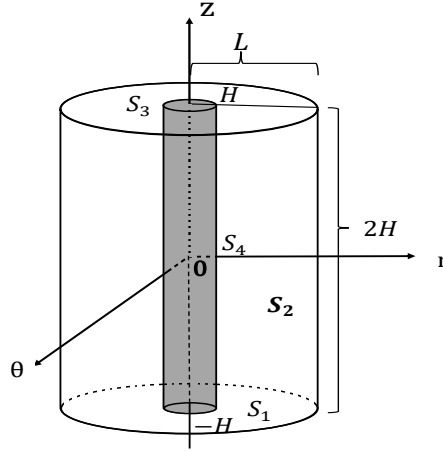


Figura 2.2: Región de estudio con volumen Ω_v .

Se considera una región de un yacimiento petrolero con geometría cilíndrica, cuyo radio es L y altura $2H$. Se supone que la zona de disparos coincide con la altura del pozo, el cual es un cilindro con radio r_w y altura $2H$, (ver fig. 2.2). El volumen definido entre el pozo y el cilindro mayor forma la región de estudio y se denota por $\bar{\Omega}_v$. Por la forma de la región usaremos coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .

Supondremos que el flujo del fluido tiene simetría axial, es decir, depende únicamente de la componente radial r y la altura z , por tanto se puede hacer un corte transversal en un ángulo fijo de la región de estudio, como se muestra en la figura 2.3. Esto da lugar a una subregión en 2D con forma rectangular, denotada por $\bar{\Omega}$, y definida como

$$\bar{\Omega} = [r_w, L] \times [-H, H].$$

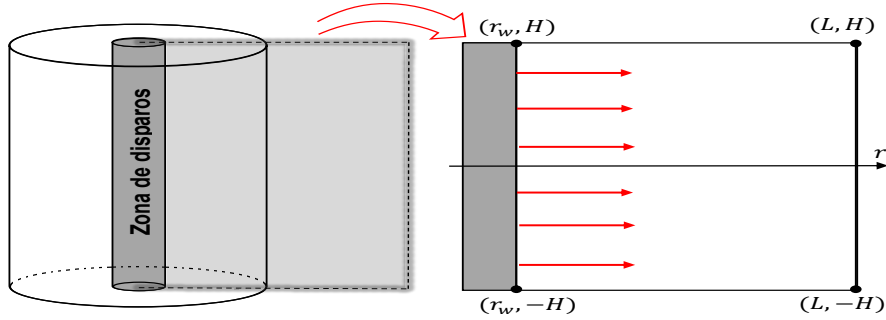


Figura 2.3: Corte transversal en un ángulo fijo de la región de estudio.

Luego, la región donde se resuelve el problema se exhibe en la figura [2.4](#).

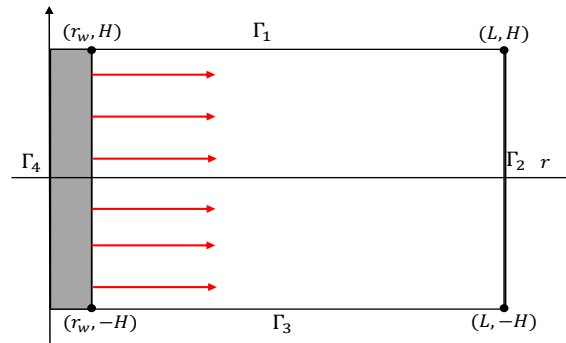


Figura 2.4: Subregión $\bar{\Omega}$ para el proceso de inyección del fluido.

2.2.2. Derivación del modelo

La ecuación de conservación de masa dentro del yacimiento, suponiendo que no hay fuentes ni sumideros, está dada por (ver apéndice [C](#))

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0,$$

donde ϕ es la porosidad, ρ la densidad y \vec{u} la velocidad. En el caso estacionario y flujo incompresible (densidad constante) se tiene que

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \tag{2.1}$$

donde

$$\vec{u} = \vec{u}(r, z) = (u_1(r, z), u_2(r, z))^T.$$

En particular \vec{u} es la velocidad de Darcy, la cual es una ecuación constitutiva empírica, que relaciona a la velocidad efectiva del fluido con su presión, indicando una relación lineal entre la velocidad del fluido en el medio poroso y el gradiente de la presión, siendo utilizada ampliamente para la modelación de flujos en medios porosos [19],

$$\vec{u} = -\frac{1}{\mu} \bar{\bar{\kappa}} \cdot (\nabla p - \rho |g| \nabla z) \quad (2.2)$$

con μ la viscosidad, $\bar{\bar{\kappa}}$ el tensor de permeabilidad del medio poroso, $p = p(x, y)$ la presión del fluido, $|g|$ la magnitud de la aceleración gravitacional y z la altura del núcleo. En este caso se supone que $\bar{\bar{\kappa}} = \kappa I$, donde I es el tensor identidad y que no hay efectos de la gravedad, así la velocidad de Darcy se reescribe como sigue

$$\vec{u} = -\frac{\kappa}{\mu} \nabla p, \quad (2.3)$$

Sustituyendo la ecuación (2.3) en la ecuación (2.1) se tiene

$$\nabla \cdot \left(-\frac{\kappa}{\mu} \nabla p \right) = 0.$$

Si ahora suponemos que μ y κ son constantes, se obtiene

$$\Delta p = 0, \quad (2.4)$$

es decir, el modelo matemático consiste en las ecuaciones (2.3) y (2.4), más condiciones de frontera que se describen a continuación.

Condiciones de Frontera

Denotamos por Γ a la frontera de Ω , la cual satisface que $\Gamma = \cup_{i=1}^4 \Gamma_i$, como se muestra en la figura 2.4

Para las fronteras Γ_1 (parte superior de la frontera) y Γ_3 (parte inferior de la frontera) no hay movimiento del flujo hacia afuera de la zona del yacimiento, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, lo cual en términos de la presión se describe como

$$\frac{\partial p}{\partial z}(r, z) = 0,$$

para $r \in [r_w, L]$ y $z = \pm H$.

Ahora, consideramos un flujo radial y usamos la ley de conservación de masa que supone que la cantidad de fluido que entra es la misma que la que sale.

Sea Q la cantidad de fluido que entra a la formación porosa y sea S el área o superficie que encierra el volumen Ω_v del cilindro de estudio. La cantidad de fluido que atraviesa la superficie S es

$$Q = \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS. \quad (2.5)$$

Tomando $\vec{u} \cdot \vec{n} = u_1(L)$ y $dS = rd\theta dz$ pues el fluido sale en forma radial. Entonces

$$\begin{aligned} \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} ds &= \int_{-H}^H \int_0^{2\pi} u_1(L) L d\theta dz \\ &= u_1(L)L(2\pi)(2H). \end{aligned}$$

Luego, usando la igualdad (2.5) se obtiene

$$u_1(L) = \frac{Q}{4\pi HL}.$$

Por lo cual en $r = L$ se llega a que

$$\vec{u} = \left(\frac{Q}{4\pi LH}, 0 \right). \quad (2.6)$$

Usando la ecuación de Darcy (2.3) se deduce lo siguiente:

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=L} = -\frac{\mu Q}{4\pi LH\kappa}. \quad (2.7)$$

Con un análisis similar se tiene que

$$\frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = -\frac{\mu Q}{4\pi r_w H\kappa}.$$

Por lo tanto, el modelo es un problema elíptico, donde se debe encontrar la presión $p(r, z)$ que satisface

$$\nabla \cdot (\nabla p(r, z)) = 0, \quad (r, z) \in \Omega. \quad (2.8)$$

Sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

$$\nabla p \cdot \vec{n}_1 = 0, \quad r \in [r_w, L], \quad z = H; \quad (2.9)$$

$$\nabla p \cdot \vec{n}_3 = 0, \quad r \in [r_w, L], \quad z = -H; \quad (2.10)$$

$$\nabla p \cdot \vec{n}_4 = \frac{\mu Q}{4\pi r_w H\kappa}, \quad z \in [-H, H], \quad r = r_w; \quad (2.11)$$

$$\nabla p \cdot \vec{n}_2 = -\frac{\mu Q}{4\pi LH\kappa}, \quad z \in [-H, H], \quad r = L, \quad (2.12)$$

donde \vec{n}_i es la normal exterior de Γ_i , para $i = 1, 2, 3, 4$.

2.2.3. Adimensionalización

Se introducen las variables adimensionales siguientes:

$$r = \frac{r^*}{H}; \quad z = \frac{z^*}{H}; \quad p = \frac{p^*}{p_0}; \quad \vec{u} = \frac{\vec{u}^*}{u_{ref}}; \quad u_{ref} = \frac{\kappa p_0}{\mu L}, \quad (2.13)$$

donde r^* , z^* , p^* y \vec{u}^* son las variables con dimensiones, p_0 es la presión fija en el centro de la zona de disparos $(r_w, 0)$ y u_{ref} es una velocidad de referencia.

Como se están usando coordenadas cilíndricas, el gradiente se describe como

$$\nabla p^* = \left(\frac{\partial p^*}{\partial r^*}, \frac{1}{r^*} \frac{\partial p^*}{\partial \theta^*}, \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right).$$

Pero como se considera que $p^* = p^*(r^*, z^*)$, entonces

$$\nabla p^* = \left(\frac{\partial p^*}{\partial r^*}, \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right).$$

Así, el Laplaciano se adimensionaliza como

$$\begin{aligned} \Delta p^* &= 0, \\ \frac{\partial^2 p^*}{\partial (r^*)^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial (z^*)^2} &= 0, \\ \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial (r^*)^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial (z^*)^2} \right) &= 0, \\ \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial (r^*)^2} \right) + \frac{1}{H^2} \left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial (z^*)^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} &= 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\nabla \cdot (\nabla p) = 0 \quad \text{en} \quad \Omega = \left[\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H} \right] \times [-1, 1].$$

Por otro lado, las condiciones de frontera se adimensionalizan como sigue:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{p_0} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \\ \frac{1}{H} \end{array} \right]_{z=H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad r \in \left[\frac{r_w}{L}, \frac{L}{H} \right] \quad y \quad z = 1,$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{p_0} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \\ \frac{1}{H} \end{array} \right]_{z=-H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad r \in \left[\frac{r_w}{L}, \frac{L}{H} \right] \quad y \quad z = -1,$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{p_0} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \\ \frac{1}{H} \end{array} \right]_{r=r_w} = -\frac{H\mu Q}{p_0 4\pi r_w H \kappa} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu Q}{4\pi p_0 r_w \kappa} \quad z \in [-1, 1] \quad y \quad r = \frac{r_w}{H},$$

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{p_0} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \\ \frac{1}{H} \end{array} \right]_{r=L} = -\frac{H\mu Q}{p_0 4\pi L H \kappa} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\mu Q}{4\pi p_0 L \kappa} \quad z \in [-1, 1] \quad y \quad r = \frac{L}{H}.$$

En el caso de la velocidad se sabe que

$$\begin{aligned} \vec{u}^* &= -\frac{\kappa}{\mu} \nabla p^*, \\ LH \frac{\mu \vec{u}^*}{\kappa p_0} &= -LH \frac{\nabla p^*}{p_0}, \\ \frac{1}{\kappa p_0} \frac{\mu \vec{u}^*}{\mu L} &= -\frac{L}{H} \left(\frac{H}{p_0} \nabla p^* \right), \\ \vec{u} &= -\frac{L}{H} \nabla p. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Luego, el problema adimensional consiste primero en encontrar p tal que

$$\nabla \cdot (\nabla p) = 0 \quad \forall \quad (r, z) \in \bar{\Omega} = \left[\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H} \right] \times [-1, 1], \tag{2.15}$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\nabla p \cdot \vec{n}_1 = 0, \quad r \in \left[\frac{r_w}{L}, \frac{L}{H} \right] \quad y \quad z = 1; \quad (2.16)$$

$$\nabla p \cdot \vec{n}_3 = 0, \quad r \in \left[\frac{r_w}{L}, \frac{L}{H} \right] \quad y \quad z = -1; \quad (2.17)$$

$$\nabla p \cdot \vec{n}_4 = \frac{\mu Q}{4\pi p_0 r_w \kappa}, \quad z \in [-1, 1] \quad y \quad r = \frac{r_w}{H}; \quad (2.18)$$

$$\nabla p \cdot \vec{n}_2 = -\frac{\mu Q}{4\pi p_0 L \kappa}, \quad z \in [-1, 1] \quad y \quad r = \frac{L}{H}, \quad (2.19)$$

con \vec{n}_i la normal exterior de Γ_i , para $i = 1, 2, 3, 4$, donde, en el caso adimensional se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ (r, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{r_w}{H} \leq r \leq \frac{L}{H} \text{ y } z = 1 \right\}, \\ \Gamma_2 &= \left\{ (r, z) \in \mathbb{R}^2 : r = \frac{L}{H} \text{ y } -1 \leq z \leq 1 \right\}, \\ \Gamma_3 &= \left\{ (r, z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{r_w}{H} \leq r \leq \frac{L}{H} \text{ y } z = -1 \right\}, \\ \Gamma_4 &= \left\{ (r, z) \in \mathbb{R}^2 : r = \frac{r_w}{H} \text{ y } -1 \leq z \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Dado que se conoce la presión $p \in \bar{\Omega}$, encontrar \vec{u} tal que

$$\vec{u} = -\frac{L}{H} \nabla p, \quad (2.20)$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \\ \vec{u} \cdot \vec{n} &= \frac{\mu Q L}{4\pi p_0 L \kappa H} \quad \text{en } \Gamma_2, \\ \vec{u} \cdot \vec{n} &= -\frac{\mu Q L}{4\pi p_0 r_w \kappa H} \quad \text{en } \Gamma_4. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.2.4. Solución analítica

Igualando las ecuaciones (2.6) y (2.3), se tiene

$$\left(\frac{Q}{4\pi H r}, 0 \right) = \left(-\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

Como $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, entonces la velocidad solo depende de r , la presión $p = p(r)$.
Esto es,

$$\begin{aligned}\frac{Q}{4\pi Hr} &= -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \int_{r_w}^r -\frac{\kappa}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} dr &= \int_{r_w}^r \frac{Q}{4\pi Hr} dr, \\ -\frac{\kappa}{\mu} [p(r) - p(r_w)] &= \frac{Q}{4\pi H} [\ln(r) - \ln(r_w)], \\ p(r) - p(r_w) &= -\frac{Q\mu}{4\pi\kappa H} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right), \\ p(r) &= p(r_w) - \frac{Q\mu}{4\pi\kappa H} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución analítica es

$$p(r) = p_0 - p_L \ln\left(\frac{r}{r_w}\right), \quad (2.22)$$

con

$$p_L = \frac{Q\mu}{4\pi\kappa H} \quad \text{y} \quad p_0 = p(r_w).$$

Adimensionalización de la solución analítica

Partiendo de la ecuación (2.22) y usando las variables adimensionales dadas en (2.13) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_0} p^*(r) &= \frac{1}{p_0} \left(p_0 - p_L \ln\left(\frac{r^*}{r_w}\right) \right), \\ p(r) &= \frac{1}{p_0} \left(p_0 - p_L \ln\left(\frac{Hr}{r_w}\right) \right).\end{aligned}$$

Es decir la solución sin dimensiones es

$$p(r) = 1 - \frac{p_L}{p_0} \ln\left(\frac{H}{r_w} r\right), \quad (2.23)$$

para cualquier $z \in [-1, 1]$.

2.3. Problema: flujo monofásico ligeramente compresible

En este apartado describimos en qué consiste el problema de flujo monofásico ligeramente compresible, para ello se presenta la región de estudio, la derivación del modelo matemático, su adimensionalización y su solución analítica.

2.3.1. Región de estudio

Se considera una región de un yacimiento Ω_v de geometría cilíndrica con centro en el origen, extensión infinita en la dirección horizontal y altura H . El pozo es de forma cilíndrica de radio r_w , altura H y centro en $(0, 0)$, como se muestra en la fig. 2.5. Consultar los detalles en [3].

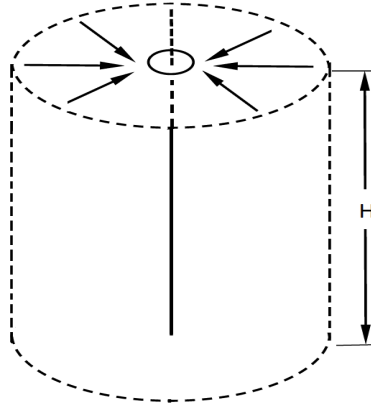


Figura 2.5: Región del yacimiento Ω_v en 3D.

2.3.2. Derivación del modelo

Con el fin de determinar el modelo para flujo monofásico se consideran los siguientes supuestos:

1. Se supone que hay un pozo de producción aislado, localizado en el centro del cilindro en la posición $(0, 0)$.
2. Todas sus propiedades son simétricas con respecto al eje del pozo.
3. Ω_v es un medio isotrópico y además el tensor de permeabilidad $\bar{\kappa} = \kappa I$.

4. No se consideran efectos de la densidad ni gravedad.
5. Consideramos viscosidad constante.
6. No hay fuentes ni sumideros.

Consideremos la ecuación de conservación de masa (ver apéndice [C](#))

$$\frac{\partial \phi \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = q, \quad (2.24)$$

y la ecuación de Darcy, suponiendo que se cumple el supuesto 3

$$\vec{u} = -\frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho |g| \nabla z), \quad (2.25)$$

donde ϕ es la porosidad, ρ la densidad, $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$ la velocidad de Darcy, κ la permeabilidad, μ la viscosidad, z es la profundidad, q es una fuente (positiva) o sumidero (negativa) y $p = p(x, y, z, t)$ es la presión. Al desarrollar la ecuación [\(2.24\)](#) se tiene

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = q. \quad (2.26)$$

Sustituyendo la relación [\(2.25\)](#) en la igualdad [\(2.26\)](#) se llega a

$$\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\rho \frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho |g| \nabla z) \right) = q. \quad (2.27)$$

Sabemos que $\rho(p) = \rho(p(x, y, z, t))$, entonces por la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Análogamente, al calcular las derivadas con respecto a x, y y z se tiene

$$\nabla \rho = \frac{d\rho}{dp} \nabla p. \quad (2.28)$$

Si suponemos que el flujo es ligeramente compresible, satisface la relación siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = c_f, \quad (2.29)$$

donde c_f es la compresibilidad del fluido. Ahora consideramos que c_f es constante (esto es válido para ciertos rangos de la presión), entonces se puede resolver la EDO [\(2.29\)](#) de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dp} &= \rho c_f, \\ \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} &= \int_{p_0}^p c_f dp, \\ \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) &= c_f (p - p_0), \\ \rho &= \rho_0 e^{c_f(p-p_0)}.\end{aligned}$$

Al usar la expansión en series de Taylor de $e^{c_f(p-p_0)}$ alrededor de p_0 , la densidad se describe como

$$\rho = \rho_0 \left(1 + c_f (p - p_0) + \frac{1}{2} c_f^2 (p - p_0)^2 + \dots \right),$$

donde ρ_0 es la densidad en p_0 (presión al tiempo inicial \tilde{t}_0). Así podemos aproximar la densidad por

$$\rho \approx \rho_0 (1 + c_f (p - p_0)). \quad (2.30)$$

Por otro lado, la compresibilidad de la roca, c_R , se define por

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} = c_R. \quad (2.31)$$

Si suponemos que c_R es una constante, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial p} &= \phi c_R, \\ \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\phi} &= \int_{p_0}^p c_R dp, \\ \ln\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right) &= c_R (p - p_0), \\ \phi &= \phi_0 e^{c_R(p-p_0)}.\end{aligned}$$

Con una expansión en series de Taylor de $e^{c_R(p-p_0)}$ alrededor de p_0 se tiene que

$$\phi = \phi_0 \left(1 + c_R (p - p_0) + \frac{1}{2} c_R^2 (p - p_0)^2 + \dots \right),$$

donde ϕ_0 es la porosidad en p_0 . Por lo que la porosidad se describe como

$$\phi \approx \phi_0 (1 + c_R (p - p_0)). \quad (2.32)$$

De las relaciones (2.31) y (2.32) se tiene

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\phi}{dp} \right|_{p=p_0} &= \phi c_R|_{p=p_0} \\ &= \phi_0 (1 + c_R (p - p_0)) c_R|_{p=p_0}. \end{aligned}$$

De aquí que

$$\frac{d\phi}{dp} = \phi_0 c_R. \quad (2.33)$$

Usando la ecuación (2.28) en la igualdad (2.27) y multiplicando por $\frac{1}{\rho\phi}$ se tiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho\phi} \nabla \cdot \left(-\rho \frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho |g| \nabla z) \right) = \frac{1}{\rho\phi} q.$$

Al sustituir las ecuaciones (2.29) y (2.33) en la identidad anterior y multiplicando por $\rho\phi$ se obtiene

$$\rho\phi \left(c_f + \frac{\phi_0}{\phi} c_R \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\rho \frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho |g| \nabla z) \right) = q. \quad (2.34)$$

Sabemos que la compresibilidad total está dada por

$$c_T = c_f + \frac{\phi_0}{\phi} c_R.$$

Por lo que la ecuación (2.34) se reescribe como:

$$\rho\phi (c_T) \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\rho \frac{\kappa}{\mu} (\nabla p - \rho |g| \nabla z) \right) = q.$$

Tomando en cuenta los supuestos iniciales (3)-(6) en la igualdad anterior, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\mu\phi c_T}{k} \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (\nabla p) = 0.$$

Por lo tanto el modelo de flujo monofásico ligeramente compresible está dado por

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p = 0, \quad (2.35)$$

donde

$$\chi = \frac{\kappa}{\phi\mu c_T}.$$

Como se considera que el yacimiento es homogéneo en la dirección vertical, se puede hacer un corte transversal al eje z , lo cual genera una subregión en 2D, la cual consiste en un plano infinito que tiene un círculo de radio r_w en el centro de coordenadas representando al pozo, ver figura 2.6.

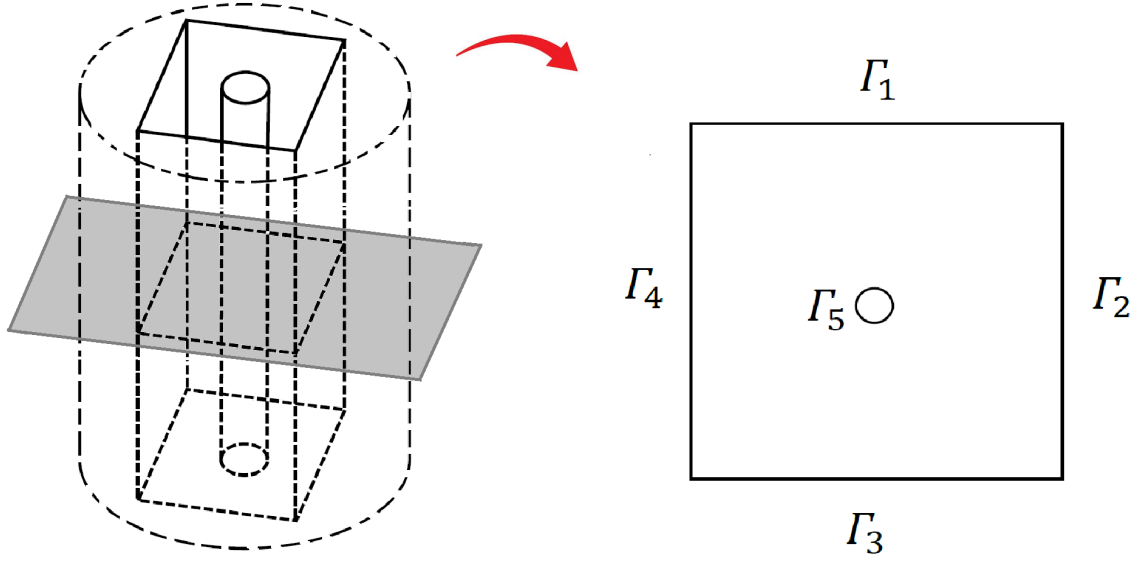


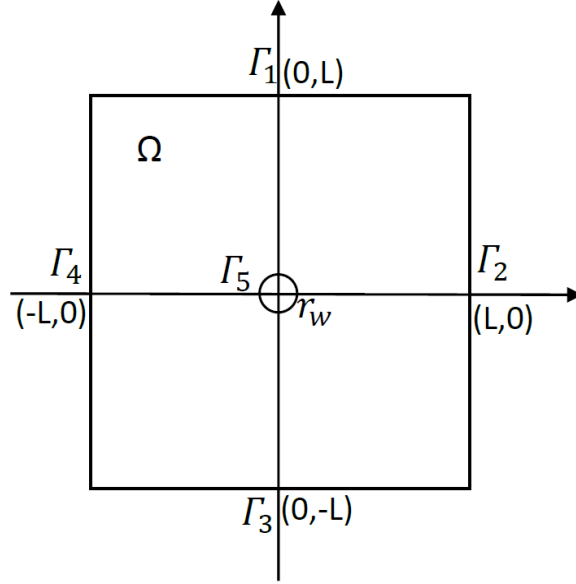
Figura 2.6: Corte transversal al eje z que genera la región Ω en 2D.

Así la región de estudio computacional $\bar{\Omega}$ se acotará de la forma siguiente:

$$\bar{\Omega} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -L \leq x, y \leq L, \sqrt{x^2 + y^2} \geq r_w \right\}.$$

La frontera de Ω es $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$. Es importante resaltar que la definición de la región Ω y las fronteras Γ_i son distintas a las descritas en el problema de flujo monofásico incompresible, apartado 2.2.1. En este caso las fronteras Γ_i están dadas como sigue:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -L \leq x \leq L, y = L\}; \\ \Gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = L, -L \leq y \leq L\}; \\ \Gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -L \leq x \leq L, y = -L\}; \\ \Gamma_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -L, -L \leq y \leq L\}; \\ \Gamma_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -L \leq x, y \leq L, x^2 + y^2 = r_w^2\}. \end{aligned}$$

Figura 2.7: Definición de la región $\bar{\Omega}$ en 2D

Condiciones inicial y de frontera

Con un análisis similar al de la sección [2.2.2](#) se tienen las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$\begin{aligned}
 p(x, y, t) &= p_0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \quad t > \tilde{t}_0, \\
 \nabla p(x, y, t) \cdot \vec{n} &= \frac{Q\mu}{2\pi\kappa Hr_w} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_5, \quad t > \tilde{t}_0, \\
 p(x, y, \tilde{t}_0) &= p_0 \quad \forall (x, y) \in \Omega,
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

donde Q es el gasto de producción del pozo, H es la altura del yacimiento y r_w el radio del pozo.

Por lo tanto, el problema de flujo monofásico ligeramente compresible consiste en encontrar p y \vec{u} tal que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p &= 0, \\
 \vec{u} &= -\frac{\kappa}{\mu} \nabla p,
 \end{aligned} \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \geq \tilde{t}_0. \tag{2.37}$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
 p(x, y, t) &= p_0, & \forall (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, & \quad t > \tilde{t}_0, \\
 \nabla p(x, y, t) \cdot \vec{n} &= \frac{Q\mu}{2\pi\kappa H r_w} & \forall (x, y) \in \Gamma_5, & \quad t > \tilde{t}_0, \\
 p(x, y, \tilde{t}_0) &= p_0, & \forall (x, y) \in \Omega. &
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

2.3.3. Adimensionalización

Se introducen las variables adimensionales siguientes:

$$x = \frac{x^*}{L}; \quad y = \frac{y^*}{L}; \quad p = \frac{p^*}{p_0}; \quad t = \frac{t^*}{t_R};$$

donde t_R es un tiempo de referencia, y ya que se resuelve el problema hasta un cuarto de día se define por

$$t_R = 345600s .$$

Notemos que las variables con (*) tienen dimensiones. Para adimensionalizar la ecuación (2.35) se premultiplica por $\frac{t_R L^2}{p_0}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{t_R L^2}{p_0} \frac{1}{\chi^*} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} &= \frac{t_R L^2}{p_0} \left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial (y^*)^2} \right), \\
 \frac{1}{\frac{1}{t_R} \frac{1}{L^2}} \frac{1}{\chi^*} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} &= \frac{1}{\frac{1}{t_R} \frac{1}{L^2}} \left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial (y^*)^2} \right), \\
 L^2 \frac{1}{\frac{1}{t_R} \frac{1}{L^2}} \frac{1}{\chi^*} \frac{\partial p^*}{\partial t^*} &= t_R \frac{1}{\frac{1}{L^2}} \left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial (y^*)^2} \right),
 \end{aligned}$$

$$L^2 \frac{1}{\chi^*} \frac{\partial p}{\partial t} = t_R \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{L^2}{t_R} \frac{1}{\chi^*} \frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{1}{\frac{\chi^*}{L^2}} \frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right).$$

Es decir,

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right), \quad (2.39)$$

con

$$\chi = \frac{\chi^*}{\frac{L^2}{t_R}}.$$

Observemos que en el caso adimensional la región de estudio y la frontera son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{r_w}{L} \right\}; \\ \Gamma_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = 1 \right\}; \\ \Gamma_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, -1 \leq y \leq 1 \right\}; \\ \Gamma_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, y = -1 \right\}; \\ \Gamma_4 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1, -1 \leq y \leq 1 \right\}; \\ \Gamma_5 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y \leq 1, x^2 + y^2 = \frac{r_w^2}{L^2} \right\}. \end{aligned}$$

Entonces, las condiciones de frontera e iniciales adimensionales quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0} p^*(x, y, t) &= \frac{1}{p_0} p_0, \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \quad \frac{t^*}{t_R} > \frac{\tilde{t}_0}{t_R}, \\ \frac{1}{\frac{p_0}{1}} \frac{1}{L} \nabla p^*(x, y, t) \cdot \vec{n} &= \frac{1}{\frac{p_0}{1}} \frac{Q\mu}{2\pi\kappa H r_w} \quad \forall (x, y) \in \Gamma_5, \quad \frac{t^*}{t_R} > \frac{\tilde{t}_0}{t_R}, \\ \frac{1}{p_0} p^*(x, y, \frac{\tilde{t}_0}{t_R}) &= \frac{1}{p_0} p_0, \quad \forall (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

O bien,

$$\begin{aligned}
 p(x, y, t) &= 1, & \forall (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, & \quad t > t_0, \\
 \nabla p(x, y, t) \cdot \vec{n} &= \frac{Q\mu L}{2\pi\kappa H r_w p_0} & \forall (x, y) \in \Gamma_5, & \quad t > t_0, \\
 p(x, y, t_0) &= 1, & \forall (x, y) \in \Omega, &
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

donde $t_0 = \frac{\tilde{t}_0}{t_R}$.

Análogamente, para adimensionalizar la ecuación de Darcy (2.37) se premultiplica por $\frac{L}{p_0}$ como sigue:

$$\begin{aligned}
 \frac{L}{p_0} \frac{\mu}{\kappa} \vec{u}^* &= -\frac{L}{p_0} \nabla p^*, \\
 \frac{L}{p_0} \frac{\mu}{\kappa} \vec{u}^* &= -\left(\frac{L}{p_0} \nabla p^* \right), \\
 \frac{L}{p_0} \frac{\mu}{\kappa} \vec{u}^* &= -\nabla p, \\
 \frac{1}{p_0 \kappa} \vec{u}^* &= -\nabla p. \\
 \frac{1}{L\mu}
 \end{aligned}$$

Por lo que, si

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}^*}{u_R} \quad \text{y} \quad u_R = \frac{\kappa p_0}{\mu L},$$

entonces la velocidad sin dimensiones es

$$\vec{u} = -\nabla p. \tag{2.41}$$

Así el problema adimensional consiste en encontrar p y \vec{u} tal que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} - \Delta p &= 0, & (x, y) \in \Omega, & \quad t > t_0, \\
 \vec{u} &= -\nabla p,
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

donde

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x, y < 1, \sqrt{x^2 + y^2} > \frac{r_w}{L} \right\}, \tag{2.43}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
 p(x, y, t) &= 1 & (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \quad t > t_0, \\
 \nabla p(x, y, t) \cdot \vec{n} &= \frac{Q\mu L}{2\pi\kappa H r_w p_0} & (x, y) \in \Gamma_5, \quad t > t_0, \\
 p(x, y, t_0) &= 1 & (x, y) \in \Omega.
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Una vez que se conoce la presión se calcula la velocidad adimensional mediante la ecuación (2.41). Cabe mencionar que en este caso las condiciones de frontera son:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = -\frac{Q\mu L}{2\pi\kappa H r_w p_0}, \quad (x, y) \in \Gamma_5 \quad \text{y} \quad t > t_0. \tag{2.45}$$

2.3.4. Aproximación a la solución analítica

Con la finalidad de aproximar la solución analítica de la presión, se reescriben las ecuaciones (2.35) y (2.38) en coordenadas polares y la región Ω se extiende infinitamente en la dirección horizontal. Entonces, ahora el problema consiste en encontrar $p(r, t)$ tal que satisfice

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad \text{cuando} \quad 0 < r < \infty, t \geq 0, \tag{2.46}$$

con condición inicial

$$p(r, 0) = p_0, \quad 0 < r < \infty.$$

y condiciones de frontera:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_0, \quad t \geq 0, \tag{2.47}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{Q\mu}{2\pi k H}, \quad t > 0. \tag{2.48}$$

Para resolver la ecuación (2.46) se introduce el siguiente cambio de variable de Boltzmann:

$$y = \frac{r^2}{4t\chi}, \quad t > 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\
 &= \frac{\partial p}{\partial y} \frac{2r}{4t\chi}.
 \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial y} \frac{r}{2t\chi}. \quad (2.49)$$

Además,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{r}{2t\chi} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \left(\frac{r}{2t\chi} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2t\chi} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right) \left(\frac{r}{2t\chi} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2t\chi} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) \left(\frac{r}{2t\chi} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2t\chi} \\ &= \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left(\frac{r}{2t\chi} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2t\chi} \\ &= \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left(\frac{r^2}{4t^2\chi^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2t\chi}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial p}{\partial y} \left(-\frac{r^2}{4\chi t^2} \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo la igualdad anterior en la ecuación (2.46) se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{r^2}{4\chi t^2} \right) &= \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left(\frac{r}{2t\chi} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2t\chi} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{r}{2t\chi}, \\ 0 &= \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left(\frac{r}{2t\chi} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{1}{t\chi} + \frac{r^2}{4t^2\chi^2} \right), \\ 0 &= \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left(\frac{r^2}{4t^2\chi^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{1}{t\chi} + \frac{r^2}{4t^2\chi^2} \right), \\ 0 &= \frac{1}{t\chi} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \left(\frac{r^2}{4t\chi} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \left(1 + \frac{r^2}{4t\chi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^2 p}{dy^2} y + \frac{dp}{dy} (1 + y) = 0. \quad (2.50)$$

Usamos el método de separación de variables para resolver la EDO (2.50).

