# SEMIGRUPOS DINÁMICOS CUÁNTICOS UNIFORMEMENTE CONTINUOS


**TESIS QUE PRESENTA:**

Gabriel López Garza


**PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS**

**DIRECTOR: DR. ROBERTO QUEZADA BATALLA**


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA**
**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**


**JULIO DE 1998**

**SEMIGRUPOS DINÁMICOS CUÁNTICOS UNIFORMEMENTE CONTINUOS**

**TESIS QUE PRESENTA:**

Gabriel López Garza

**PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN MATEMÁTICAS**

# ÍNDICE

# Introducción

La presente tesis es un trabajo expositorio de algunos aspectos de la teoría de semigrupos dinámicos cuánticos uniformemente continuos, especialmente del teorema de Gorini, Kossakowski, Sudarshan y Lindblad.

En el capítulo I se da una motivación del concepto de semigrupo dinámico cuántico, principalmente de las propiedades de normalidad y de positividad completa, así como algunos ejemplos.

En el capítulo II se da una demostración completa del teorema de Gorini, Kossakowski, Sudarshan y Lindblad que caracteriza a los generadores infinitesimales acotados de semigrupos dinámicos cuánticos uniformemente continuos, estos son operadores acotados del espacio de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en sí mismo que tienen la siguiente estructura:

$$\theta(X) = i[H, X] - \frac{1}{2}\{L^*LX + XL^*L - 2L^*(X \otimes 1)L\} \qquad (1)$$

donde $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, es un operador acotado, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo separable, $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert y $H$ un operador acotado y autoadjunto en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Históricamente el teorema fue demostrado primero para espacios de Hilbert de dimensión finita en un trabajo conjunto de Gorini, Kossakowski, Sudarshan [*G-K-S*] y Lindblad [*L*] demostró el teorema para un espacio de Hilbert general.

Para demostrar que el generador infinitesemal $\theta$ de un semigrupo dinámico cuántico uniformemente continuo tiene la forma (1) se siguió a Parthasarathy [*Pa*] con la diferencia de que en ésta tesis no se usa ningún resultado de probabilidad, sino sólo resultados del anális funcional y del álgebra de operadores, además de haberse desarrollado de una manera exhaustiva los detalles de la demostración que Parthasarathy solamente indica. Para demostrar que todo operador de la forma (1) genera un semigrupodinámico cuántico uniformemente continuo no se siguió a [*Pa*], sino que se utilizó el método empleado por

Chebotarev [$Ch1$] y García-Quezada [$G$-$Q$.] , que ha sido empleada principalmente con generadores no acotados los cuales *no se estudian* en el presente trabajo.

Los objetivos principales de la tesis son:

i) Dar una motivación del concepto de semigrupo dinámico cuántico uniformemente continuo y del teorema de Lindblad GKS partiendo de la dinámica reducida de un sistéma cuántico abierto.

ii) Demostrar el teorema de Lindblad sin usar resultados de la teoría de probabilidad, sino sólo aquellos del análisis funcional y del álgebra de operadores.

iii) En lo posible, los resultados previos requeridos, como lo son, el teorema de Gelfand, Naimark, Segal, el teorema de Stone-Von Neumann y demás teoremas adjuntos en los apéndices, están demostrados en la tesis, es decir, se trató de elaborar un trabajo autocontenido.

En cuanto a las principales limitaciones de este trabajo podemos mencionar que no se pudo cumplir cabalmente el objetivo iii) ya que el trabajo se extendió más allá de lo esperado. En particular no incluímos una demostración del teorema de Kraus mencionado al final del capítulo I ni del teorema que afirma la densidad en sentido débil de los operadores de la forma $U_sV_t$ con $U_s, V_t$ grupos uniformemente continuos que cumplen las relaciones de conmutación de Weyl, usada en la Proposición 5 del capítulo II.

De los logros de este trabajo, podemos mencionar que fue posible en la demostración de una parte del teorema de Lindblad combinar la teoría general de semigrupos con el método empleado por Chebotarev, García y Quezada pues usando la serie de potencias para el semigrupo

$$T_t = e^{it\theta}$$

que da la teoría general, no es fácil demostrar la positividad completa ni la normalidad de $\{T_t\}$ y usando la ecuación integral

$$T_t(X) = w_t^* X w_t + \int_0^t d\tau w_{t-\tau}^* \Phi(T_\tau(X)) w_{t-\tau},$$

aunque es posible demostrar la positividad completa y la normalidad, no es fácil demostrar que el semigrupo $\{T_t\}$ es uniformente continuo, por ejemplo.

En relación con los antecedentes y las posibles extensiones de este trabajo, podemos decir que, aparte de su relación con física cuántica, la teoría de semigrupos dinámicos cuánticos es uno de los caminos por los cuales se busca extender los métodos de la probabilidad y de la teoría de procesos estocásticos al caso de variables aleatorias no conmutativas, extendiendo el concepto de semigrupo de Markov al reemplazar el espacio de funciones sobre el cual actua este semigrupo por un álgebra de operadores.

La caracterización del generador infinitesimal de un semigrupodinámico cuántico general, es decir, no necesariamente uniformemente continuo, ha resultado un problema sumamente difícil, sin embargo existen algunos trabajos en esta dirección $[H]$, $[Da2]$, $[Br]$.

Un problema más accesible pero igualmente interesante, es el siguiente: dado un generador formal del tipo Lindblad:

$$\theta(X) = \Phi(X) - GX - XG^* \tag{2}$$

con coeficientes $\Phi(X)$ y $G$ operadores no acotados, construir un semigrupo dinámico cuántico general con este generador formal (solución de la ecuación maestra). En este caso $\Phi$ es una transformacióncompletamente positiva de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en un espacio de operadores no acotados. En el capítulo II de la tesis se prueba que en el caso $\Phi(X)$ y $G$ acotados, La expresión (2) y la (1) son equivalentes. Algunos resultados en esta dirección se encuentran en $[Ch2]$, $[Ch3]$, $[Ch\text{-}F]$.

El semigrupo construido con este generador formal no necesariamente es conservativo, es decir, no necesariamente preserva la identidad, como lohacen los semigrupos uniformemente continuos y es necesario dar condiciones adicionales para que esto se cumpla (condiciones de conservatividad). Esto motiva otro problema interesante: obtener condiciones necesarias y suficientes o sólo condiciones suficientes para la conservatividad del semigrupo construido.

Este trabajo se realizó con apoyo parcial de CONACYT a través del proyecto Análisis Funcional y Estocástico de Ecuaciones de Evolución clave 0233P-E9506.

# Capítulo I

# Semigrupos Dinámicos Cuánticos

Semigrupo dinámico cuántico o semigrupo cuántico, por brevedad, es el nombre comunmente usado para un semigrupo de contracciones, completamente positivas y normales sobre el álgebra de von Neumann $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de un espacio de Hilbert complejo y separable $\mathcal{H}$ que preservan la identidad. En relación con la física cuántica, este concepto permite modelar la evolución de un sistema cuántico abierto, es decir, un sistema que interactúa con el medio que lo rodea. El concepto de semigrupo cuántico también generaliza al de semigrupo de Markov que aparece en la teoría de probabilidad.

En este trabajo estudiaremos a los semigrupos dinámicos cuánticos principalmente en relación con Física, los lectores interesados en su relación con Probabilidad pueden consultar $[M]$,$[E1]$,$[E2]$,$[Ch1]$,$[G]$,$[P1]$,$[A]$.

## Dinámica reducida

La siguiente argumentación formal, nos permitirá motivar la definición de semigrupo dinámico cuántico, que se incluye en la última sección de este capítulo, especialmente las propiedades de normalidad y positividad completa. Considérese, un sistema cuántico abierto $S$, es decir, un sistema cuántico que interacciona con el exterior. En la representación de Schrödinger, para modelar este sistema cuántico se utilizan un espacio de Hilbert complejo y separable $\mathcal{H}_S$ con producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle$, conjugado lineal en la primera coordenada y lineal en la segunda, y el espacio de Banach $\mathcal{T}(\mathcal{H}_S)$, de los operadores de la clase de traza en $\mathcal{H}_S$, con la norma $\|T\|_1 = tr\,(T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

Si $T \in \mathcal{T}$ y además es autoadjunto, tiene una representación de la forma $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mid \varphi_n\rangle\langle\varphi_n \mid$, por el teorema espectral, donde $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal completo (sonc) y usamos la notación de Dirac $\mid \cdot\rangle\langle\cdot \mid$,para el operador $\mid \varphi\rangle\langle\psi \mid$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ definido por:

$$\mid \varphi\rangle\langle\psi \mid \eta := \langle\psi, \eta\rangle\varphi \text{ para todo } \eta \in \mathcal{H}.$$

Entonces

$$tr\,(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \text{ y } \|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|\,,$$

pues

$$\begin{aligned}
trT &= \sum_{m=1}^{\infty} \langle\varphi_m, T\varphi_m\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \varphi_m, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mid \varphi_n\rangle\langle\varphi_n \mid \varphi_m \right\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \varphi_m, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle\varphi_n, \varphi_m\rangle\varphi_n \right\rangle \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_n \delta_{mn} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty.
\end{aligned}$$

Y de manera similar se obtiene $\|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$.

Los estados mezclados o matrices de densidad de $S$ son los operadores positivos de traza 1. Estos forman un conjunto convexo $\mathcal{P}\,(\mathcal{H}_S)$, es decir, si $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{P}\,(\mathcal{H}_S)$, entonces para $0 < \alpha < 1, \alpha\rho_1 + (1-\alpha)\,\rho_2$ es un operador positivo y

$$\begin{aligned}
tr\,(\alpha\rho_1 + (1-\alpha)\,\rho_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle\varphi_n, \alpha\rho_1\varphi_n + (1-\alpha)\,\rho_2\varphi_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle\varphi_n, \alpha\rho_1\varphi_n\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle\varphi_n, (1-\alpha)\,\rho_2\varphi_n\rangle \\
&= \alpha - (1-\alpha) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Llamamos estados puros del sistema a los extremos de $\mathcal{P}\,(\mathcal{H}_S)$, dados por las proyecciones sobre subespacios de dimensión 1. En la notación de Dirac estos estados son de la forma $|\varphi\rangle\langle\varphi|$ con

$$\begin{aligned}
1 &= tr\left(|\varphi\rangle\langle\varphi|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle\varphi_n, |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle\varphi_n, \langle\varphi, \varphi_n\rangle\varphi\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle\varphi, \varphi_n\rangle^2 \\
&= \|\varphi\|^2 .
\end{aligned}$$

Como cada $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_S)$ es positivo y acotado, es autoadjunto y, por lo tanto,

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mid \varphi_n\rangle\langle\varphi_n \mid$$

con $\{\varphi_n\}$ un sistema ortonormal completo y

$$1 = tr\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k .$$

Los observables acotados del sistema se representan por operadores autoadjuntos de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ y el valor medio de uno de estos observables $A$ en un estado $\rho$, está dado por $tr\,(\rho A)$.