Sean

$$u = \frac{dp}{dy}, \quad \text{luego} \quad \frac{du}{dy} = \frac{d^2p}{dy^2}.$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en la ecuación (2.50) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy}y + u(1+y) &= 0, \\ \frac{du}{dy}y &= -u(1+y), \\ \int \frac{du}{u} &= -\int \frac{1+y}{y} dy, \\ \ln(u) &= -\ln(y) - y + \ln(c), \\ \ln(u) &= -y + \ln\left(\frac{c}{y}\right), \\ u &= \frac{c}{y}e^{-y}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{dp}{dy} = \frac{c}{y}e^{-y}, \quad (2.51)$$

donde c es una constante arbitraria. De la ecuación (2.49) se tiene:

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dy} \frac{r^2}{2t\chi} = 2 \frac{dp}{dy} y. \quad (2.52)$$

Entonces, al aplicar la condición de frontera (2.48) a la relación anterior, obtenemos

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2 \frac{dp}{dy} y = -\frac{Q\mu}{2\pi\kappa H},$$

y por la ecuación (2.51)

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2 \frac{dp}{dy} y = \lim_{y \rightarrow 0} 2ce^{-y} = 2c.$$

Así,

$$c = -\frac{Q\mu}{4\pi\kappa H}.$$

Por lo tanto, la ecuación (2.51) se reescribe como

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{Q\mu}{4\pi\kappa H} \frac{e^{-y}}{y}. \quad (2.53)$$

Observemos que

$$p(y) = p(y(r, t)) = p(r, t) \text{ cuando } y = \frac{r^2}{4t\chi}, \quad t > 0$$

y además que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} y = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{4t\chi} = \infty, \text{ si } t = 0.$$

Luego la condiciones de frontera e inicial son

$$\begin{aligned} p &= p(r, t) \text{ cuando } y = \frac{r^2}{4t\chi}, \quad t > 0, \\ p &= p_0 \text{ cuando } y = \infty, \quad t = 0. \end{aligned}$$

Integrando la ecuación (2.53) desde $t = 0$ a algún tiempo t se tiene:

$$\int_{p_0}^{p(r, t)} dp = - \int_{\infty}^{\frac{r^2}{4t\chi}} \frac{Q\mu}{4\pi\kappa H} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Entonces

$$p(y(r, t)) - p(y(r, 0)) = - \frac{Q\mu}{4\pi\kappa H} \int_{\infty}^{\frac{r^2}{4t\chi}} \frac{e^{-y}}{y} dy,$$

o bien

$$p(y(r, t)) = p_0 + \frac{Q\mu}{4\pi\kappa H} \int_{\frac{r^2}{4t\chi}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy. \quad (2.54)$$

Se sabe que

$$\int_{\frac{r^2}{4t\chi}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = -Ei\left(-\frac{r^2}{4t\chi}\right) = -Ei(-y),$$

donde a $Ei(y)$ se le conoce como la función integral exponencial.

En consecuencia, se sigue de la ecuación (2.54) que la presión está dada por

$$p(r, t) = p_0 - \frac{Q\mu}{4\pi\kappa H} Ei\left(-\frac{r^2}{4t\chi}\right) \quad \forall r, t > 0. \quad (2.55)$$

Pero la función integral exponencial se puede expandir en series de la siguiente forma (ver [3] y [24]):

$$Ei\left(-\frac{r^2}{4t\chi}\right) = -\ln\left(\frac{4t\chi}{r^2}\right) + 0.5772 - \frac{r^2}{4t\chi} + \frac{1}{4} \left(\frac{r^2}{4t\chi}\right)^2 - \dots, \quad t > 0.$$

Así, cuando $\frac{r^2}{4t\chi} < 0.01$, la función puede aproximarse por

$$\begin{aligned} Ei\left(-\frac{r^2}{4t\chi}\right) &\approx -\ln\left(\frac{4t\chi}{r^2}\right) + 0.5772 \\ &= -\ln\left(\frac{4t\chi}{r^2}\right) + \ln(e^{0.5772}) \\ &= -\ln\left(\frac{4t\chi}{r^2 e^{0.5772}}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{2.25t\chi}{r^2}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución analítica aproximada simplificada de (2.55) es

$$p(r, t) = p_0 + \frac{Q\mu}{4\pi kH} \ln\left(\frac{2.25t\chi}{r^2}\right). \quad (2.56)$$

Adimensionalización de la solución analítica

Partiendo de la ecuación (2.56) y usando las variables adimensionales dadas en la sección 2.3.3 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_0} p^*(r^*, t^*) &= \frac{1}{p_0} \left(p_0 + \frac{Q\mu}{4\pi kH} \ln\left(\frac{2.25t^* \chi^*}{(r^*)^2}\right) \right), \\ p(r) &= \frac{1}{p_0} \left(p_0 + \frac{Q\mu}{4\pi kH} \ln\left(\frac{2.25((t)(t_R)) \left(\chi \frac{L^2}{t_R}\right)}{L^2(r)^2}\right) \right). \end{aligned}$$

Es decir la solución analítica sin dimensiones es de la siguiente forma:

$$p(r) = 1 + \frac{Q\mu}{4\pi kH p_0} \ln\left(\frac{2.25t\chi}{r^2}\right). \quad (2.57)$$

Capítulo 3.

Método de Elemento Finito Estándar

En este capítulo se explica el método de elemento finito estándar, primero se definen los espacios en los que se trabaja, posteriormente se desarrollan las formulaciones variacionales para cada modelo: flujo monofásico incompresible y ligeramente compresible, así como la discretización de los espacios y de las formulaciones débiles. También se describen las funciones de forma y las cuadraturas de integración para elementos lineales y bilineales. En el capítulo 5 se presenta el estudio de estos elementos versus los elementos mixtos.

3.1. Definición de espacios

Con la finalidad de presentar la formulación variacional de la presión, tal que la función de prueba w sea lo suficientemente suave y que pertenezca a un espacio de Hilbert, se definen los espacios sobre $\Omega \in \mathbb{R}^d$ para $d \geq 1$:

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \left\{ w : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |w(\vec{x})|^2 d\Omega < \infty \right\}, \\ H^1(\Omega) &= \left\{ w \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \forall 1 \leq i \leq d \right\}, \\ H_D(\Omega) &= \left\{ w \in H^1(\Omega) \mid w(\vec{x}) = 0; \vec{x} \in \Gamma_D \right\}, \\ &\quad \text{con } \Gamma_D \text{ la unión de las fronteras con condiciones Dirichlet.} \end{aligned}$$

Cuyos productos interiores son, respectivamente

$$\begin{aligned} (u, w)_{L^2} &= \int_{\Omega} u(\vec{x})w(\vec{x})d\Omega, \\ (u, w)_{H^1} &= \int_{\Omega} u(\vec{x})w(\vec{x})d\Omega + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial x_i} \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x_i} d\Omega. \end{aligned}$$

Por lo que sus normas inducidas son

$$\|u\|_{L^2} = [(u, u)_{L^2}]^{1/2}, \quad (3.1)$$

$$\|u\|_{H^1} = ((u, u)_{H^1})^{1/2}. \quad (3.2)$$

Asimismo, definimos $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y $\mathbf{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ con sus normas dadas, respectivamente, como sigue:

$$\|\vec{w}\|_{\mathbf{L}^2} = [\|w_1\|_{L^2}^2 + \|w_2\|_{L^2}^2]^{1/2},$$

$$\|\vec{w}\|_{\mathbf{H}^1} = [\|w_1\|_{H^1}^2 + \|w_2\|_{H^1}^2]^{1/2},$$

donde

$$\vec{w} = (w_1, w_2).$$

3.2. Formulación variacional de problemas

Una vez definidos los espacios donde se trabajará, en las secciones [3.2.1](#) y [3.2.2](#) se construyen las formulaciones variacionales de la presión para los problemas de flujo monofásico incompresible y ligeramente compresible, respectivamente.

3.2.1. Flujo monofásico incompresible

Se consideran las ecuaciones que modelan el problema de flujo monofásico incompresible sin dimensiones. Sea $w \in H_D(\Omega_v)$, con Ω_v el volumen del cilindro a estudiar. Al multiplicar la ecuación [\(2.15\)](#) por w e integrando sobre Ω_v se tiene

$$- \int_{\Omega_v} \nabla \cdot (\nabla p) w \, d\Omega_v = 0 \quad \forall w \in H_D(\Omega_v).$$

Usando la fórmula de Green, que se enuncia como sigue:

$$- \int_{\Omega_v} \Delta p v \, d\Omega_v = \int_{\Omega_v} \nabla p \cdot \nabla v \, d\Omega_v - \int_{\partial\Omega_v} \nabla p \cdot \vec{n} v \, ds, \quad (3.3)$$

se tiene

$$\int_{\Omega_v} \nabla p \cdot \nabla w \, d\Omega_v - \int_{\partial\Omega_v} \nabla p \cdot \vec{n} w \, ds = 0 \quad \forall w \in H_D(\Omega_v).$$

Dado que $\partial\Omega_v = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ (ver fig. [2.2](#)), se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_v} \nabla p \cdot \nabla w d\Omega_v - \int_{S_1} \nabla p \cdot \vec{n}_1 w ds - \int_{S_2} \nabla p \cdot \vec{n}_2 w ds - \\ & \int_{S_3} \nabla p \cdot \vec{n}_3 w ds - \int_{S_4} \nabla p \cdot \vec{n}_4 w ds = 0, \quad \forall w \in H_D(\Omega_v). \end{aligned}$$

Al aplicar las condiciones de frontera ([2.16](#))-([2.19](#))

$$\int_{\Omega_v} \nabla p \cdot \nabla w d\Omega_v + \int_{S_2} \frac{\mu Q}{4\pi p_0 L \kappa} w ds - \int_{S_4} \frac{\mu Q}{4\pi p_0 r_w \kappa} w ds = 0, \quad \forall w \in H_D(\Omega_v).$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{\frac{r_w}{H}}^{\frac{L}{H}} \int_{-1}^1 \nabla p \cdot \nabla w r dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mu Q}{4\pi p_0 L \kappa} w \frac{L}{H} dz d\theta + \\ & - \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\mu Q}{4\pi p_0 r_w \kappa} w \frac{r_w}{H} dz d\theta = 0, \quad \forall w \in H_D(\Omega_v). \end{aligned}$$

Integrando respecto a θ se tiene

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\frac{r_w}{H}}^{\frac{L}{H}} \int_{-1}^1 \nabla p \cdot \nabla w r dz dr + 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\mu Q}{4\pi p_0 L \kappa} w \frac{L}{H} dz - 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\mu Q}{4\pi p_0 r_w \kappa} w \frac{r_w}{H} dz = 0, \\ \forall w \in H_D(\Omega_v). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Así se llega a lo siguiente:

$$\int_{\frac{r_w}{H}}^{\frac{L}{H}} \int_{-1}^1 \nabla p \cdot \nabla w r dz dr = \frac{\mu Q}{4\pi p_0 H \kappa} \left(- \int_{\Gamma_2} w dz + \int_{\Gamma_4} w dz \right), \quad \forall w \in H_D(\Omega_v).$$

Debido a que es un problema elíptico con condiciones de frontera tipo Neumann, tiene solución única salvo una constante, ver apéndice [D](#). Para aproximar dicha solución fijamos el valor de la presión en el punto $\left(\frac{r_w}{H}, 0\right)$, esto es $p\left(\frac{r_w}{H}, 0\right) = 1$.

Una vez fijado este punto, definimos los espacios donde vive la aproximación de la solución. Sean

$$\begin{aligned} W &= \left\{ w \in H^1(\Omega) : w\left(\frac{r_w}{H}, 0\right) = 1 \right\}, \\ W_0 &= \left\{ w \in H^1(\Omega) : w\left(\frac{r_w}{H}, 0\right) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema variacional de la presión relacionado con las ecuaciones (2.15)-(2.19) se describe como: Encontrar $p \in W$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla w r d\Omega = \frac{\mu Q}{4\pi p_0 H \kappa} \left(- \int_{\Gamma_2} w dz + \int_{\Gamma_4} w dz \right), \quad \forall w \in W_0, \quad (3.5)$$

con $\Omega = \left[\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H} \right] \times [-1, 1]$ y $\Gamma_2 = \Gamma_4 = [-1, 1]$, ver fig. 2.4.

3.2.2. Flujo monofásico ligeramente compresible

Para desarrollar la formulación variacional de la presión asociada al problema (2.42)-(2.44), definimos a $\Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ y a Ω por la expresión (2.43), además consideremos los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} V &= \{v \in H^1(\Omega)\} \text{ y} \\ V_0 &= \{v \in H^1(\Omega) \mid v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_D\}. \end{aligned}$$

Es importante mencionar que ahora la presión es función del tiempo, $p : [t_0, T] \rightarrow V$, $p = p(t)$ usando la notación de Chen [3] y Glowinski [25].

Sea $v \in V_0$, multiplicando la ecuación (2.42) por v e integrando sobre Ω , delimitado en la fig. 2.6, se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} v d\Omega - \chi \int_{\Omega} \Delta p v d\Omega = 0 \quad \forall v \in V_0. \quad (3.6)$$

Sustituyendo la fórmula de Green (3.3) en la ecuación (3.6) se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} v d\Omega - \chi \left(- \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla p \cdot \vec{n} v ds \right) = 0, \quad \forall v \in V_0,$$

y utilizando las condiciones de frontera, se obtiene

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial t} v d\Omega + \chi \left(\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma_5} \nabla p \cdot \vec{n} v ds \right) = 0, \quad \forall v \in V_0.$$

Entonces el problema consiste en encontrar, para cada t fijo en $[t_0, T]$, $p(t) \in V$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial p(t)}{\partial t} v d\Omega + \chi \left(\int_{\Omega} \nabla p(t) \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\Gamma_5} g_5 v ds \right) &= 0, \quad \forall v \in V_0, \\ p(t) &= 1 \text{ sobre } \Gamma_D; \quad t > t_0, \\ p(t_0) &= 1 \text{ en } \Omega, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $g_5 = \frac{Q\mu}{2\pi k H r_w}$ y $\Gamma_5 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r_w}{L} \right\}$.

3.3. Triangularización del dominio y espacios discretos

La triangularización del dominio Ω consiste en hacer una partición de este. Es decir, Ω se subdivide en un número finito de subconjuntos Ω_e , los cuales satisfacen lo siguiente:

- 1.- $\Omega_h = \cup_{e=1}^{ne} \Omega_e$, donde ne es el número total de elementos y $\Omega_h \subseteq \bar{\Omega}$.
- 2.- Para cada elemento $\Omega_e \subset \Omega_h$, Ω_e es cerrado y el interior de Ω_e es diferente del vacío.
- 3.- Para cada par de elementos Ω_{e_1} y Ω_{e_2} distintos, se tiene que

$$\Omega_{e_1} \cap \Omega_{e_2} = \begin{cases} \emptyset, \\ \text{una arista, un vértice o una cara en común.} \end{cases}$$
- 4.- Para cada $\Omega_e \subset \Omega_h$ la frontera $\partial\Omega_e$ es Lipschitz continua.

Además, denotamos el tamaño de la malla por h , la cual está dada por

$$h = \max_{1 \leq e \leq ne} \|h_e\|, \quad (3.8)$$

donde h_e es el diámetro del conjunto Ω_e (diámetro del círculo circunscrito al elemento Ω_e). A cada Ω_e se le asocia un elemento finito.

Definición 3.3.1. *Un elemento finito se define como la tripleta $(\Omega_e, \mathbb{P}_n(\Omega_e), \Sigma_e)$, donde:*

- Ω_e define la geometría del elemento.
- $\mathbb{P}_n(\Omega_e)$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual a n definidos sobre Ω_e .
- Σ_e es el conjunto de grados de libertad en Ω_e . El número de grados de libertad coincide con el número de nodos en los elementos.

Sean W_h y $W_{h,0}$ los subespacios de dimensión finita de W y W_0 respectivamente, tales que

$$\begin{aligned} W_h &= \left\{ w_h \in \mathbb{C}^0(\bar{\Omega}) : w_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_n(\Omega_e) \text{ (o } \mathbb{Q}_n(\Omega_e)), \quad \forall \Omega_e \in \Omega_h, \quad w_h \left(\frac{r_w}{H}, 0 \right) = 1 \right\}, \\ W_{h,0} &= \left\{ w_h \in \mathbb{C}^0(\bar{\Omega}) : w_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_n(\Omega_e) \text{ (o } \mathbb{Q}_n(\Omega_e)), \quad \forall \Omega_e \in \Omega_h, \quad w_h \left(\frac{r_w}{H}, 0 \right) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

donde $\mathbb{C}^0(\Omega)$ es el espacio de funciones continuas en Ω , $\mathbb{P}_n(\Omega_e)$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual a n sobre Ω_e y $\mathbb{Q}_n(\Omega_e)$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a n en cada una de las componentes de \mathbb{R}^2 . Lo que se desea es aproximar una función $p \in H^1(\Omega)$ por medio de una función $p_h \in W_h$.

De la misma forma, se definen los espacios finitos para el problema de flujo ligeramente compresible. En este caso se utiliza un esquema semidiscreto en el espacio, es decir, en el apartado [3.4.2](#) plantaremos un sistema discreto en el espacio pero continuo en el tiempo y seguiremos la notación de Chen [\[3\]](#) y Glowinski [\[25\]](#). Sean V_h y $V_{h,0}$ los subespacios finitos de V y V_0 respectivamente, tales que para $t \in [t_0, T]$ fijo

$$V_h = \{v_h \in \mathbb{C}^0(\bar{\Omega}) : v_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_n(\Omega_e) \text{ (o } \mathbb{Q}_n(\Omega_e)), \quad \forall \Omega_e \in \Omega_h\},$$

$$V_{h,0} = \{v_h \in \mathbb{C}^0(\bar{\Omega}) : v_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_n(\Omega_e) \text{ (o } \mathbb{Q}_n(\Omega_e)), \quad \forall \Omega_e \in \Omega_h, \quad v_h = 0 \text{ en } \Gamma_D\},$$

Por otra parte, los nodos del elemento finito son los puntos que se utilizan para realizar la aproximación de una función en W , W_0 , V , V_0 en cada elemento Ω_e , y los valores desconocidos de p_h evaluados en tales nodos son los grados de libertad globales. Definamos como nnt el número de nodos totales o grados de libertad global del problema, entonces la dimensión de los espacios W_h , $W_{h,0}$, V_h y $V_{h,0}$ es igual a nnt .

Sea $\{\phi_j\}_{j=1}^{nnt}$ el conjunto de funciones base de W_h , $W_{h,0}$, V_h y $V_{h,0}$ tal que cada función satisface lo siguiente:

- Deben ser funciones simples y se definen sobre cada elemento Ω_e .
- Son funciones suficientemente suaves tal que pertenezcan al espacio de funciones de prueba.
- Se eligen de tal forma que

$$\phi_i(\vec{x}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

donde \vec{x}_j son las coordenadas del nodo j -ésimo.

El soporte de una función ϕ_j es el conjunto de todos los elementos Ω_e que contengan al nodo j -ésimo, como se muestra en la figura [3.1](#).

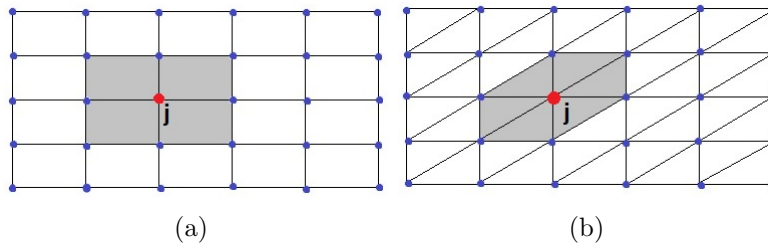


Figura 3.1: Soporte del nodo j -ésimo con (a) elementos bilineales y (b) elementos lineales.

Ya que $\{\phi_j\}_{j=1}^{nnt}$ forma una base del espacio W_h , si $w_h \in W_{h,0}$ y $p_h \in W_h$ entonces puede aproximarse como combinación lineal de las funciones de la base, de la siguiente forma:

$$w_h = \sum_{j=1}^{nnt} w_j \phi_j; \quad p_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{nnt} p_j \phi_j(\vec{x}). \quad (3.9)$$

Las ϕ_i se construyen tal que $p_j = p_h(\vec{x}_j)$, pues cuando se evalúa p_h en un nodo \vec{x}_i se tiene, por definición de ϕ_i

$$\begin{aligned} p_h(\vec{x}_i) &= \sum_{j=1}^{nnt} p_j \phi_j(\vec{x}_i) \\ &= p_i. \end{aligned}$$

3.4. Discretización de la formulación variacional

3.4.1. Flujo monofásico incompresible

Recordemos que este modelo se trabaja en coordenadas cilíndricas. Luego el problema discreto asociado al flujo monofásico incompresible consiste en encontrar $p_h \in W_h$ tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla w_h r dr dz = \left(\frac{\mu Q}{4\pi P_0 H \kappa} \right) \left(- \int_{\Gamma_2} w_h dz + \int_{\Gamma_4} w_h dz \right), \quad \forall w_h \in W_{h,0}. \quad (3.10)$$

Tomando p_h dada por la ecuación (3.9), $w_h = \phi_i$ y sustituyendo en la igualdad (3.10) se tiene lo siguiente:

$$\int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{j=1}^{nnt} p_j \phi_j \right) \cdot \nabla (\phi_i) r dr dz = \left(\frac{\mu Q}{4\pi P_0 H \kappa} \right) \left(- \int_{\Gamma_2} \phi_i dz + \int_{\Gamma_4} \phi_i dz \right) \quad \forall 1 \leq i \leq nnt.$$

Entonces,

$$\sum_{j=1}^{nnt} p_j \int_{\Omega} \nabla (\phi_j) \cdot \nabla (\phi_i) r dr dz = \left(\frac{\mu Q}{4\pi P_0 H \kappa} \right) \left(- \int_{\Gamma_2} \phi_i dz + \int_{\Gamma_4} \phi_i dz \right), \quad \forall 1 \leq i \leq nnt.$$

Que puede representarse matricialmente como sigue:

$$K \vec{P} = \left(\frac{\mu Q}{4\pi P_0 H \kappa} \right) \left(-\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \right), \quad (3.11)$$

donde

$$K_{i,j} = \int_{\Omega_h} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i r dr dz, \quad i, j = 1, \dots, nnt, \quad (3.12)$$

$$b_{1,i} = \int_{\Gamma_2} \phi_i ds, \quad (3.13)$$

$$b_{2,i} = \int_{\Gamma_4} \phi_i ds, \quad (3.14)$$

$$\vec{P} = (p_1, p_2, \dots, p_{nnt})^T. \quad (3.15)$$

Por la propiedad de sumabilidad, las integrales (3.12)-(3.15) se pueden calcular de la siguiente manera:

$$K_{i,j} = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} \nabla (\phi_j |_{\Omega_e}) \cdot \nabla (\phi_i |_{\Omega_e}) r dr dz, \quad i, j = 1, \dots, nnt \quad (3.16)$$

$$b_{1,i} = \sum_{e=1}^{nef2} \int_{\Gamma_e} \phi_i |_{\Gamma_e} ds, \quad (3.17)$$

$$b_{2,i} = \sum_{e=1}^{nef4} \int_{\Gamma_e} \phi_i |_{\Gamma_e} ds, \quad (3.18)$$

donde $nef2$ y $nef4$ son el número de elementos de frontera (aristas de frontera en el caso 2D) 2 y 4, respectivamente.

Sean p y p_h soluciones de los problemas (3.5) y (3.10), respectivamente. Entonces se tiene el siguiente orden de error de aproximación (ver [3])

$$\|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \quad (3.19)$$

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \quad (3.20)$$

Una vez obtenida la presión, se aproxima la velocidad de Darcy utilizando la expresión sin dimensiones (2.20) dada por:

$$\vec{u}_h = -\frac{L}{H} \nabla p_h, \quad (3.21)$$

donde la aproximación de la presión $p_h(r, z)$ está definida en la relación (3.9). La aproximación de la velocidad \vec{u}_h se realiza a nivel nodal. Dado que

$$\vec{u}_h = (u_{1,h}, u_{2,h}),$$

donde

$$u_{1,h} = -\frac{L}{H} \frac{\partial p_h}{\partial r}; \quad u_{2,h} = -\frac{L}{H} \frac{\partial p_h}{\partial z}. \quad (3.22)$$

Si

$$u_{1,h} = \sum_{i=1}^{nnt} u_{1,i} \phi_i(r, z),$$

con $u_{1,i} = u_{1,h}(r_i, z_i)$. Para encontrar la velocidad a nivel nodal de la primera componente, se fija el nodo i en la ecuación (3.22), se multiplica por la función base ϕ_i del espacio $H_0^1(\Omega)$ y se integra sobre el soporte de ϕ_i , así se obtiene:

$$\int_{sop(\phi_i)} u_{1,i} \phi_i(r, z) d\Omega = -\frac{L}{H} \int_{sop(\phi_i)} \frac{\partial p_h}{\partial r} \phi_i(r, z) d\Omega.$$

Así

$$u_{1,i} = -\frac{L}{H} \frac{\int_{sop(\phi_i)} \frac{\partial p_h}{\partial r} \phi_i(r, z) d\Omega}{\int_{sop(\phi_i)} \phi_i(r, z) d\Omega}. \quad (3.23)$$

Con un análisis similar, se tiene la siguiente expresión para la segunda componente de la velocidad:

$$u_{2,i} = -\frac{L}{H} \frac{\int_{sop(\phi_i)} \frac{\partial p_h}{\partial z} \phi_i(r, z) d\Omega}{\int_{sop(\phi_i)} \phi_i(r, z) d\Omega}. \quad (3.24)$$

Tenemos dos opciones para calcular la velocidad: una es usar las expresiones en las ecuaciones (3.23) y (3.24) y la otra es aplicar la fórmula de Green, $-\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial r} w d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial r} v d\Omega - \int_{\Gamma} v n w ds$, en las igualdades (3.23) y (3.24). Si no usamos la fórmula de Green, y sustituimos la ecuación (3.9) en las igualdades (3.23) y (3.24), resulta que

$$u_{1,i} = -\frac{L}{H} \frac{\int_{sop(\phi_i)} \sum_{j=1}^{nnt} p_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \phi_i d\Omega}{\int_{sop(\phi_i)} \phi_i d\Omega},$$

$$u_{2,i} = -\frac{L}{H} \frac{\int_{sop(\phi_i)} \sum_{j=1}^{nnt} p_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \phi_i d\Omega}{\int_{sop(\phi_i)} \phi_i d\Omega}.$$

Ahora, por la propiedad de sumabilidad se tiene

$$u_{1,i} = -\frac{L}{H} \frac{\sum_{\Omega_e \subset \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \sum_{j=1}^{nne} p_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \phi_i d\Omega}{\sum_{\Omega_e \subset \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega}, \quad (3.25)$$

y

$$u_{2,i} = -\frac{L}{H} \frac{\sum_{\Omega_e \subset \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \sum_{j=1}^{nne} p_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \phi_i d\Omega}{\sum_{\Omega_e \subset \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega}, \quad (3.26)$$

donde nne es el número de nodos por elemento.

Por otro lado, si usamos la fórmula Green se tienen las siguientes expresiones para las componentes de la velocidad:

$$u_{1,i} = \frac{L}{H} \frac{\int_{\text{sop}(\phi_i)} p_h \frac{\partial \phi_i(r, z)}{\partial r} d\Omega - \int_{\partial \text{sop}(\phi_i)} p_h n_1 \phi_i(r, z) ds}{\int_{\text{sop}(\phi_i)} \phi_i(r, z) d\Omega}, \quad (3.27)$$

y

$$u_{2,i} = \frac{L}{H} \frac{\int_{\text{sop}(\phi_i)} p_h \frac{\partial \phi_i(r, z)}{\partial z} d\Omega - \int_{\partial \text{sop}(\phi_i)} p_h n_2 \phi_i(r, z) ds}{\int_{\text{sop}(\phi_i)} \phi_i(r, z) d\Omega}, \quad (3.28)$$

donde $\vec{n} = (n_1, n_2)^T$ es la normal exterior del soporte de ϕ_i .

Por la propiedad de sumabilidad se tiene que

$$u_{1,i} = \frac{L}{H} \frac{\sum_{\Omega_e \subset \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \left(\sum_{j=1}^{nne} p_j \phi_j \Big|_{\Omega_e} \right) \frac{\partial \phi_i}{\partial r} d\Omega - \sum_{\Gamma_e \subset \partial \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Gamma_e} \phi_i n_1 \left(\sum_{j=1}^{nne} p_j \phi_j \Big|_{\Gamma_e} \right) ds}{\sum_{\Omega_e \subset \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega},$$

y

$$u_{2,i} = \frac{L}{H} \frac{\sum_{\Omega_e \subset \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \left(\sum_{j=1}^{nne} p_j \phi_j \Big|_{\Omega_e} \right) \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega - \sum_{\Gamma_e \subset \partial \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Gamma_e} \phi_i n_2 \left(\sum_{j=1}^{nne} p_j \phi_j \Big|_{\Gamma_e} \right) ds}{\sum_{\Omega_e \subset \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega}.$$

donde $nnef$ es el número de nodos por elemento de frontera.

3.4.2. Flujo monofásico ligeramente compresible

El Problema discreto para flujo monofásico ligeramente compresible consiste en encontrar, para cada t fijo en $[t_0, T]$, $p_h : [t_0, T] \rightarrow V_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial p_h}{\partial t} v_h d\Omega + \chi \left(\int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla v_h d\Omega - \int_{\Gamma_5} g_5 v_h ds \right) &= 0 \quad \forall v_h \in V_h, \\ p_h(t) &= 1 \text{ sobre } \Gamma_D; \quad t > t_0, \\ p_h(t_0) &= 1 \text{ en } \Omega, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde $g_5 = \frac{Q\mu}{2\pi k H r_w}$. Recordemos que este modelo se trabaja en coordenadas cartesianas. Al sustituir

$$p_h = \sum_{j=1}^{nnt} p_j(t) \phi_j(x, y), \quad (3.30)$$

y $v_h = \phi_j(x, y) \quad j = 1, 2, \dots, nnt$, en la ecuación (3.29) se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^{nnt} p_j(t) \phi_j \right) \phi_i d\Omega + \chi \left(\int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{j=1}^{nnt} p_j(t) \phi_j \right) \cdot \nabla \phi_i d\Omega - \int_{\Gamma_5} g_5 \phi_i ds \right) = 0$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, nnt,$$

$$\left(\sum_{j=1}^{nnt} \frac{\partial p_j(t)}{\partial t} \right) \int_{\Omega} \phi_j \phi_i d\Omega + \chi \left(\sum_{j=1}^{nnt} p_j(t) \int_{\Omega} \nabla (\phi_j) \cdot \nabla \phi_i d\Omega - \int_{\Gamma_5} g_5 \phi_i ds \right) = 0$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, nnt,$$

$$\left(\sum_{j=1}^{nnt} \frac{\partial p_j(t)}{\partial t} \right) \int_{\Omega} \phi_j \phi_i d\Omega + \chi \sum_{j=1}^{nnt} p_j(t) \int_{\Omega} \nabla (\phi_j) \cdot \nabla \phi_i d\Omega = \chi \int_{\Gamma_5} g_5 \phi_i ds$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, nnt,$$

donde nnt representa el número de nodos totales.

La igualdad anterior se reescribe matricialmente como

$$M \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \chi N \vec{P} = \chi \vec{f}, \quad (3.31)$$

donde $\vec{P}^T = [p_1, p_2, \dots, p_{nnt}]$,

$$\begin{aligned} M_{i,j} &= \int_{\Omega} \phi_j \phi_i d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, nnt, \\ N_{i,j} &= \int_{\Omega} \nabla(\phi_j) \cdot \nabla(\phi_i) d\Omega, \\ f_i &= \int_{\Gamma_5} g_5 \phi_i ds. \end{aligned}$$

En este caso, las matrices pueden descomponerse de la siguiente forma, usando la propiedad de sumabilidad:

$$M_{i,j} = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} (\phi_j|_{\Omega_e}) (\phi_i|_{\Omega_e}) d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, nnt, \quad (3.32)$$

$$N_{i,j} = \sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} \nabla(\phi_j|_{\Omega_e}) \cdot \nabla(\phi_i|_{\Omega_e}) d\Omega, \quad (3.33)$$

$$f_i = \sum_{e=1}^{nefn5} \int_{\Gamma_e} g_5 (\phi_i|_{\Gamma_e}) ds, \quad (3.34)$$

con $nefn5$ el número de elementos en la frontera Γ_5 .

Integración respecto al tiempo

Para aproximar la derivada $\frac{\partial p_h}{\partial t}$ se divide el intervalo $[t_0, T]$ en N subintervalos de tamaño $\Delta t = \frac{T - t_0}{N}$, donde los nodos se definen como $t_n = t_0 + \frac{n}{\Delta t}$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Sea p_h^n la aproximación a $p_h(t_n)$ para cada $(x, y) \in \Omega$, para escribir el método implícito de Euler hacia atrás se aproxima la derivada $\frac{\partial p_h}{\partial t}$ de la ecuación (3.29) por la expresión

$$\frac{\partial p_h}{\partial t} = \frac{p_h^{n+1} - p_h^n}{\Delta t}.$$

Al igual que en (3.31), el problema resultante se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{aligned} M \left(\frac{\vec{P}^{n+1} - \vec{P}^n}{\Delta t} \right) + \chi_N \vec{P}^{n+1} &= \chi \vec{f}, \\ M \left(\vec{P}^{n+1} - \vec{P}^n \right) + \chi \Delta t N \vec{P}^{n+1} &= \chi \Delta t \vec{f}, \end{aligned}$$

donde las matrices M , N y \vec{f} están descritas en las ecuaciones (3.32)-(3.34), respectivamente.

Es decir, en cada paso de tiempo, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(M + \chi \Delta t N) \vec{P}^{n+1} = M \vec{P}^n + \chi \Delta t \vec{f}, \quad (3.35)$$

donde $\vec{P}^0 = \vec{1}$. En este caso, el error de discretización para el tiempo es del orden Δt , $\mathcal{O}(\Delta t)$.