Los estados de $S$ cambian debido a la dinámica interna del sistema y a su interacción con el exterior $R$. El espacio de Hilbert del sistema completo $(S+R)$ es el producto tensorial $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$ donde $\mathcal{H}_R$ es el espacio de Hilbert complejo y separable asociado con el medio exterior $R$. Deseamos describir sólo la dinámica interna del sistema (dinámica reducida), entonces sólo nos interesan los cambios de los estados de $S$.

Supongamos que preparamos al tiempo $t_0 = 0$ un estado inicial del sistema completo $\rho \otimes \omega_R$, donde $\rho$ es un estado inicial de $S$, es decir $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_S)$ y $\omega_R$ es un estado fijo de referencia de $R$. Denotemos por $U_t = e^{-itH_{tot}}$ al grupo unitario que describe la evolución reversible del sistema completo, su generador $H_{tot}$ es un operador autoadjunto en $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$. Entonces, la transformación que describe un cambio de estado en $S$ puede escribirse en la forma

$$\rho \to \Lambda_t \rho = E\left(U_t \rho \otimes \omega_R U_t^*\right), \tag{I.1}$$

donde $E$ es el operador (traza parcial o esperanza condicional) de $\mathcal{T}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R)$ en $\mathcal{T}(\mathcal{H}_S)$ definido mediante la relación

$$\langle \varphi, E\gamma(\psi) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi \otimes f_k, \gamma(\psi \otimes f_k) \rangle_{\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R}$$

para $\gamma \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R)$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_S$, donde $\{f_k\}$ es un sistema ortonormal completo en $\mathcal{H}_R$. $E$ está bien definido y $E\gamma \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_S)$ pues si $\{\varphi_n\}$ es un sistema ortonormal completo entonces

$$\begin{aligned} tr(E\gamma) &= \sum_k \langle \varphi_k, E\gamma\varphi_k \rangle \\ &= \sum_{k,l} \langle \varphi_k \otimes f_l, \gamma\varphi_k \otimes f_l \rangle \\ &= tr\gamma < \infty. \end{aligned}$$

# Positividad completa

La condición de positividad completa, que es más fuerte que la positividad usual ($X \geq 0$ implica $\Lambda^{\dagger} X \geq 0$), está motivada por las siguientes condiciones [K],[L],[D] . Para cada $t \geq 0$ la transformación $\Lambda_t : \mathcal{T}(\mathcal{H}_s) \to \mathcal{T}(\mathcal{H}_s)$ definida por (I.1)pertenece a una clase especial de transformaciones. Por comodidad, sea $t > 0$ fijo y denotemos por $\Lambda$ a $\Lambda_t$. Intentemos caracterizar a la clase de transformaciones $\Lambda$ en términos sólo del espacio de Hilbert $\mathcal{H}_S$. Podemos suponer que todas las sumas son finitas por simplicidad. Como $\omega_R$ es un estado del sistema $R$, es un operador positivo de traza uno, entonces es autoadjunto y tiene una representación de la forma

$$\omega_R = \sum_v \lambda_v \mid f_v \rangle \langle f_v \mid$$

con $\{f_v\}$ un sonc de $\mathcal{H}_R$ y $(\lambda_n)$ una sucesión de números reales. Tomando un sonc $\{\varphi_k\}$ en $\mathcal{H}_S$ obtenemos la siguiente representación matricial de (I.1)

$$(\Lambda\rho)_{k,l} = \sum_{\substack{\nu,\mu \\ m,n}} \lambda_\nu U_{\mu k,\nu m} \rho_{mn} \overline{U}_{\nu n,\mu l} \tag{I.2}$$

donde

$$\langle \varphi_k \otimes f_\mu, U(\varphi_m \otimes f_\nu) \rangle = U_{k\mu,m\nu},$$

Entonces la transformación $\Lambda$ puede ser escrita como

$$\Lambda\rho = \sum_{\alpha} W_\alpha \rho W_\alpha^* \tag{I.3}$$

donde $W_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$. Para mostrar la equivalencia entre (I.2) y (I.3) tómese $\alpha = (\mu, \nu)\,, (W_\alpha)_{km} = \sqrt{\lambda_\nu} U_{\mu k, \nu m}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\Lambda\rho)_{k,l} &= \langle \varphi_k, \Lambda\rho\varphi_l\rangle = \sum_{\mu} \langle \varphi_k \otimes f_\mu, (U(\rho\otimes\omega_R)U^*)(\varphi_l \otimes f_\mu)\rangle_{\mathcal{H}_S\otimes\mathcal{H}_R} \\
&= \sum_{\mu} \langle \varphi_k \otimes f_\mu, U\left(\sum_{m,\nu} \mid \varphi_m \otimes f_\nu\rangle\langle\varphi_m \otimes f_\nu \mid\right)\left(\rho \otimes \sum_{\theta} \lambda_\theta \mid f_\theta\rangle\langle f_\theta \mid\right) \\
&\quad \times \left(\sum_{n,\eta} \mid \varphi_n \otimes f_\eta\rangle\langle\varphi_n \otimes f_\eta \mid\right) U^*(\varphi_l \otimes f\mu)\rangle_{\mathcal{H}_S\otimes\mathcal{H}_R} \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu,\theta,\eta \\ m,n}} \lambda_\theta \langle \varphi_k \otimes f_\mu, U(\varphi_m \otimes f_\nu)\rangle \langle \varphi_m \otimes f_\nu, \rho \otimes (\mid f_\theta\rangle\langle f_\theta \mid)(\varphi_n \otimes f_\eta)\rangle \\
&\quad \times \langle \varphi_n \otimes f_\eta, U^*(\varphi_l \otimes f_\mu)\rangle \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu,\theta,\eta \\ m,n}} \lambda_\theta \langle \varphi_k \otimes f_\mu, U(\varphi_m \otimes f_\nu)\rangle \langle \varphi_m \otimes f_\nu, \rho\varphi_n \otimes \langle f_\theta, f_\eta\rangle f_\theta\rangle \\
&\quad \times \langle \varphi_n \otimes f_\eta, U^*(\varphi_l \otimes f_\mu)\rangle \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu,\theta,\eta \\ m,n}} \lambda_\theta U_{k\mu,m\nu} \langle \varphi_m, \rho\varphi_n\rangle \langle f_\nu, \langle f_\theta, f_\eta\rangle f_\theta\rangle \overline{U}_{n\eta,l\mu} \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu,\theta,\eta \\ m,n}} \lambda_\theta U_{k\mu,m\nu} \langle \varphi_m, \rho\varphi_n\rangle \langle f_\nu, f_\theta\rangle \langle f_\theta, f_\eta\rangle \overline{U}_{n\eta,l\mu} \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu,\theta,\eta \\ m,n}} \lambda_\theta U_{k\mu,m\nu} \langle \varphi_m, \rho\varphi_n\rangle \delta_{\theta\nu}\delta_{\theta\eta}\overline{U}_{n\eta,l\mu} \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu \\ m,n}} \lambda_\nu U_{k\mu,m\nu}\rho_{mn}\overline{U}_{n\nu,l\mu} \qquad\qquad (I.4)
\end{aligned}$$

Aquí hemos usado que

$$\sum_{m,\nu} \mid \varphi_m \otimes f_\nu\rangle\langle\varphi_m \otimes f_\nu \mid = 1_{\mathcal{H}_S\otimes\mathcal{H}_R}.$$

Para $(\mu, \nu)$ fijo, sea $W_{(\mu,\nu)}$ el operador sobre $\mathcal{H}_S$ definido por

$$\left\langle \varphi_k, W_{(\mu,\nu)}\varphi_m \right\rangle = U_{k\mu,m\nu},$$

Entonces, (I.4) puede escribirse en la forma

$$(\Lambda\rho)_{k,l} = \langle\varphi_k, \Lambda\rho\varphi_l\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\mu,\nu\\ m,n}} \lambda_\nu \left\langle \varphi_k, W_{(\mu,\nu)} \mid \varphi_m\rangle\langle\varphi_m \mid \rho\varphi_n \right\rangle \left\langle \varphi_n, W^*_{(\mu,\nu)}\varphi_l \right\rangle \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu\\ n}} \lambda_\nu \left\langle \varphi_k, W_{(\mu,\nu)}\rho\varphi_n \right\rangle \left\langle \varphi_n, W^*_{(\mu,\nu)}\varphi_l \right\rangle \\
&= \sum_{\substack{\mu,\nu\\ n}} \lambda_\nu \left\langle \varphi_k, W_{(\mu,\nu)} \left(\rho \mid \varphi_n\rangle\langle\varphi_n \mid W^*_{(\mu,\nu)}\varphi_l\right) \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \left\langle \varphi_k, W_{(\mu,\nu)}\rho W^*_{(\mu,\nu)}\varphi_l \right\rangle
\end{aligned}$$

pues $\sum_m \mid \varphi_m\rangle\langle\varphi_m \mid= 1$, por tanto $\Lambda$ tiene la forma (I.3). Podemos mostrar además que $\sum_\alpha W_\alpha W_\alpha^* = 1$, dado que