Una vez obtenida la presión se aproxima la velocidad en cada nodo, la cual satisface la ecuación (2.41)

$$\vec{u}_h = -\nabla p_h. \quad (3.36)$$

Siguiendo un análisis similar al de la sección 3.4.1, cuando se usa la fórmula de Green se tiene que las componentes de la velocidad son de la forma siguiente:

$$u_{1,i} = \frac{\int_{sop(\phi_i)} p_h \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} d\Omega - \int_{\partial sop(\phi_i)} p_h n_1 \phi_i(x, y) ds}{\int_{sop(\phi_i)} \phi_i(x, y) d\Omega}, \quad (3.37)$$

y

$$u_{2,i} = \frac{\int_{sop(\phi_i)} p_h \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} d\Omega - \int_{\partial sop(\phi_i)} p_h n_2 \phi_i(x, y) ds}{\int_{sop(\phi_i)} \phi_i(x, y) d\Omega}, \quad (3.38)$$

donde $\vec{n} = (n_1, n_2)^T$ es la normal exterior del soporte de ϕ_i . Así, por la propiedad de sumabilidad se obtiene que

$$u_{1,i} = \frac{\sum_{\Omega_e \subset sop(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \left(\sum_{j=1}^{nne} p_j \phi_j |_{\Omega_e} \right) \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega - \sum_{\Gamma_e \subset \partial sop(\phi_i)} \int_{\Gamma_e} \phi_i n_1 \left(\sum_{j=1}^{nnef} p_j \phi_j |_{\Gamma_e} \right) ds}{\sum_{\Omega_e \subset sop(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega},$$

y

$$u_{2,i} = \frac{\sum_{\Omega_e \subset sop(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \left(\sum_{j=1}^{nne} p_j \phi_j |_{\Omega_e} \right) \frac{\partial \phi_i}{\partial y} d\Omega - \sum_{\Gamma_e \subset \partial sop(\phi_i)} \int_{\Gamma_e} \phi_i n_2 \left(\sum_{j=1}^{nnef} p_j \phi_j |_{\Gamma_e} \right) ds}{\sum_{\Omega_e \subset sop(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega}.$$

donde nne es el número de nodos por elemento y $nnef$ es el número de nodos por elemento de frontera.

3.5. Funciones de forma

Si se restringen las funciones de la base ϕ_j y ϕ_i al elemento Ω_e se obtiene las funciones de forma ψ_β , ψ_λ como sigue:

$$\phi_i |_{\Omega_e} = \psi_i^e = \psi_\beta^e(x, y) \quad y \quad \phi_j |_{\Omega_e} = \psi_j^e = \psi_\lambda^e(x, y) \quad (3.39)$$

con $\lambda, \beta = 1, \dots, nne$, es decir, λ y β son los índices locales a diferencia de i, j que son índices globales. Dichas funciones de forma cumplen lo siguiente:

$$1.- \psi_\lambda^e(x_\beta, y_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = \lambda, \\ 0 & \text{si } \beta \neq \lambda. \end{cases}$$

2.- $\sum_{k=1}^{nne} \psi_k^e(x, y) = 1$, donde nne es el número de nodos por elemento. Esta relación se puede verificar fácilmente para las funciones de Lagrange en el elemento de referencia definido en la sección 3.6, ver [1].

Entonces, las matrices (3.16)- (3.18) del sistema de ecuaciones que resulta en la formulación variacional de flujo monofásico incompresible, se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{e=1}^{ne} K^e \quad \text{con} \quad K_{\beta, \lambda}^e = \int_{\Omega_e} \nabla(\psi_\beta^e) \cdot \nabla(\psi_\lambda^e) r d\Omega, \\ &\quad \forall \beta, \lambda = 1, 2, \dots, nne. \\ \vec{b}_1 &= \sum_{e=1}^{nefn2} \vec{b}_1^e \quad \text{con} \quad b_{1, \beta}^e = \int_{\Gamma_e} \psi_\beta^e ds, \\ &\quad \forall \beta = 1, 2, \dots, nnef. \\ \vec{b}_2 &= \sum_{e=1}^{nefn2} \vec{b}_2^e \quad \text{con} \quad b_{2, \beta}^e = \int_{\Gamma_e} \psi_\beta^e ds, \\ &\quad \forall \beta = 1, 2, \dots, nnef. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Y, para el problema de flujo monofásico ligeramente compresible, las matrices (3.32)-

(3.34) se reescriben como

$$\begin{aligned}
 M &= \sum_{e=1}^{ne} M^e \quad \text{con} \quad M_{\beta,\lambda}^e = \int_{\Omega_e} (\psi_\beta^e) (\psi_\lambda^e) d\Omega, \\
 &\quad \forall \beta, \lambda = 1, 2, \dots, nne. \\
 K &= \sum_{e=1}^{ne} K^e \quad \text{con} \quad K_{\beta,\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \nabla (\psi_\beta^e) \cdot \nabla (\psi_\lambda^e) d\Omega, \\
 &\quad \forall \beta, \lambda = 1, 2, \dots, nne. \\
 \vec{f} &= \sum_{e=1}^{ne} \vec{f}^e \quad \text{con} \quad \vec{f}_\beta^e = \int_{\Gamma_e} g_5 \psi_\beta^e ds, \\
 &\quad \forall \beta = 1, 2, \dots, nne.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

3.6. Transformación isoparamétrica

Las integrales (3.40) y (3.41) se realizan para cada elemento Ω_e de la malla, dado que es difícil hacer las operaciones sobre éstos, se utiliza un elemento de referencia $\hat{\Omega}$, el cual relacionamos con cada elemento Ω_e , usando la transformación isoparamétrica siguiente:

$$T_e : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_e, \tag{3.42}$$

tal que

$$T_e (\hat{\Omega}) = \Omega_e,$$

donde $\hat{\Omega}$ es un elemento de referencia, ver figura 3.2.

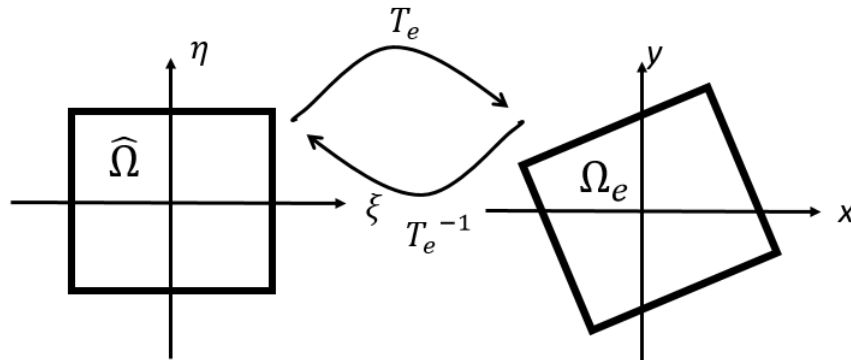


Figura 3.2: Transformación Isoparamétrica.

Teorema 1. Dada la transformación isoparamétrica en (3.42) se tiene que

$$\nabla\psi_j = Je^{-T}\nabla\hat{\psi}_j, \quad (3.43)$$

con Je el Jacobiano de la transformación isoparamétrica.

Demostración. En general

$$T_e : \begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{nne} x_k \hat{\psi}_k(\xi, \eta), \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{nne} y_k \hat{\psi}_k(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Suponiendo que x y y son funciones continuamente diferenciales respecto a ξ y η , entonces

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = Je \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}.$$

Si

$$|Je| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \neq 0,$$

entonces

$$dxdy = |Je| d\xi d\eta.$$

Lo cual implica que

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{|Je|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Por otro lado

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Igualando las ecuaciones (3.44) y (3.45) se tiene:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|Je|} \frac{\partial y}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{1}{|Je|} \frac{\partial x}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{|Je|} \frac{\partial y}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|Je|} \frac{\partial x}{\partial \xi}. \quad (3.46)$$

Sean (x_j, y_j) las coordenadas del j -ésimo nodo y ψ_j la función de forma asociada a este nodo, se sabe que

$$g : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g(x, y) = g(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = g\left(Te\left(\hat{\Omega}\right)\right) = \hat{g}(\xi, \eta),$$

$$\hat{g}(\xi, \eta) = \hat{g}(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \hat{g}(Te^{-1}(\Omega_e)).$$

Por tanto

$$\psi_j^e(x, y) = \hat{\psi}_j(\xi, \eta). \quad (3.47)$$

Por la regla de la cadena

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Por otro lado

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{nne} x_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{nne} x_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{k=1}^{nne} y_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{k=1}^{nne} y_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta}. \quad (3.49)$$

Usando las igualdades (3.46) y (3.49) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{1}{|Je|} \sum_{k=1}^{nne} y_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta}; & \frac{\partial \xi}{\partial y} &= -\frac{1}{|Je|} \sum_{k=1}^{nne} x_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= -\frac{1}{|Je|} \sum_{k=1}^{nne} y_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi}; & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{|Je|} \sum_{k=1}^{nne} x_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Sustituyendo la ecuación (3.50) en la relación (3.48) se tiene que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{|Je|} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{nne} y_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta} & -\sum_{k=1}^{nne} y_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} \\ -\sum_{k=1}^{nne} x_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \eta} & \sum_{k=1}^{nne} x_k \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{|Je|} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \end{pmatrix}.$$

Es decir

$$\nabla \psi_j = Je^{-T} \nabla \hat{\psi}_j. \quad (3.51)$$

□

3.6.1. Elementos Lineales

Las funciones de forma para el elemento de referencia lineal son

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= 1 - \xi - \eta, \\ \hat{\psi}_2 &= \xi, \\ \hat{\psi}_3 &= \eta, \end{aligned}$$

ver fig. 3.3.

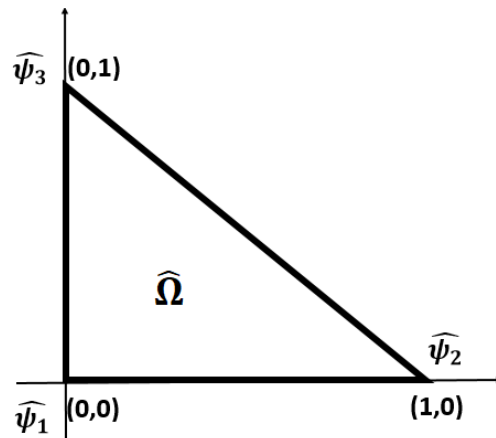


Figura 3.3: Funciones de forma para el elemento de referencia lineal.

3.6.2. Elementos Bilineales

Las funciones de forma para el elemento de referencia bilineal son

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta), \\ \hat{\psi}_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta), \\ \hat{\psi}_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta), \\ \hat{\psi}_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta),\end{aligned}$$

ver fig. [3.4](#).

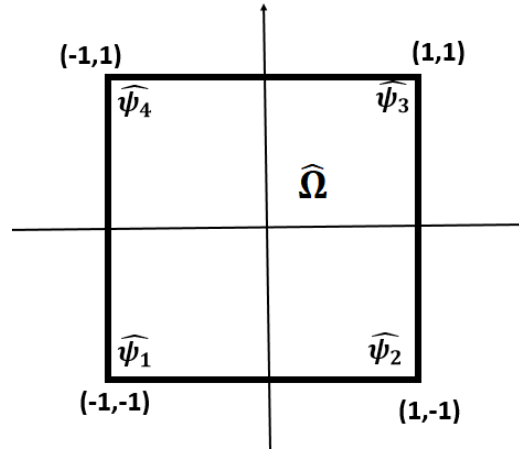


Figura 3.4: Funciones de forma para el elemento de referencia bilineal.

3.7. Integración Numérica

Las integrales se resuelven numéricamente usando una fórmula de integración adecuada, la cual se elige tomando en cuenta el orden de los polinomios de aproximación. En general la fórmula de integración se escribe de la manera siguiente:

$$\int_{\Omega_e} g(r, z) d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} g(\xi, \eta) |J_e(\xi, \eta)| d\hat{\Omega} \approx \sum_{l=1}^{npg} \hat{g}(\xi_l, \eta_l) |J_e(\xi_l, \eta_l)| w_l,$$

donde w_l y (ξ_l, η_l) son los pesos y puntos de la cuadratura, respectivamente y npg es el número de puntos de esta.

Para aproximar las integrales se usaron dos cuadraturas diferentes para cada elemento, una cerrada y otra abierta, las cuales están dadas como sigue:

3.7.1. Elementos lineales

Cuadratura abierta

Los puntos (ξ_l, η_l) y los pesos de la cuadratura abierta que usamos para elementos lineales se describe en la tabla 3.1. En este caso $npq = 1$, y el orden de la fórmula es $\mathcal{O}(h^2)$, ver [26] y [27].

l	1
ξ_l	$\frac{1}{3}$
η_l	$\frac{1}{3}$
w_l	1

Tabla 3.1: Punto y peso de cuadratura abierta para elementos lineales.

Cuadratura cerrada

Los puntos (ξ_l, η_l) y los pesos de la cuadratura cerrada que usamos para elementos lineales se describe en la tabla 3.2. Observemos que en este caso se usa $npq = 3$, y el orden de la fórmula es $\mathcal{O}(h^2)$, ver [26].

l	1	2	3
ξ_l	0	1	0
η_l	0	0	1
w_l	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tabla 3.2: Punto y peso de cuadratura cerrada para elementos lineales.

3.7.2. Elementos bilineales

Cuadratura abierta

Los puntos (ξ_l, η_l) y los pesos de la cuadratura abierta que usamos para elementos bilineales se describe en la tabla 3.3. Aquí se tiene que $npg = 4$, y que la fórmula es exacta para $Q_1(\hat{\Omega})$, ver [27].

l	1	2	3	4
ξ_l	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
η_l	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
w_l	1	1	1	1

Tabla 3.3: Punto y peso de cuadratura abierta para elementos bilineales.

Cuadratura cerrada

Los puntos (ξ_l, η_l) y los pesos de la cuadratura cerrada que usamos para elementos bilineales se describe en la tabla 3.4. En este caso $npg = 4$, y la fórmula es exacta para $Q_1(\hat{\Omega})$, ver [26], cabe mencionar que la fórmula se adaptó a nuestro elemento de referencia.

l	1	2	3	4
ξ_l	-1	1	1	-1
η_l	-1	-1	1	1
w_l	1	1	1	1

Tabla 3.4: Punto y peso de cuadratura cerrada para elementos bilineales.

Capítulo 4.

Método de Elemento Finito Mixto

En este capítulo se desarrolla el método de elemento finito mixto (MFE). Dichos métodos son de tipo elemento finito basados en formulaciones de multiplicadores de Lagrange para problemas con restricciones. Para desarrollar estos métodos seguimos el procedimiento usual y construimos subespacios finito dimensionales generados por funciones base polinomiales. El dominio Ω es, como usualmente se hace, particionado por una colección de elementos finitos y las funciones base son construidas al juntar funciones de forma definidas en cada elemento finito. La única peculiaridad con la que nos encontramos en la formulación del método mixto es que ahora aproximamos dos variables dependientes sobre cada elemento. Para obtener un método estable y convergente debemos tener cuidado en la selección de las funciones de forma. Para asegurar que la convergencia es necesario ver que las condiciones del teorema [3], en el apéndice A, para la existencia de soluciones a problemas de punto silla, se cumplen y hacer dos observaciones: (1) todas las condiciones (A.12)- (A.15) se preservan cuando estamos en el caso discreto, excepto la condición (A.19); (2) para el problema discreto, imponemos, en lugar de (A.19), una condición discreta de Babuška-Brezzi, dada por la ecuación (A.21).

Raviart y Thomas en 1977 introdujeron la primera familia de espacios de elementos finitos mixtos para problemas elípticos de segundo orden en el caso de dos dimensiones llamados RT_p . Después Nedelec en 1980 extendió estos espacios a problemas tridimensionales [3]. En nuestro caso estudiaremos únicamente los espacios RT_0 para triángulos y cuadriláteros.

A lo largo de este capítulo se definen los espacios mixtos en los que se trabaja, se generan las formulaciones variacionales para cada uno de los modelos, así como la discretización de espacios y de las formulaciones débiles. También, se describen las funciones base y cómo calcular las integrales que definen la matriz del sistema de ecuaciones, que se resuelve en cada modelo, mediante un elemento de referencia, para lo cual es importante exponer las propiedades de la transformación de Piola. Y por último, ya que al resolver los sistemas de ecuaciones, solo encontramos la presión en los baricentros de cada elemento y

las componentes normales de la velocidad en los puntos medios de cada arista, hacemos una formulación variacional para encontrar la presión y velocidad en cada vértice de la malla.

4.1. Definición de espacios

Se usa la notación estándar para espacios de Lebesgue y Sobolev $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$, respectivamente. Sean los siguientes espacios:

$$\begin{aligned}\mathbb{W} &= L^2(\Omega), \\ \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) &:= \{ \vec{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \nabla \cdot (\vec{v}) \in L^2(\Omega) \}, \\ \mathbb{V} = \mathbf{H}_{0,N}(\text{div}, \Omega) &:= \{ \vec{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \in \Gamma_N \}, \\ \mathbf{H}_{g,N}(\text{div}, \Omega) &:= \{ \vec{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) : \vec{v} \cdot \vec{n} = g \in \Gamma_N \},\end{aligned}$$

donde

$$(\vec{v}, \vec{v})_{\text{div}, \Omega} = \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v})^2 d\Omega,$$

y

$$\|\vec{v}\|_{\text{div}, \Omega}^2 = \|\vec{v}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla \cdot \vec{v}\|_{L^2}^2,$$

con $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\|\vec{v}\|_{\mathbf{L}^2}$ y $\|\nabla \cdot \vec{v}\|_{L^2}$ definidos en el apartado [3.1](#).

4.2. Formulación variacional mixta

4.2.1. Flujo monofásico incompresible

Una vez definidos los espacios donde vamos a trabajar, se hace la formulación variacional como sigue:

Como en este caso el flujo es incompresible se cumple la propiedad

$$\nabla \cdot (\vec{u}) = 0, \tag{4.1}$$

por lo que estamos buscando el campo de velocidades $\vec{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$, que satisfaga las condiciones de frontera del problema.

Sean $\vec{v} \in \mathbf{H}_{0,N}(\text{div}, \Omega_v)$ y $w \in L^2(\Omega_v)$, donde Ω_v está definida en el apartado [2.2.1](#). Multiplicando la ecuación [\(2.20\)](#) por $\vec{v} \in \mathbf{H}_{0,N}(\text{div}, \Omega_v)$ e integrando sobre Ω_v se tiene

$$\int_{\Omega_v} \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega_v = -\frac{L}{H} \int_{\Omega_v} \nabla p \cdot \vec{v} d\Omega_v, \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{H}_{0,N}(\text{div}, \Omega_v).$$

Luego, al aplicar $\nabla \cdot (\vec{v}p) = \vec{v} \cdot p + \nabla \cdot \vec{v}p$ y el teorema de la divergencia se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_v} \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega_v &= \frac{L}{H} \left[\int_{\Omega_v} p \nabla \cdot (\vec{v}) d\Omega_v - \int_{\partial\Omega_v} (\vec{v}) \cdot \vec{n} p ds \right] \\ &= \frac{L}{H} \int_{\Omega_v} p \nabla \cdot (\vec{v}) d\Omega_v, \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{H}_{0,N}(\text{div}, \Omega_v). \end{aligned}$$

Lo cual, en coordenadas cilíndricas, se ve como sigue:

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_w/H}^{L/H} \int_{-1}^1 \vec{u} \cdot \vec{v} r dr dz d\theta = \frac{L}{H} \int_0^{2\pi} \int_{r_w/H}^{L/H} \int_{-1}^1 p \nabla \cdot (\vec{v}) r dr dz d\theta, \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{H}_{0,N}(\text{div}, \Omega_v).$$

Al integrar respecto a θ y simplificando, se obtiene

$$\int_{r_w/H}^{L/H} \int_{-1}^1 \vec{u} \cdot \vec{v} r dr dz = \frac{L}{H} \int_{r_w/H}^{L/H} \int_{-1}^1 p \nabla \cdot (\vec{v}) r dr dz, \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{H}_{0,N}(\text{div}, \Omega).$$

Ahora, multiplicando la ecuación (4.1) por w e integrando sobre Ω_v se tiene

$$\int_{\Omega_v} \nabla \cdot (\vec{u}) w d\Omega_v = \int_{\Omega_v} (0) w d\Omega_v, \quad \forall w \in L^2(\Omega_v).$$

Después de integrar con respecto a θ y simplificar se obtiene

$$\int_{r_w/H}^{L/H} \int_{-1}^1 \nabla \cdot (\vec{u}) w r d\Omega = 0, \quad \forall w \in L^2(\Omega).$$

Observemos que si rotamos un ángulo 2π con respecto al eje z a la región Ω , definida en la sección 2.2.1, genera el volumen Ω_v . De igual forma al rotar la frontera Γ se genera S (ver figuras 2.3 y 2.4).

Por lo tanto la formulación variacional mixta consiste en encontrar $\vec{u} \in \mathbf{H}_{g,N}(\text{div}, \Omega)$ y $p \in \mathbb{W}$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} r d\Omega - \frac{L}{H} \int_{\Omega} p \nabla \cdot (\vec{v}) r d\Omega &= 0, \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{u}) w r d\Omega &= 0, \quad \forall w \in \mathbb{W}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

en este caso

$$\Omega = \left[\frac{r_w}{H}, \frac{L}{H} \right] \times [-1, 1].$$

Observemos que para el problema (4.2) tenga solución única, $\vec{u} \in \mathbf{H}_{g,N}(\text{div}, \Omega)$ y $p \in \mathbb{W}$ se debe satisfacer la condición inf-sup entre los espacios \mathbb{V} y \mathbb{W} , es decir, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\sup_{0 \neq \vec{v} \in \mathbb{V}} \frac{|(\nabla \cdot \vec{v}, w)_{L^2(\Omega)}|}{\|\vec{v}\|_{\text{div}, \Omega}} \geq C_1 \|w\|_{L^2}, \quad (4.3)$$

ver apéndice A, en él se detalla cuál es el problema de optimización asociado al problema (4.2).

4.2.2. Flujo monofásico ligeramente compresible

Para encontrar la formulación variacional del flujo monofásico ligeramente compresible, primero aplicamos la divergencia a la ecuación (2.41), esto es

$$\nabla \cdot \vec{u} = -\Delta p. \quad (4.4)$$

Sustituyendo la igualdad anterior en la ecuación (2.42) se tiene

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{u}. \quad (4.5)$$

Multiplicando la identidad (2.41) por $\vec{v} \in \mathbb{V}$, integrando sobre Ω y aplicando la condición de frontera tipo Neumann se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega &= - \int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{v} d\Omega, & \forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \\ &= \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{v} d\Omega - \int_{\Gamma} p \vec{v} \cdot \vec{n} ds, & \forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \\ &= \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{v} d\Omega - \int_{\Gamma_D} \vec{v} \cdot \vec{n} ds, & \forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \end{aligned}$$

donde Γ_D está definida en el apartado 3.2.2.

Por otro lado, multiplicando la ecuación (4.5) por $w \in \mathbb{W}$ e integrando sobre Ω se tiene:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} w d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{u}) w d\Omega = 0, \quad \forall w \in \mathbb{W}.$$

Así el problema variacional consiste en encontrar, para cada t fijo en $[t_0, T]$, $\vec{u}(t) \in \mathbb{V}$ y $p(t) \in \mathbb{W}$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{v} d\Omega &= - \int_{\Gamma_D} \vec{v} \cdot \vec{n} ds, & \forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \\ \int_{\Omega} \frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} w d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{u}) w d\Omega &= 0, & \forall w \in \mathbb{W}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

en este caso

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 - 1 < x, y < 1, \sqrt{x^2 + y^2} > \frac{r_w}{L} \right\}.$$

4.3. Discretización de espacios

En particular, solo vamos a analizar el comportamiento de los elementos mixtos de Raviart-Thomas de bajo orden (RT_0) para triángulos y cuadriláteros. Para ello supongamos que se tiene una triangularización del dominio Ω igual que en el método de elemento finito estándar, $\Omega_h = \cup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$. Para describir las funciones base de los espacios definidos en el apartado [4.1](#) es necesario introducir la siguiente estructura de datos que se va a utilizar. Se define \mathfrak{A} como el conjunto de aristas en Ω_h la cual cumple lo siguiente:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_N \cup \mathfrak{A}_D \cup \mathfrak{A}_I$$

donde $\mathfrak{A}_N, \mathfrak{A}_D, \mathfrak{A}_I$ denotan, respectivamente, las aristas de la frontera Neumann, de la frontera Dirichlet y las interiores.

Supongamos, además, que ningún vértice de los elementos está en el interior de alguna arista de otro elemento. Sea $\{\vec{x}_{m_i}\}$ el conjunto de puntos medios de las aristas en Ω_h , $i = 1, 2, \dots, nat$, donde nat es el número de aristas totales. A cada punto medio se le asocia un vector normal unitario global \vec{v}_i , el cual coincide con la normal exterior cuando $\vec{x}_{m_i} \in a_i \in \mathfrak{A}_N \cup \mathfrak{A}_D$, donde a_i es la i -ésima arista, para mayor información ver [3](#). Es importante enfatizar que la presión se aproxima por funciones base constantes en cada elemento y denotamos por \mathbb{W}_h el subespacio discreto de la presión tal que $\mathbb{W}_h \subset \mathbb{W}$, donde el espacio \mathbb{W} está definido en la sección [4.1](#). Por su parte, se considera que el grado de libertad de la velocidad en la arista a_i es el valor promedio de la componente normal sobre a_i (ver [9](#)), es decir el grado de libertad se concentra en el punto medio \vec{x}_{m_i} y cumple

$$\frac{1}{|a_i|} \int_{a_i} \vec{\varphi}_i(\vec{x}_{m_j}) \cdot \vec{v}_j ds = \delta_{i,j}, \quad (4.7)$$

donde $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker, \vec{v}_j es la normal global unitaria de la arista a_j . Denotamos por \mathbb{V}_h al subespacio discreto de la velocidad tal que $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$, donde el espacio \mathbb{V} está definido en la sección [4.1](#). Los subespacios finitos \mathbb{V}_h y \mathbb{W}_h satisfacen la condición inf-sup discreta tal que cumple

$$\sup_{0 \neq \vec{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{|(\nabla \cdot \vec{v}_h, w_h)|}{\|\vec{v}_h\|_{div, \Omega}} \geq C_2 \|w_h\|_{L^2}. \quad (4.8)$$

donde C_2 es una constante independiente de h , ver apéndice [A](#) y [3](#).

Las funciones base de \mathbb{V}_h cumplen que

$$(\vec{\varphi}_i \cdot \vec{v}_j)(\vec{x}_{m_j}) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j, \\ 0 & si \quad i \neq j, \end{cases} \quad (4.9)$$

$\forall i, j = 1, 2, \dots, nat$.

Por otro lado, las funciones base $\varsigma_k \in \mathbb{W}_h$ satisfacen

$$\varsigma_k(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in \Omega_k, \\ 0 & \text{si } \vec{x} \notin \Omega_k, \end{cases}$$

para $k = 1, 2, \dots, ne$.

Así cualesquiera funciones $\vec{v} \in \mathbb{V}_h$ y $w \in \mathbb{W}_h$ pueden representarse de manera única como combinación lineal de las funciones base

$$\vec{u}_h(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{nat} u_j \vec{\varphi}_j(\vec{x}), \quad (4.10)$$

con

$$(\vec{u}_h \cdot \vec{v}_i)(\vec{x}_{m_i}) = \sum_{j=1}^{nat} u_j \vec{\varphi}_j(\vec{x}_{m_i}) \cdot \vec{v}_i = u_i$$

y

$$p_h(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{ne} p_k \varsigma_k(\vec{x}), \quad (4.11)$$

donde

$$p_k = p_h(\vec{x}_k)$$

y \vec{x}_k es el baricentro del elemento Ω_k .

4.4. Discretización de la formulación variacional

4.4.1. Flujo monofásico incompresible

El problema variacional discreto consiste en encontrar $\vec{u}_h \in \mathbb{V}_h$ y $w_h \in \mathbb{W}_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h r d\Omega - \frac{L}{H} \int_{\Omega_h} p_h \nabla \cdot (\vec{v}_h) r d\Omega &= 0, & \forall \vec{v}_h \in \mathbb{V}_h, \\ \int_{\Omega_h} \nabla \cdot (\vec{u}_h) w_h r d\Omega &= 0, & \forall w_h \in \mathbb{W}_h. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Sustituyendo las funciones, que depende del vector $\vec{x} = (r, z)$, (4.10) y (4.11) en el problema discreto (4.12) y tomando $\vec{v} = \vec{\varphi}_i$ y $w_h = \varsigma_l$ se tiene

$$\int_{\Omega_h} \left(\sum_{j=1}^{nat} u_j \vec{\varphi}_j(r, z) \right) \cdot \vec{\varphi}_i(r, z) r d\Omega - \frac{L}{H} \int_{\Omega_h} \left(\sum_{k=1}^{ne} p_k \varsigma_k \right) \nabla \cdot (\vec{\varphi}_i(r, z)) r d\Omega = 0,$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, nat,$$

$$\int_{\Omega_h} \nabla \cdot \left(\sum_{j=1}^{nat} u_j \vec{\varphi}_j(r, z) \right) \varsigma_l r d\Omega = 0$$

$$\forall l = 1, 2, \dots, ne.$$

Entonces, se llega a lo siguiente:

$$\sum_{j=1}^{nat} u_j \int_{\Omega_h} \vec{\varphi}_j(r, z) \cdot \vec{\varphi}_i(r, z) r d\Omega - \frac{L}{H} \sum_{k=1}^{ne} p_k \int_{\Omega_h} \varsigma_k \nabla \cdot (\vec{\varphi}_i(r, z)) r d\Omega = 0,$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, nat,$$

$$\sum_{j=1}^{nat} u_j \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \vec{\varphi}_j(r, z) \varsigma_l r d\Omega, = 0,$$

$$\forall l = 1, 2, \dots, ne.$$

Lo cual puede representarse matricialmente como

$$\bar{M} \vec{U}_h - \frac{L}{H} \bar{N}^T \vec{P}_h = 0,$$

$$\bar{N} \vec{U}_h = 0.$$

o bien,

$$\begin{pmatrix} \bar{M} & -\frac{L}{H} \bar{N}^T \\ \bar{N} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_h \\ \vec{P}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

donde

$$\bar{M} = \sum_{e=1}^{ne} \bar{M}^e \quad \text{con} \quad \bar{M}_{\beta, \lambda}^e = \int_{\Omega_e} (\vec{\varphi}_\lambda^e) \cdot (\vec{\varphi}_\beta^e) r d\Omega, \quad \lambda, \beta = 1, \dots, glve.$$

$$\bar{N} = \sum_{e=1}^{ne} \bar{N}^e \quad \text{con} \quad \bar{N}_{\tau, \lambda}^e = \int_{\Omega_e} \varsigma_\tau^e \nabla \cdot (\vec{\varphi}_\lambda^e) r d\Omega, \quad \lambda = 1, \dots, glve,$$

$$\tau = 1, \dots, glpe.$$

Ya que

$$\vec{\varphi}_i|_{\Omega_e} = \vec{\varphi}_\beta^e, \quad \vec{\varphi}_j|_{\Omega_e} = \vec{\varphi}_\lambda^e, \quad \varsigma_l|_{\Omega_e} = \varsigma_\tau^e, \quad \varsigma_k|_{\Omega_e} = \varsigma_\delta^e,$$

con $glve$ y $glpe$ el número de grados de libertad por elemento de la velocidad y la presión, respectivamente.

Si M es positiva definida y N es una matriz de rango completo, la solución del sistema (4.13) puede reducirse a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{L}{H}NM^{-1}N^T\vec{P}_h &= \vec{0} \\ M\vec{U}_h &= \frac{L}{H}N^T\vec{P}_h \end{aligned}$$

Esta forma de resolver el sistema no es la más eficiente pues requiere calcular la matriz inversa de M [22]. Existen varios métodos iterativos para resolver estos sistemas, por ejemplo los métodos clásicos de Jacobi o Gauss-Seidel relajados o amortiguados, o los métodos en subespacios de Krylov preconditionados, entre otros [23]. Nosotros aprovechamos el software MATLAB y resolvemos los sistemas de ecuaciones usando la función $A \setminus b$ por ser robusta. Esta función primero identifica si A es una matriz *sparse* o no y después elige un método directo que aproxime mejor la solución dependiendo de la forma de la matriz A , por ejemplo el método QR, factorización de Cholesky, factorización LDL, métodos para matrices triangulares y resolvedores para matrices simétricas.

Sean \vec{u} , p y \vec{u}_h , p_h soluciones de los problemas (4.2) y (4.12), respectivamente. Entonces se tiene el siguiente orden de error de aproximación:

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \quad (4.15)$$

donde C depende del tamaño de la malla [3].