$$\begin{aligned}
(\Lambda 1)_{k,l} &= \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \left\langle \varphi_k, W_{(\mu,\nu)} W^*_{(\mu,\nu)}\varphi_l \right\rangle = \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \left\langle \varphi_k \otimes f_\mu, U\left(\left(W^*_{(\mu,\nu)}\varphi_l\right) \otimes f_\nu\right) \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \left\langle U^*\left(\varphi_k \otimes f_\mu\right), \left(W^*_{(\mu,\nu)}\varphi_l\right) \otimes f_\nu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \left\langle \widetilde{\varphi_k} \otimes \widetilde{f_\mu}, \left(W^*_{(\mu,\nu)}\varphi_l\right) \otimes f_\nu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \left\langle \widetilde{\varphi_k}, \left(W^*_{(\mu,\nu)}\varphi_l\right) \right\rangle \left\langle \widetilde{f_\mu}, f_\nu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \overline{\left\langle \varphi_l, \left(W_{(\mu,\nu)}\widetilde{\varphi_k}\right) \right\rangle} \left\langle \widetilde{f_\mu}, f_\nu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \left\langle \widetilde{\varphi_k} \otimes f_\nu, U^*\left(\varphi_l \otimes f_\mu\right) \right\rangle \left\langle \widetilde{f_\mu}, f_\nu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \left\langle \widetilde{\varphi_k} \otimes f_\nu, \widetilde{\varphi_l} \otimes \widetilde{f_\mu} \right\rangle \left\langle \widetilde{f_\mu}, f_\nu \right\rangle \\
&= \sum_{\mu,\nu} \lambda_\nu \left\langle \widetilde{\varphi_k}, \widetilde{\varphi_l} \right\rangle \left\langle f_\nu, \mid \widetilde{f_\mu}\rangle\langle\widetilde{f_\mu} \mid f_\nu \right\rangle \\
&= \left\langle \widetilde{\varphi_k}, \widetilde{\varphi_l} \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi_k, \varphi_l \right\rangle
\end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho de que $U^*\left(\varphi_l \otimes f_\mu\right) = \widetilde{\varphi_l} \otimes \widetilde{f_\mu}$ es un sonc.

Pasemos ahora a la representación de Heisenberg. Para cada $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sea $\Lambda^\dagger A$ el único elemento en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$tr\left((\Lambda\rho)\,A\right) = tr\left(\rho\left(\Lambda^\dagger A\right)\right)$$

La transformación $\Lambda^\dagger : \mathcal{B}(\mathcal{H}_S) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ está bien definida si $\Lambda$ es continua, pues para cada $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ el funcional $\rho \to tr\left[(\Lambda\rho)\,A\right]$ es un funcional lineal continuo en $\mathcal{T}(\mathcal{H}_S)$ y la función $A \to tr\,(\cdot A)$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ y $\mathcal{T}(\mathcal{H}_S)^*$, el dual de $\mathcal{T}\left(\mathcal{H}_S\right)$. Si la suma es infinita se debe suponer algo en relación con la convergencia de la serie $\sum W_\alpha W_\alpha^* = 1$, por ejemplo, que la convergencia es en sentido fuerte.

Nótese que si $\Lambda$ es de la forma (I.3) obtenemos que $\Lambda^\dagger$ tiene la forma

$$\Lambda^\dagger A = \sum_\alpha W_\alpha^* A W_\alpha, \tag{I.5}$$

$W_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, con $\sum_\alpha W_\alpha^* W_\alpha = 1$.

En particular, para todo $A \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi, \Lambda^\dagger A\varphi \right\rangle &= \left\langle \varphi, \sum_\alpha W_\alpha^* A W_\alpha \right\rangle \\
&= \sum_\alpha \langle \varphi, W_\alpha^* A W_\alpha \varphi\rangle \\
&= \sum_\alpha \langle W_\alpha\varphi, A W_\alpha \varphi\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

entonces $\Lambda^\dagger$ preserva positividad, es decir, es una transformación positiva y

$$\Lambda^\dagger 1 = \sum_\alpha W_\alpha^* W_\alpha = 1$$

Podemos verificar que $\Lambda^\dagger$ es una contracción. Si $X$ es acotado

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \varphi, \Lambda^\dagger X\psi \right\rangle\right| &\leq \sum_\alpha \left|\langle \varphi, W_\alpha^* X W_\alpha \psi\rangle\right| \\
&\leq \sum_\alpha \|\varphi\|\,\|\psi\|\,\|X\|\,\|W_\alpha\|^2 \\
&= \|\varphi\|\,\|\psi\|\,\|X\|
\end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned}
\sum_\alpha \|W_\alpha\|^2 &= \sup_{\|\varphi\|=1} \sum_\alpha \langle W_\alpha\varphi, W_\alpha\varphi\rangle \\
&= \sup_{\|\varphi\|=1} \left\langle \varphi, \sum_\alpha W_\alpha^* W_\alpha \varphi \right\rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

de donde

$$\left\|\Lambda^\dagger X\right\| \leq \|X\|$$

Supóngase ahora que $(X_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de operadores en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $X_n \underset{n}{\rightarrow} X$ en la topología débil* de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$, es decir, $tr\,[X_n\rho] \underset{n}{\rightarrow} tr\,[X\rho]$, para todo $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}_S)$[1]. Tenemos que

$$\begin{aligned}
tr\left[\left(\Lambda^\dagger X_n\right)\rho\right] &= \sum_m \left\langle \varphi_m, \left(\Lambda^\dagger X_n\right)\rho\varphi_m\right\rangle \\
&= \sum_m \left\langle \varphi_m, \left(\sum_\alpha W_\alpha^* X_n W_\alpha\right)\rho\varphi_m\right\rangle \\
&= \sum_\alpha\sum_m \langle \varphi_m, W_\alpha^* X_n W_\alpha \rho\varphi_m\rangle \\
&= \sum_\alpha tr\,[W_\alpha^* X_n W_\alpha \rho]
\end{aligned}$$

$$= \sum_\alpha tr\,[X_n W_\alpha^* \rho W_\alpha] \underset{n}{\rightarrow} \sum_\alpha tr\,[X W_\alpha^* \rho W_\alpha] = tr\left[\left(\Lambda^\dagger X\right)\rho\right]$$

Entonces, la transformación $\Lambda^\dagger$ es *normal*, es decir, continua en la topología débil* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En particular, si $\rho$ es un operador de rango uno, digamos $\rho = \rho_\varphi = \mid\varphi\rangle\langle\varphi\mid$ entonces

$$\left\langle \varphi, \Lambda^\dagger X_n \varphi\right\rangle = tr\left[\Lambda^\dagger X_n \rho_\varphi\right] \underset{n}{\rightarrow} tr\left[\Lambda^\dagger X \rho_\varphi\right] = \left\langle \varphi, \Lambda^\dagger X\varphi\right\rangle$$

es decir, $\Lambda^\dagger$ también es continua en la topología débil de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$.

Considérese el espacio de Hilbert n-dimensional $\mathbb{C}^n$. Si $\mathcal{H}$ es cualquier espacio de Hilbert entonces $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n$ puede identificarse con la suma directa $\mathcal{H}\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}$ de $n$ sumandos y cualquier operador $X$ en $\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}^n$ puede escribirse como una matriz $((X_{ij}))$ donde $X_{ij}$ es un operador en $\mathcal{H}$ para cada

[1]Ver apéndice 5

$1 \leq i,j \leq n$. Si $T : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ es un operador lineal que satisface las condiciones: (i) $T1 = 1$; (ii) $T(X) \geq 0$ si $X \geq 0$; (iii) $T(X^*) = T(X)^*$; (iv) $\|T(X)\| \leq \|X\|$; (v) $\text{w.}\lim_{n\to\infty} T(X_n) = T(X)$ si $\text{w.}\lim_{n\to\infty} X_n = X$. Definimos el operador lineal $T^{(n)} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathbb{C}^n) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C}^n)$ poniendo $T^{(n)}(((X_{ij}))) = ((T(X_{ij})))$, $X_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, $1 \leq i,j \leq n$. En tal caso $T^{(n)}(X \otimes B) = T(X) \otimes B$ para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. No necesariamente $T^{(n)}$ debe preservar positividad. Sin embargo si $T^{(n)}$preserva la positividad decimos que $T$ es un operador n-positivo de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$. Si $T$ es n-positivo para cada $n = 1, 2, ...$ decimos que $T$ es *completamente positivo.*

**Proposición:** *Sea $T : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ un operador lineal completamente positivo. Entonces para cada $X_1, ..., X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), Y_1, ..., Y_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), n = 1, 2, ...$*

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} Y_i^* T(X_i^* X_j) Y_j \geq 0$$

**Demostración:** Para todo $u \in \mathcal{H}_1$ tenemos

$$\left\langle u, \sum_{i,j} Y_i^* T(X_i^* X_j) Y_j u \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} Y_1 u \\ \vdots \\ Y_n u \end{pmatrix}, ((T(X_i^* X_j))) \begin{pmatrix} Y_1 u \\ \vdots \\ Y_n u \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dado que $((X_i^* X_j)) \geq 0$ en $\mathcal{H}_2 \otimes \mathbb{C}^n$ y por esta razón $((T(X_i^* X_j))) \geq 0$ en $\mathcal{H}_1 \otimes \mathbb{C}^n$ de aquí se sigue que el lado derecho de la ecuación de arriba es no negativo. ■

Un teorema de Kraus $[K]$, afirma que una transformación normal $T$ es completamente positiva si y sólo si, se puede representar en la forma (I.5). Si $\mathcal{H}_S$ es separable entonces el índice $\alpha$ se puede tomar en un conjunto contable.

Nuestra argumentación y el teorema de Kraus nos motivan a postular que la dinámica reducida de un sistema cuántico abierto debe ser descrita por transformaciones normales completamente positivas. La importancia de la noción de positividad completa en física estadística cuántica fue reconocida por Kraus $[K]$, Lindblad $[L]$, Gorini, Kossakowski y Sudarshan $[G\text{-}K\text{-}S]$. Aunque ésta noción en matemáticas es conocida desde mucho antes, ver poe ejemplo Stinespringe, 1955, Proceedings AMS.

Para describir la evolución temporal de los estados de $S$ se necesita ahora dejar que el tiempo $t$ se mueva en $[0, \infty)$, obtenemos de esta manera una familia $\left\{T_t^\dagger \mid t \geq 0\right\}$ uniparamétrica de operadores lineales sobre $\mathcal{T}(\mathcal{H}_S)$ o bien, una familia $\{T_t \mid t \geq 0\}$ de operadores lineales sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}_S)$ según se trabaje en la representación de Schrödinger o en la representación de Heisenberg respectivamente. En general, esta familia no es un semigrupo, pero si suponemos que tiene esta propiedad obtenemos una descripción aproximada de la evolución de muchos fenómenos físicos.