4.4.2. Flujo monofásico ligeramente compresible

El problema discreto consiste en encontrar $\vec{u}_h \in \mathbb{V}_h$ y $p_h \in \mathbb{W}_h$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h d\Omega - \int_{\Omega_h} p_h \nabla \cdot \vec{v}_h d\Omega &= - \int_{\Gamma_{D,h}} \vec{v}_h \cdot \vec{n} ds, \quad \forall \vec{v}_h \in \mathbb{V}_h, \\ \int_{\Omega_h} \frac{1}{\chi} \frac{\partial p_h}{\partial t} w_h d\Omega + \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \vec{u}_h w_h d\Omega &= 0, \quad \forall w_h \in \mathbb{W}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para el caso de flujo monofásico ligeramente compresible la presión y velocidad pueden expresarse como combinación lineal de las funciones base, respectivamente como

$$p_h = \sum_{k=1}^{ne} p_k(t) \varsigma_k(x, y), \quad (4.17)$$

$$u_h = \sum_{j=1}^{nat} u_j(t) \vec{\varphi}_j(x, y), \quad (4.18)$$

donde las funciones base ς_k y φ_j están definidas en el apartado anterior. Sustituyendo p_h y \vec{u}_h y considerando $v_h = \vec{\varphi}_i$, $w_h = \varsigma_l$ en el problema discreto (4.16) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \left(\sum_{j=1}^{nat} u_j(t) \vec{\varphi}_j(x, y) \right) \cdot \vec{\varphi}_i(x, y) d\Omega & - \int_{\Omega_h} \left(\sum_{k=1}^{ne} p_k(t) \varsigma_k(x, y) \right) \nabla \cdot \vec{\varphi}_i(x, y) d\Omega \\ & = - \int_{\Gamma_{D,h}} \vec{\varphi}_i \cdot \vec{n} ds, \quad \forall 1 \leq i \leq nat, \\ \int_{\Omega_h} \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{k=1}^{ne} p_k(t) \varsigma_k(x, y) \right) \varsigma_l(x, y) d\Omega & + \int_{\Omega_h} \nabla \cdot \left(\sum_{j=1}^{nat} u_j(t) \vec{\varphi}_j(x, y) \right) \varsigma_l(x, y) d\Omega = 0, \\ & \quad \forall 1 \leq l \leq ne. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{nat} u_j(t) \int_{\Omega_h} (\vec{\varphi}_j(x, y)) \cdot \vec{\varphi}_i(x, y) d\Omega & - \sum_{k=1}^{ne} p_k(t) \int_{\Omega_h} (\varsigma_k(x, y)) \nabla \cdot \vec{\varphi}_i(x, y) d\Omega \\ & = - \int_{\Gamma_{D,h}} \vec{\varphi}_i \cdot \vec{n} ds, \quad \forall 1 \leq i \leq nat, \\ \frac{1}{\chi} \sum_{k=1}^{ne} \frac{\partial}{\partial t} p_k(t) \int_{\Omega_h} (\varsigma_k(x, y)) \varsigma_l(x, y) d\Omega & + \sum_{j=1}^{nat} u_j(t) \int_{\Omega_h} \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j(x, y)) \varsigma_l(x, y) d\Omega = 0, \\ & \quad \forall 1 \leq l \leq ne. \end{aligned}$$

O bien

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{nat} u_j(t) \int_{\Omega_h} (\vec{\varphi}_j(x, y)) \cdot \vec{\varphi}_i(x, y) d\Omega & - \sum_{k=1}^{ne} p_k(t) \int_{\Omega_h} (\varsigma_k(x, y)) \nabla \cdot \vec{\varphi}_i(x, y) d\Omega \\
& = - \int_{\Gamma_{D,h}} \vec{\varphi}_i \cdot \vec{n} ds, \quad \forall 1 \leq i \leq nat, \\
\sum_{j=1}^{nat} u_j(t) \int_{\Omega_h} \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j(x, y)) \varsigma_l(x, y) d\Omega & + \frac{1}{\chi} \sum_{k=1}^{ne} \frac{\partial}{\partial t} p_k(t) \int_{\Omega_h} (\varsigma_k(x, y)) \varsigma_l(x, y) d\Omega = 0, \\
& \forall 1 \leq l \leq ne.
\end{aligned}$$

Lo cual tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{aligned}
\bar{M}\vec{U} - \bar{N}^T\vec{P} & = -\vec{d}, \\
\bar{N}\vec{U} + \frac{1}{\chi}\bar{K}\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} & = \vec{0}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Para aproximar la derivada de p respecto de t se usa un Euler hacia atrás, lo cual nos lleva a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\bar{M}\vec{U}^{n+1} - \bar{N}^T\vec{P}^{n+1} & = -\vec{d}, \\
\bar{N}\vec{U}^{n+1} + \frac{1}{\chi}\bar{K}\left(\frac{\vec{P}^{n+1} - \vec{P}^n}{dt}\right) & = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Es decir, en cada paso de tiempo de debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\bar{M}\vec{U}^{n+1} - \bar{N}^T\vec{P}^{n+1} & = -\vec{d}, \\
\bar{N}\vec{U}^{n+1} + \frac{1}{\chi}\bar{K}\left(\frac{\vec{P}^{n+1}}{\Delta t}\right) & = \frac{1}{\Delta t\chi}\bar{K}\vec{P}^n.
\end{aligned}$$

El cual puede verse como sigue

$$\begin{pmatrix} \bar{M} & -\bar{N}^T \\ \bar{N} & \frac{1}{\chi\Delta t}\bar{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}^{n+1} \\ \vec{P}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{d} \\ \frac{1}{\Delta t\chi}\bar{K}\vec{P}^n \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$

donde

$$\bar{M}_{i,j} = \int_{\Omega_h} \vec{\varphi}_j(x, y) \cdot \vec{\varphi}_i(x, y) d\Omega, \quad i, j = 1, \dots, nat, \tag{4.21}$$

$$\bar{N}_{k,j} = \int_{\Omega_h} \nabla \cdot (\vec{\varphi}_j(x, y)) \varsigma_l(x, y) d\Omega, \quad k = 1, \dots, ne \text{ y } j = 1, \dots, nat, \quad (4.22)$$

$$\bar{K}_{k,l} = \int_{\Omega_h} \varsigma_k(x, y) \varsigma_l(x, l) d\Omega, \quad k, l = 1, \dots, ne, \quad (4.23)$$

$$\vec{d}_i = \int_{\Gamma_{D,h}} \vec{\varphi}_i(x, y) \cdot \vec{n} ds, \quad i = 1, \dots, nat. \quad (4.24)$$

Por la propiedad de sumabilidad se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \sum_{e=1}^{ne} \bar{M}^e, \quad \text{con } \bar{M}_{\beta,\lambda}^e = \int_{\Omega_e} (\vec{\varphi}_\lambda^e) \cdot (\vec{\varphi}_\beta^e) d\Omega, \quad \lambda, \beta = 1, \dots, glve, \\ \bar{N} &= \sum_{e=1}^{ne} \bar{N}^e, \quad \text{con } \bar{N}_{\tau,\lambda}^e = \int_{\Omega_e} \varsigma_\tau^e \nabla \cdot (\vec{\varphi}_\lambda^e) d\Omega, \quad \lambda = 1, \dots, glve, \\ &\quad \tau = 1, \dots, glpe. \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\bar{K} = \sum_{e=1}^{ne} \bar{K}^e, \quad \text{con } \bar{K}_{\tau,\delta}^e = \int_{\Omega_e} \varsigma_\tau^e \varsigma_\delta^e d\Omega, \quad \tau, \delta = 1, \dots, glpe,$$

$$\vec{d}_i = \sum_{e=1}^{ne} \vec{d}_i^e, \quad \text{con } \vec{d}_\beta^e = \int_{\Gamma_e} (\vec{\varphi}_\beta^e) \cdot \vec{n} ds, \quad \beta = 1, \dots, glve,$$

pues

$$\vec{\varphi}_i |_{\Omega_e} = \vec{\varphi}_\beta^e, \quad \vec{\varphi}_j |_{\Omega_e} = \vec{\varphi}_\lambda^e, \quad \varsigma_l |_{\Omega_e} = \varsigma_\tau^e, \quad \varsigma_k |_{\Omega_e} = \varsigma_\delta^e,$$

donde *glve* y *glpe* son el número de grados de libertad por elemento de la velocidad y presión, respectivamente.

4.5. Funciones base

A continuación presentamos los elementos de Raviart-Thomas de bajo orden para triángulos y cuadriláteros.

4.5.1. Raviart- Thomas de bajo orden (RT_0) en triángulos

Para definir los espacios, es necesario primero describir el siguiente espacio: (ver [\[3\]](#))

$$\mathbb{P}_r(\Omega) = \{q : q \text{ es un polinomio de grado a lo más } r \text{ en } \Omega\}. \quad (4.26)$$

Así, los subespacios de elementos mixtos RT_0 en triángulos se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_h(\Omega_e) &= (\mathbb{P}_0(\Omega_e))^2 \oplus ((x, y)\mathbb{P}_0(\Omega_e)), \\ \mathbb{W}_h(\Omega_e) &= \mathbb{P}_0(\Omega_e),\end{aligned}\tag{4.27}$$

donde la notación \oplus indica suma directa y $((x, y)\mathbb{P}_0(\Omega_e) = (x\mathbb{P}_0(\Omega_e), y\mathbb{P}_0(\Omega_e)))$. Puede observarse que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_h(\Omega_e) &= \left\{ \vec{V} : \vec{V}|_{\Omega_e} = (b_e x + a_e, b_e y + c_e)^T; a_e, b_e, c_e \in \mathbb{R}, \Omega_e \in \Omega_h \right\}, \\ \mathbb{W}_h(\Omega_e) &= \{w : w \text{ es constante en } \Omega_e \in \Omega_h\}.\end{aligned}$$

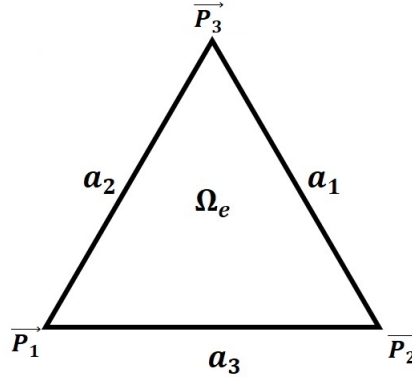


Figura 4.1: Elemento RT_0 en triángulos.

La figura [4.1](#) muestra la numeración de las aristas a_β de un elemento, dada la numeración local de los vértices o puntos \vec{P}_β para $\beta = 1, 2, 3$.

4.5.2. Raviart- Thomas de bajo orden (RT_0) en cuadriláteros

Consideremos que Ω_h es una partición de Ω en rectángulos. Los elementos de Raviart-Thomas en cuadriláteros son una extensión de RT_0 en triángulos, los cuales se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_h(\Omega_e) &= \mathbb{Q}_{1,0}(\Omega_e) \times \mathbb{Q}_{0,1}(\Omega_e), \\ \mathbb{W}_h(\Omega_e) &= \mathbb{Q}_{0,0},\end{aligned}$$

donde

$$\mathbb{Q}_{l,r}(\Omega_e) = \left\{ v : v(\vec{x}) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^r \nu_{i,j} x^i y^j, \vec{x} = (x, y) \in \Omega_e, \nu_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

es el subespacio de polinomios de grado a lo más l en x y r en y , $l, r \geq 0$. Así los subespacios \mathbb{V}_h y \mathbb{W}_h para el espacio RT_0 en cuadriláteros, se definen como

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_h(\Omega_e) &= \left\{ \vec{v} : \vec{v} = (a_e + b_e x, c_e + d_e y)^T, a_e, b_e, c_e, d_e \in \mathbb{R} \right\}, \\ \mathbb{W}_h(\Omega_e) &= \{ w \in \mathbb{W} : w \text{ es constante en } \Omega_e \in \Omega_h \}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

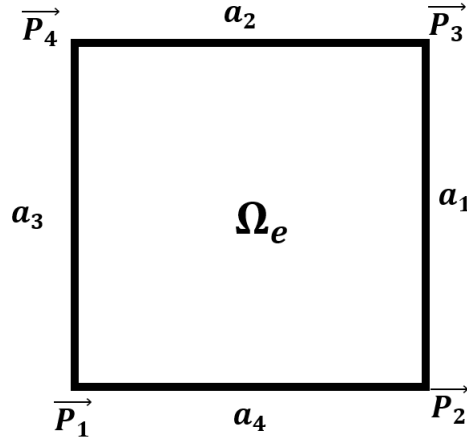


Figura 4.2: Elemento RT_0 en cuadriláteros.

La figura [4.2](#) muestra la numeración local de los puntos o vértices \vec{P}_β y las aristas a_β , $\beta = 1, 2, 3, 4$ para un cuadrilátero.

4.5.3. Funciones base sobre los elementos de la malla

En los elementos de Raviart-Thomas de bajo orden en triángulos se tiene una definición para las funciones base, lo cual nos permite trabajar directamente en los elementos de la malla o usando un elemento de referencia. La definición de las funciones de forma para los elementos de la malla es la siguiente:

Definición 4.5.1. Sean a_1, a_2, a_3 , las aristas del triángulo Ω_e cuyos vértices opuestos son $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$, respectivamente, y sea \vec{v}_j el vector normal unitario de a_j , elegidos con una orientación global fija y \vec{n}_j la normal unitaria exterior de Ω_e a lo largo de a_j . Se definen las funciones de forma como sigue:

$$\vec{\varphi}_\beta^e = \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} (\vec{x} - \vec{P}_\beta) \quad \text{para } \beta = 1, 2, 3,\tag{4.29}$$

y $\vec{x} \in \Omega_e$ donde $\sigma_\beta = \vec{n}_\beta \cdot \vec{\nu}_\beta$, $|a_\beta|$ es la longitud de la arista a_β y $|\Omega_e|$ es el área del elemento.

La normal global $\vec{\nu}_j$ puede verse como $\vec{\nu}_j = \pm \vec{n}_j$, el signo se elige tal que $\vec{\nu}_j$ apunta del elemento con índice menor al elemento con índice mayor, como se muestra en la figura 4.3.

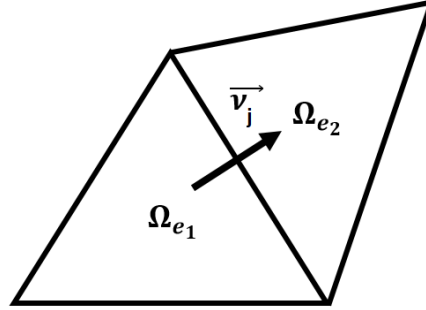


Figura 4.3: Orientación de la normal global $\vec{\nu}_j$, con $e_1 < e_2$.

Cabe señalar que la definición (4.29) satisface las relaciones (4.7) y (4.9), ver apéndice B.

En general la forma de aproximar las integrales en cada elemento de la malla es usando la siguiente fórmula de integración:

$$\int_{\Omega_e} (\vec{\varphi}_\lambda^e(\vec{x})) \cdot (\vec{\varphi}_\beta^e(\vec{x})) r d\Omega_e \approx \frac{|\Omega_e|}{3} \sum_{l=1}^3 (\vec{\varphi}_\lambda^e(\vec{x}_l)) \cdot (\vec{\varphi}_\beta^e(\vec{x}_l)) r_l,$$

y

$$\int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\vec{\varphi}_\lambda^e \vec{x}) r d\Omega_e \approx \frac{|\Omega_e|}{3} \sum_{l=1}^3 \nabla \cdot (\vec{\varphi}_\lambda^e(\vec{x}_l)) x_l,$$

donde (x_l, y_l) son los puntos medios de las aristas del elemento.

4.6. Transformación de Piola

Los subespacios discretos de $H(\text{div}, \Omega)$ son construidos usualmente a través de un elemento de referencia $\hat{\Omega}$ y un cambio de coordenadas del espacio físico al espacio de referencia, como se muestra en la figura 4.4.

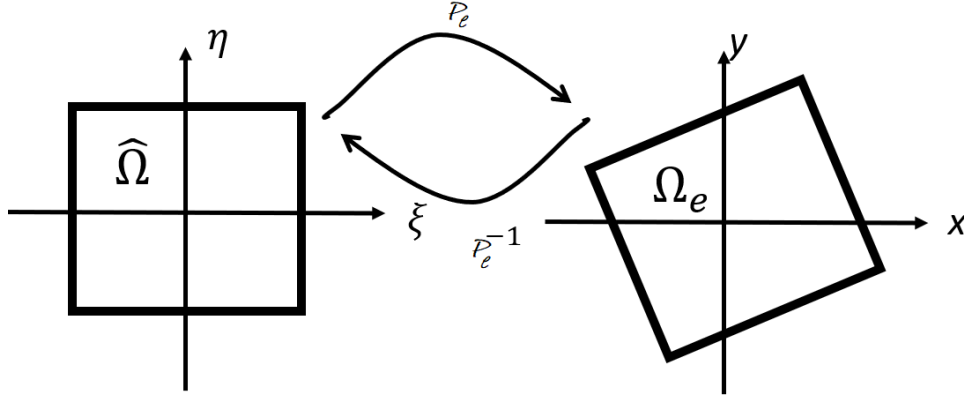


Figura 4.4: Transformación de Piola.

Sean $\hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ el elemento de referencia y $\partial\hat{\Omega}$ su frontera. Denotamos por \hat{n} la normal exterior.

Sea F_e un mapeo suave e invertible que mapea el elemento de referencia $\hat{\Omega}$ en el elemento Ω_e del espacio físico

$$F_e : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \hat{\Omega} \mapsto \Omega_e \quad \text{con} \quad F_e(\hat{\Omega}) = \Omega_e.$$

Suponemos que la matriz Jacobiana $DF_e(\vec{\xi})$ es invertible $\forall \vec{\xi} \in \hat{\Omega}$, donde

$$DF_e^{-1}(\vec{x}) = (DF_e(\vec{\xi}))^{-1}.$$

Además $J_e(\vec{\xi}) = \det(DF_e(\vec{\xi}))$ es el Jacobiano de F_e . Observemos que $\hat{q}(\vec{\xi})$ es una función vectorial en $\hat{\Omega}$ y definimos la función $\vec{q}(\vec{x}) \in \Omega_e$ por

$$\vec{q}(\vec{x}) = \mathcal{G}(\hat{q})(\vec{x}) = \hat{q}(\vec{\xi}) \quad \text{con} \quad \vec{x} = F_e(\vec{\xi}).$$

Como \mathcal{G} es un isomorfismo de $\mathbf{L}^2(\hat{\Omega})$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, no podemos construir funciones $\vec{q} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ ya que no preserva componentes normales y no mapea $\mathbf{H}(\text{div}, \hat{\Omega})$ en $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega_e)$ [6]. Es por eso que se debe utilizar la transformación de Piola:

$$\mathcal{P}_e : \mathbf{H}(\text{div}, \hat{\Omega}) \rightarrow \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_e) \\ \hat{q} \rightarrow \vec{q}$$

Definición 4.6.1. Consideremos $\hat{q} \in (\mathbf{L}^2(\hat{\Omega}))$. Se define la transformación de Piola como

$$\vec{q}(\vec{x}) = \mathcal{P}_e(\hat{q})(\vec{x}) = \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} DF_e(\vec{\xi}) \hat{q}(\vec{\xi}); \quad \vec{x} = F_e(\vec{\xi}). \quad (4.30)$$

En particular \mathcal{P}_e preserva las trazas normales; y además, es un isomorfismo de $\mathbf{H}(div, \hat{\Omega})$ en $\mathbf{H}(div, \Omega)$. Estas propiedades de la transformación de Piola permiten definir subespacios de $\mathbf{H}(div, \Omega)$ a través de un elemento de referencia $\hat{\Omega}$.

Dado que para obtener las funciones base de los elementos RT_0 se consideran valores promedio de las componentes normales sobre las aristas, como se especifica en la ecuación (4.7), para encontrar los coeficientes $\vec{\alpha} = [a_e, b_e, c_e, d_e]^T$ de cada función de forma $\hat{\varphi}_\beta$, se evalúa la relación (4.7) en cada punto medio \vec{x}_{m_β} y se resuelve un sistema de ecuaciones de la siguiente forma: (ver apartado 4.6.2)

$$\Phi \vec{\alpha} = |a_\beta| \vec{\gamma}. \quad (4.31)$$

Mientras que cuando no se consideran los valores promedio de las componentes normales, el sistema es el siguiente:

$$\Phi \vec{\alpha}^* = \vec{\gamma}. \quad (4.32)$$

De las ecuaciones (4.31) y (4.32) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|a_\beta|} \Phi \vec{\alpha} &= \Phi \vec{\alpha}^*, \\ \Phi \left(\frac{1}{|a_\beta|} \vec{\alpha} \right) &= \Phi \vec{\alpha}^*, \\ \Phi^{-1} \Phi \left(\frac{1}{|a_\beta|} \vec{\alpha} \right) &= \Phi^{-1} \Phi \vec{\alpha}^*, \\ \frac{1}{|a_\beta|} \vec{\alpha} &= \vec{\alpha}^*. \end{aligned}$$

Φ^{-1} existe ya que el sistema tiene solución única. De lo anterior se deduce que para cualquier función vectorial $\vec{q}(\vec{x})$ en $\mathbf{H}(div, \Omega)$ se tiene

$$\frac{1}{|a_\beta|} \vec{q}(\vec{x}) = \vec{q}^*(\vec{x}). \quad (4.33)$$

Ahora, al aplicar la transformación de Piola a \hat{q} se obtiene

$$\vec{q}^*(\vec{x}) = \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} DF_e(\vec{\xi}) \hat{q}^*(\vec{\xi}); \quad \vec{x} = F_e(\vec{\xi}),$$

donde $\vec{q}^*(\vec{x})$ no considera los valores promedio sobre las aristas. Entonces, al sustituir (4.33) en la identidad anterior

$$\frac{1}{|a_\beta|} \vec{q}(\vec{x}) = \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} DF_e(\vec{\xi}) \frac{1}{|\hat{a}_\beta|} \hat{q}(\vec{\xi}).$$

Por tanto

$$\vec{q}(\vec{x}) = \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} DF_e(\vec{\xi}) \hat{q}(\vec{\xi}). \quad (4.34)$$

Por otro lado, como los elementos de la base de \mathbb{W}_h satisfacen $\zeta_\tau^e(\vec{x}) = \hat{\zeta}_\tau(\vec{\xi})$ para $\tau = 1, \dots, glpe$ y F_e es la transformación isoparamétrica dada en la expresión (3.42), entonces por el Teorema 1 del capítulo 3 se tiene que

$$\nabla_{\zeta_\tau} = DF_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{\zeta}_\tau, \quad \tau = 1, \dots, glpe.$$

A continuación presentamos algunas propiedades que relacionan operaciones de los elementos mixtos de la malla Ω_e con el elemento de referencia $\hat{\Omega}$.

Proposición 1. *En coordenadas cartesianas se cumple*

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} \hat{\nabla} \cdot \hat{q}.$$

Demostración. Se supone que

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

son tales que

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad \xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta.$$

Al despejar $\hat{q}(\vec{\xi})$ de la ecuación (4.34) se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{q}(\vec{\xi}) &= \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} J_e(\vec{\xi}) (DF_e)^{-1}(\vec{\xi}) \vec{q} \\ &= \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \vec{q} \\ &= \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} q_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ q_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + q_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, la notación que se usa es

$$\begin{aligned} \hat{q}_i &= \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} \vec{q}, \quad i = 1, 2 \\ &= \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} J_e(\vec{\xi}) (\nabla_{\vec{x}} \xi_i)^T \vec{q}, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

y sea $\tilde{T}_{i,j} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(J_e(\vec{\xi})(\nabla_{\vec{x}} \xi_i)^T \right) \right] \vec{q}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} J_e(\vec{\xi})(\nabla_{\vec{x}} \xi_i)^T \vec{q} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left[\frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} J_e(\vec{\xi})(\nabla_{\vec{x}} \xi_i)^T \right] \vec{q} + \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} J_e(\vec{\xi})(\nabla_{\vec{x}} \xi_i)^T \frac{\partial}{\partial \xi_j} [\vec{q}] \\
&= \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} \left\{ \tilde{T}_{i,j} + J_e(\vec{\xi})(\nabla_{\vec{x}} \xi_i)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_j} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_j} \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} \left\{ \tilde{T}_{i,j} + J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^2 \frac{\partial q_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} \\ \sum_{l=1}^2 \frac{\partial q_2}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} \end{pmatrix} \right\} \\
&= \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} \left\{ \tilde{T}_{i,j} + J_e(\vec{\xi}) \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} \sum_{l=1}^2 \frac{\partial q_1}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2} \sum_{l=1}^2 \frac{\partial q_2}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} \right] \right\},
\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{\partial \hat{q}_i}{\partial \xi_j} = \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} \left\{ \tilde{T}_{i,j} + J_e(\vec{\xi}) \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} \right\}. \quad (4.35)$$

Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
(DF_e)^{-1}(D\vec{q})(DF_e) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial q_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^2 \frac{\partial q_1}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_1} & \sum_{l=1}^2 \frac{\partial q_1}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_2} \\ \sum_{l=1}^2 \frac{\partial q_2}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_1} & \sum_{l=1}^2 \frac{\partial q_2}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_1} & \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_2} \\ \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_1} & \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_k} \frac{\partial q_k}{\partial \xi_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces, al reescribir la ecuación (4.35) se llega a

$$\hat{D}\hat{q} = \frac{|\hat{a}_\beta|}{|a_\beta|} \left(\tilde{T} + J_e(DF_e)^{-1}(D\vec{q})(DF_e) \right). \quad (4.36)$$

Ahora, de la ecuación (4.36) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \hat{D}\hat{q} - \tilde{T} &= J_e(DF_e)^{-1}(D\vec{q})(DF_e), \\
\frac{1}{J_e} \left(\frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \hat{D}\hat{q} - \tilde{T} \right) &= (DF_e)^{-1}(D\vec{q})(DF_e), \\
(DF_e) \frac{1}{J_e} \left(\frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \hat{D}\hat{q} - \tilde{T} \right) (DF_e)^{-1} &= (D\vec{q}).
\end{aligned}$$

Por lo cual

$$D\vec{q} = \frac{1}{J_e} (DF_e) \left(\frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \hat{D}\hat{q} \right) (DF_e)^{-1} - \frac{1}{J_e} (DF_e) \left(\tilde{T} \right) (DF_e)^{-1}. \quad (4.37)$$

Por su parte, sabemos que $\nabla \cdot \vec{q} = tr(D\vec{q})$, por ello se requiere calcular $tr(\tilde{T})$, esto es

$$\begin{aligned} tr(\tilde{T}) &= \tilde{T}_{1,1} + \tilde{T}_{2,2} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) \right] \vec{q} + \left[\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) \right] \vec{q} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right) \right] \vec{q}, \end{aligned}$$

lo cual, al usar las igualdades en (3.46), se reescribe como

$$\begin{aligned} tr(\tilde{T}) &= \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & -1 & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(J_e(\vec{\xi}) \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & 1 & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \end{pmatrix} \right) \right] \vec{q} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & -\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \end{pmatrix} \right] \vec{q} \\ &= \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial^2 x_2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} & -\frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + \frac{\partial^2 x_1}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \end{pmatrix} \right] \vec{q} \end{aligned}$$

Así

$$Tr(\tilde{T}) = 0 \quad (4.38)$$

Por lo tanto, al usar las ecuaciones (4.37) y (4.38) se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{q} &= tr \left(\frac{1}{J_e} (DF_e)^{-1} (\hat{D}\hat{q}) (DF_e) + T \right) \\ &= tr \left(\frac{1}{J_e} (DF_e) \left(\frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \hat{D}\hat{q} \right) (DF_e)^{-1} - \frac{1}{J_e} (DF_e) (\tilde{T}) (DF_e)^{-1} \right) \\ &= tr \left(\frac{1}{J_e} (DF_e) \left(\frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \hat{D}\hat{q} \right) (DF_e)^{-1} \right) - tr \left(\frac{1}{J_e} (DF_e) (\tilde{T}) (DF_e)^{-1} \right) \\ &= \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} tr \left((DF_e) (\hat{D}\hat{q}) (DF_e)^{-1} \right) - \frac{1}{J_e} tr \left((DF_e) (\tilde{T}) (DF_e)^{-1} \right) \\ &= \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} tr \left((DF_e) (DF_e)^{-1} (\hat{D}\hat{q}) \right) - \frac{1}{J_e} tr \left((DF_e) (DF_e)^{-1} (\tilde{T}) \right) \\ &= \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} tr \left((\hat{D}\hat{q}) \right) - \frac{1}{J_e} tr \left(\tilde{T} \right) \\ &= \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} \hat{\nabla} \cdot \hat{q}. \end{aligned}$$

□

La proposición 1 nos permite tener los siguientes resultados:

Proposición 2. *En coordenadas cartesianas se tiene la siguiente relación:*

$$i) \int_{\Omega_e} \vec{\varphi}_\beta^e \cdot \vec{\varphi}_\lambda^e d\Omega = \frac{|a_\beta| |a_\lambda|}{|\hat{a}_\beta| |\hat{a}_\lambda|} \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{J_e} \left(DF_e \hat{\vec{\varphi}}_\beta \right) \cdot \left(DF_e \hat{\vec{\varphi}}_\lambda \right) d\hat{\Omega},$$

$$ii) \int_{\Omega_e} \nabla \cdot \vec{\varphi}_\lambda^e d\Omega = \frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{\varphi}}_\lambda d\hat{\Omega},$$

Demostración.

i)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \vec{\varphi}_\beta^e \cdot \vec{\varphi}_\lambda^e d\Omega &= \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} DF_e \hat{\vec{\varphi}}_\beta \right) \cdot \left(\frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \frac{1}{J_e} DF_e \hat{\vec{\varphi}}_\lambda \right) J_e d\hat{\Omega} \\ &= \frac{|a_\beta| |a_\lambda|}{|\hat{a}_\beta| |\hat{a}_\lambda|} \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{J_e} \left(DF_e \hat{\vec{\varphi}}_\beta \right) \cdot \left(DF_e \hat{\vec{\varphi}}_\lambda \right) d\hat{\Omega}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot \vec{\varphi}_\lambda^e d\Omega &= \int_{\hat{\Omega}} \frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \frac{1}{J_e} \hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{\varphi}}_\lambda J_e d\hat{\Omega} \\ &= \frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \int_{\hat{\Omega}} \hat{\nabla} \cdot \hat{\vec{\varphi}}_\lambda d\hat{\Omega}. \end{aligned}$$

□

Proposición 3. *Si $\vec{q} = (q_1(r, z), q_2(r, z))$, es decir \vec{q} no depende de θ . En coordenadas cilíndricas se tiene la siguiente relación entre las divergencias*

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} \left[\frac{1}{r} \left((\nabla_{\vec{x}} \xi_1)^T \hat{\vec{q}} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{q}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_2 \right) \right]. \quad (4.39)$$

Demostración. Por definición de divergencia en coordenadas cilíndricas se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{q} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_1) + \frac{\partial}{\partial z} q_2 \\ &= \frac{1}{r} \left(q_1 + r \frac{\partial}{\partial r} q_1 \right) + \frac{\partial}{\partial z} q_2 \\ &= \frac{1}{r} q_1 + \frac{\partial}{\partial r} q_1 + \frac{\partial}{\partial z} q_2. \end{aligned}$$

Observemos que, al considerar la proposición 1, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial r} q_1 + \frac{\partial}{\partial z} q_2 = \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{q}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_2 \right).$$

Por tanto,

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{1}{r} q_1 + \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{q}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_2 \right). \quad (4.40)$$

Ahora, por la ecuación (4.34) se tiene

$$\begin{aligned} \vec{q}(\vec{x}) &= \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} DF_e(\vec{\xi}) \hat{q}(\vec{\xi}) \\ &= \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \hat{q}(\vec{\xi}) \\ &= \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} \begin{pmatrix} (\nabla_{\vec{x}} \xi_1)^T \hat{q} \\ (\nabla_{\vec{x}} \xi_2)^T \hat{q} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$q_1 = \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} (\nabla_{\vec{x}} \xi_1)^T \hat{q}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{q} &= \frac{1}{r} \left(\frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} (\nabla_{\vec{x}} \xi_1)^T \hat{q} \right) + \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{q}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_2 \right) \\ &= \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e(\vec{\xi})} \left[\frac{1}{r} \left((\nabla_{\vec{x}} \xi_1)^T \hat{q} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{q}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_2 \right) \right]. \end{aligned}$$

□

Proposición 4. En coordenadas cilíndricas se tiene la siguiente relación:

$$i) \int_{\Omega_e} \vec{\varphi}_\beta^e \cdot \vec{\varphi}_\lambda^e r d\Omega = \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \int_{\hat{\Omega}} \frac{1}{J_e} \left(DF_e \hat{\varphi}_\beta \right) \cdot \left(DF_e \hat{\varphi}_\beta \right) r d\hat{\Omega},$$

$$ii) \int_{\Omega_e} \nabla \cdot \vec{\varphi}_\lambda^e r d\Omega = \frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \int_{\hat{\Omega}} \left[\frac{1}{r} \left((\nabla_{\vec{x}} \xi_1)^T \hat{q} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{q}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_2 \right) \right] r d\hat{\Omega},$$

con

$$r(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{nne} r_k \hat{\zeta}_k(\xi, \eta),$$

$$F_e : z(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{nne} z_k \hat{\zeta}_k(\xi, \eta).$$

Demostración.

i)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \vec{\varphi}_\beta^e \cdot \vec{\varphi}_\lambda^e r d\Omega &= \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{1}{J_e} DF_e \hat{\varphi}_\beta \right) \cdot \left(\frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \frac{1}{J_e} DF_e \hat{\varphi}_\lambda \right) r J_e d\hat{\Omega} \\ &= \frac{|a_\beta|}{|\hat{a}_\beta|} \frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \frac{1}{J_e} \int_{\hat{\Omega}} (DF_e \hat{\varphi}_\beta) \cdot (DF_e \hat{\varphi}_\lambda) r d\hat{\Omega}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot \vec{\varphi}_\lambda^e r d\Omega &= \int_{\hat{\Omega}} \frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \frac{1}{J_e} \left[\frac{1}{r} \left((\nabla_{\vec{x}} \xi_1)^T \hat{q} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{q}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_2 \right) \right] r J_e d\hat{\Omega} \\ &= \frac{|a_\lambda|}{|\hat{a}_\lambda|} \int_{\hat{\Omega}} \left[\frac{1}{r} \left((\nabla_{\vec{x}} \xi_1)^T \hat{q} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial r} \hat{q}_1 + \frac{\partial}{\partial z} \hat{q}_2 \right) \right] r d\hat{\Omega} \end{aligned}$$

□

4.6.1. RT_0 en triángulos

En este caso usamos las funciones definidas en la ecuación (4.29) para el elemento de referencia descrito en la figura 4.5. Luego las funciones de forma están dadas por

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}\xi \\ \sqrt{2}\eta \end{pmatrix} \\ \hat{\varphi}_2 &= \begin{pmatrix} \xi - 1 \\ \eta \end{pmatrix} \\ \hat{\varphi}_3 &= \begin{pmatrix} \xi \\ \eta - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

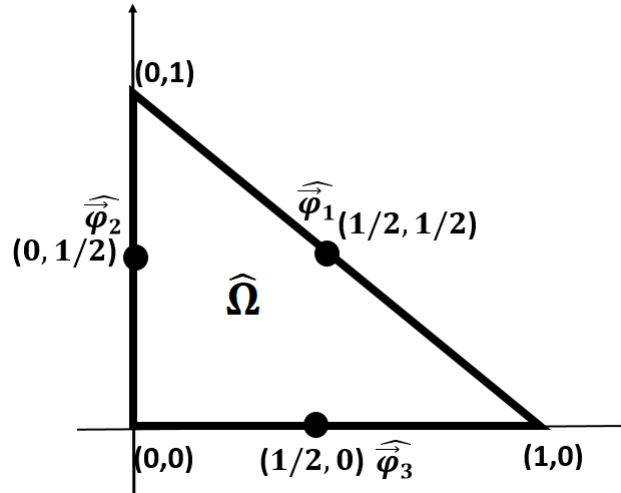


Figura 4.5: Elementos de Raviat-Thomas de bajo orden en triángulos.