## Semigrupos dinámicos cuánticos

A lo largo de este trabajo utilizaremos la representación de Heisenberg y consideraremos la siguiente definición de semigrupo dinámico cuántico:

**Definición:** *Un semigrupo dinámico cuántico (s.d.c.) en un espacio de Hilbert complejo y separable $\mathcal{H}$ es una familia uniparamétrica $\{T_t \mid t \geq 0\}$ de operadores en el espacio de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface las siguientes condiciones:*
(i) $T_0(X) = X$ *para todo* $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $T_tT_s = T_{t+s}$ *para todo* $s, t \geq 0$;
(ii) $\lim_{t\to 0} \|T_t(X) - X\| = 0$ *para todo* $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;
(iii) $T_t(1) = 1, \|T_t(X)\| \leq \|X\|$,

$$w.\lim_{n\to\infty} T_t(X_n) = T_t(X) \text{ si } w.\lim_{n\to\infty} X_n = X;$$

(iv) *para todo* $X_i, Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), 1 \leq i \leq n, n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{i,j} Y_i^* T_t(X_i^* X_j) Y_j \geq 0.$$

Un semigrupo dinámico cuántico $\{T_t \mid t \geq 0\}$ se dice *uniformemente continuo* si $\lim_{t\to 0} \sup_{\|X\|\leq 1} \|T_t(X) - X\| = 0$.

Para los semigrupos uniformemente continuos existe, según la teoría general de semigrupos, un operador acotado $\theta$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\theta(X) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_t(X) - X) \text{ para todo } X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

donde el límite es en la norma de operadores. Tendremos entonces $T_t(X) = e^{t\theta}(X)$ para todo $t \geq 0$. Pero la condición (iii) y especialmente (iv) determinan a una clase más restringida de semigrupos, los completamente positivos. Entonces el generador infinitesimal de estos semigrupos debe tener una estructura especial que corresponda con la condición de positividad completa.

La descripción de estos generadores es uno de los objetivos principales de esta tesis.

Continuando con la discusión de la secciómn anterior, consideremos el caso más simple, es decir, cuando $\dim \mathcal{H} = N$. En este caso, $\dim \mathcal{B}(\mathcal{H}) = N^2$, sea $(F_k)_{k=0}^{N^2-1}$ una base de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $F_0 = 1$ y escribamos

$$W_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{N^2-1} \alpha_k(t) F_k$$

entonces

$$W_\alpha^*(t) = \sum_{k=0}^{N^2-1} \overline{\alpha_k(t)} F_k^*$$

y usando (I.5) con un sólo sumando ($\alpha = 1$) tenemos

$$\begin{aligned}
\Lambda_t^\dagger X &= \left(\sum_k \overline{\alpha_k(t)} F_k^*\right) X \left(\sum_k \alpha_k(t) F_k\right) \\
&= \left(\sum_{k,l} \overline{\alpha_k(t)} \alpha_l(t) F_k^* X F_k\right)
\end{aligned}$$

La matriz $\left(\overline{\alpha_k(t)}\alpha_l(t)\right)_{k,l=0}^{N^2-1}$ es positiva definida y por lo tanto autoadjunta, es decir $\Lambda_t^\dagger X$ tiene la forma

$$\sum_{k,l=0}^{N^2-1} c_{k,l}(t) F_k^* X F_l$$

con $(c_{k,l}(t))_{k,l=0}^{N^2-1}$ una matriz definida positiva. El generador está dado por la expresión:

$$\begin{aligned}
\theta(X) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Lambda_\varepsilon X - X}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{k,l}^{N^2-1} c_{k,l}(\varepsilon) F_k^* X F_l - X\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{c_{00}(\varepsilon) - 1}{\varepsilon} X + \sum_{k=1}^{N^2-1} \frac{c_{k0}(\varepsilon)}{\varepsilon} F_k^* X + \cdots \right\} \\
&= A^* X + XA + \sum_{k,l}^{N^2-1} a_{k,l} F_k^* X F_l
\end{aligned}$$

suponiendo que todos los límites existen, donde $(a_{k,l})_{k,l=1}^{N^2-1}$ es una matriz definida positiva y $A = \sum_{k=0}^{N^2-1} c_{0k} F_k$. Si además suponemos[2] que $\theta(1) = 0$ obtenemos que

$$A + A^* = -\sum_{k,l=1}^{N^2-1} a_{k,l} F_k^* F_l.$$

Entonces,

$$\theta(X) = \frac{1}{2} \sum_{k,l}^{N^2-1} a_{k,l} \left\{ F_k^* [X, F_l] + [F_k^*, X] F_l \right\}.$$

Si agregamos el término $i[H, X]$ que está asociado con la dinámica interna del sistema, con $H = H^*$, y regresamos a la forma de (I.5) tenemos que

$$\begin{aligned} \theta(X) &= i[H, X] + \frac{1}{2} \sum_\alpha \{ W_\alpha^* [X, W_\alpha] + [W_\alpha^*, X] W_\alpha \} \\ &= i[H, X] + \sum_\alpha W_\alpha^* X W_\alpha - \frac{1}{2} \left[ \sum_\alpha W_\alpha^* W_\alpha, X \right]_+ \\ &= i[H, X] + \Phi(X) - \frac{1}{2} [\Phi(1), X]_+ \end{aligned}$$

con $\Phi(X) = \sum_\alpha W_\alpha^* X W_\alpha$. Donde $[\cdot, \cdot]$ denota al conmutador y $[\cdot, \cdot]_+$ denota al anticonmutador.

Gorini, Kossakowski y Sudarshan [*G-K-S*] demostraron que ésta es la forma más general del generador de un semigrupo dinámico cuántico uniformemente continuo en el caso cuando $\mathcal{H}$ es de dimensión finita. De manera independiente Lindblad [*L*] demostró este mismo resultado para cualquier espacio de Hilbert complejo separable $\mathcal{H}$. No existe hasta la fecha una caracterización similar para el generador de un semigrupo dinámico cuántico general, es decir, no necesariamente uniformemente continuo. Pero existen algunos trabajos en esta dirección, por ejemplo, Holevo, On the structure of the generators of covariant QDS, J.Functional Analysis.

El objetivo principal de este trabajo es revisar estos resultados, escribiéndolos de una manera autocontenida.

Para finalizar este capítulo consideremos algunos ejemplos.

**Ejemplo 1:** Si $H$ es un operador acotado y autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, sea $e^{itH}$ el grupo unitario continuo en la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generado

[2] Ver la Proposición 1 del capítulo II

por $iH$. Sea

$$P_t(X) = e^{-itH} X e^{itH}$$

entonces $P_t$ es un grupo dinámico cuántico, llamado semigrupo de Heisenberg. Efectivamente,
(i) $P_0(X) = X$,

$$\begin{aligned} P_{s+t}(X) &= e^{-i(s+t)H} X e^{i(s+t)H} \\ &= e^{-isH} \left( e^{-itH} X e^{itH} \right) e^{isH} \\ &= P_s P_t(X) \text{ para todo } s, t \geq 0. \end{aligned}$$

(ii) Para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|P_t(X)\varphi - X\varphi\| &= \left\| e^{-itH} X e^{itH} \varphi - X\varphi \right\| \\ &\leq \left\| X e^{itH} \varphi - X\varphi \right\| + \left\| e^{-itH} X\varphi - X\varphi \right\| \\ &\leq \|X\| \|\varphi\| \left( \left\| e^{itH} - 1 \right\| + \left\| e^{-itH} - 1 \right\| \right) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \|P_t(X) - X\| &= \sup_{\|\varphi\|=1} \|P_t(X)\varphi - X\varphi\| \\ &\leq \|X\| \left( \left\| e^{itH} - 1 \right\| + \left\| e^{-itH} - 1 \right\| \right) \end{aligned}$$

la última expresión tiende a cero cuando $t$ tiende a cero, por la continuidad de $e^{itH}$ en la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Además, $\sup_{\|X\| \leq 1} \|P_t(X) - X\| \leq \left\| e^{itH} - 1 \right\| + \left\| e^{-itH} - 1 \right\|$ que tiende a cero cuando $t \to 0$ y por lo tanto $P_t$ es uniformemente continuo
(iii) $P_t(1)u = e^{-itH} 1 e^{itH} u = u$,

$$\begin{aligned} \|P_t(X)\| &= \left\| e^{-itH} X e^{itH} \right\| \\ &\leq \|X\|. \end{aligned}$$

Y si $\text{w.lim}_{n\to\infty} X_n = X$ entonces

$$\langle u, X_n v \rangle \underset{n}{\to} \langle u, Xv \rangle \text{ para todo } u, v \in \mathcal{H}$$

así que

$$\left\langle e^{itH} u, X_n e^{itH} v \right\rangle \underset{n}{\to} \left\langle e^{itH} u, X e^{itH} v \right\rangle$$

y, tomando adjuntos obtenemos que

$$\left\langle u, e^{-itH} X_n e^{itH} v \right\rangle \underset{n}{\rightarrow} \left\langle u, e^{-itH} X e^{itH} v \right\rangle$$

por tanto $w.\lim_{n\to\infty} P_t(X_n) = P(X)$.
(iv) Sean $X_i, Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), 1 \leq j, k \leq n, n = 1, 2, \ldots$ entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \sum_j X_j e^{itH} Y_j u, \sum_j X_j e^{itH} Y_j u \right\rangle \\ &= \left\langle u, \sum_{j,k} Y_j^* e^{-itH} X_j^* X_k e^{itH} Y_k \right\rangle \end{aligned}$$

Finalmente, para el generador del semigrupo tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_t(X) \quad | \quad {}_{t=0} &= \left( -iHe^{-itH} X e^{itH} + ie^{-itH} X H e^{itH} \right) |_{t=0} \\ &= -i(HX - XH) \\ &= -i[H, X] \end{aligned}$$

**Ejemplo 2:** Sea $\{w(t) \mid t \geq 0\}$ un movimiento Browniano con $w(0) = 0$ y sea $L$ un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert complejo y separable $\mathcal{H} = L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Definimos

$$T_t(X) = \mathbb{E} e^{iw(t)L} X e^{-iw(t)L}$$

donde $\mathbb{E}$ denota la esperanza con respecto a la medida de probabilidad del proceso $w$ en el sentido de Bochner, es decir, para cada $u \in \mathcal{H}$ la función $\mathcal{H}$-valuada $e^{iw(t)L} X e^{-iw(t)L} u$ es Bochner integrable[3]. La medibilidad fuerte de la función $w \to e^{iw(t)L} X e^{-iw(t)L} u$ para cada $t \geq 0$ y $u \in \mathcal{H}$ se sigue de su medibilidad en sentido débil y del teorema 1 de la sección 4 del capítulo V de $[Y]$, su integrabilidad es consecuencia del teorema 1 de la sección 5 del mismo libro y la desigualdad

$$\left\| e^{iw(t)L} X e^{-iw(t)L} u \right\| \leq \|X\| \, \|u\|, \tag{1.7}$$

para todo $t \geq 0, u \in \mathcal{H}$. Entonces la esperanza está bien definida en el sentido de Bochner.

[3]Ver secciones 4 y 5 del capítulo V de $[Y]$.

Dado que el movimiento Browniano estandard tiene incrementos estacionariamente independientes tenemos

$$\begin{aligned} T_{t+s}(X) &= \mathbb{E}e^{i(w(t+s)-w(s))L}e^{iw(s)L}Xe^{-iw(s)L}e^{-i(w(t+s)-w(s))L} \\ &= T_t\left(T_s\left(X\right)\right) \end{aligned}$$

Si $L$ es acotado se sigue que $\{T_t\}$ es un sdc uniformemente continuo. En efecto, si $(adL)(X) = [L, X]$, tenemos que la sucesión

$$f_t^n\left(w, X\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(iw\left(t\right)\right)^k}{k!}\left(adL\right)^k\left(X\right)$$

$n = 0, 1, 2, ...$ converge en la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ a $e^{iw(t)L}Xe^{-iw(t)L}$ para cada $t$. En particular

$$f_t^n\left(w, X\right)u \underset{n}{\rightarrow} e^{iw(t)L}Xe^{-iw(t)L}u$$

y además

$$\begin{aligned} \left\|f_t^n\left(w, X\right)u\right\| &\leq \sum_{k=0}^{n} 2^k\left\|L\right\|^k\left\|X\right\|\left\|u\right\|\frac{\left|w\left(t\right)\right|^k}{k!} \\ &\leq e^{2\|L\|\left|w(t)\right|}\left\|X\right\|\left\|u\right\|, \end{aligned}$$

pues $\left\|\left(adL\right)^k\left(X\right)\right\| \leq 2^k\left\|L\right\|^k\left\|X\right\|$. Entonces por el teorema de convergencia dominada para integrales de Bochner tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{iw(t)L}Xe^{-iw(t)L}\right) &= \lim_n \mathbb{E}\left(f_t^n\left(w, X\right)\right) \\ &= \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!}\left(adL\right)^k\left(X\right)\mathbb{E}\left(w\left(t\right)^k\right) \\ &= \lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^k}{k!}\left(adL\right)^{2k}\left(X\right) \\ &= e^{-\frac{t}{2}(adL)^2}\left(X\right), \end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(w\left(t\right)^k\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2t}}dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ 1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2m-1)\,t^m & \text{si } k = 2m \end{cases} \end{aligned}$$

entonces
$$T_t(X) = e^{-\frac{t}{2}(adL)^2}(X), t \geq 0 \text{ y } X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$
De esto se sigue inmediatamente que $T_0(X) = X$ y $T_t(1) = 1$, pues $(adL)(1) = 0$. Obsérvese además que
$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{E}\left(e^{iw(t)L}Xe^{-iw(t)L}\right)\right\| &\leq \mathbb{E}\left\|\left(e^{iw(t)L}Xe^{-iw(t)L}\right)\right\| \\ &\leq \mathbb{E}\|X\| = \|X\|\end{aligned}$$

Por tanto, el semigrupo es de contracciones.

Por otra parte, si $X_N \underset{N}{\overset{w}{\to}} X$, entonces
$$\begin{aligned}\lim_N \langle u, T_t(X_N)v\rangle &= \lim_N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^k}{k!}\left\langle u, (adL)^{2k}(X_N)v\right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^k}{k!}\lim_N\left\langle u, (adL)^{2k}(X_N)v\right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^k}{k!}\left\langle u, (adL)^{2k}(X)v\right\rangle \\ &= \langle u, T_t(X)v\rangle,\end{aligned}$$
pues $\lim_N \left\langle u, (adL)^{2k}(X_N)v\right\rangle = \left\langle u, (adL)^{2k}(X)v\right\rangle$ y $\lim_N$ se intercambia con la serie porque se cumple la estimación
$$\left|\frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^k}{k!}\left\langle u, (adL)^{2k}(X)v\right\rangle\right| \leq \frac{t^k}{k!}2^k\|L\|^{2k}\|X\|\|u\|\|v\|.$$

Esto demuestra la propiedad (iii).

Tenemos además que
$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{E}\left(e^{iw(t)L}Xe^{-iw(t)L}\right) - \mathbb{E}(X)\right\| &= \left\|\mathbb{E}\left[e^{iw(t)L}Xe^{-iw(t)L} - X\right]\right\| \leq \\ &\leq \|X\|\,\mathbb{E}\left\|Xe^{-iw(t)L} - 1\right\| + \mathbb{E}\left\|e^{iw(t)L}X - X\right\| \\ &\leq \|X\|\,\mathbb{E}\left(\left\|Xe^{-iw(t)L} - 1\right\| + \mathbb{E}\left\|e^{iw(t)L} - 1\right\|\right) \\ &\to 0,\end{aligned}$$

si $t \to 0$. Lo que implica además que el semigrupo es uniformemente continuo tomando el supremo sobre $\|X\| \leq 1$.

Para verificar la propiedad (iv) de la definición de s.d.c. obsérvese que

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\left\langle Y_i\varphi, \mathbb{E}\left(e^{iw(t)L}X_i^*X_je^{-iw(t)L}\right)Y_j\varphi\right\rangle &= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j}\left\langle Y_i\varphi, e^{iw(t)L}X_i^*X_je^{-iw(t)L}Y_j\varphi\right\rangle\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left\langle\sum_i X_ie^{-iw(t)L}Y_i, \sum_i X_ie^{-iw(t)L}Y_i\right\rangle\right) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

pues podemos hacer uso del teorema de Fubini.

Finalmente, el generador de este semigrupo es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}P_t(X) \quad | \quad {}_{t=0} &= -\frac{1}{2}(adL)^2(X) \\ &= -\frac{1}{2}\left(L^2X + XL^2\right) + LXL \\ &= -\frac{1}{2}\left[L^2, X\right]_+ + LXL\end{aligned}$$

**Ejemplo 3:** Sea $U$ un operador unitario en $\mathcal{H}$ y sea $\{N(t) \mid t \geq 0\}$ el proceso estocástico de Poisson con intensidad $\lambda > 0$, es decir, $N(t) \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, $N(t)$ tiene incrementos independientes y

$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Definimos

$$T_t(X) = \mathbb{E}U^{*N(t)}XU^{N(t)}, t \geq 0, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}T_{t+s}(X) &= \mathbb{E}\left(U^{*N(t+s)-N(s)}U^{*N(s)}XU^{N(s)}U^{N(t+s)-N(s)}\right) \\ &= T_t(T_s(X))\end{aligned}$$

donde la esperanza se toma con respecto a la medida de Poisson en el mismo sentido del ejemplo anterior.

El generador se puede obtener de la siguiente manera

$$\begin{aligned}T_t(X) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}1_{\{N_w(t)=k\}}U^{*N_w(t)}XU^{N_w(t)} \\ &= XP(N(t) = 0) + U^*XUP(N(t) = 1) + U^{*2}XU^2P(N(t) = 2) + \cdots \\ &= Xe^{-\lambda t} + U^*XUe^{-\lambda t}\lambda t + U^{*2}XU^2e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots,\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T_t(X) \quad | \quad {}_{t=0} &= -\lambda X + \lambda U^* X U \\ &= \lambda (U^* X U - X). \end{aligned}$$

Que también se puede representar como

$$\frac{d}{dt}T_t(X) = -\frac{1}{2}(L^* L X + X L^* L - 2L^* X L)$$

con $L = \sqrt{\lambda} U$, $L^* = \sqrt{\lambda} U^*$

De la representación

$$T_t(X) = Xe^{-\lambda t} + U^* X U e^{-\lambda t} \lambda t + U^{*2} X U^2 e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \cdots$$

se obtiene facilmente que $T_0(X) = X, T_t(1) = 1$. Tenemos

$$\begin{aligned} \|T_t(X)\| &= \left\| \mathbb{E} U^{*N(t)} X U^{N(t)} \right\| \\ &\leq \mathbb{E} \left\| U^{*N(t)} X U^{N(t)} \right\| \\ \mathbb{E}\|X\| &= \|X\|. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{E} U^{*N(t)} X U^{N(t)} - \mathbb{E} X \right\| &\leq \mathbb{E}\left( \left\| X U^{N(t)} - X \right\| + \left\| U^{*N(t)} X - X \right\| \right) \\ &\leq \|X\| \, \mathbb{E}\left( \left\| U^{N(t)} - 1 \right\| + \left\| U^{*N(t)} - 1 \right\| \right) \\ &\to 0, \end{aligned}$$

si $t \to 0$, lo cual demuestra la propiedad (ii) y además tomando el supremo sobre $\|X\| \leq 1$ se observa que el semigrupo es uniformemente continuo.

La propiedad (iv) se sigue del hecho de que $T_t$ tiene la forma de Kraus (I.5).