4.6.2. RT_0 en cuadriláteros

En el caso de cuadriláteros no se tiene una expresión explícita para las funciones de forma pero pueden encontrarse a partir de (4.7) y (4.28), de donde se tiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|a_1|} \int_{a_1} (\hat{\varphi}_\beta \cdot \vec{n}_1) (\vec{x}_{m_1}) ds &= \frac{1}{|a_1|} \int_{-1}^1 \left[\begin{pmatrix} \alpha_1^\beta + \gamma_1^\beta \xi \\ \alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{(1,0)} ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\alpha_1^\beta + \gamma_1^\beta \xi]_{(1,0)} ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\alpha_1^\beta + \gamma_1^\beta] ds \\
 &= \frac{1}{2} [\alpha_1^\beta + \gamma_1^\beta] s \Big|_{-1}^1 \\
 &= \alpha_1^\beta + \gamma_1^\beta \\
 &= \delta_{1,\beta}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|a_2|} \int_{a_2} \left(\hat{\varphi}_\beta \cdot \vec{n}_2 \right) (\vec{x}_{m_2}) ds &= \frac{1}{|a_2|} \int_{-1}^1 \left[\left(\begin{array}{c} \alpha_1^\beta + \gamma_1^\beta \xi \\ \alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \eta \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \right]_{(0,1)} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \eta \right]_{(0,1)} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \right] ds \\
&= \frac{1}{2} \left[\alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \right] s \Big|_{-1}^1 \\
&= \alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \\
&= \delta_{2,\beta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|a_3|} \int_{a_3} \left(\hat{\varphi}_\beta \cdot \vec{n}_3 \right) (\vec{x}_{m_3}) ds &= \frac{1}{|a_3|} \int_{-1}^1 \left[\left(\begin{array}{c} \alpha_1^\beta + \gamma_1^\beta \xi \\ \alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \eta \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right) \right]_{(-1,0)} ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\alpha_1^\beta - \gamma_1^\beta \right] ds \\
&= -\frac{1}{2} \left[\alpha_1^\beta - \gamma_1^\beta \right] s \Big|_{-1}^1 \\
&= -\alpha_1^\beta + \gamma_1^\beta \\
&= \delta_{3,\beta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|a_4|} \int_{a_4} \left(\hat{\varphi}_\beta \cdot \vec{n}_4 \right) (\vec{x}_{m_4}) ds &= \frac{1}{|a_4|} \int_{-1}^1 \left[\left(\begin{array}{c} \alpha_1^\beta + \gamma_1^\beta \xi \\ \alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \eta \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right) \right]_{(0,-1)} ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \eta \right]_{(0,-1)} ds \\
&= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[\alpha_2^\beta - \gamma_2^\beta \right] ds \\
&= -\frac{1}{2} \left[\alpha_2^\beta - \gamma_2^\beta \right] s \Big|_{-1}^1 \\
&= -\alpha_2^\beta + \gamma_2^\beta \\
&= \delta_{4,\beta}.
\end{aligned}$$

Por lo que al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = I_{4 \times 4},$$

se tiene que las funciones de forma son

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + \eta \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 + \eta \end{pmatrix}.$$

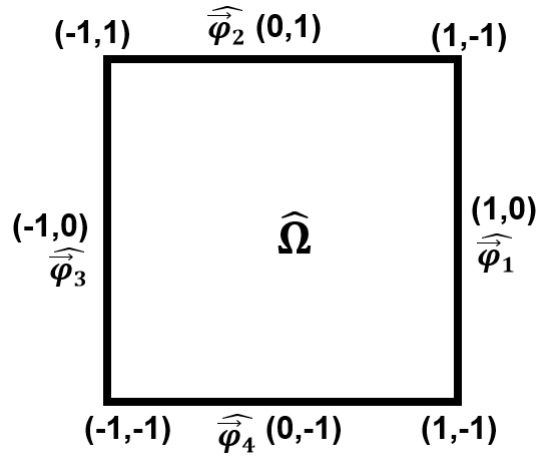


Figura 4.6: Elementos de Raviat-Thomas de bajo orden en triángulos.

4.7. Integración Numérica

4.7.1. RT_0 en triángulos

Para el caso de integrar en el elemento de referencia triangular, la cuadratura de integración queda como sigue:

ξ_l	η_l	w_l
1/2	1/2	1/6
0	1/2	1/6
1/2	0	1/6

Es importante mencionar que el orden de la fórmula es $\mathcal{O}(h^3)$, ver [27].

4.7.2. RT_0 en cuadriláteros

Si ahora se integra sobre el elemento de referencia cuadrangular, la fórmula de cuadratura está dada de la siguiente forma:

ξ_l	η_l	w_l
1	0	1
0	1	1
-1	0	1
0	-1	1

Es importante mencionar que ésta es exacta para $Q_1(\hat{\Omega})$.

4.8. Aproximación de la presión y velocidad en los vértices

Una vez encontrados la presión en los baricentros de cada elemento y las componentes normales de la velocidad en los puntos medios de las aristas, se deben encontrar la presión y la velocidad en los vértices de los elementos de la malla, para esto se hace un análisis variacional, como se muestra en esta sección.

4.8.1. Presión

En el caso de la presión, como se mencionó en la sección [3.3](#), cada función tiene asociado un soporte $sop(\phi_i)$, el cual consta de todos los elementos que contienen al i -ésimo nodo \vec{x}_i . Se conoce la presión en los baricentros de cada elemento, por lo tanto

$$p_{h,i} = p_h(\vec{x}_i) = \frac{1}{nesi} \sum_{\Omega_k \in sop(i)} p_k, \quad \forall i = 1, 2, \dots, nnt,$$

donde p_k es la presión aproximada evaluada en el baricentro del k -ésimo elemento y $nesi$ es el número de elementos en el soporte de \vec{x}_i .

4.8.2. Velocidad

Sea $\vec{u}_{h,i}$ la velocidad evaluada en el nodo i -ésimo \vec{x}_i , esta puede expresarse como combinación lineal de las funciones base, como sigue:

$$\vec{u}_{h,i} = u_h(\vec{x}_i) = \sum_{j=1}^{nat} u_j \vec{\varphi}_j(\vec{x}_i).$$

Tomando $\phi_i \in H^1(\Omega)$ e integrando sobre el soporte de ϕ_i se tiene

$$\int_{\text{sop}(\phi_i)} (\vec{u}_{h,i}) \phi_i(\vec{x}) d\Omega = \int_{\text{sop}(\phi_i)} \left(\sum_{j=1}^{\text{nat}} u_j \vec{\varphi}_j(\vec{x}) \right) \phi_i(\vec{x}) d\Omega.$$

De esa forma

$$(\vec{u}_{h,i}) \sum_{\Omega_e \in \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \phi_i(\vec{x}) d\Omega = \sum_{\Omega_e \in \text{Sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \left(\sum_{j=1}^{\text{nae}} u_j \vec{\varphi}_j(\vec{x}) \right) \phi_i(\vec{x}) d\Omega.$$

Por lo tanto

$$\vec{u}_{h,i} = \frac{\sum_{\Omega_e \in \text{Sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \left(\sum_{j=1}^{\text{nae}} u_j \vec{\varphi}_j(\vec{x}) \right) \phi_i(\vec{x}) d\Omega}{\sum_{\Omega_e \in \text{sop}(\phi_i)} \int_{\Omega_e} \phi_i(\vec{x}) d\Omega}.$$

Capítulo 5.

Resultados numéricos

En este capítulo se presentan los resultados numéricos: tablas de errores y gráficas donde se comparan las soluciones analíticas con las soluciones aproximadas, en la sección 5.1 se muestran los resultados para flujo monofásico incompresible y en la 5.2 para flujo monofásico ligeramente compresible en medio poroso.

Todos los algoritmos han sido programados en MATLAB versión 8.6.0267246 (2015b) y ejecutados en una PC con procesador Intel Core i7, 8 GB de RAM bajo Windows 10. Las matrices son *sparse* y los sistemas de ecuaciones se resuelven con la función definida por MATLAB “\”.

5.1. Cuadraturas de integración

Con la finalidad de decidir cuál cuadratura usar se hicieron pruebas con la ecuación de calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f$, donde $f = -e^t(x^3 + y^3 + 6x + 6y)$, y cuya solución analítica es $u(x, y, t) = e^{-t}(x^3 + y^3)$. El dominio es $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, con $h_{max} = 1.25 \times 10^{-2}$. En el caso de usar la cuadratura abierta, la matriz de masa resultante es no diagonal, por tanto hicimos las pruebas usando Mass Lumping y sin usarla. Mass Lumping es una técnica numérica relacionada con el método de elemento finito usada en distintas aplicaciones. Esta técnica suma todos los coeficientes por fila de matriz y los concentra en la diagonal. (ver [15]). Cuando se usa la cuadratura cerrada la matriz de masa ya es diagonal por lo que, en este caso, no fue necesario aplicar Mass Lumping.

Las tablas [5.1] y [5.2] muestran los errores absolutos sin y con Mass Lumping, respectivamente para elementos lineales. En las tablas [5.3] y [5.4] se exhiben los errores absolutos, para elementos bilineales, sin y con Mass Lumping, respectivamente. Podemos observar que en ambos tipos de elementos, se tienen mejores aproximaciones cuando se aplica Mass Lumping.

t	$\ u - u_h\ _\infty$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$
$1e - 01$	$4.309356e - 01$	$1.765883e - 01$	$9.439500e - 01$
$5e - 01$	$3.648861e - 01$	$1.652539e - 01$	$7.641404e - 01$
$1e + 00$	$2.218579e - 01$	$1.005882e - 01$	$4.645046e - 01$

Tabla 5.1: Errores absolutos en la ecuación de calor con elementos lineales y cuadratura abierta sin usar Mass Lumping.

t	$\ u - u_h\ _\infty$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$
$1e - 01$	$4.221560e - 01$	$1.678669e - 01$	$8.865533e - 01$
$5e - 01$	$3.546249e - 01$	$1.562142e - 01$	$7.182532e - 01$
$1e + 00$	$2.156029e - 01$	$9.508224e - 02$	$4.366104e - 01$

Tabla 5.2: Errores absolutos en la ecuación de calor con elementos lineales y cuadratura abierta usando Mass Lumping.

t	$\ u - u_h\ _\infty$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$
$1e - 01$	$2.229500e - 02$	$7.274779e - 03$	$1.162783e - 01$
$5e - 01$	$1.516634e - 02$	$6.202036e - 03$	$7.921953e - 02$
$1e + 00$	$9.200468e - 03$	$3.772384e - 03$	$4.806022e - 02$

Tabla 5.3: Errores absolutos en la ecuación de calor con elementos bilineales y cuadratura abierta sin usar Mass Lumping.

t	$\ u - u_h\ _\infty$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$
$1e - 01$	$1.376995e - 04$	$4.586726e - 05$	$5.440533e - 04$
$5e - 01$	$1.194437e - 04$	$4.244026e - 05$	$3.804086e - 04$
$1e + 00$	$7.264307e - 05$	$2.583175e - 05$	$2.308642e - 04$

Tabla 5.4: Errores absolutos en la ecuación de calor con elementos bilineales y cuadratura abierta usando Mass Lumping.

En las tablas [5.5](#) y [5.6](#) se presentan los errores con cuadraturas cerradas para elementos lineales y bilineales, respectivamente. En este caso es importante señalar, que las matrices globales que se construyen con estas cuadraturas son iguales, para elementos lineales y

bilineales, y por ello los errores de aproximación en ambas tablas son los mismos. Por su parte, se puede observar que los errores con esta cuadratura son aún más pequeños que cuando usamos cuadraturas abiertas y Mass Lumping.

t	$\ u - u_h\ _\infty$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$
$1e - 01$	$6.857512e - 05$	$3.592925e - 05$	$1.754023e - 04$
$5e - 01$	$6.389576e - 05$	$3.455280e - 05$	$1.487352e - 04$
$1e + 00$	$3.889744e - 05$	$2.103769e - 05$	$9.046156e - 05$

Tabla 5.5: Errores absolutos en la ecuación de calor con elementos lineales y cuadratura cerrada.

t	$\ u - u_h\ _\infty$	$\ u - u_h\ _{L^2}$	$\ u - u_h\ _{H^1}$
$1e - 01$	$6.857512e - 05$	$3.592925e - 05$	$1.754023e - 04$
$5e - 01$	$6.389576e - 05$	$3.455280e - 05$	$1.487352e - 04$
$1e + 00$	$3.889744e - 05$	$2.103769e - 05$	$9.046156e - 05$

Tabla 5.6: Errores absolutos en la ecuación de calor con elementos bilineales y cuadratura cerrada.

Estas pruebas también se hicieron en los flujos monofásico incompresible y ligeramente compresible, donde se obtuvieron los mismos efectos, de este modo, los resultados que se muestran en este capítulo son utilizando cuadraturas cerradas.

5.2. Flujo monofásico incompresible

Se considera un campo petrolero con los siguientes datos en el sistema internacional:

$$L = 100 \text{ m (zona de influencia del pozo)}$$

$$H = 25 \text{ m (espesor de la capa productora)}$$

$$r_w = 0.1 \text{ m (radio del pozo)}$$

$$\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s (1 cp viscosidad)}$$

$$Q = 0.004784421296296 \text{ m}^3/\text{s (2600 barriles/ día, gasto del pozo)}$$

$$p_0 = 25507800 \text{ Pa (3700 psi, presión inicial)}$$

$$\kappa = 1.184307600000000 \times 10^{-14} m^2 \text{ (12 miliDarcy permeabilidad)}$$

Dado que la presión y velocidad descienden drásticamente cerca de la zona de disparos en forma logarítmica, se refinó la malla alrededor de esta zona en la dirección r a través de una serie geométrica, como se muestra en la figura 5.1.

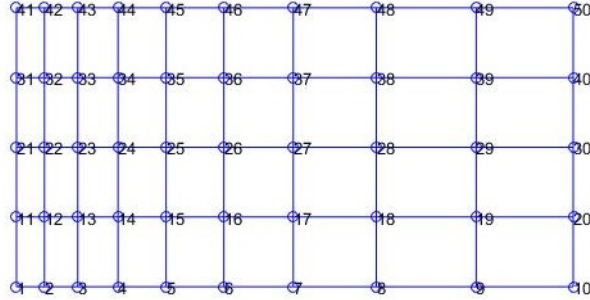


Figura 5.1: Malla refinada cerca de la zona de disparos.

Los datos empleados para generar la malla son:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 5 \times 10^{-09}; && \text{tamaño de los elementos de la malla cerca del pozo.} \\
 r &= 1.05; && \text{el radio con el que crece la serie geométrica.} \\
 nny &= 111; && \text{número de nodos en } y \text{ .} \\
 e &= 0.001; && \text{la parte de la malla que es uniforme.} \\
 nnt &= 39960; && \text{número de nodos totales.} \\
 h_{max} &= 0.18346354; && \text{tamaño máximo del elemento} \\
 h_{min} &= h_0; && \text{tamaño mínimo del elemento}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Es importante señalar que el número de condición de la matriz del sistema (4.13), para los elementos RT_0 en cuadriláteros es $1.670538572384411e+13$ y $1.603345000748102e+13$ para elementos RT_0 en triángulos. Mientras que el número de condición de la matriz del sistema (3.11), para elementos lineales es $2.236681731239337e+11$ y $2.968543104284459e+11$ para elementos bilineales.

5.2.1. Aproximación de la presión

Las tablas 5.7 y 5.8 muestran, respectivamente, los errores absolutos y relativos de la presión para elementos lineales, bilineales y RT_0 en triángulos y cuadriláteros, en las

normas infinito, L^2 y H^1 . Recordemos que $h = h_{max}$ está definida por la ecuación (3.8). Los errores absolutos en las normas infinito, L^2 y H^1 están dadas, respectivamente, como sigue:

$$\|p - p_h\|_{\infty}; \quad \|p - p_h\|_{L^2}; \quad \|p - p_h\|_{H^1}.$$

Por otro lado, los errores relativos tienen la siguiente forma

$$\frac{\|p - p_h\|_{\infty}}{\|p\|_{\infty}}; \quad \frac{\|p - p_h\|_{L^2}}{\|p\|_{L^2}}; \quad \frac{\|p - p_h\|_{H^1}}{\|p\|_{H^1}}. \quad (5.2)$$

donde

$$\|\vec{p}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq nmt} |p(i)| \quad (5.3)$$

y $\|p - p_h\|_{L^2}$ y $\|p - p_h\|_{H^1}$ están definidas, respectivamente, por las igualdades (3.1) y (3.2), con p_h la solución aproximada de la presión. De ambas tablas 5.7 y 5.8 observamos que se tiene mayor orden de precisión con los elementos bilineales y la menor precisión se obtiene con los elementos RT_0 en triángulos.

	$\ p - p_h\ _{\infty}$	$\ p - p_h\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1}$
Elem lineal	$4.293559e - 04$	$1.285148e - 04$	$4.291867e - 04$
Elem bilineal	$5.396571e - 05$	$1.280628e - 04$	$1.623130e - 04$
Elem RT_0 trian	$2.172902e - 02$	$1.157041e - 03$	$4.355230e - 01$
Elem RT_0 cuad	$9.280165e - 04$	$4.539928e - 04$	$3.276558e - 03$

Tabla 5.7: Errores absolutos para la presión con elementos lineales, bilineales, RT_0 en triángulos y cuadriláteros.

	$\ p - p_h\ _{\infty}/\ p\ _{\infty}$	$\ p - p_h\ _{L^2}/\ p\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1}/\ p\ _{H^1}$
Elem lineal	$4.293559e - 04$	$6.461000e - 05$	$1.877479e - 04$
Elem bilineal	$5.396571e - 05$	$6.438679e - 05$	$7.100618e - 05$
Elem RT_0 trian	$2.172902e - 02$	$5.817309e - 04$	$1.905256e - 01$
Elem RT_0 cuad	$9.280165e - 04$	$2.282560e - 04$	$1.433376e - 03$

Tabla 5.8: Errores relativos para la presión con elementos lineales, bilineales, RT_0 en triángulos y cuadriláteros.

Las figuras 5.2 y 5.3 muestran una comparación entre la soluciones analítica y aproximada de la presión usando el método de elemento finito con elementos lineales y bilineales, respectivamente, para: (a) r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo. Las figuras 5.4 y 5.5

exhiben la solución analítica y la aproximación de la presión usando el método de elemento finito mixto con elementos de Raviart-Thomas de bajo orden triángulos y cuadriláteros, respectivamente, para: (a) r en todo el dominio y (b) r cerca de la zona de disparos. Es importante decir que con la finalidad de que se aprecien mejor los resultados, se gráfica solo en algunos nodos elegidos al azar, ya que cerca de la zona de disparos se refinó la malla. Observemos que la mayor diferencia entre ambas soluciones se encuentra cerca del pozo y es más notoria para los elementos RT_0 en triángulos, ver fig. 5.4 b.

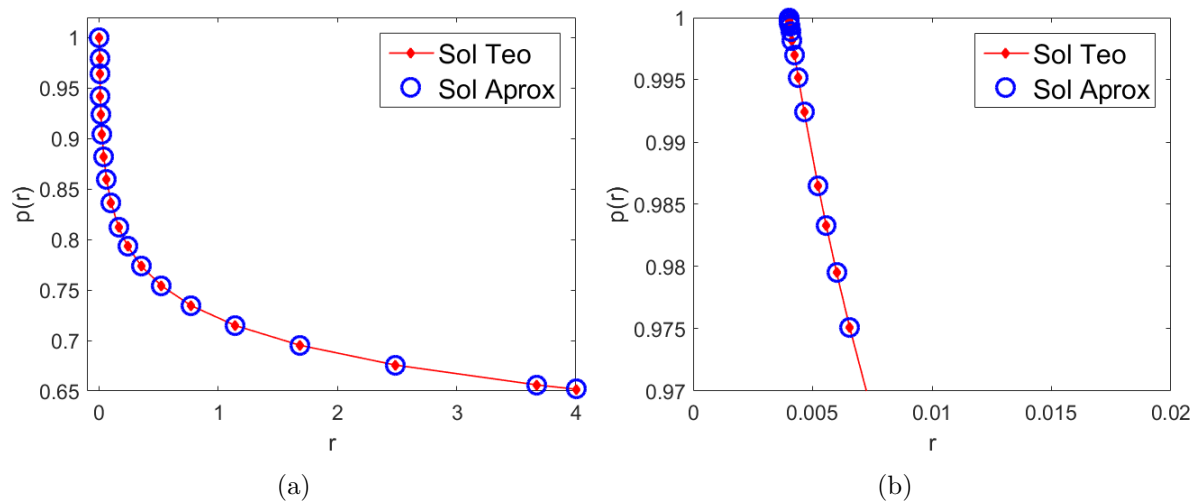


Figura 5.2: Aproximación de la presión en $z=0$, usando elementos lineales para: (a) r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

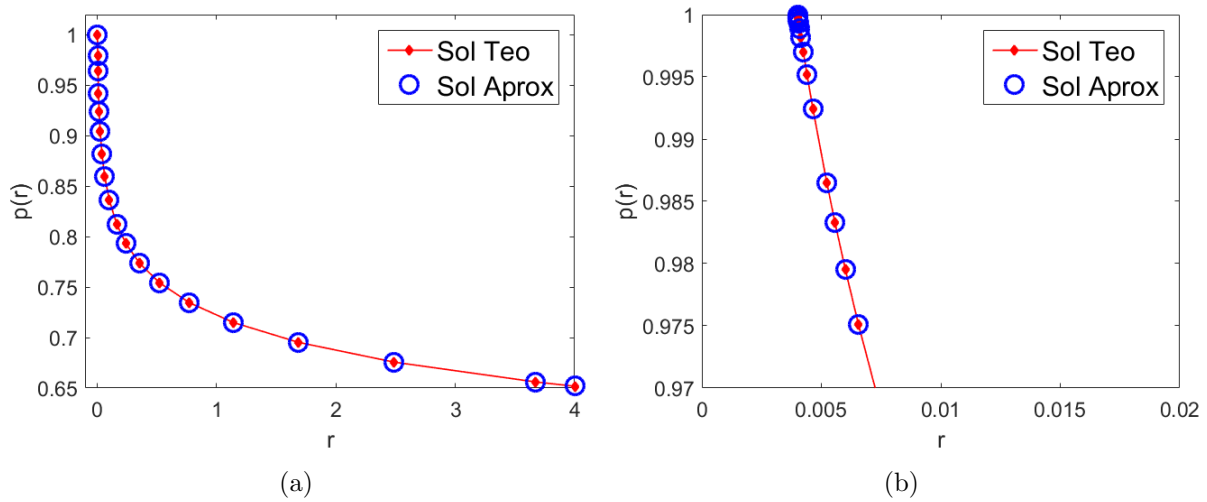


Figura 5.3: Aproximación de la presión en $z=0$, usando elementos bilineales para: (a) r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

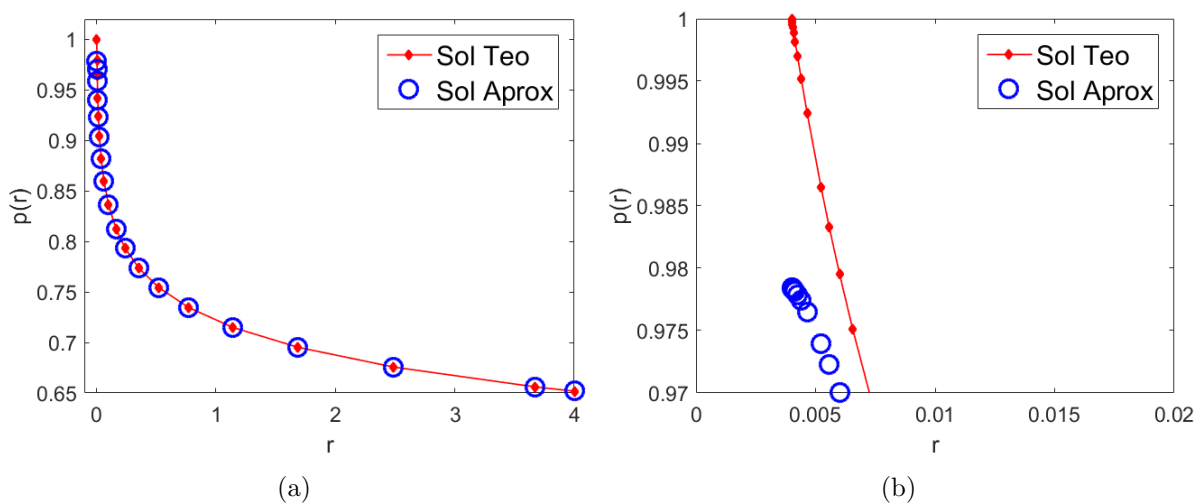


Figura 5.4: Aproximación de la presión en $z=0$, usando elementos RT_0 en triángulos para: (a) r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

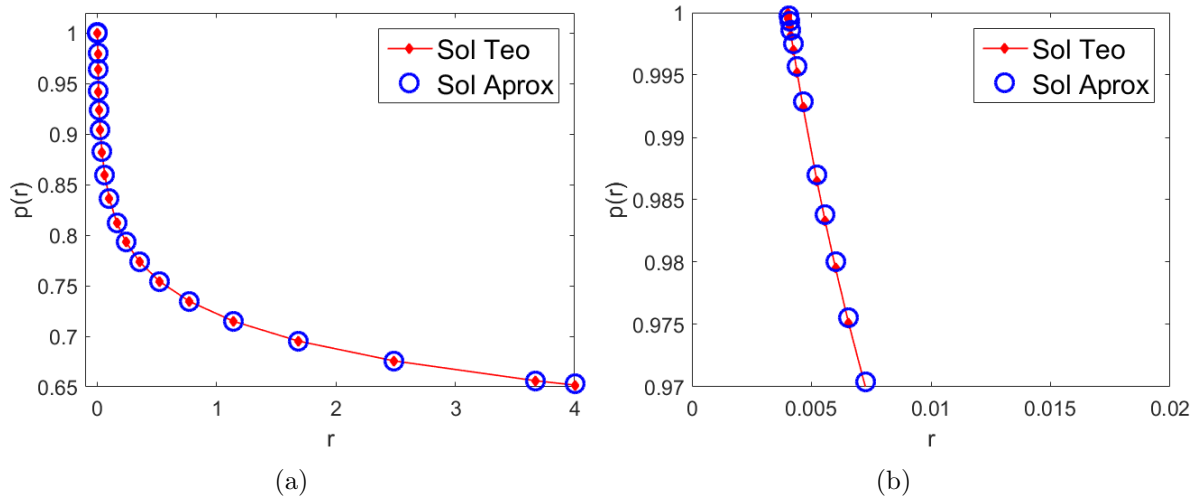


Figura 5.5: Aproximación de la presión en $z=0$, usando elementos RT_0 en cuadriláteros para: (a) r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

Debido a que la presión depende solo de r , entonces las gráficas de la solución en cualquier corte de z deben ser iguales a las mostradas anteriormente.

Por otra parte, en la figura 5.6 se muestra la aproximación de la presión en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con elementos bilineales en el método estándar ya que con estos se tuvo la mejor aproximación.

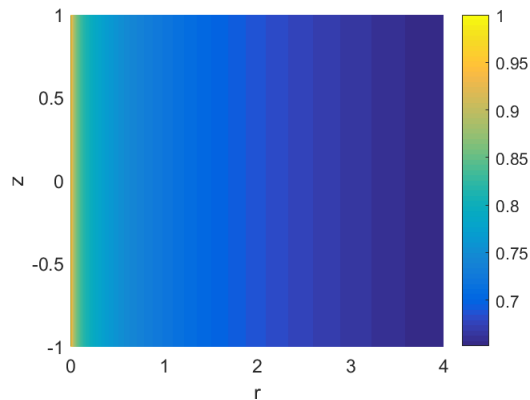


Figura 5.6: Aproximación de la presión en $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con elementos bilineales.

5.2.2. Aproximación para la velocidad

En esta sección se muestran los resultados numéricos obtenidos para el cálculo de la velocidad en el problema de flujo monofásico incompresible, usando los métodos de elemento finito estándar y elemento finito mixto, para el primer caso tenemos dos formas de calcularla, una es usando la fórmula de Green definida en la sección 3.4.1 y la otra es sin usarla.

En el caso de la velocidad se tiene la siguiente solución analítica:

$$\vec{u}(r) = \left(\frac{L}{H} \frac{p_L}{p_0 r}, 0 \right). \quad (5.4)$$

Las tablas 5.9 y 5.10 muestran los errores absolutos y relativos de la velocidad, respectivamente, en las normas infinito, $L^2(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ de las pruebas mencionadas anteriormente, usando la malla descrita al principio de la sección.

Como puede observarse en las tablas 5.9 y 5.10 el error es ligeramente menor cuando se usa la fórmula de Green que cuando no se usa y se marca más en la norma H_1 . En general, el mayor error de aproximación se comete en el método MFE con elementos RT_0 en triángulos y el menor orden de error se alcanza con elementos bilineales y RT_0 en cuadriláteros, aunque estos últimos tienen error ligeramente más pequeño. Para verificar lo anterior visualmente se hizo un corte en $z = 0$.

De las figura 5.7 a la 5.10 se muestran las comparaciones entre la solución analítica y la aproximada de la primera componente de la velocidad. Los resultados obtenidos con el método estándar usando la fórmula de Green para elementos lineales y bilineales se presentan en las figuras 5.7 y 5.8, respectivamente. Para el caso del método MFE se tienen las figuras 5.9 y 5.10 que muestran la comparación de los elemento de Raviart-Thomas de bajo orden en triángulos y cuadriláteros, respectivamente. En cada figura se muestra (a) la comparación cuando r está en todo el dominio y la (b) para cuando se toma r cercano a la zona de disparos. Prácticamente en las gráficas de estas figuras no se aprecia algún cambio.

Ahora veamos la segunda componente de la velocidad. De la figura 5.11 hasta la 5.14 se muestran las comparaciones de la solución exacta con la aproximación de la solución de la segunda componente de la velocidad. Los resultados obtenidos con el método estándar usando la formula de Green con elementos lineales y bilineales se exhiben en las figuras 5.11, y 5.12, respectivamente. Para el caso cuando usamos el método MFE se muestra en las figuras 5.13 y 5.14 la comparación de los elementos de RT_0 en triángulos y cuadriláteros, respectivamente. Al igual que en la primera componente de la velocidad cada figura muestra (a) la comparación cuando r está en todo el dominio y la (b) para cuando se toma r cercano a la zona de disparos. Observamos que solamente cuando se emplean elementos RT_0 en triángulos se marca el error cerca de la zona de disparos y cuando se aleja de esta zona, la solución aproximada se ajusta mejor a la solución exacta, ver gráfica 5.13 (b).

	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1}$
Elem lineal sin Green	$1.818960e - 01$	$3.595695e - 03$	$9.231072e + 01$
Elem bilineal sin Green	$1.155295e - 02$	$1.989021e - 03$	$7.392870e - 01$
Elem lineal con Green	$1.771824e - 01$	$3.516849e - 03$	$2.108738e + 01$
Elem bilineal con Green	$1.155295e - 02$	$1.961988e - 03$	$4.362205e - 01$
Elem RT_0 trian	$9.415735e - 01$	$3.306398e - 02$	$1.855733e + 04$
Elem RT_0 cuad	$8.886687e - 03$	$9.924150e - 04$	$3.922331e - 01$

Tabla 5.9: Errores absolutos para la velocidad con elementos lineales, bilineales, RT_0 en triángulos y cuadriláteros.

	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty / \ \vec{u}\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2} / \ \vec{u}\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1} / \ \vec{u}\ _{H^1}$
Elem lineal sin Green	$3.608121e - 03$	$7.976770e - 04$	$1.418379e - 01$
Elem bilineal sin Green	$2.291663e - 04$	$4.412780e - 04$	$1.135935e - 03$
Elem lineal con Green	$3.514622e - 03$	$7.801858e - 04$	$3.240134e - 02$
Elem bilineal con Green	$2.291663e - 04$	$4.352805e - 04$	$6.702649e - 04$
Elem RT_0 trian	$1.867722e - 02$	$7.334988e - 03$	$2.851385e + 01$
Elem RT_0 cuad	$1.762779e - 04$	$2.201595e - 04$	$6.026771e - 04$

Tabla 5.10: Errores relativos para la velocidad con elementos lineales, bilineales, RT_0 en triángulos y cuadriláteros.