# Capítulo II

# Teorema de Gorini-Kossakowski-Sudarshan y Lindblad.

Siguiendo a K.R.Parthasarathy [$P2$] en este capítulo desarrollamos una demostración del Teorema que le da nombre. La alternativa que se presenta aquí es, primeramente, la de no usar resultados de probabilidad en ninguna de las demostraciones, sino sólo teoremas del álgebra de operadores y del análisis funcional como son, la construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) y el teorema de representación de derivaciones, que se anexan en los apéndices. En segundo lugar, en la demostración de la suficiencia se sigue el método de A. Chebotarev [$Ch2$], [$GQ$] para construir soluciones minimales de la ecuación maestra, lo que permite demostrar este resultado, sin utilizar la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas que Parthasarathy desarrolla en su libro.

**Proposición 1:** *Sea $\theta$ el generador de un semigrupo dinámico cuántico uniformemente continuo $\{T_t\}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces se cumple lo siguiente:*
(i) $\theta(1) = 0$;
(ii) Si $X_i, Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $1 \leq i \leq n$ y $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = 0$ entonces

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} Y_i^* \theta\left(X_i^* X_j\right) Y_j \geq 0;$$

(iii) Para todo $X_i, Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $1 \leq i \leq n$,

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} Y_i^* \left\{\theta\left(X_i^* X_j\right) - \theta\left(X_i^*\right) X_j - X_i^* \theta\left(X_j\right)\right\} Y_j \geq 0.$$

**Demostración:** (i) Por la propiedad (iii) en la definición de s.d.c. $T_t(1) = 1$ para toda $t$, así $\theta(1) = \lim_{t\to 0} t^{-1}(T_t(1) - 1) = 0$ donde el límite es en la norma de operadores.

(ii) De la propiedad (iv) en la definición de s.d.c. para todo $X_i, Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\sum_{1\leq i,j\leq n} Y_i^* T_t(X_i^* X_j) Y_j \geq 0$ y por hipótesis $\sum_i X_i Y_i = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq t^{-1} \sum_{1\leq i,j\leq n} Y_i^* T_t(X_i^* X_j) Y_j \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} Y_i^* t^{-1}[T_t(X_i^* X_j) - X_i^* X_j] Y_j \end{aligned}$$

pues $\sum_{1\leq i,j\leq n} Y_i^* X_i^* X_j Y_j = 0$. Haciendo $t \to 0$ obtenemos (ii) ya que los operadores $T_t$ son continuos en la norma de operadores.

(iii) Sean $X_i, Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), 1 \leq i,j \leq n$ cualesquiera, póngase $X_0 = 1$ y $Y_0 = -\sum_{i=1}^n X_i Y_i$ entonces
$\sum_{i=0}^n X_i Y_i = X_0 Y_0 + \sum_{i=1}^n X_i Y_i = 0$. Por (ii) se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq Y_0^* \theta(X_0^* X_0) Y_0 + \sum_{j=1}^n Y_0^* \theta(X_0^* Y_j) Y_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^n Y_i^* \theta(X_i^* X_0) Y_0 + \sum_{1\leq i,j\leq n} Y_i^* \theta(X_i^* X_j) Y_j \\ &= (-\sum_{i=1}^n X_i Y_i)^* \theta(1)(-\sum_{i=1}^n X_i Y_i) + \sum_{j=1}^n (-\sum_{i=1}^n X_i Y_i)^* \theta(X_j) Y_j \\ &\quad + \sum_{i=1}^n Y_i^* \theta(X_i^*)(-\sum_{j=1}^n X_i Y_i) + \sum_{1\leq i,j\leq n} Y_i^* \theta(X_i^* X_j) X_j \\ &= -\sum_{i=1}^n Y_i^* X_i^* \sum_{j=1}^n \theta(X_j) Y_j - \sum_{i=1}^n Y_i^* \theta(X_i^*) \sum_{j=1}^n X_j Y_j + \sum_{1\leq i,j\leq n} Y_i^* \theta(X_i X_j) Y_j \\ &= \sum_{1\leq i,j\leq n} Y_i^* \left\{\theta(X_i^* X_j) - \theta(X_i) X_j - X_i^* \theta(X_j)\right\} Y_j. \end{aligned}$$

■

En la siguiente Proposición se usa el teorema de construcción de Gelfand-Naimark-Segal CGNS cuyo enunciado y demostración se dan en el apéndice 1.

**Proposición 2:** *Sea $\theta$ como en la Proposición 1. Entonces existen un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, un operador lineal $\pi(X) : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ que satisfacen lo siguiente:*

*(i)* $\pi(X)^*\pi(Y) = \theta(X^*Y) - \theta(X^*)Y - X^*\theta(Y)$;
*(ii) La correspondencia* $X \rightarrow \pi(X)$ *es lineal;*
*(iii) El conjunto* $\{\pi(X)u \mid X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), u \in \mathcal{H}\}$ *es total en* $\mathcal{K}$;
*(iv) Si* $(\mathcal{K}', \pi')$ *es otro par que satisface de (i) a (iii) entonces existe un isomorfismo unitario* $\Gamma : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ *tal que* $\Gamma\pi(X)u = \pi'(X)$ *para todo* $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $u \in \mathcal{H}$.

**Demostración:** De la Proposición 1 se sigue que la función

$$K((X,u),(Y,v)) = \langle u, \{\theta(X^*Y) - \theta(X^*)Y - X^*\theta(Y)\}\, v\rangle$$

es un Kernel definido positivo[4] en el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}$, en efecto, por la propiedad (iii) de la Proposición 1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i,j\leq n} \overline{\alpha}_i\alpha_j K((X_i,u_i),(X_j,u_j)) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} \overline{\alpha}_i\alpha_j \langle u_i, \{\theta(X_i^*X_j) - \theta(X_i^*)X_j - X_i^*\theta(X_j)\}\, u_j\rangle \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} \langle \alpha_i u_i, \{\theta(X_i^*X_j) - \theta(X_i^*)X_j - X_i^*\theta(X_j)\}\, \alpha_j u_j\rangle \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} \langle u, Y_i^*\{\theta(X_i^*X_j) - \theta(X_i^*)X_j - X_i^*\theta(X_j)\}\, Y_j u\rangle \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

donde $Y_i u = \alpha_i u_i, u \in \mathcal{H}$ para toda $\alpha_i \in \mathbb{C}, u_i \in \mathcal{H}, i = 1, 2..., n$. Ahora, por el teorema construcción de Gelfand-Naimark-Segal[5] existe un par de Gelfand $(\mathcal{K}, \lambda)$ donde $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert y $\lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ es una transformación tal que

$$\langle\lambda(X,u), \lambda(Y,v)\rangle = \langle u, \{\theta(X^*Y) - \theta(X^*)Y - X^*\theta(Y)\}\, v\rangle \tag{2.1}$$

para todo $u, v \in \mathcal{H}$, $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, y el conjunto $\{\lambda(X,u) \mid X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ u \in \mathcal{H}\}$ es total en $\mathcal{K}$.

Dado que el lado derecho de (2.1) es antilineal conjugado en $(X,u)$ y lineal en $(Y,v)$ se sigue que $\lambda(X,u)$ es lineal en cada una de las variables $X, u$. Así, existe un operador $\pi(X) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ que satisface $\pi(X)u = \lambda(X,u)$ y (2.1) implica $\|\pi(X)u\|^2 = \langle u, \{\theta(X^*X) - \theta(X^*)X - X^*\theta(X)\}\, u\rangle$. Dado que $\theta$ es

[4]Ver apéndice 1
[5]Ver apéndice 1

acotado se sigue que $\pi(X)$ es acotado, por la desigualdad de Schwartz, como operador de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{K}$.

Ahora (2.1) implica que

(i) $\pi(X)^*\pi(Y) = \theta(X^*Y) - \theta(X^*)Y - X^*\theta(Y)$;

(ii) La linealidad de $\pi$ se sigue de la de $\lambda$.

(iii) Esta propiedad es consecuencia del hecho de que $\{\lambda(X, u)\}$ es total.

(iv) La propiedad (iv) se sigue inmediatamente de la última parte del teorema de GNS. ■

**Definición:** *Un homomorfismo* $\Gamma : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ *donde* $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ *son espacios de Hilbert, se llama *-unital si*

*(i)* $\Gamma(X^*) = \Gamma^*(X)$.

*(ii)* $\Gamma(1_{\mathcal{H}_1}) = 1_{\mathcal{H}_2}$.

**Proposición 3:** *Sean* $\theta$, $\pi$ *como en la Proposición 2. Entonces existe un homomorfismo *-unital* $\rho : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ *tal que* $\pi(XY) = \pi(X)Y - \rho(X)\pi(Y)$ para todo $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

**Demostración:** Queremos definir $\rho : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ para lo cual procederemos definiendo $\rho$ en $\mathcal{U}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ si y sólo si $UU^* = 1$), seguidamente se define $\rho$ en combinaciones lineales finitas de unitarios, pues cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es combinación lineal de cuatro operadores unitarios[6].

Sea $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ defínase

$$\rho(U) : k \to \mathcal{K},$$

donde $k = \overline{span\,\{\pi(X)u : X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\, u \in \mathcal{H}\}}$ mediante

$$\rho(U)\pi(X)u = (\pi(UX) - \pi(U)X)u$$

entonces

$$\begin{aligned}
\langle \rho(U)\pi(X)u, \rho(U)\pi(Y)v\rangle &= \langle (\pi(UX) - \pi(U)X)u, (\pi(UY) - \pi(U)Y)v\rangle \\
&= \langle \pi(UX)u, \pi(UY)v\rangle - \langle \pi(UX)u, \pi(U)Yv\rangle \\
&\quad - \langle \pi(U)Xu, \pi(UY)v\rangle + \langle \pi(U)Xu, \pi(U)Yv\rangle \\
&= \langle u, \pi^*(UX)\pi(UY)v\rangle - \langle u, \pi^*(UX)\pi(U)Yv\rangle \\
&\quad - \langle u, X^*\pi^*(U)\pi(UY)v\rangle + \langle u, X^*\pi(U)^*\pi(U)Yv\rangle
\end{aligned}$$

[6]Ver apendice 5

$$
\begin{aligned}
&= \langle u, \{\theta(X^*Y) - \theta(X^*U^*)UY - X^*U^*\theta(UY)\}\, v\rangle \\
&\quad - \langle u, \{\theta(X^*) - \theta(X^*U^*)U - X^*U^*\theta(U)\}\, v\rangle \\
&\quad - \langle u, X^* \{\theta(Y) - U^*\theta(UY) - \theta(U^*)UY\}\, v\rangle \\
&\quad + \langle u, X^* \{-\theta(U^*)U - U^*\theta(U)\}\, Yv\rangle \qquad (*) \\
&= \langle u, \{\theta(X^*Y) - \theta(X^*)Y - X^*\theta(Y)\}\, v\rangle \\
&= \langle u, \pi^*(X)\pi(Y)v\rangle \\
&= \langle \pi(X)u, \pi(Y)v\rangle
\end{aligned}
$$

donde la igualdad (*) se sigue de la Proposición 2 inciso (i).

Entonces, $\rho(U) : k \to \mathcal{K}$ es isometría y se extiende a una isometría de $\mathcal{K}$ en sí mismo. Demostraremos ahora que $\rho(U^*) = \rho^*(U)$. Por definición

$$
\begin{aligned}
\langle \rho(U)^*\pi(X)u, \pi(Y)v\rangle &= \langle \pi(X)u, \rho(U)\pi(Y)v\rangle = \langle \pi(X)u, (\pi(UY) - \pi(U)Y)v\rangle \\
&= \langle \pi(X)u, (\pi^*(X)\pi(UY) - \pi^*(X)\pi(U)Y)v\rangle \\
&= \langle u, \{\theta(X^*UY) - \theta(X^*)UY - X^*\theta(UY)\}\, v\rangle \\
&\quad - \langle u, \{\theta(X^*U) - \theta(X^*)U - X^*\theta(U)\}\, Yv\rangle
\end{aligned}
$$

$$
= \langle u, \{\theta(X^*UY) - X^*\theta(UY) - \theta(X^*U)Y + X^*\theta(U)Y\}\, v\rangle
$$

Por otra parte, tomando adjuntos y por la Proposición 2 inciso(i)

$$
\begin{aligned}
\langle \rho(U^*)\pi(X)u, \pi(Y)v\rangle &= \langle \pi(U^*X)u - \pi(U^*)Xu, \pi(Y)v\rangle \\
&= \langle u, \pi(U^*X)^*u - X^*\pi(U^*)^*\pi(Y)v\rangle \\
&= \langle u, \{\theta(U^*X)^*Y - \theta((U^*X)^*)Y - (U^*X)^*\theta(Y)\}\, v\rangle \\
&\quad - \langle u, X^* \{\theta(UY) - \theta(U)Y - U\theta(Y)\}\, v\rangle
\end{aligned}
$$

$$
= \langle u, \{\theta(X^*UY) - \theta(X^*U)y - X^*\theta(UY) + X^*\theta(U)Y\}\, v\rangle
$$

Y comparando obtenemos que $\rho(U^*) = \rho(U)^*$

Ahora, para cualesquiera dos operadores unitarios $U_1, U_2 \in \mathcal{H}$, $\rho(U_1U_2) = \rho(U_1)\rho(U_2)$ y $\rho(1) = 1$. En efecto,

$$
\rho(U_1U_2)\pi(X)u = \pi(U_1U_2X)u - \pi(U_1U_2)Xu \qquad (3.1)
$$

y, por otra parte, como $\rho(X)\pi(Y) = \pi(XY) - \pi(X)Y$ tenemos que

$$\rho(U_1)\rho(U_2)\pi(X)u = \rho(U_1)\left[\pi(U_2X)u - \pi(U_2)Xu\right]$$

$$\begin{aligned} &= \pi(U_1U_2X)u - \pi(U_1)U_2Xu - (\pi(U_1U_2)Xu - \pi(U_1)U_2Xu) \\ &= \pi(U_1U_2X)u - \pi(U_1U_2)Xu \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $\rho(U_1U_2) = \rho(U_1)\rho(U_2)$.

Además,

$$\begin{aligned} \rho(1)\pi(X)u &= \pi(1X)u - \pi(1)Xu \\ &= \pi(X)u = 1 \end{aligned}$$

pues $\pi(1) = 0$, ya que $\pi^*(1)\pi(1)u = (\theta(1^*1) - \theta(1^*)1 - 1^*\theta(1))u = 0$.

Entonces, $\langle u, \pi^*(1)\pi(1)u\rangle = 0$ para cada $u$ y por lo tanto $\langle \pi(1)u, \pi(1)u\rangle = 0$ es decir $\pi(1) \equiv 0$. Esto demuestra que $\rho(1) = 1$. Tenemos entonces que $\rho(U)$ es unitario para toda $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ pues $\rho^*(U)\rho(U) = \rho(U^*U) = \rho(1) = 1$.

Ahora, si $X = \sum_j c_jU_j$ es combinación lineal finita de operadores en $\mathcal{H}$ se define

$$\rho(X) = \sum_j c_j\rho(U_j)$$

si $\sum c_jU_j = 0$ entonces

$$\sum c_j\rho(U_j)\pi(Y) = \pi(\sum c_jU_jY) - \pi(\sum c_jU_j)Y = 0,$$

es decir $\rho(X)$ está bien definida cuando X es una combinación lineal de operadores unitarios, como todo operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es combinación lineal de cuatro operadores unitarios $\rho(X)$ esta bien definido para todo X en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Esto implica que la transformación $X \to \rho(X)$ es un homomorfismo *-unital de $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$. ■

**Proposición 4:** *Sea $\rho : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ el homomorfismo *-unital definido en la Proposición 3. Si $w.lim_{n\to\infty}X_n = X$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces*

$$w.\lim_{n\to\infty} \rho(X_n) = \rho(X) \text{ en } \mathcal{B}(\mathcal{K}).$$

**Demostración:** Sea $\text{w.lim}_{n\to\infty}X_n = X$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces por la propiedad (iii) en definición de s.d.c. tenemos

$$w.\lim_{n\to\infty} T_t(X_n) = T_t(X),\ \forall t \geq 0$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \langle u, T_t(X_n)v\rangle = \langle u, T_t(X)v\rangle \ \ \forall u, v \in \mathcal{H}, \ t \geq 0$$

entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left\langle u, \theta^k(X_n)v\right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left\langle u, \theta^k(X)v\right\rangle \tag{4.1}$$

Poniendo

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-2}}{k!} \left\langle u, \theta^k(X_n)v\right\rangle \\ \varphi(t) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-2}}{k!} \left\langle u, \theta^k(X)v\right\rangle \end{aligned}$$

concluimos de la ecuación (4.1) derivando con respecto a $t$ que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\langle u, \{\theta(X_n) - \theta(X)\}\, v\rangle + t\varphi_n(t) - t\varphi(t)\right) = 0, \ \forall t > 0. \tag{4.2}$$

Por otra parte, dado que $\theta$ es acotado y $\sup_n \|X_n\| < \infty$ por el principio de acotamiento uniforme, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\max\left(|\varphi_n(t)|\,, |\varphi(t)|\right) < e^{t\alpha}$$

pues,

$$\begin{aligned} |\varphi_n(t)| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-2}}{k!} \left|\left\langle u, \theta^k(X_n)v\right\rangle\right| \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|u\|\beta\|X_n\|\|v\|, \text{ para algún } \beta{>}0 \\ &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\beta', \text{ para algún } \beta' > 0. \end{aligned}$$

similarmente para $|\varphi|$. Si $\varepsilon > 0$ es arbitrario escogemos $t_0 > 0$ tal que $t_0 e^{\alpha t_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, por la ec. (4.1) y (4.2) tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\lim_n} \left|\langle u, \{\theta(X_n) - \theta(X)\}\, v\rangle\right| \ &\leq \ \overline{\lim_n} \left|\langle u, \{\theta(X_n) - \theta(X)\}\, v\rangle + t_0\varphi_n(t_0) - t_0\varphi(t_0)\right| \\ &\quad + 2t_0 e^{\alpha t_0} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

dado que $\varepsilon$ es arbitrario

$$\lim_n \langle u, \theta(X_n)v\rangle = \langle u, \theta(X)v\rangle \ \ \forall u, v \in \mathcal{H} \tag{4.3}$$

Para todo $Y_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), u_i \in \mathcal{H}$ i=1,2 tenemos de la definición de $\rho$ y $\pi$ en la Proposición 3 y la ecuación (4.3)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \langle \pi(Y_1)u_1, \rho(X_n)\pi(Y_2)u_2\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \pi(Y_1)u_1, \{\pi(X_nY_2) - \pi(X_n)Y_2\}\, u_2\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle u_1, \pi^*(Y_1)\pi(X_nY_2) - \pi^*(Y_1)\pi(X_n)Y_2u_2\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle u_1, \{\theta(Y_1X_nY_2) - \theta(Y_1^*)X_nY_2 - Y_1^*\theta(X_nY_2)\}\, u_2\rangle - \\
&\quad - \lim_{n\to\infty} \langle u_1, \{[\theta(Y_1^*X_n) - \theta(Y_1^*)X_n - Y_1^*\theta(X_n)]\, Y_2\}\, u_2\rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle u_1, \{\theta(Y_1XY_2) - \theta(Y_1^*)XY_2 - Y_1^*\theta(XY_2) - [\theta(Y_1^*X) - \theta(Y_1^*)X - Y_1^*\theta(X)]\, Y_2\}\, u_2\rangle$$

$$= \langle \pi(Y_1)u_1, \rho(X)\pi(Y_2)u_2\rangle \tag{4.4}$$

Si $\|Y\| < 1$ entonces,

$$\left\|\frac{Y+Y^*}{2}\right\| \leq 1, \left\|\frac{Y-Y^*}{2i}\right\| \leq 1$$

y así

$$\frac{Y+Y^*}{2} = \frac{U_1+U_2}{2}, \frac{Y-Y^*}{2i} = \frac{V_1+V_2}{2},$$

donde $U_i, V_i$, i=1,2 son unitarios. Luego $\|\rho(Y)\| \leq 2$ cuando $\|Y\| \leq 1$. Entonces $\sup_n \|\rho(X_n)\| < \infty$.