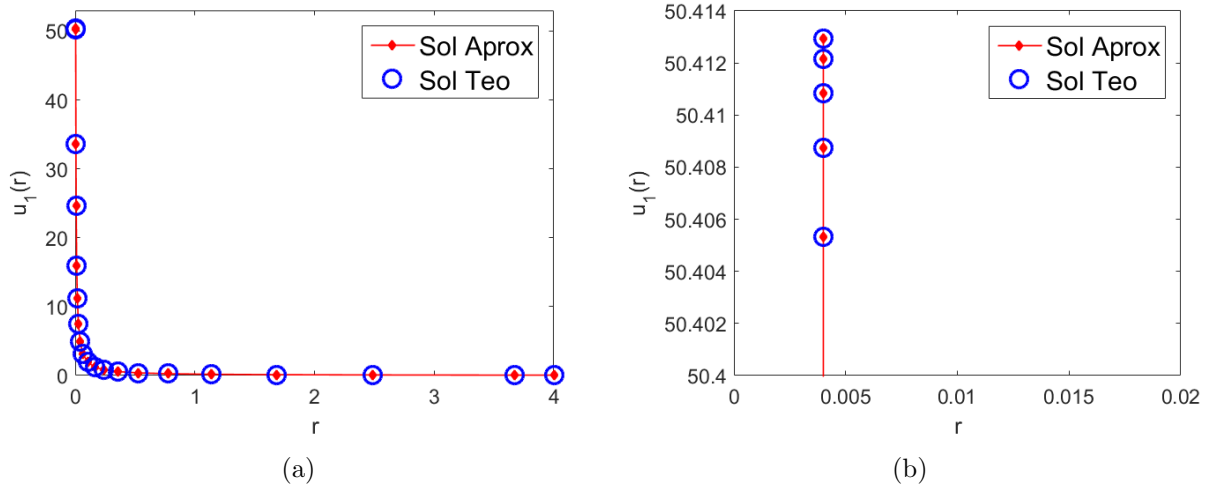


Figura 5.7: Aproximación de la primera componente de la velocidad en $z = 0$, con elementos lineales usando la fórmula Green (a) para r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

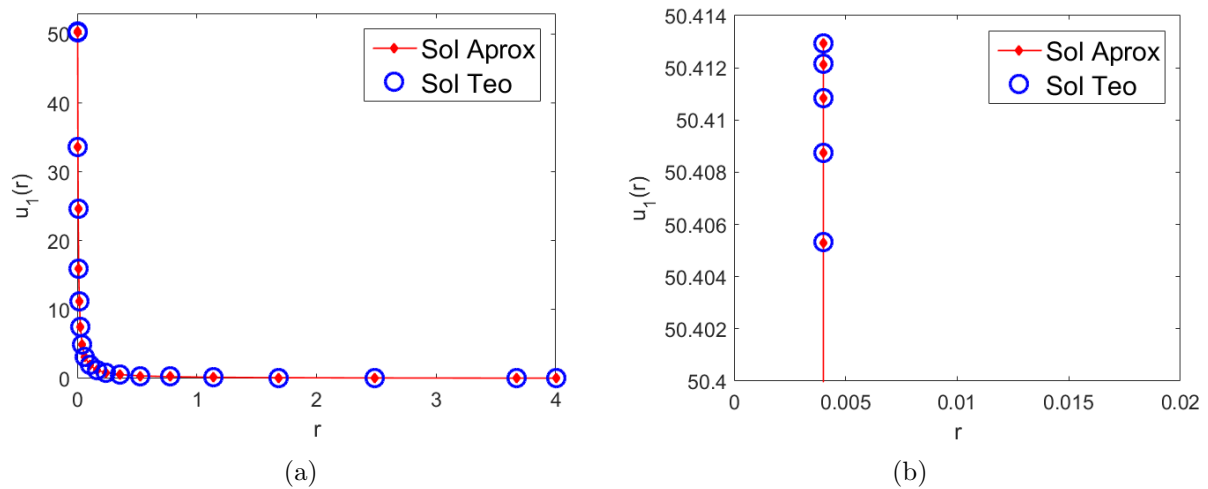


Figura 5.8: Aproximación de la primera componente de la velocidad en $z = 0$, con elementos bilineales usando la fórmula Green (a) para r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

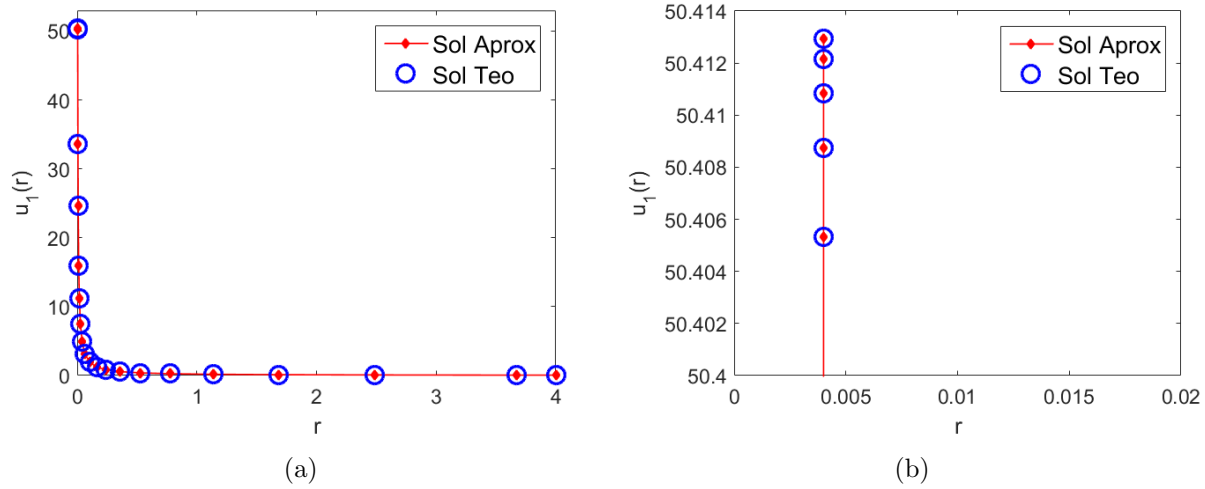


Figura 5.9: Aproximación de la primera componente de la velocidad en $z = 0$, con elementos RT_0 en triángulos (a) para r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

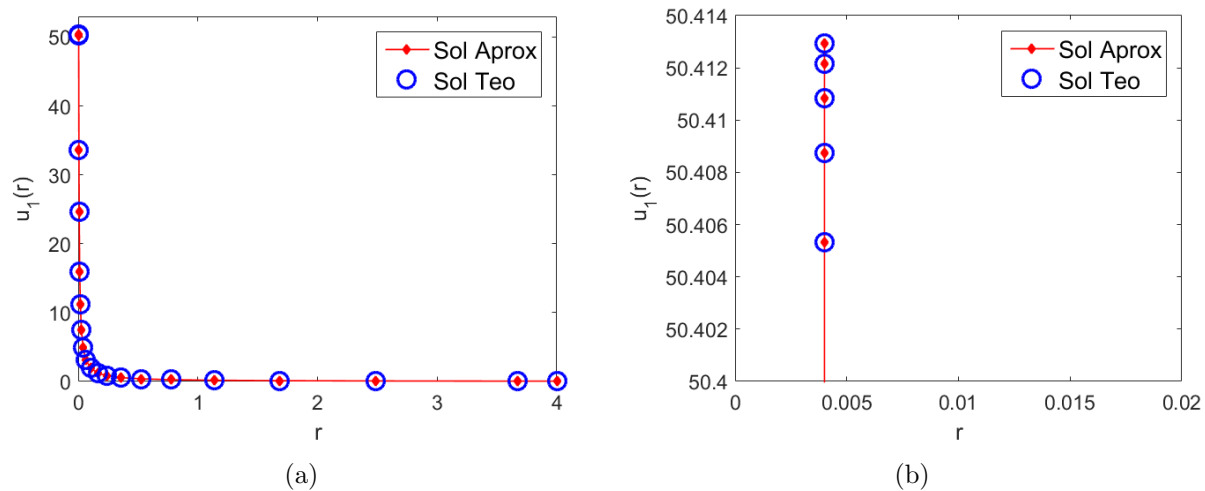


Figura 5.10: Aproximación de la primera componente de la velocidad en $z = 0$, con elementos RT_0 en cuadriláteros (a) para r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

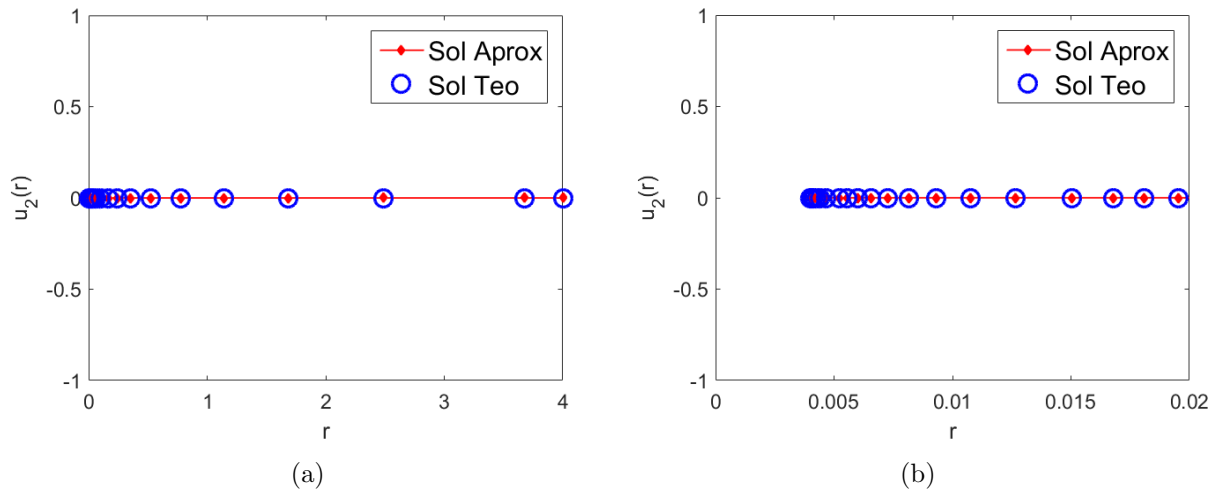


Figura 5.11: Aproximación de la segunda componente de la velocidad en $z = 0$, con elementos lineales usando la fórmula de Green (a) para r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

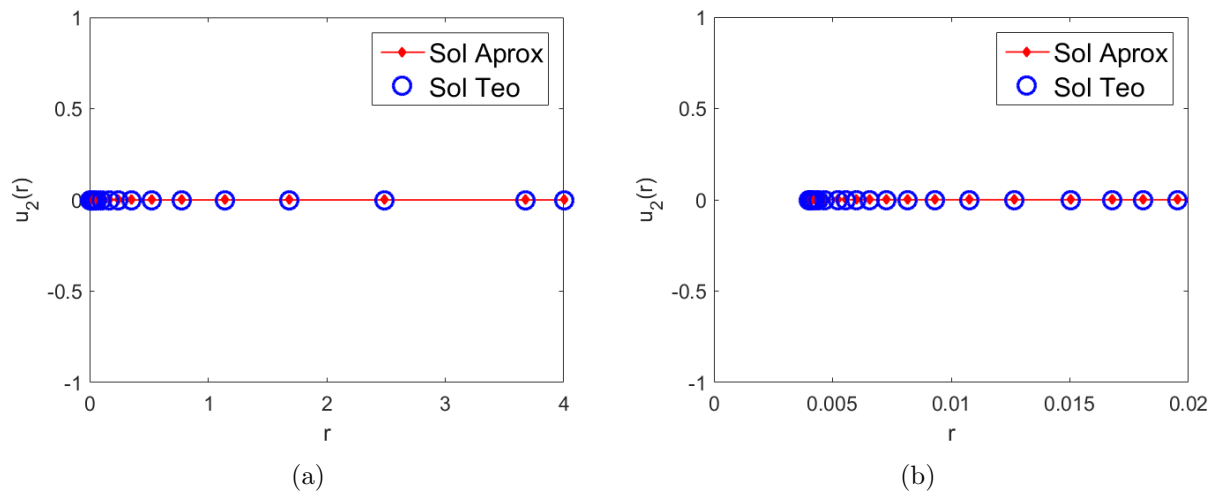


Figura 5.12: Aproximación de la segunda componente de la velocidad en $z = 0$, con elementos bilineales usando la fórmula de Green (a) para r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

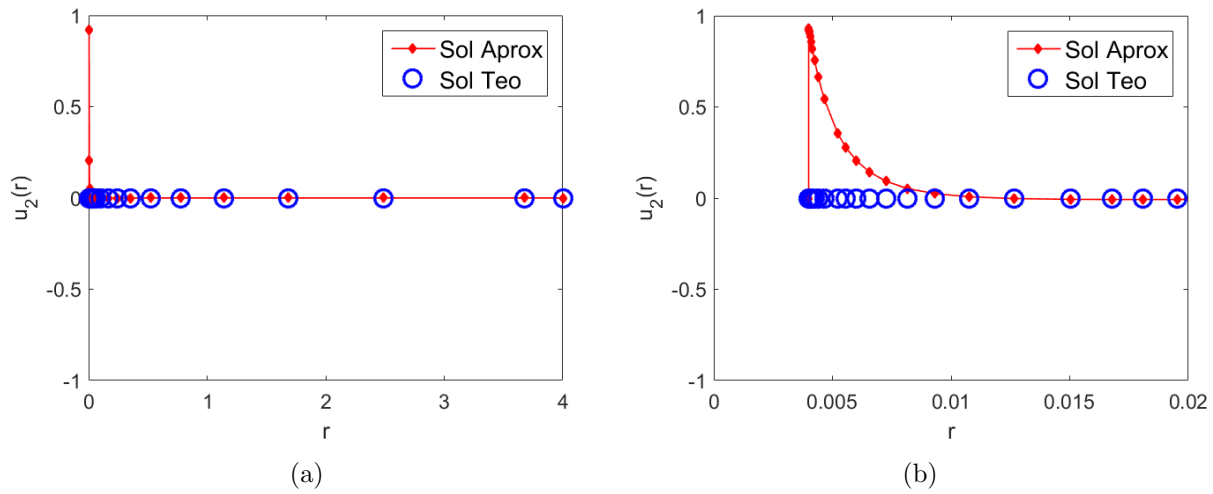


Figura 5.13: Aproximación de la segunda componente de la velocidad en $z = 0$, con elementos RT_0 en triángulos (a) para r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

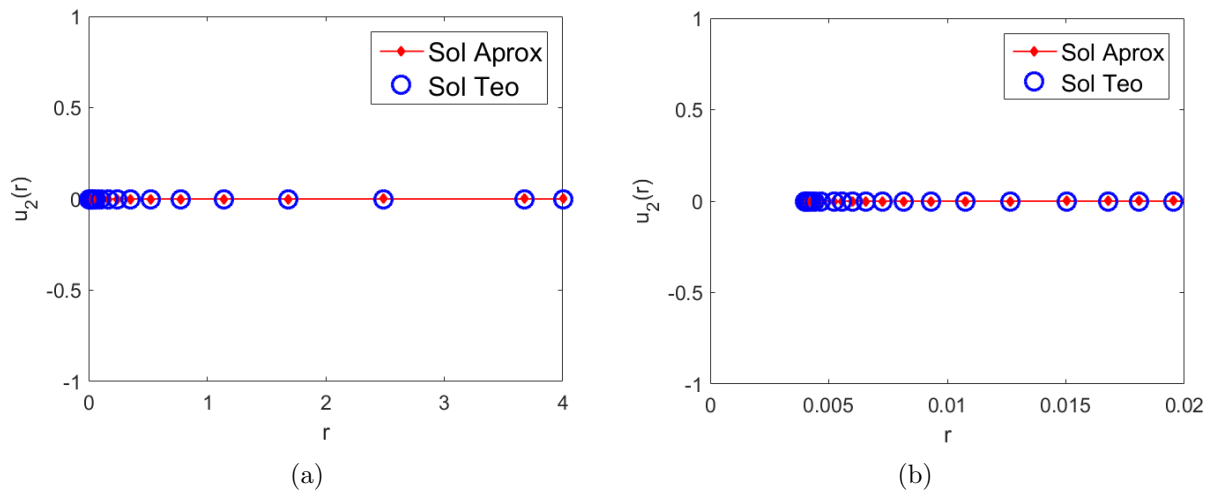


Figura 5.14: Aproximación de la segunda componente de la velocidad en $z = 0$, con elementos RT_0 en cuadriláteros (a) para r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo.

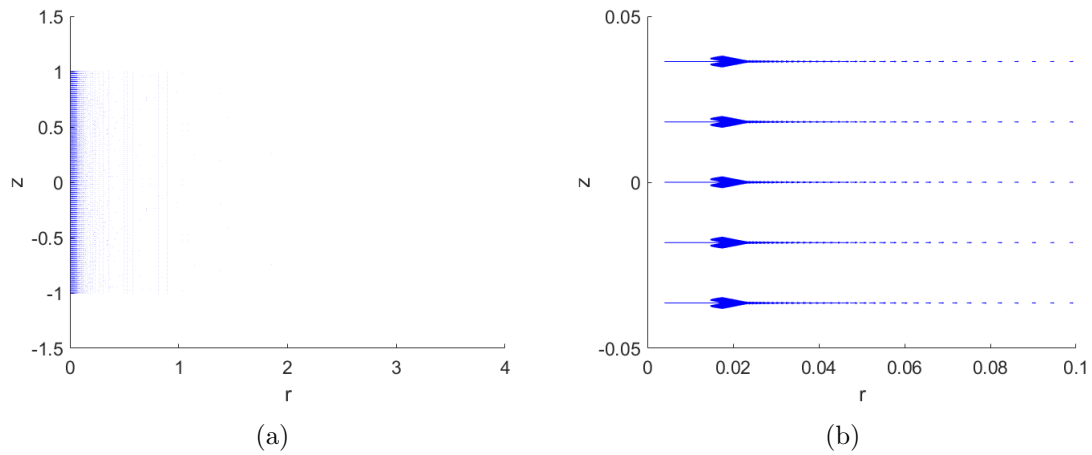


Figura 5.15: Campo de velocidades (a) para r en todo el dominio y (b) r cerca del pozo, con elementos RT_0 en cuadriláteros.

La figura [5.15](#) muestra la aproximación del campo de velocidades usando el método de elemento finito mixto con elementos RT_0 en cuadriláteros, para (a) (r, z) en todo el dominio y (b) r cerca de la zona de disparos. Se muestra únicamente la aproximación con la que se cometió menos error.

5.3. Flujo monofásico ligeramente compresible

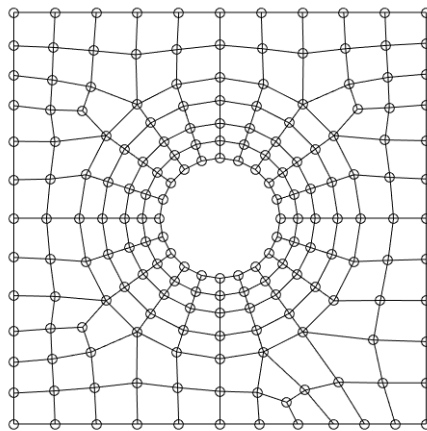


Figura 5.16: Malla refinada cerca del pozo.

Consideramos un yacimiento petrolero con los siguientes datos, en el sistema internacional.

$p_0 = 24821136 \text{ Pa}$; presión inicial.

$Q = 0.0005774286 \text{ m}^3/\text{s}$; gasto del pozo.

$\mu = 0.0010600000000000002 \text{ Pa} \cdot \text{s}$; viscosidad.

$\kappa = 2.9607689999999996\text{e-}13 \text{ m}^2$; permeabilidad.

$H = 30.48 \text{ m}$; altura del pozo.

$L = 1234.44 \text{ m}$; zona de influencia del pozo.

$\chi = 0.687797 \text{ m}^3/\text{s}$.

$dt = 1.157407407407408\text{e-}04$; paso de tiempo.

Dado que el cambio de la presión y velocidad cerca del pozo es drástico, se refinó la malla alrededor de esta zona, usando **GID 11.1.d**, como se muestra en la figura [5.16](#). Se tienen dos mallas, una con triángulos y otra con cuadriláteros, las cuales tienen los siguientes datos:

Malla de triángulos

$nnt = 16293$; número de nodos totales.

$h_{max} = 8.877970210528867\text{e-}02$; tamaño máximo del elemento.

$h_{min} = 6.954933151598236\text{e-}07$; tamaño mínimo del elemento.

$ne = 32186$; número de elementos.

Malla de cuadriláteros

$nnt = 16290$; número de nodos totales.

$h_{max} = 1.046199481758936\text{e-}01$; tamaño máximo del elemento.

$h_{min} = 1.085896938550742\text{e-}06$; tamaño mínimo del elemento.

$ne = 16090$; número de elementos.

Podemos observar que el número de nodos en la malla de cuadriláteros es casi el mismo que en la malla de triángulos.

Cabe mencionar que el número de condición de la matriz del sistema (4.20) para elementos RT_0 en cuadriláteros es $2.023319992288588e+16$ y $7.763809291767946e+15$ para elementos RT_0 en triángulos. Mientras que el número de condición para la matriz $M + \chi \Delta t N$, del sistema (3.35), es $9.606295151546193e+06$ para elementos lineales y $2.854795053607623e+07$ para elementos bilineales.

5.3.1. Aproximación de la presión

Las tablas 5.11, 5.12, 5.13 y 5.14 muestran, respectivamente, los errores absolutos de la presión usando elementos lineales, bilineales, RT_0 en triángulos y RT_0 en cuadriláteros, para diferentes tiempos en las normas infinito, L^2 y H^1 , las cuales están dadas por las ecuaciones (5.3), (3.1) y (3.2), respectivamente. Notamos de estas tablas que el menor error de aproximación se tiene con FE usando elementos bilineales mientras que el mayor error se produce para los elementos RT_0 en triángulos. Resultado que concuerda con el obtenido en flujo monofásico incompresible.

t	$\ p - p_h\ _\infty$	$\ p - p_h\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$1.939337e - 05$	$3.862740e - 07$	$5.527860e - 05$
$2.504629e - 01$	$2.727894e - 05$	$9.919497e - 07$	$6.391787e - 05$
$5.050925e - 01$	$2.968544e - 05$	$1.248513e - 06$	$6.524759e - 05$
$7.597222e - 01$	$3.050338e - 05$	$1.348133e - 06$	$6.559029e - 05$
$9.912037e - 01$	$3.089047e - 05$	$1.397761e - 06$	$6.572118e - 05$

Tabla 5.11: Errores absolutos de la presión con elementos lineales.

t	$\ p - p_h\ _\infty$	$\ p - p_h\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$1.589933e - 05$	$2.172176e - 07$	$4.710431e - 05$
$2.504629e - 01$	$2.053257e - 05$	$5.982126e - 07$	$5.004887e - 05$
$5.050925e - 01$	$2.210166e - 05$	$8.342844e - 07$	$5.075601e - 05$
$7.597222e - 01$	$2.281190e - 05$	$9.645996e - 07$	$5.101658e - 05$
$9.912037e - 01$	$2.320947e - 05$	$1.047113e - 06$	$5.115304e - 05$

Tabla 5.12: Errores absolutos de la presión con elementos bilineales.

t	$\ p - p_h\ _\infty$	$\ p - p_h\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$4.575839e - 04$	$1.283853e - 04$	$4.265134e - 03$
$2.504629e - 01$	$1.744218e - 03$	$7.467955e - 04$	$1.783352e - 02$
$5.050925e - 01$	$1.803194e - 03$	$1.025872e - 03$	$1.894723e - 02$
$7.597222e - 01$	$1.697212e - 03$	$1.124970e - 03$	$1.809613e - 02$
$9.912037e - 01$	$1.618898e - 03$	$1.653510e - 03$	$5.336016e - 02$

Tabla 5.13: Errores absolutos de la presión con elementos RT_0 en triángulos.

t	$\ p - p_h\ _\infty$	$\ p - p_h\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$4.256642e - 04$	$1.213939e - 04$	$4.240184e - 03$
$2.504629e - 01$	$1.711847e - 03$	$7.372200e - 04$	$1.762805e - 02$
$5.050925e - 01$	$1.792647e - 03$	$1.001114e - 03$	$1.843020e - 02$
$7.597222e - 01$	$1.689896e - 03$	$1.100602e - 03$	$1.763867e - 02$
$9.912037e - 01$	$1.607018e - 03$	$1.147406e - 03$	$1.685051e - 02$

Tabla 5.14: Errores absolutos de la presión con elementos RT_0 en cuadriláteros.

Las tablas [5.15](#), [5.16](#), [5.18](#) y [5.18](#) muestran, respectivamente, los errores relativos de la presión usando elementos lineales, bilineales, RT_0 en triángulos y RT_0 en cuadriláteros, para diferentes tiempos en las normas infinito, L^2 y H^1 , las cuales están dadas por las ecuaciones [\(5.3\)](#), [\(3.1\)](#) y [\(3.2\)](#), respectivamente. Notamos de estas tablas que el menor error de aproximación se tiene con FE usando elementos bilineales mientras que el mayor error se produce para los elementos RT_0 en triángulos. Resultado que concuerda con el obtenido en flujo monofásico incompresible.

t	$\ p - p_h\ _\infty / \ p\ _\infty$	$\ p - p_h\ _{L^2} / \ p\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1} / \ p\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$1.933182e - 05$	$1.933297e - 07$	$2.766683e - 05$
$2.504629e - 01$	$2.718760e - 05$	$4.963823e - 07$	$3.198514e - 05$
$5.050925e - 01$	$2.958155e - 05$	$6.246742e - 07$	$3.264556e - 05$
$7.597222e - 01$	$3.039394e - 05$	$6.744578e - 07$	$3.281411e - 05$
$9.912037e - 01$	$3.077787e - 05$	$6.992456e - 07$	$3.287769e - 05$

Tabla 5.15: Errores relativos de la presión con elementos lineales.

t	$\ p - p_h\ _\infty / \ p\ _\infty$	$\ p - p_h\ _{L^2} / \ p\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1} / \ p\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$1.584887e - 05$	$1.087172e - 07$	$2.357562e - 05$
$2.504629e - 01$	$2.046382e - 05$	$2.993520e - 07$	$2.504496e - 05$
$5.050925e - 01$	$2.202431e - 05$	$4.174212e - 07$	$2.539494e - 05$
$7.597222e - 01$	$2.273006e - 05$	$4.825795e - 07$	$2.552304e - 05$
$9.912037e - 01$	$2.312486e - 05$	$5.238302e - 07$	$2.558983e - 05$

Tabla 5.16: Errores relativos de la presión con elementos bilineales.

t	$\ p - p_h\ _\infty / \ p\ _\infty$	$\ p - p_h\ _{L^2} / \ p\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1} / \ p\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$4.561317e - 04$	$6.425671e - 05$	$2.134691e - 03$
$2.504629e - 01$	$1.738378e - 03$	$3.737045e - 04$	$8.924073e - 03$
$5.050925e - 01$	$1.796883e - 03$	$5.132794e - 04$	$9.479936e - 03$
$7.597222e - 01$	$1.691123e - 03$	$5.628114e - 04$	$9.053300e - 03$
$9.912037e - 01$	$1.618898e - 03$	$1.653510e - 03$	$9.036016e - 03$

Tabla 5.17: Errores relativos de la presión con elementos RT_0 en triángulos.

t	$\ p - p_h\ _\infty / \ p\ _\infty$	$\ p - p_h\ _{L^2} / \ p\ _{L^2}$	$\ p - p_h\ _{H^1} / \ p\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$4.239960e - 04$	$6.076752e - 05$	$2.042523e - 03$
$2.504629e - 01$	$1.705780e - 03$	$3.689128e - 04$	$8.821257e - 03$
$5.050925e - 01$	$1.706303e - 03$	$5.008921e - 04$	$9.221253e - 03$
$7.597222e - 01$	$1.683797e - 03$	$5.506206e - 04$	$8.824439e - 03$
$9.912037e - 01$	$1.601160e - 03$	$5.740027e - 04$	$8.429641e - 03$

Tabla 5.18: Errores relativos de la presión con elementos RT_0 en cuadriláteros.

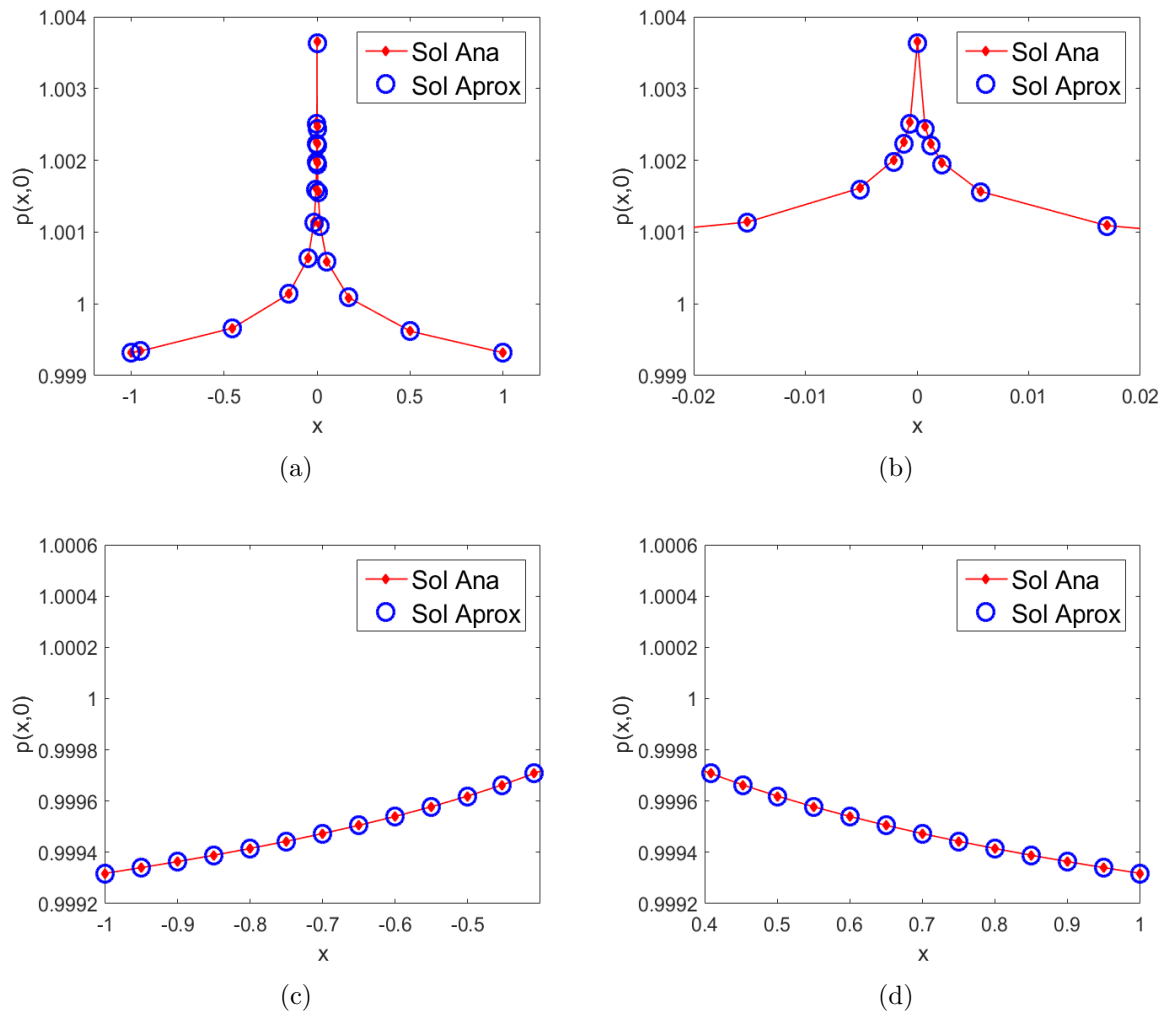


Figura 5.17: Comparación de la aproximación y solución analítica de la presión usando elementos lineales en $y = 0$ con (a) x en todo el dominio, (b) x cerca del pozo, (c) x entre -1 y -0.4 y (d) x entre 0.4 y 1.

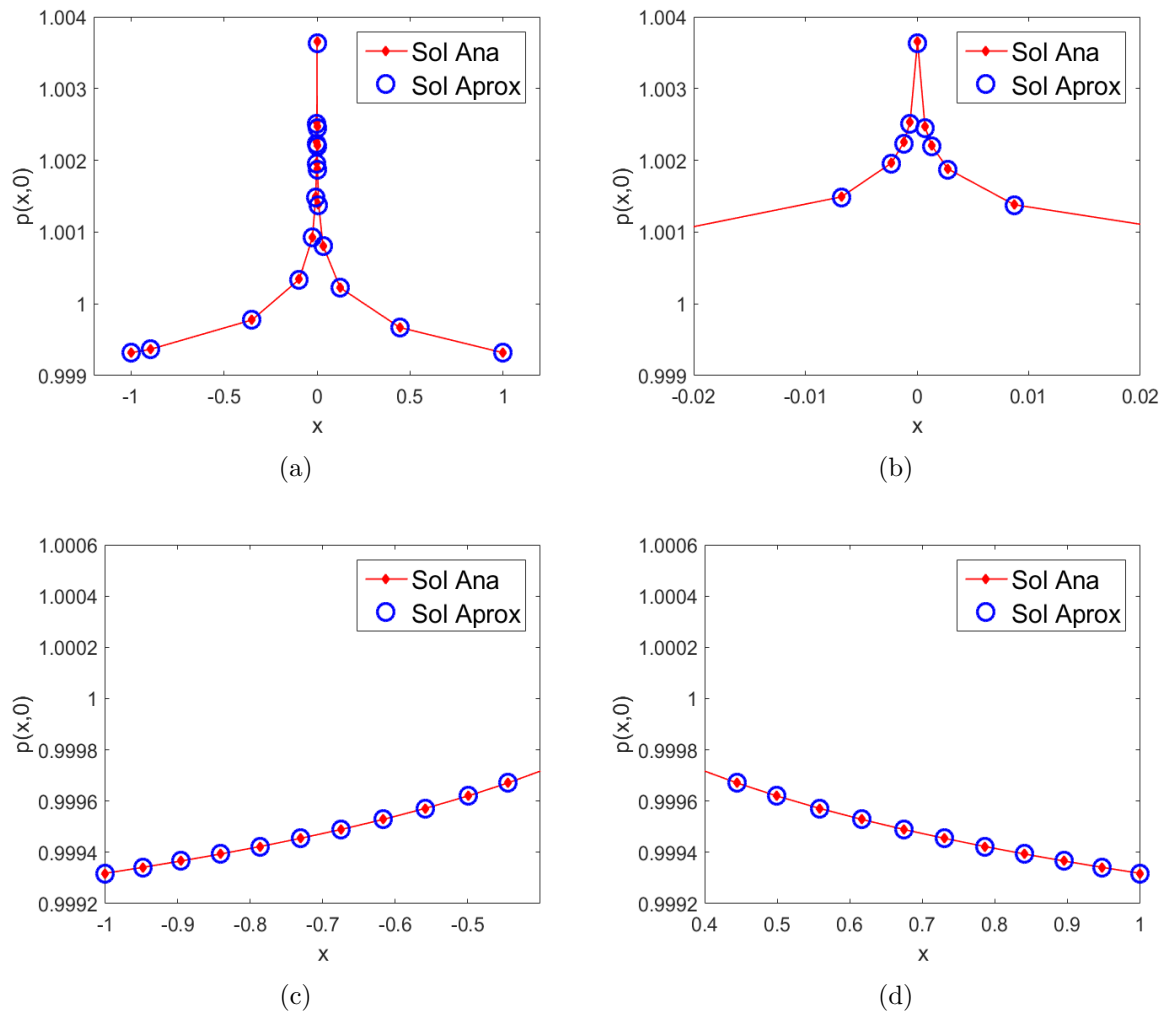


Figura 5.18: Comparación de la aproximación y solución analítica de la presión usando elementos bilineales en $y = 0$ con (a) x en todo el dominio, (b) x cerca del pozo, (c) x entre -1 y -0.4 y (d) x entre 0.4 y 1.

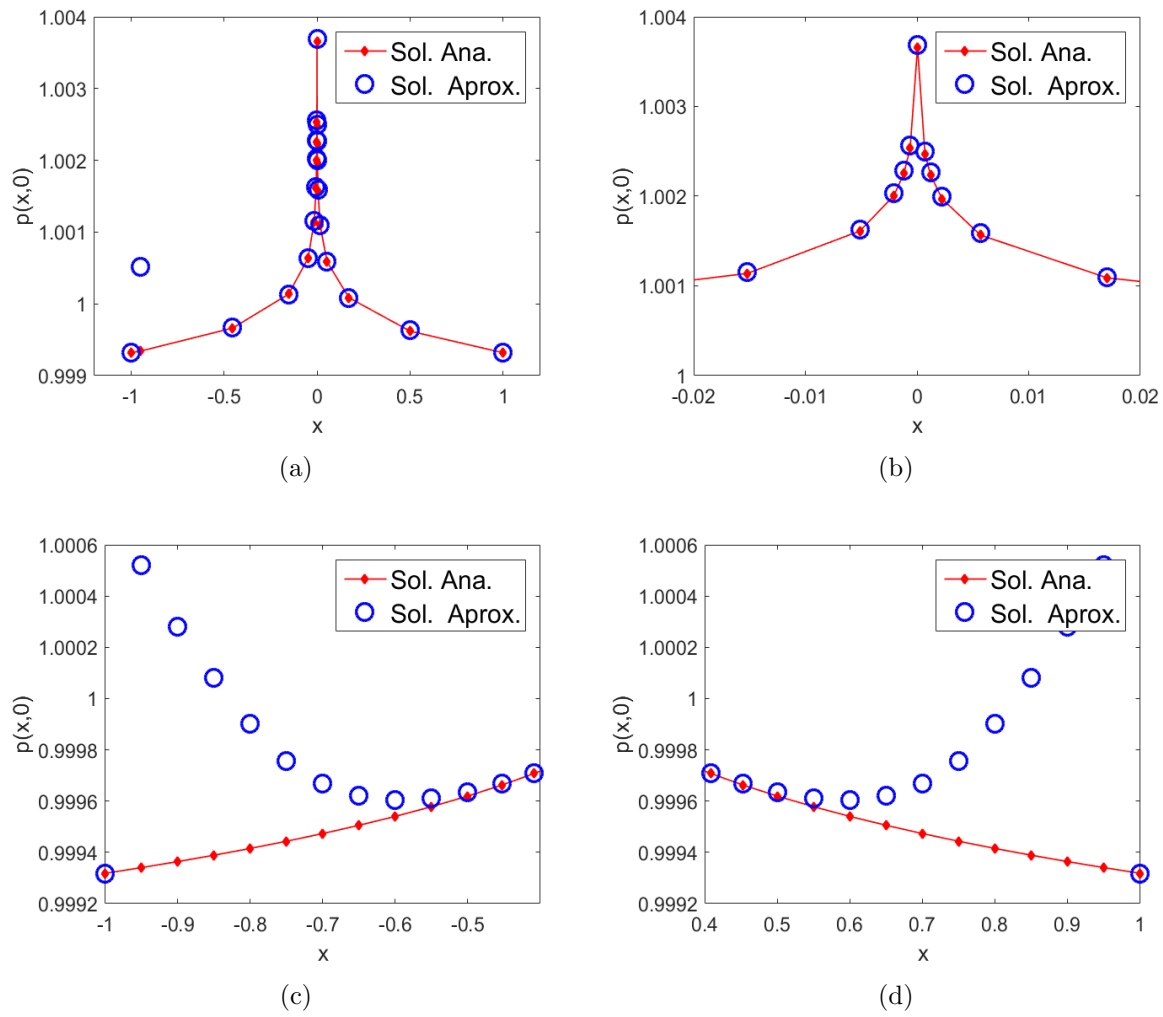


Figura 5.19: Comparación de la aproximación y solución analítica de la presión usando elementos RT_0 en triángulos para $y = 0$ con (a) x en todo el dominio, (b) x cerca del pozo, (c) x entre -1 y -0.4 y (d) x entre 0.4 y 1.

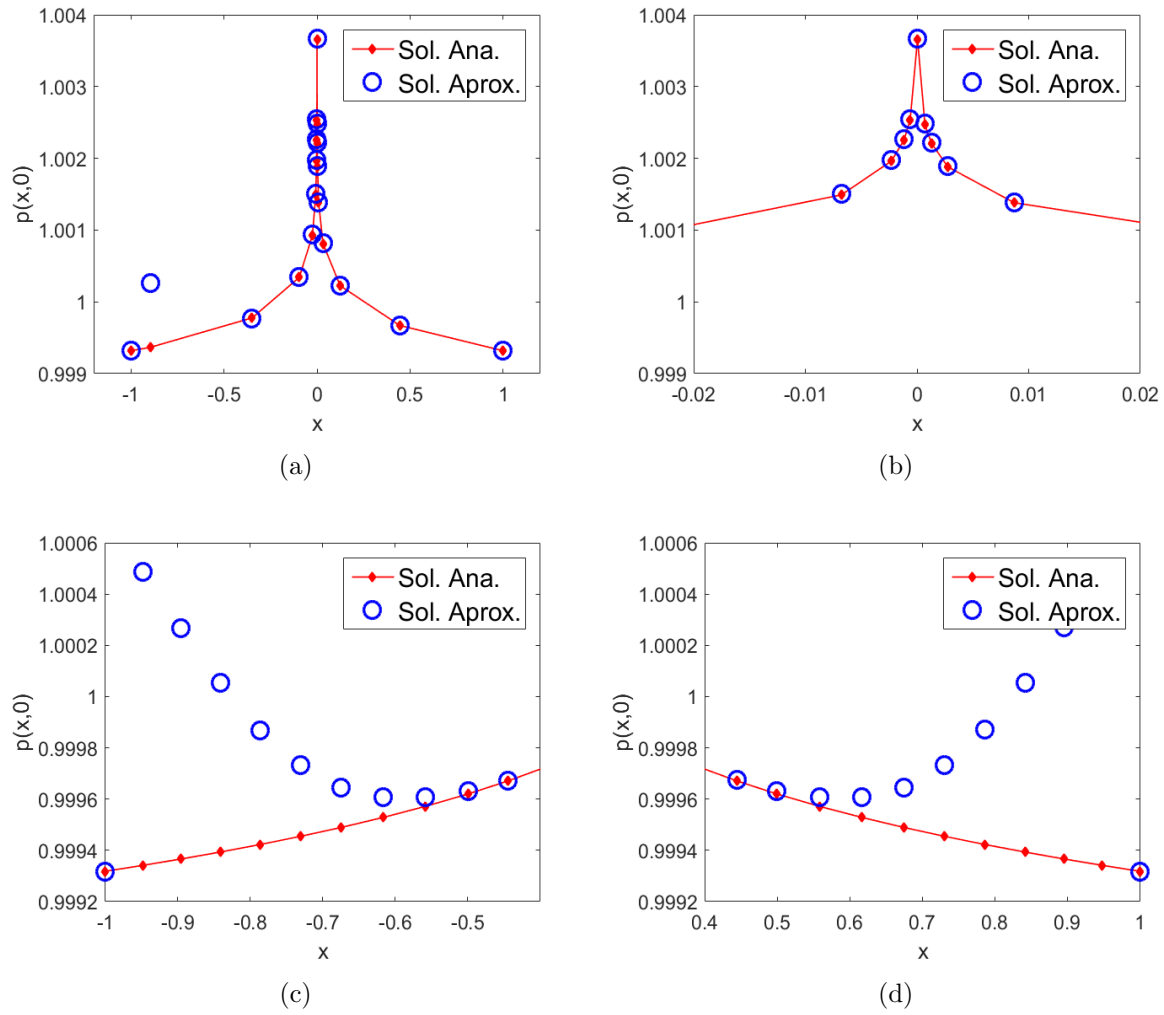


Figura 5.20: Comparación de la aproximación y solución analítica de la presión usando elementos RT_0 en cuadriláteros para $y = 0$ con (a) x en todo el dominio, (b) x cerca del pozo, (c) x entre -1 y -0.4 y (d) x entre 0.4 y 1.

Las figuras [5.17](#) y [5.18](#) muestran la comparación entre las soluciones numérica y la analítica de la presión usando el método de elemento finito estándar con elementos lineales y bilineales, respectivamente, para (a) x en todo el dominio y (b) x cerca del pozo para $t = 1$. Por otro lado, las figuras [5.19](#) y [5.20](#) exhiben el comportamiento de la solución analítica y la solución aproximada de la presión usando el método de elemento finito mixto con elementos RT_0 en triángulos y cuadriláteros, respectivamente, cuando (a) x en todo el dominio y (b) x cerca del pozo.

Al igual que en el caso de flujo monofásico incompresible, con la finalidad de percibir

mejor los resultados, se hacen cortes en $y = 0$ y se selecciona solo algunos punto al azar, sobre todo cerca del pozo ya que en esta zona la malla es muy fina. Podemos ver en las gráficas que hay una mejor aproximación cuando usamos el método de elemento finito estándar con cualquiera de los dos elementos que estamos usando que cuando se emplea el método de elemento finito mixto con elementos de Raviart-Thomas de bajo orden, basta con observar los valores cercanos a $x = -1, 1$ en las figuras 5.19 y 5.20 inciso (a), ya que en la frontera del dominio, los elementos son más grandes y como la presión se aproxima con un polinomio constante existe un mayor error.

Ya que la mejor aproximación se tiene con elementos bilineales en el método estándar se muestra en la figura 5.21 la aproximación de la presión en la región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ usando estos elementos para (a) $t = 0.25$, (b) $t = 0.5$, (c) $t = 0.75$ y (d) $t = 1$.

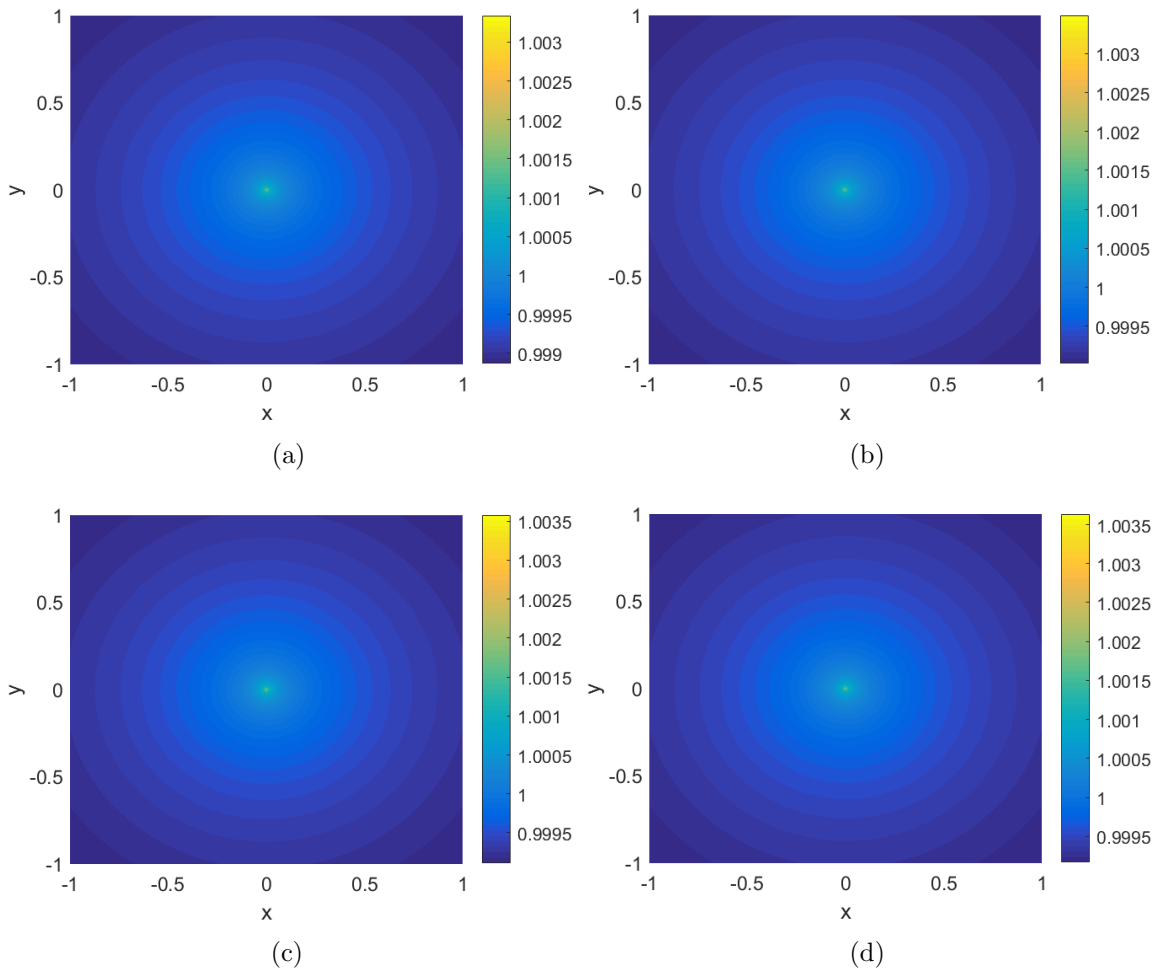


Figura 5.21: Aproximación de la presión en Ω con elementos bilineales para (a) $t = 0.25$, (b) $t = 0.5$, (c) $t = 0.75$ y (d) $t = 1$.

5.3.2. Aproximación de la velocidad

Las tablas [5.19](#), [5.20](#), [5.21](#) y [5.22](#) exhiben, los errores absolutos de la velocidad usando elementos lineales, bilineales, RT_0 en triángulos y RT_0 en cuadriláteros, respectivamente, para diferentes tiempos en las normas infinito, L^2 y H^1 , las cuales se describen en las ecuaciones [\(5.3\)](#), [\(3.1\)](#) y [\(3.2\)](#), respectivamente.

t	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$4.759521e - 02$	$1.618869e - 04$	$1.056511e + 00$
$2.504629e - 01$	$4.757759e - 02$	$1.678347e - 04$	$1.056512e + 00$
$5.050925e - 01$	$4.757925e - 02$	$1.690448e - 04$	$1.056512e + 00$
$7.597222e - 01$	$4.757963e - 02$	$1.693670e - 04$	$1.056512e + 00$
$9.912037e - 01$	$4.757973e - 02$	$1.694918e - 04$	$1.056512e + 00$

Tabla 5.19: Errores absolutos para la velocidad con elementos lineales.

t	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$4.677726e - 02$	$9.766169e - 05$	$7.391761e - 01$
$2.504629e - 01$	$4.677266e - 02$	$9.869855e - 05$	$7.391719e - 01$
$5.050925e - 01$	$4.677245e - 02$	$9.908300e - 05$	$7.391716e - 01$
$7.597222e - 01$	$4.677276e - 02$	$9.926580e - 05$	$7.391715e - 01$
$9.912037e - 01$	$4.677294e - 02$	$9.936689e - 05$	$7.391714e - 01$

Tabla 5.20: Errores absolutos para la velocidad con elementos bilineales .

t	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$1.311758e - 01$	$3.228779e - 02$	$1.255165e + 00$
$2.504629e - 01$	$9.732705e - 02$	$1.473628e - 02$	$1.145116e + 00$
$5.050925e - 01$	$9.732826e - 02$	$9.232137e - 03$	$1.141793e + 00$
$7.597222e - 01$	$9.732849e - 02$	$7.045014e - 03$	$1.141413e + 00$
$9.912037e - 01$	$9.732856e - 02$	$5.864857e - 03$	$1.141303e + 00$

Tabla 5.21: Errores absolutos para la velocidad con elementos RT_0 en triángulos.

t	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$1.115864e - 01$	$3.062020e - 02$	$6.248588e - 01$
$2.504629e - 01$	$3.334586e - 02$	$1.444798e - 02$	$3.021029e - 01$
$5.050925e - 01$	$3.237308e - 02$	$9.156498e - 03$	$2.908321e - 01$
$7.597222e - 01$	$3.237382e - 02$	$7.002305e - 03$	$2.894259e - 01$
$9.912037e - 01$	$3.237421e - 02$	$5.834060e - 03$	$2.890129e - 01$

Tabla 5.22: Errores absolutos para la velocidad con elementos RT_0 en cuadriláteros.

Las tablas 5.23, 5.24, 5.25 y 5.26 exhiben, los errores relativos de la velocidad usando elementos lineales, bilineales, RT_0 en triángulos y RT_0 en cuadriláteros, respectivamente, para distintos valores de t en las normas infinito, L^2 y H^1 , las cuales se describen en las ecuaciones (5.3), (3.1) y (3.2), respectivamente. Se observa, que para los cuatro elementos que usamos, el error relativo de la velocidad, en la norma L^2 , subió dos ordenes respecto al error absoluto.

t	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty / \ \vec{u}\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2} / \ \vec{u}\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1} / \ \vec{u}\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$3.582696e - 03$	$4.649588e - 02$	$4.484107e - 02$
$2.504629e - 01$	$3.581369e - 03$	$4.820416e - 02$	$4.484112e - 02$
$5.050925e - 01$	$3.581494e - 03$	$4.855172e - 02$	$4.484112e - 02$
$7.597222e - 01$	$3.581523e - 03$	$4.864428e - 02$	$4.484112e - 02$
$9.912037e - 01$	$3.581530e - 03$	$4.868010e - 02$	$4.484112e - 02$

Tabla 5.23: Errores relativos para la velocidad con elementos lineales.

t	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty / \ \vec{u}\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2} / \ \vec{u}\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1} / \ \vec{u}\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$3.521125e - 03$	$2.820749e - 02$	$3.137240e - 02$
$2.504629e - 01$	$3.520779e - 03$	$2.850696e - 02$	$3.137222e - 02$
$5.050925e - 01$	$3.520763e - 03$	$2.861800e - 02$	$3.137220e - 02$
$7.597222e - 01$	$3.520787e - 03$	$2.867080e - 02$	$3.137220e - 02$
$9.912037e - 01$	$3.520800e - 03$	$2.870000e - 02$	$3.137220e - 02$

Tabla 5.24: Errores relativos para la velocidad con elementos bilineales .

t	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty / \ \vec{u}\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2} / \ \vec{u}\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1} / \ \vec{u}\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$9.874167e - 03$	$9.273446e + 00$	$5.327245e - 02$
$2.504629e - 01$	$7.326225e - 03$	$4.232440e + 00$	$4.860170e - 02$
$5.050925e - 01$	$7.326316e - 03$	$2.651581e + 00$	$4.846066e - 02$
$7.597222e - 01$	$7.326334e - 03$	$2.023413e + 00$	$4.844456e - 02$
$9.912037e - 01$	$7.326339e - 03$	$1.684458e + 00$	$4.843987e - 02$

Tabla 5.25: Errores relativos para la velocidad con elementos RT_0 en triángulos.

t	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _\infty / \ \vec{u}\ _\infty$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{L^2} / \ \vec{u}\ _{L^2}$	$\ \vec{u} - \vec{u}_h\ _{H^1} / \ \vec{u}\ _{H^1}$
$1.115740e - 01$	$8.399594e - 03$	$8.843992e + 00$	$2.652049e - 02$
$2.504629e - 01$	$2.510086e - 03$	$4.172991e + 00$	$1.282196e - 02$
$5.050925e - 01$	$2.436861e - 03$	$2.644658e + 00$	$1.234361e - 02$
$7.597222e - 01$	$2.436916e - 03$	$2.022466e + 00$	$1.228392e - 02$
$9.912037e - 01$	$2.436946e - 03$	$1.685043e + 00$	$1.226639e - 02$

Tabla 5.26: Errores relativos para la velocidad con elementos RT_0 en cuadriláteros.

Como se aprecia en las tablas [5.19](#) - [5.22](#) y [5.23](#) - [5.26](#) el error más grande se alcanza cuando utilizamos el método de elemento finito mixto con elementos RT_0 en triángulos, mientras que el error más pequeño se tiene usando MFE con elementos de Raviart-Thomas en cuadriláteros, sin embargo es importante notar que en la norma L^2 el error más pequeño se obtiene usando elementos bilineales en el método estándar, de hecho se tienen los mismos ordenes de error en las normas infinito y H^1 .

Las figuras [5.22](#) a la [5.25](#) muestran la comparación entre la solución aproximada y la solución analítica para el campo de velocidades, con elementos lineales, bilineales, RT_0 en triángulos y cuadriláteros, respectivamente. En general en las gráficas (a) (x, y) está en todo el dominio y las gráficas (b)-(f) muestran un acercamiento en (x, y) cercanos y lejanos al pozo, donde (b) es el punto más cercano al pozo que se considera y (f) el más lejano. Todas las gráficas son para $t = 1$ (tiempo final). Observemos que los vectores de velocidad de los elementos RT_0 cambian de sentido conforme se alejan del pozo y se acercan a la frontera exterior, ver gráficas (e) y (f). De ahí que aparezca el error grande para la norma $L^2(\Omega)$ en RT_0 , tablas [5.25](#) y [5.26](#). Cabe mencionar que estas diferencias no aparecen en los primeros pasos de tiempo, por lo que posiblemente se deba a errores de redondeo.

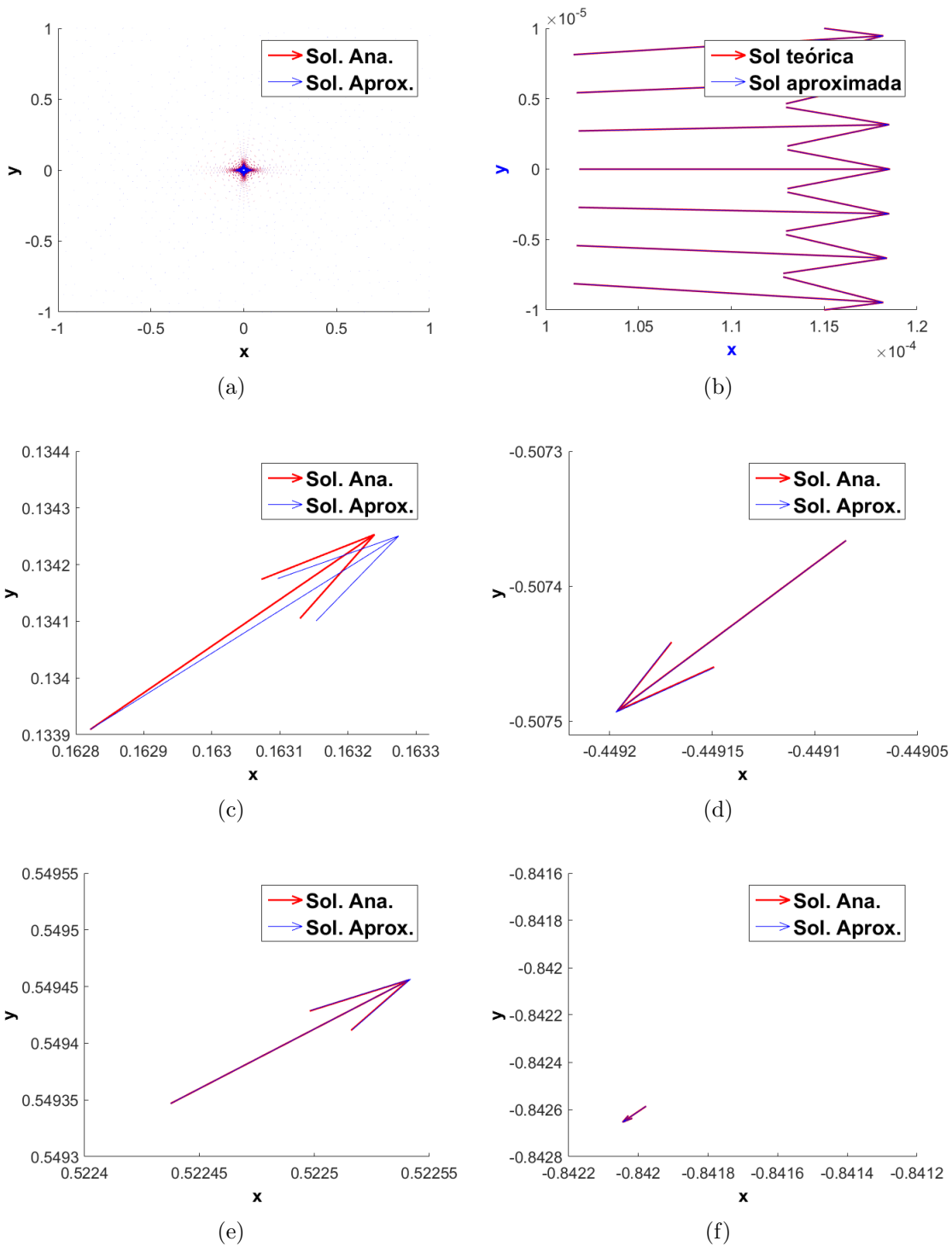


Figura 5.22: Campo de velocidades con elementos lineales.

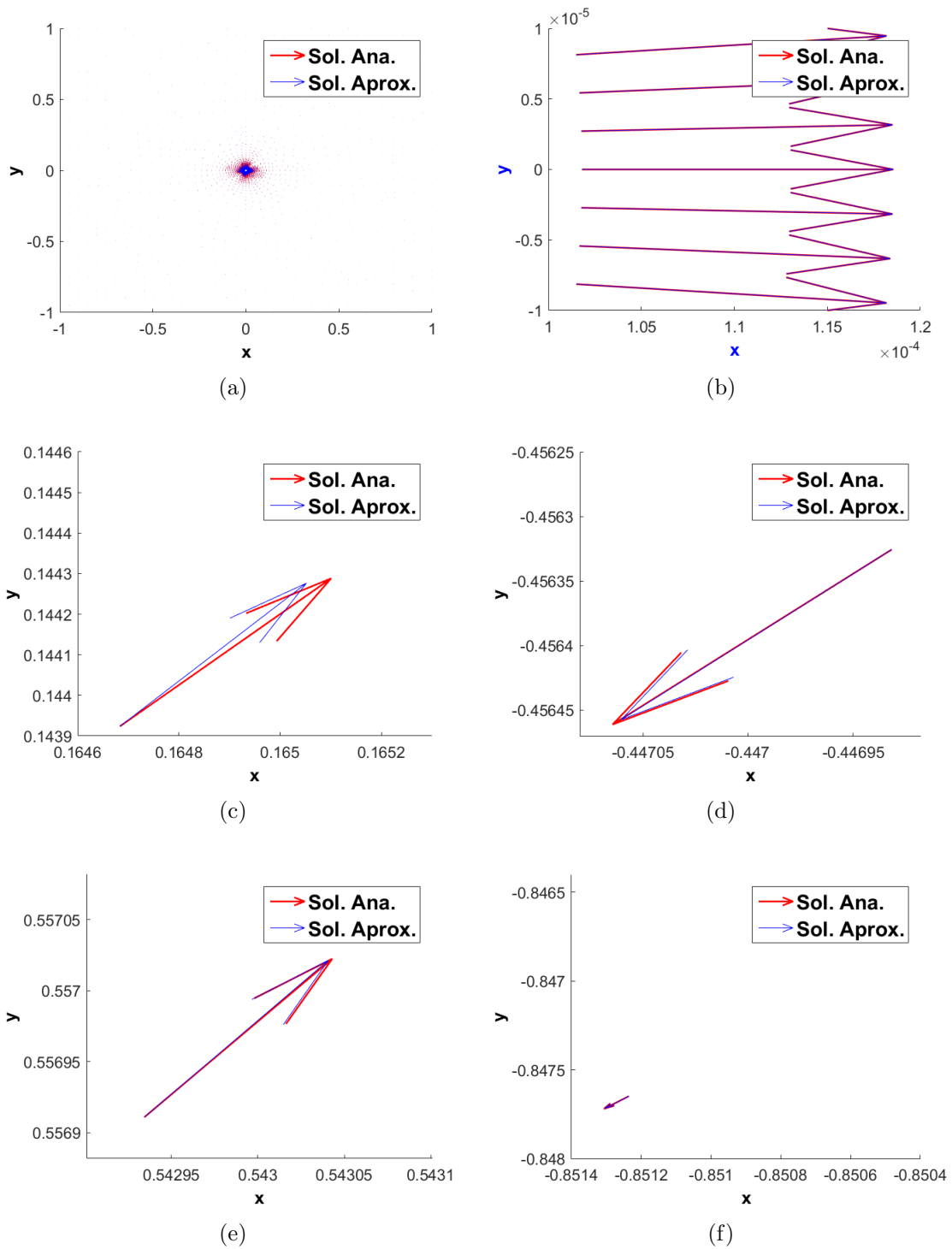


Figura 5.23: Campo de velocidades con elementos bilineales.

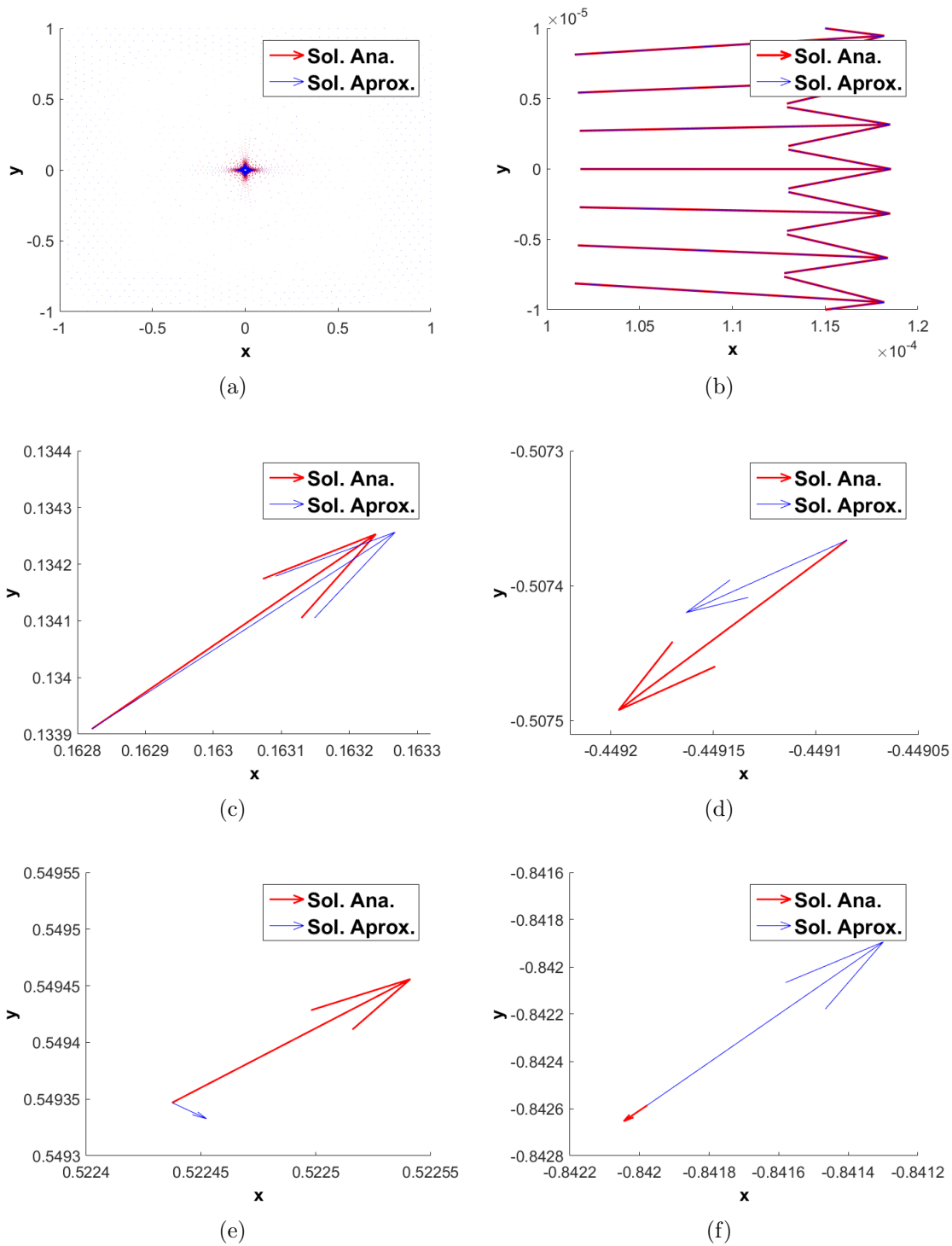


Figura 5.24: Campo de velocidades con elementos RT_0 en triángulos.

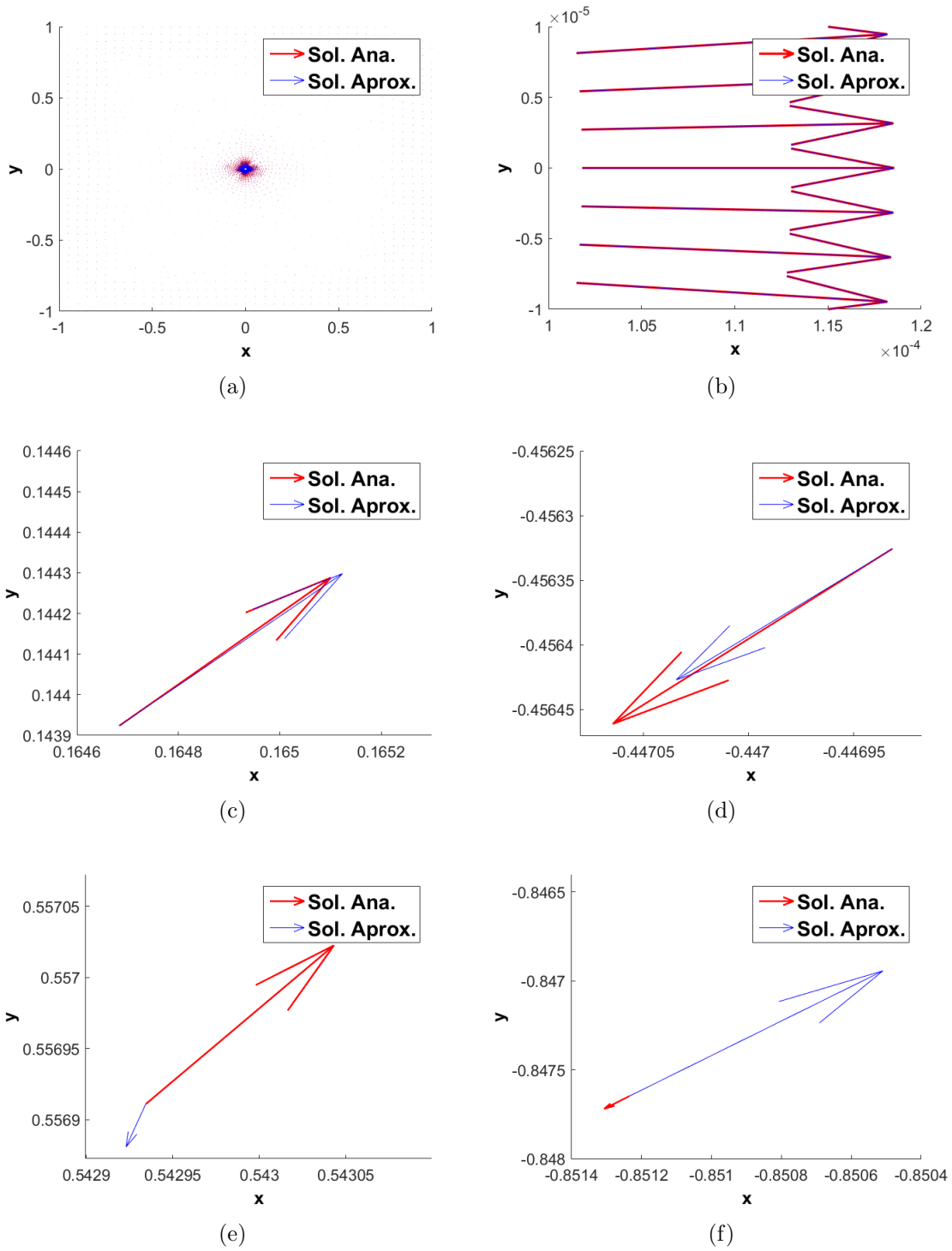


Figura 5.25: Campo de velocidades con elementos RT_0 en cuadriláteros.

5.4. Tiempo de cómputo

En esta sección se muestra el tiempo de CPU (en segundos) que tardó cada tipo de elementos para aproximar las soluciones a la presión y velocidad en cada uno de los modelos.

La tabla 5.27 muestra los tiempos de CPU que emplean los métodos de elemento finito y elemento finito mixto, con cada tipo de elemento usado, para aproximar la presión y velocidad en el modelo de flujo monofásico incompresible.

Elementos	Tiempo CPU (s)
Lineales	49.01
Bilineales	24.01
RT_0 en triángulos	197.12
RT_0 en cuadriláteros	62.65

Tabla 5.27: Tiempo de CPU que emplean los métodos en aproximar las soluciones del problema de flujo monofásico incompresible.

La tabla 5.28 muestra los tiempos de CPU que invierten los métodos de elemento finito y elemento finito mixto, con cada tipo de elemento usado, para aproximar la presión y velocidad en el modelo de flujo monofásico ligeramente compresible, al tiempo $t = 1$.

Elementos	Tiempo CPU (s)
Lineales	21752.60
Bilineales	13285.05
RT_0 en triángulos	24486.29
RT_0 en cuadriláteros	15871.99

Tabla 5.28: Tiempo de CPU que tardan los métodos en aproximar las soluciones del problema de flujo monofásico ligeramente compresible al tiempo $t = 1$.

Como puede verse, para ambos modelos: flujo monofásico incompresible y flujo monofásico ligeramente compresible, el tiempo que emplea el método MFE es mayor al que tarda el método FE. Cabe señalar que en este último método se resuelven sistemas de ecuaciones de tamaño $39,959 \times 39,959$ mientras que en los elementos RT_0 en triángulos y cuadriláteros se resuelven sistemas de tamaño $196,980 \times 196,980$ y $118,000 \times 118,000$, respectivamente.

Capítulo 6.

Conclusiones

En este trabajo se resolvió el problema de flujo en una fase sobre medio poroso considerando dos casos. El primero supone que se tiene un flujo incompresible y el segundo que el flujo es ligeramente compresible. En ambos casos se considera que la permeabilidad y viscosidad son constantes.

Para aproximar la presión y la velocidad, de los modelos, se usaron los métodos de elemento finito, con elementos lineales y bilineales, y elemento finito mixto, con elementos de Raviart-Thomas de bajo orden en triángulos y rectángulos.

En el método que llamamos estándar se usaron dos técnicas para aproximar la velocidad, una fue usar la fórmula de Green y la otra no usarla, vimos que se tienen mejores aproximaciones cuando la usamos. Por esta razón para flujo monofásico ligeramente compresible se optó por usar la fórmula de Green en la formulación variacional de la velocidad. Además se hicieron pruebas con las cuadraturas de integración cerradas y abiertas para estos elementos y se llegó a la conclusión que las cuadraturas cerradas nos generan ordenes de error más pequeños, por lo cual se trabajó con estas.

Para el método mixto encontramos una expresión explícita de las funciones de forma de los elementos RT_0 en triángulos, por lo que primero se programó esta técnica para integrar directamente sobre los elementos de la malla. Una vez que validamos los resultados se introdujo un elemento de referencia, que es mapeado a los elementos de la malla mediante la transformación de Piola, ya que en este caso, la transformación isoparamétrica no conserva las componentes normales ni mapea los espacios $H(\text{div}, \hat{\Omega})$ a los $H(\text{div}, \Omega_e)$. Observamos que el comportamiento de las soluciones aproximadas cuando se utiliza el elemento de referencia es el mismo que cuando no se usa. Para el caso de los elementos de Raviart-Thomas de bajo orden en cuadriláteros solo se trabajó a través de su elemento de referencia, pues no se tiene una expresión para las funciones de forma.

Por la forma de las soluciones sabemos que la presión y la velocidad en ambos modelos cambian drásticamente cerca del pozo, por esta razón se refinaron las mallas cerca de este. Aún así, los mayores errores están cerca del pozo.

De acuerdo con los resultados numéricos obtenidos, en ambos problemas (flujo monofásico incompresible y ligeramente compresible), podemos decir que los elementos bilineales en el método estándar generan mejores aproximaciones de la presión, mientras que el error máximo se alcanzó con elementos RT_0 en triángulos en el método mixto. En el caso de la velocidad, la mejor aproximación se tiene con elementos de Raviart-Thomas de bajo orden en cuadriláteros, sin embargo el orden del error es el mismo que al usar el método FE con elementos bilineales, por otro lado, el mayor error se comete con elementos RT_0 en triángulos.

Es importante notar que los grados de libertad en el método estándar son menos que en el método mixto, por ejemplo para flujo monofásico incompresible, con el método estándar, para aproximar la presión se resolvió un sistema de 39,959 ecuaciones con 39,959 incógnitas para los elementos lineales y bilineales. Para MFE con elementos RT_0 en triángulos se resuelve un sistema de $196,980 \times 196,980$ y de $118,000 \times 118,000$ para elementos de Raviart-Thomas en cuadriláteros, además de que las soluciones de estos sistemas son las aproximaciones de la presión en los baricentros de cada elemento y las componentes normales de la velocidad en los puntos medios de cada arista, es decir se debe hacer otro análisis para aproximar la presión y velocidad en cada nodo de la malla. Por lo que, el tiempo que tarda el método mixto en calcular la solución es mayor que usando el método estándar.

En conclusión podemos decir que el método de elemento finito mixto con elementos de Raviart-Thomas de bajo orden en cuadriláteros nos genera aproximaciones comparables con las que tenemos con el método FE en cuadriláteros, sin embargo el tiempo de cómputo y la memoria que se usa es mayor con el método MFE.

Apéndice A.

Minimización de problemas con restricciones

A.1. Problemas de minimización

En algunas variantes del método de elemento finito, es común que la solución de un problema con valores a la frontera sea aproximada por un mínimo de cierto funcional de energía. En este apartado usamos cálculo variacional para encontrar el mínimo de un funcional lineal con restricciones.

Consideremos problemas de minimización, en los cuales se pide que el mínimo obtenido esté en aquellos espacios de funciones H que satisfacen condiciones como:

$$Bu = g, \tag{A.1}$$

donde B es un operador lineal de H en otro espacio de Hilbert Q y g representa un elemento en Q . El subespacio K de H , que consiste en todos los elementos que satisfacen la restricción (A.1), es llamado el conjunto restricción o el conjunto de funciones admisibles

$$K = \{v \in H : Bv = g\}. \tag{A.2}$$

El problema de minimización ahora, consiste en encontrar un $u \in K$ tal que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \tag{A.3}$$

El método de multiplicadores de Lagrange replantea el problema en todo el espacio H , relajando la restricción mediante la introducción de un multiplicador (de Lagrange), ver [1], por esto introducimos un segundo espacio de funciones Q' , que asumimos es un espacio de Hilbert, llamado el espacio de multiplicadores de Lagrange, el cual es el dual del espacio Q que contiene a los elementos Bu ; esto es, B mapea H en Q , como se afirmó anteriormente, e introducimos un funcional L en $H \times Q'$ sobre \mathbb{R} , definido por

$$L(v, q) = J(v) + [q, Bv - g], \tag{A.4}$$

donde $[\cdot, \cdot]$ denota el producto interior dual en $Q' \times Q$. Luego, si q es un elemento de Q' , tenemos

$$\begin{aligned} q(g) &= [q, g] \in \mathbb{R}; & g \in Q \\ q(\alpha g_1 + \beta g_2) &= \alpha [q, g_1] + \beta [q, g_2], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad y \quad g_1, g_2 \in Q. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Los elemento $q \in Q'$ son multiplicadores (de la restricción) y el funcional L en (A.4) es llamado el correspondiente Lagrangiano de J y el conjunto de restricciones K . Entonces, la primera variación en $(u, p) \in H \times Q'$ es

$$\begin{aligned} \langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{H \times Q'} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(u + \epsilon v, p + \epsilon q) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \{J(u + \epsilon v) + [p + \epsilon q, B(u + \epsilon v) - g]\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \{J(u + \epsilon v) + [p + \epsilon q, Bu + \epsilon Bv - g]\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \{J(u + \epsilon v) + [p, Bu + \epsilon Bv - g] + \epsilon [q, Bu + \epsilon Bv - g]\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \{J(u + \epsilon v) + [p, Bu - g] + \epsilon [p, Bv] + \epsilon [q, Bu - g] + \epsilon^2 [q, v]\} \\ &= \langle \delta J(u), v \rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{[p, Bv] + [q, Bu - g] + 2\epsilon [q, v]\} \\ &= \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] + [q, Bu - g]. \end{aligned}$$

Es decir, la primera variación de L en $(u, p) \in H \times Q'$ es

$$\langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{H \times Q'} = \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] + [q, Bu - g], \quad (\text{A.6})$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interior en $(H \times Q')' \times (H \times Q')$. Aquí $\langle \delta J(u), v \rangle$ es la primera variación de J evaluada en u , ya que asumimos que B es lineal, usamos el hecho que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} [p + \epsilon q, B(u + \epsilon v) - g] = [p, Bv] + [q, Bu - g]$$

Observemos que el operador adjunto B^* de B tiene la propiedad que $B^* : Q' \rightarrow H'$ y para cualquier $q \in Q'$ arbitrario, $v \in H$, se sigue que

$$[q, Bv] = \langle B^* q, v \rangle_{H' \times H}. \quad (\text{A.7})$$

Así, la igualdad (A.6) puede escribirse como sigue:

$$\langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{H \times Q'} = \langle \delta J(u), v \rangle + \langle B^* p, v \rangle + \langle B^* q, u \rangle - [q, g] \quad (\text{A.8})$$

Si (u, p) es tal que $\langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{H \times Q'} = 0$ para $v \in H$ y $q \in Q'$, se obtiene el problema variacional con valores en la frontera siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] &= 0 \quad \forall v \in H \\ [q, Bu - g] &= 0 \quad \forall q \in Q'. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Bajo ciertas condiciones de J y B la solución u de las ecuaciones (A.9) es precisamente la solución del problema de minimización con restricciones (A.3)

A.1.1. Existencia y unicidad de un mínimo

En este apartado daremos algunas condiciones que garantizan la existencia y unicidad de un mínimo para un funcional J dado. Además estas condiciones nos dan información en la aceptabilidad de varias aproximaciones de J . Supongamos que J es un funcional definido en espacio Hilbert real H con producto interior $(\cdot, \cdot)_H$ y norma $\|\cdot\|_H = \sqrt{(\cdot, \cdot)_H}$, deseamos encontrar un mínimo $u \in H$ tal que satisface

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H \quad (J : H \rightarrow \mathbb{R}) \quad (\text{A.10})$$

Los argumentos de minimización se aplican siempre al funcional J que cumple las siguientes condiciones:

1. J es diferenciable. En otras palabras, J es tal que siempre es posible calcular su primera variación,

$$\langle \delta J(u), v \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} J(u + \epsilon v).$$

Aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la pareja dual en $H' \times H$; esto es, si H' es el dual de H , entonces $\delta J(u) \in H'$ y $\delta J(u) \equiv \langle \delta J(u), v \rangle$.

2. J es estrictamente convexo. Esto es, si u y v son elementos arbitrarios del espacio H en el cual J está definido y θ es un número real, $0 < \theta < 1$, entonces

$$J(\theta u + (1 - \theta)v) < \theta J(u) + (1 - \theta)J(v)$$

cuando $u, v \neq 0, u \neq v$.

3. J es coercivo. Es decir, si $\|\cdot\|_H$ es una norma apropiada en H , la magnitud de la evaluación de J en u crece conforme incrementan los valores de $\|u\|_H$; esto es

$$\lim_{\|u\|_H \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$$

Bajo estas condiciones se puede demostrar el siguiente teorema: 1

Teorema 2. Sea H un espacio de Hilbert con producto interior $(\cdot, \cdot)_H$ y norma $\|\cdot\|_H = \sqrt{(\cdot, \cdot)_H}$. Sea $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional real que satisface las condiciones 1-3 anteriores. Entonces existe un único elemento $u \in H$ que minimiza J sobre todo H :

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H.$$

Además, el mínimo se caracteriza por satisfacer la ecuación

$$\langle \delta J(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in H.$$

A.2. Problemas de punto silla

La introducción del funcional Lagrangiano L de la forma (A.4) transforma el problema de minimización con restricciones (A.3) o en el *problema de encontrar un punto silla*.

Un *punto silla* de un funcional $L : H \times Q' \rightarrow \mathbb{R}$ es un par (u, p) con $u \in H$ y $p \in Q'$ tal que

$$L(u, q) \leq L(u, p) \leq L(v, p) \quad \forall v \in H, \quad q \in Q'. \quad (\text{A.11})$$

A continuación se presentan las condiciones suficiente para la existencia de un punto silla, las cuales son similares a las listadas en el teorema 2:

1. Condiciones suficientes

- (a) Para cada $q_0 \in Q'$, $L(v, q_0)$ es estrictamente convexo y diferenciable con respecto a v ; esto es

$$\langle \delta_v L(u, q_0), (v, q_0) \rangle_{H \times Q'} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial L(u + \epsilon v, q_0)}{\partial \epsilon}$$

existe para todo $u \in H$ y, para $u, v \neq 0$,

$$L(\theta u + (1 - \theta)v, q_0) < \theta L(u, q_0) + (1 - \theta)L(v, q_0), \quad (\text{A.12})$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$.

- (b) Para $v_0 \in H$ fijo, $L(v_0, q)$ es cóncavo y diferenciable con respecto a q ; esto es,

$$\langle \delta_q L(v_0, p), (v_0, q) \rangle_{H \times Q'} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(v_0, p + \epsilon q)$$

existe en todo $p \in Q'$ y para $p, q \neq 0$,

$$L(v_0, \theta p + (1 - \theta)q) \geq \theta L(v_0, p) + (1 - \theta)L(v_0, q), \quad (\text{A.13})$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$.

- (c) Uno puede encontrar un $q_0 \in Q'$ tal que $L(v, q_0)$ es coercivo con respecto a v , es decir que

$$\lim_{\|v\|_H \rightarrow \infty} L(v, q_0) = +\infty. \quad (\text{A.14})$$

- (d) Podemos encontrar un $v_0 \in H$ tal que $L(v_0, q)$ es negativamente coercivo con respecto a q , es decir

$$\lim_{\|q\|_{Q'} \rightarrow \infty} L(v_0, q) = -\infty. \quad (\text{A.15})$$

Se puede demostrar que cuando se cumplen las condiciones anteriores, existe al menos un punto silla $(u, p) \in H \times Q'$ en $L(\cdot, \cdot)$ y que (u, p) es una solución del problema variacional con valores a la frontera (A.9) [13].

2. Suposiciones adicionales: Aplicamos las condiciones anteriores en el funcional $L(\cdot, \cdot)$ definido en la ecuación (A.4), suponiendo las siguientes condiciones:

- (a) El funcional $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo y satisface las condiciones del teorema [2]; en particular, supongamos que

$$J(v) \geq C_0 \|v\|_H^2 - C_1(f) \|v\|_H \quad (\text{A.16})$$

para todo $v \in H$, donde C_0 y C_1 son constantes positivas y C_1 depende de los datos f (término fuente del problema elíptico).

- (b) El operador de restricciones $B : H \rightarrow Q$ es un operador lineal acotado; esto es, existe una constante $C_B > 0$ tal que para cada $v \in H$,

$$\|Bv\|_Q \leq C_B \|v\|_H. \quad (\text{A.17})$$

- (c) El operador variacional $\delta J : H \rightarrow H'$ es acotado; esto es,

$$\text{si } \|v\|_H \leq C_1 \text{ entonces } \|\delta J(v)\|_{H'} \leq C_2 \quad (\text{A.18})$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

Es importante señalar que las condiciones (A.16) y (A.17) se pueden usar para demostrar que se cumplen las condiciones (A.12) y (A.13). Ahora, si J es coercivo, entonces el funcional L es coercivo para un q fijo y con esto se cumple la condición (A.14). Debido a que las suposiciones (A.16)-(A.18) no son suficientes para mostrar (A.15) se requiere la siguiente condición [13].

Condición de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi: Existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\beta \|q\|_{Q'} \leq \sup_{v \in H, (v \neq 0)} \frac{|[q, Bv]|}{\|v\|_H} \quad \forall q \in Q'. \quad (\text{A.19})$$

La desigualdad (A.19) también es conocida como la condición de Ladyshenskaja-Babuška-Brezzi o simplemente condición *inf – sup*.

Teorema 3. Si se cumplen las suposiciones (A.16)-(A.18) y la condición de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (A.19). Entonces existe un único punto silla $(u, p) \in H \times Q'$ del Lagrangiano (A.4) y este punto silla es solución al problema (A.9).

En el caso discreto, se reformula la condición de Babuška-Brezzi discreta de la siguiente forma [\[1\]](#):

Condición discreta de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi: Existe $\beta_h > 0$ tal que

$$\beta_h \|q_h\|_{Q^h} \leq \sup_{\vec{v}_h \in \mathbf{H}^h, \vec{v}_h \neq 0} \frac{\left| \int_{\Omega_h} q_h \nabla \cdot \vec{v}_h d\Omega \right|}{\|\vec{v}_h\|_{\mathbf{H}^h}} \quad \forall q_h \in Q^h, \quad (\text{A.20})$$

donde Q^h y \mathbf{H}^h son aproximaciones finito-dimensionales de Q' y \mathbf{H}' , respectivamente.

La condición discreta de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi nos da un requerimiento para la estabilidad del método de elemento finito. Sin embargo, esto no es suficiente para asegurar la estabilidad fuerte, pues si β_h depende del tamaño de la malla h , y puede pasar que $\beta_h \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. En las mejores circunstancias, una β_h dependiente de h nos da una tasa baja de convergencia y en el peor de los casos se tiene un esquema numéricamente inestable. Para evitar estos problemas se usan elementos que satisfagan la siguiente condición : Existe $\beta_h > 0$ tal que

$$\beta_h \|\nabla q_h\|_0 \leq \sup_{\vec{v}_h \in \mathbf{H}^h, \vec{v}_h \neq 0} \frac{\left| \int_{\Omega_h} \nabla q_h \cdot \vec{v}_h d\Omega \right|}{\|\vec{v}_h\|_0} \quad \forall q_h \in Q^h, \quad (\text{A.21})$$

con

$$\|\vec{v}_h\|_0 = \left(\int_{\Omega_h} \vec{v}_h \cdot \vec{v}_h dx \right)^{1/2}; \quad \vec{v}_h \in \mathbf{H}^h.$$

Apéndice B.

Propiedades de las funciones de forma para elementos RT_0 en triángulos.

Las funciones de forma para cada elementos dadas por

$$\vec{\varphi}_\beta^e(\vec{x}) = \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} (\vec{x} - \vec{P}_\beta) \quad \text{para } \beta = 1, 2, 3,$$

donde $\sigma_\beta = \vec{n}_\beta \cdot \vec{\nu}_\beta$, con \vec{n}_β y $\vec{\nu}_\beta$ las normales exteriores y globales de la arista β , respectivamente, $|a_\beta|$ es la longitud de la arista a_β , $|\Omega_e|$ es el área del elemento y \vec{P}_β es el vértice opuesto a la arista β satisfacen lo siguiente:

(i) $\vec{\varphi}_\beta(\vec{x}_{m_\lambda}) \cdot \vec{\nu}_\lambda = \delta_{\lambda,\beta}$.

(ii) En el caso de coordenadas cartesianas la divergencia es de la forma $\nabla \cdot (\vec{\varphi}_\beta^e(\vec{x})) = \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{|\Omega_e|}$ y para coordenadas cilíndricas suponiendo que $x = (r, z)$, es decir, no hay

dependencia del ángulo θ , se tiene $\nabla \cdot (\vec{\varphi}_\beta^e(\vec{x})) = \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} \left(3 - \frac{P_{\beta,1}}{r} \right)$.

(iii) $\frac{1}{|a_\beta|} \int_{a_\beta} \vec{\varphi}_\beta(\vec{x}_{m_\lambda}) \cdot \vec{\nu}_\lambda ds = \delta_{\lambda,\beta}$

Demostración.

(i) Consideremos los siguientes casos:

- Si $\lambda \neq \beta$

Dado que $\lambda \neq \beta$ entonces $\vec{P}_\beta \in a_\lambda$ y $(\vec{x}_{m_\lambda} - \vec{P}_\beta) \cdot \vec{\nu}_\lambda = 0$ pues $\vec{\nu}_\lambda$ es la normal global de a_λ , así $\vec{\varphi}_\beta(\vec{x}_{m_\lambda}) \cdot \vec{\nu}_\lambda = 0$.

- Si $\lambda = \beta$

Denotemos por h_λ a la altura del triángulo Ω_e con base a_λ , cuyo tamaño es

$$\begin{aligned} |h_\lambda| &= \left\| \text{Proy}_{\vec{v}_\lambda} \left(\vec{x}_{m_\lambda} - \vec{P}_\lambda \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{(\vec{x}_{m_\lambda} - \vec{P}_\lambda) \cdot \vec{v}_\lambda}{\|\vec{v}_\lambda\|} \vec{v}_\lambda \right\| \\ &= \left| (\vec{x}_{m_\lambda} - \vec{P}_\lambda) \cdot \vec{v}_\lambda \right| \end{aligned}$$

Por otro lado, sabemos que

$$|\Omega_e| = \frac{1}{2} |h_\lambda| |a_\lambda|,$$

entonces $|h_\lambda| = 2 \frac{|\Omega_e|}{|a_\lambda|}$.

Considerando el signo del vector normal global \vec{v}_λ , tenemos que $(\vec{x}_{m_\lambda} - \vec{P}_\lambda) \cdot \vec{v}_\lambda = 2\sigma_\lambda \frac{|\Omega_e|}{a_\lambda}$. Así

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_\lambda(\vec{x}_{m_\lambda}) \cdot \vec{v}_\lambda &= \sigma_\lambda \frac{|a_\lambda|}{2|\Omega_e|} (\vec{x}_{m_\lambda} - \vec{P}_\lambda) \cdot \vec{v}_\lambda \\ &= \sigma_\lambda \frac{|a_\lambda|}{2|\Omega_e|} \left(2\sigma_\lambda \frac{|\Omega_e|}{a_\lambda} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(ii)

- En coordenadas cartesianas se tiene lo siguiente :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{\varphi}_\beta(\vec{x})) &= \frac{\partial \varphi_{\beta,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_{\beta,2}}{\partial x_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} (x_1 - P_{\beta,1}) \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} (x_2 - P_{\beta,2}) \right) \\ &= \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} + \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} \\ &= \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{|\Omega_e|}. \end{aligned}$$

- En coordenadas cilíndricas, suponemos que la función no depende de θ , $\vec{\varphi}_\beta(\vec{x}) = \vec{\varphi}_\beta(r, z)$, entonces la divergencia en coordenadas cilíndricas tiene la siguiente

forma:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\vec{\varphi}_\beta(\vec{x})) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi_{\beta,1}) + \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_{\beta,2}) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} (r - P_{\beta,1}) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} (z - P_{\beta,2}) \right) \\
&= \frac{1}{r} \left(\sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} (r - P_{\beta,1}) + r\sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} \right) + \left(\sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} \right) \\
&= \left(\sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} - \frac{1}{r} \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} P_{\beta,1} + \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} \right) + \left(\sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} \right) \\
&= \sigma_\beta \frac{|a_\beta|}{2|\Omega_e|} \left(3 - \frac{P_{\beta,1}}{r} \right).
\end{aligned}$$

(iii) De (i) se tiene que $\varphi_\beta(\vec{x}_{m_\beta}) \cdot \vec{\nu}_\lambda = \delta_{\lambda,\beta}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|a_\beta|} \int_{a_\beta} \vec{\varphi}_\beta(\vec{x}_{m_\lambda}) \cdot \vec{\nu}_\lambda ds &= \frac{1}{|a_\beta|} \int_{a_\beta} \delta_{\lambda,\beta} ds \\
&= \frac{1}{|a_\beta|} \delta_{\lambda,\beta} \int_{a_\beta} ds \\
&= \frac{1}{|a_\beta|} \delta_{\lambda,\beta} |a_\beta| \\
&= \delta_{\lambda,\beta}.
\end{aligned}$$

□

Apéndice C.

Ecuación de conservación de masa

C.1. Propiedades extensivas e intensivas

Definición C.1.1. Una propiedad $E(t)$ es extensiva si y solo si puede expresarse de la forma

$$E(t) = \int_{B(t)} \rho(\vec{x}, t) d\vec{x},$$

donde $B(t)$ es el volumen ocupado por un cuerpo. A la función $\rho(\vec{x}, t)$ se le llama propiedad intensiva asociada a la propiedad extensiva $E(t)$.

Desde el punto de vista físico, la hipótesis básica para la formulación de las ecuaciones de balance de las propiedades extensivas e intensivas es que *cualquier variación de la propiedad extensiva proviene de lo que se genera o se destruye dentro del cuerpo o de lo que entra o sale a través de su frontera*, ver [18]. Esto puede expresarse matemáticamente como sigue

$$\frac{DE(t)}{Dt} = \int_{B(t)} s(\vec{x}, t) d\vec{x} + \int_{\partial B(t)} \vec{\tau}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n} d\vec{x}, \quad (\text{C.1})$$

donde $s(\vec{x}, t)$ es lo que se genera o desaparece en el interior del cuerpo $B(t)$, $\vec{\tau}(\vec{x}, t)$ es lo que entra o sale a través de la frontera del cuerpo $\partial B(t)$.

A la expresión (C.1) se le conoce como la ecuación de balance global sin discontinuidades.

Debido a que cualquier propiedad extensiva es la integral de una propiedad intensiva asociada y que la derivada material es de la siguiente forma:

$$\frac{D}{Dt} \rho(\vec{x}, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) + \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \rho(\vec{x}, t),$$

donde al operador $\frac{D}{Dt}$ se le llama la representación Euleriana de la derivada material. Entonces, la derivada total de la propiedad extensiva $E(t)$, suponiendo que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, será

la integral de volumen de la derivada material de la propiedad intensiva, es decir

$$\frac{DE(t)}{Dt} = \int_{B(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\varrho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) \right] d\vec{x} \quad (\text{C.2})$$

cuando no existen discontinuidades.

Por otro lado, al aplicar el teorema de la divergencia a la relación (C.1) se tiene que

$$\frac{DE(t)}{Dt} = \int_{B(t)} [s(\vec{x}, t) + \nabla \cdot \vec{\tau}(\vec{x}, t)] d\vec{x}. \quad (\text{C.3})$$

Observemos que si $s(\vec{x}, t)$ es igual al cambio temporal de la propiedad intensiva $\left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}\right)$ más una fuente o sumidero $q(\vec{x}, t)$ y se considera solo flujo advectivo $\tau = \varrho \vec{v}$, entonces se obtiene una ecuación más general que (C.2), que incluye una fuente o sumidero.

Al emplear el principio de conservación de masa en la ecuación (C.3), donde $s(\vec{x}, t) = \frac{\partial \varrho}{\partial t} - q(\vec{x}, t)$ y $\tau = \varrho \vec{v}$, se tiene

$$\int_{B(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{x}, t) - q(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\varrho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) \right] d\vec{x} = 0$$

Ahora, aplicando el lema de Dubois-Reymond se llega a que

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\varrho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) = q(\vec{x}, t). \quad (\text{C.4})$$

A la expresión (C.4) se le llama *ecuación de balance local*.

La masa de un fluido al tiempo t para un medio poroso $M_f(t)$, es una propiedad extensiva que se expresa como la integral de volumen de la densidad ρ por la porosidad ϕ :

$$M_f(t) = \int_{B(t)} \phi \rho(\vec{x}, t) d\vec{x}, \quad (\text{C.5})$$

cuya derivada total es

$$\frac{DM_f(t)}{Dt} = \int_{B(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi \rho(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\phi \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) \right] d\vec{x}, \quad \forall \vec{x} \in B(t), \forall t. \quad (\text{C.6})$$

Por lo cual la ecuación de balance local se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho(\vec{x}, t)) + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = q(\vec{x}, t),$$

donde a $\vec{u} = \phi(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)$ se le conoce como la velocidad de Darcy. Por lo tanto la ecuación de continuidad dentro de un yacimiento es

$$\frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = q(\vec{x}, t), \quad (\text{C.7})$$

Apéndice D.

Problemas bien planteados

Sean X y Y espacios métricos, $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal y $x \in X$ el dato inicial, tal que

$$T(x) = y, \quad y \in Y. \quad (\text{D.1})$$

El problema (D.1) es llamado *bien planteado* en los espacio X , Y , si satisface las siguientes condiciones:

- (i) Para cada $x \in X$ la solución del problema existe.
- (ii) Para cada $x \in X$ la solución del problema es única.
- (iii) La solución y del problema depende únicamente de los datos, es decir, hay estabilidad respecto a los datos.

Un problema se denomina *mal planteado* si al menos no cumple una de las condiciones anteriores [20].

A continuación veremos si el problema elíptico con condiciones de tipo Neumann es un problema bien o mal planteado. Consideremos el siguiente problema de Neumann no homogéneo.

Encontrar u tal que

$$(N) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u(\vec{x}) = f, \quad \vec{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = g, \quad \vec{x} \in \Gamma \\ \text{donde } f \in L^2(\Omega) \text{ y } g \in H^{1/2}(\Gamma) \text{ satisfacen la relación} \\ \int_{\Omega} f(\vec{x}) d\Omega + \langle g, 1 \rangle_{\Gamma} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{D.2})$$

con

$$\langle g, v \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} g v d\Omega$$

Dado que el problema (N) solo involucra las derivadas de u , es claro que su solución no es única y por tanto es un problema mal planteado. Para evitar esta dificultad se busca u en el espacio cociente $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ equipado con la norma cociente

$$\|\dot{v}\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{v \in \dot{v}} \|v\|_{1,\Omega} \quad (\text{D.3})$$

donde

$$\|v\|_{1,\Omega} = \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

definida en el apartado 3.1. El siguiente teorema nos proporciona propiedades importantes del espacio cociente.

Teorema 4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un subespacio abierto Lipschitz continuo conexo y acotado. El espacio $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ es un espacio de Hilbert con la norma cociente (D.3). Además, en este espacio el funcional $\dot{v} \rightarrow |v|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v d\Omega \right)^{1/2}$ es una norma equivalente a (D.3).*

Sean $V = H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, entonces el problema (N) puede reescribirse como

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \langle l, \dot{v} \rangle,$$

donde

$$a(\dot{u}, \dot{v}) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega \quad \forall u \in \dot{u}, v \in \dot{v}$$

y

$$l: \dot{v} \rightarrow \int_{\Omega} f v d\Omega + \langle g, v \rangle_{\Gamma} \quad \forall v \in \dot{v}. \quad (\text{D.4})$$

Observemos que el lado derecho de la relación (D.4) es independiente de $v \in \dot{v}$ debido a la compatibilidad de la condición (D.3). Girault y Raviart [16] muestran que $l \in V'$ y que $a(\dot{u}, \dot{v})$ es continua en $V \times V$. Por consiguiente usan el teorema de Lax y Milgram para probar que el siguiente problema:

$$(N') \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u \text{ en } H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ que satisface} \\ a(\dot{u}, \dot{v}) = \langle l, \dot{v} \rangle \quad \forall \dot{v} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

tiene una única solución $\dot{u} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$.

Girault y Raviart [16] también muestran que el problema (N') es equivalente a (N), siempre que u pertenezca a $H^2(\Omega)$, es decir, se satisface la proposición siguiente:

Proposición 5. *El problema (N') tiene una única solución $\dot{u} \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ y esta solución es continua respecto a los datos:*

$$|u|_{1,\Omega} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{-1/2,\Gamma}) \quad \forall u \in \dot{u}. \quad (\text{D.6})$$

Además, cuando $\dot{u} \in H^2(\Omega)/\mathbb{R}$ entonces ésta es la única solución del problema (N), en otras palabras, el problema (N) tiene una única solución salvo constantes [16].

Bibliografía

- [1] Carey Graham F. y Oden J. Tinsley, *Finite Elements: A Second Course*, The University of Texas at Austin, 1983.
- [2] Zhangxin Chen, *Reservoir simulation: Mathematical techniques in oil recovery*, SIAM (Society for Industrial y Applied Mathematics), 2007.
- [3] Zhangxin Chen, Guanren Huan, y Yuanle Ma, *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*, Ed. SIAM, 2006.
- [4] Bahriawati C. y Carstensen C., *Three MATLAB implementations of the lowest-order Raviart-Thomas mfem with a posteriori error control*, Computational Methods in Applied Mathematics, Vol. 5, 1-13, 2005.
- [5] Lotfian Z. y Sivaselvan M.V., *Mixed finite element formulation for dynamics of porous media*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2018.
- [6] Juanes Ruben y Matringe Sébastien, *Unified Formulation for High-Order Streamline Tracing on Two-Dimensional Unstructured Grids*, Journal of Scientific Computing, Vol. 38, 50-73, 2008.
- [7] Ramsey Mark (1998), Texas Drilling Associates, *Schlumberger Oilfield Glossary: The Oilfield Glossary*, Recuperado de https://www.glossary.oilfield.slb.com/es/Terms/p/pore_throat.aspx
- [8] Mandujano F y Málaga C., *Single-phase flow through a porous media revisited*, UNAM, 2018; <https://arxiv.org/pdf/1807.06737.pdf>
- [9] Weinberg Theodore, *Fast implementation of mixed RT0 finite elements in MATLAB*, SIAM, Undergraduate Research Online (SIURO), vol. 12; <https://www.siam.org/Portals/0/Publications/SIURO/Vol12/S01743.pdf>
- [10] Hutton David V., *Fundamentals of Finite Elements Analysis*, McGraw-Hill, 2004.

- [11] Auricchio Ferdinando, Brezzi Franco y Lovadina Carlo, *Mixed Finite Element Methods*, Encyclopedia of Computational Mechanics, 2004.
- [12] Zhangxin Chen y Ewing Richard E., *From Single-Phase to Compositional Flow: Applicability of Mixed Finite Elements*, *Transports in Porous Media* 27, 225-242, 1997.
- [13] Becker Eric B., Carey Gragam F., y Oden J. Tinsley, *Finite elements An introduction Vol. I*, The University of Texas at Austin, 1981.
- [14] Yotov Ivan, *Mixed Finite Element Methods for Flow in Porous Media (Doctoral Thesis)*, UMI, Rice University, 1996.
- [15] Wendland Edson y Schulz Harry Edmar, *Numerical experiments on Mass Lumping for the Advection.-Diffusion equation*, *Minerva*, 2(2): 227-233, 2000.
- [16] Girault V. y Raviart P. A., *Finite Elements Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer Series in Computational Mathematics 5, 1986.
- [17] Sonnendrucker Eric, *Advanced Finite Element Methods*, Zentrum Mathematik, TU Munchen, 2017.
- [18] Díaz Viera Martín Alberto, *Modelación matemática y computacional*, Notas del curso de posgrado, Instituto de Geofísica, UNAM, 2014.
- [19] Linares Pérez Juan Eduardo, *Modelo de flujo y transporte en medios porosos en FEniCS usando el método de elementos finitos mixtos. Aplicación a un caso de estudio para la simulación de un proceso de inyección de agua de baja salinidad a escala de laboratorio (Tesis de maestría)*, UNAM, 2018.
- [20] León Velasco Diana Assaely, *Regularización de problemas mal planteados (Tesis de maestría)*, UAM, 2010.
- [21] Raviart R. A. y Thomas J. M., *A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems*, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1977.
- [22] Saavedra Barrera Patricia, *Introducción a la optimización no lineal*, Departamento de matemáticas UAMI, 2017.
- [23] Saad Yousef, *Iterative methods for sparse linear systems*, second edition, SIAM, 2003.
- [24] Press William H., Teukolsky Saul A., Vetterling William T. y Flannery Brian P. *NUMERICAL RECIPES The art of scientific computing*, third edition, Cambridge, p. 266-268, 2007.

- [25] Ronald Glowinski, *Finite element methods for incompressible viscous flow*, HANDBOOK OF NUMERICAL ANALYSIS, VOL IX Numerical methods for fluids (part 3), P. G. Ciarlet and J. L. Lions, p. 303-390, 2003.
- [26] Cuvelier C., Segal A, y Steenhoven Van A. A., *Finite element methods and Navier-Stokes equations*, Dordrecht: Reidel, Mathematics and its applications, 1986.
- [27] Reddy J. N., *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering, second edition , 1993.