Ahora, de la totalidad del conjunto$\{\pi(Y)u \mid Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), u \in \mathcal{H}\}$ en $\mathcal{K}$ y de la ecuación (4.4) se obtiene que $\text{w.lim}_n \rho(X_n) = \rho(X)$. ■

**Proposición 5:** *Sea $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un homomorfismo*-unital. Existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y un isomorfismo unitario $\Gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}$ tal que $\pi(X) = \Gamma^{-1}X \otimes 1\Gamma$ para toda $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ donde 1 es el operador identidad en $\mathcal{K}$.*

**Demostración:** Sea $\dim \mathcal{H}_1 = \infty$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\mathcal{H}_1 = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pues si $\mathcal{H}_1$ es separable, estos espacios son isomorfos. Tómense dos grupos uniparamétricos $U_t = e^{-itq}, V_t = e^{-itp}$ donde $q, p$ satisfacen $[q,p] = i$. Sean $Q, P$ operadores autoadjuntos, generadores de $\pi(U_t), \pi(V_t)$, es decir, $\pi(U_t) = e^{-itQ}, \pi(V_t) = e^{-itP}$. Entonces $\pi(U_t), \pi(V_t)$, obedecen las relaciones de conmutación de Weyl, dado que $U_s, V_t$ satisfacen dichas relaciones, es decir

$$U_sV_t = e^{ist}V_tU_s$$

implica

$$\begin{aligned}\pi(U_s)\pi(V_t) &= \pi(U_sV_t)\\ &= \pi\left(e^{ist}V_tU_s\right)\\ &= e^{ist}\pi(V_tU_s)\\ &= e^{ist}\pi(V_t)\pi(U_s)\end{aligned}$$

Por el teorema de Stone-von Neumann[7] existen un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y un isomorfismo unitario $\Gamma' : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{B}(\mathbb{R},\mathcal{K})$, es decir, de $\mathcal{H}_1$ en el conjunto de los operadores acotados de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{K}$, tales que

$$\begin{aligned}\left(\Gamma'\pi(U_s)\Gamma'^{-1}f\right)(x) &= e^{-is\cdot x}f(x)\\ \left(\Gamma'\pi(V_t)\Gamma'^{-1}f\right)(x) &= f(x-t)\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\left(\Gamma'\pi(U_s)\Gamma'^{-1}\Gamma'\pi(V_t)\Gamma'^{-1}f\right)(x) &= e^{-is\cdot x}\left(\Gamma'\pi(V_t)\Gamma'^{-1}f\right)(x)\\ &= e^{-is\cdot x}f(x-t),\end{aligned}$$

pero dado que $U_s, V_t$ a su vez, satisfacen las relaciones de conmutación de Weyl, tenemos

$$\left(\Gamma'\pi(U_sV_t)\Gamma'^{-1}f\right)(x) = U_sV_tf(x)$$

y así, obtenemos

$$\pi(U_sV_t) = \Gamma^{-1}(U_sV_t\otimes 1)\Gamma$$

donde $\Gamma = \Gamma'^{-1}$. Por el isomorfismo entre el espacio[8] $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}_1, d\mu)\otimes\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}_1, d\mu;\mathcal{K})$. Como las combinaciones lineales de $U_s, V_t$, son densas en sentido débil[9] en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se sigue que $\pi(X) = \Gamma^{-1}(X\otimes 1)\Gamma$.

Ahora, supongamos que $\dim\mathcal{H}_1 = n < \infty$. Entonces, salvo equivalencia unitaria, existe un par irreducible de operadores unitarios $U, V \in \mathcal{H}_1$ tales que $U^n = V^n = 1$ y $UV = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)VU$. Por un análogo al teorema de Stone-von Neumann para el grupo $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ con adición módulo $n$ existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ tal que $\Gamma^{-1}(U\otimes 1)\Gamma = \pi(U), \Gamma^{-1}(V\otimes 1)\Gamma = \pi(V)$.

---

[7] Ver apéndice 2

[8] $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}_1, d\mu;\mathcal{K})$ es el conjunto de todas las funciones medibles $f$ de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{K}$ que satisfacen $\int_{\mathcal{H}_1}\|f(x)\|_{\mathcal{K}}^2\,d\mu(x) < \infty$.

[9] Para una demostración de este hecho, ver el libro de P.A. Meyer, [*M*], Cap. 3 Sec. 6

El álgebra generada por $U, V$ es $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ y, por el mismo argumento del caso $n = \infty$ tenemos $\pi(X) = \Gamma^{-1}(X \otimes 1)\Gamma$. ■

**Corolario 1:** *Sea $\theta$ el generador del s.d.c uniformemente continuo $\{T_t\}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y una función lineal $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ tal que*

*(i)* $\{\pi(X)u \mid X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), u \in \mathcal{H}\}$ *es total en* $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$;

*(ii)* $\pi(X)^*\pi(Y) = \theta(X^*Y) - \theta(X^*)Y - X^*\theta(Y)$;

*(iii)* $\pi(XY) = \pi(X)Y + (X \otimes 1)\pi(Y)$ *para todo* $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

**Demostración:** Sean $\theta, \pi, \rho$ como en la Proposición 3. Por las Proposiciones 4 y 5 existe un espacio de Hilbert $\mathcal{K}_1$ y un isomorfismo unitario $\Gamma : \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_1$ tal que $\rho(X) = \Gamma^{-1} X \otimes 1\Gamma$ para toda X en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Defínase $\pi_0(X) = \Gamma\pi(X)$. Entonces se cumplen las propiedades (i) a (iii), con $\pi$ reemplazado por $\pi_0$, por la Proposición 2 y la definición de $\rho$, ya que $\Gamma$ es isomorfismo y $\{\pi(X)u\}$ es total en $\mathcal{K}$ y por lo tanto $\Gamma\pi$ es total en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ y se cumple (i).

La propiedad (ii) se cumple porque

$$
\begin{aligned}
\pi_0(X)^*\pi_0(Y) &= (\Gamma\pi(X))^*\Gamma\pi(Y) \\
&= \pi(X)^*\Gamma^*\Gamma\pi(Y) \\
&= \pi(X)^*\pi(Y)
\end{aligned}
$$

ya que $\Gamma^*\Gamma = 1$ por ser $\Gamma$ unitario.

La propiedad (iii) es consecuencia de

$$
\begin{aligned}
\pi_0(XY) &= \Gamma\pi(XY) \\
&= \Gamma[\pi(X)Y + \rho(X)\pi(Y)] \\
&= \Gamma\pi(X)Y + \Gamma\left[\Gamma^{-1}(X \otimes 1)\Gamma\pi(Y)\right] \\
&= \pi_0(X)Y + (X \otimes 1)\pi_0(Y)
\end{aligned}
$$ ■

**Proposición 6:** *Sea $\theta$ el generador de un s.d.c. uniformente continuo $\{T_t\}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces existe una sucesión $\{L_j\}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface lo siguiente*

*(i)*

$$
\sup_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ \|X\| \leq 1}} \sum_j \|[L_j, X]u\|^2 < \infty; \tag{6.1}
$$

*(ii)*

$$
\theta(X^*Y) - \theta(X^*)Y - X^*\theta(Y) = \sum_j [L_j, X]^*[L_j, Y]
$$

*para todo $X$, $Y$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, donde la suma del lado derecho converge fuertemente.*

**Demostración:** En el Corolario 1 sea $\{e_j\}_{j\geq 1}$ una base ortonormal en $\mathcal{K}$ y considérese

$$\Gamma_0 : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \cdots$$

tal que $\Gamma_0 u \otimes v = \oplus_j \langle e_j, v\rangle u$ para todo $v \in \mathcal{K}, u \in \mathcal{H}$. Probaremos que $\Gamma_0$ es isomorfismo unitario:

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma_0 u \otimes v, \Gamma_0 u' \otimes v'\rangle &= \left\langle \bigoplus_j \langle e_j, v\rangle u, \bigoplus_j \langle e_j, v'\rangle u' \right\rangle \\
&= \sum_j \overline{\langle e_j, v\rangle} \langle e_j, v'\rangle \langle u, u'\rangle \\
&= \langle v, v'\rangle \langle u, u'\rangle \\
&= \langle u \otimes v, u' \otimes v'\rangle ,
\end{aligned}$$

pues $\langle v, v'\rangle = \sum \overline{\langle e_j, v\rangle} \langle e_j, v'\rangle$ .

Para cualquier $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existen $\pi_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $\Gamma_0 \pi(X) u = \bigoplus_j \pi_j(X) u, u \in \mathcal{H}$ . Entonces

$$\pi_j(XY) u = \pi_j(X) Y u + X \pi_j(Y) u,$$

pues,

$$\pi(XY) u = \pi(X) Y u + (X \otimes 1) \pi(Y) u,$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
\bigoplus_j \pi_j(XY) &= \Gamma_0 \pi(X) Y u + \Gamma_0 (X \otimes 1) \pi(Y) u \\
&= \bigoplus_j \pi_j(X) Y u + \Gamma_0 (X \otimes 1)(w \otimes v) ,
\end{aligned}$$

con $\pi(Y) u = w \otimes v$ tenemos

$$\begin{aligned}
\bigoplus_j \pi_j(XY) &= \bigoplus_j \pi_j(X) Y u + \Gamma_0 X w \otimes 1 v \\
&= \bigoplus_j \pi_j(X) Y u + \bigoplus_j \langle e_j, v\rangle X w \\
&= \bigoplus_j \pi_j(X) Y u + \bigoplus_j X(\langle e_j, v\rangle w) \\
&= \bigoplus_j (\pi_j(X) Y u + X \pi_j(Y) u) ,
\end{aligned}$$

entonces $\pi_j$ es una derivación acotada[10] en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cada $j$. Por lo tanto existen $L_j$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $\pi_j(X) = [L_j, X]$.

Ahora, $\Gamma_0$ es unitario y $\pi$ acotado por lo tanto $\Gamma_0\pi$ es acotado así que

$$\begin{aligned}
\infty &> \|\Gamma_0\pi(X)u\|^2 = \left\|\bigoplus_j \pi_j(X)u\right\|^2 \\
&= \sum_j \|\pi_j(X)u\|^2 \\
&= \sum_j \|[L_j, X]u\|^2,
\end{aligned}$$

Para cada $u \in \mathcal{H}$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Tomando supremos obtenemos que

$$\sup_{\substack{\|u\|\le 1\\ \|X\|\le 1}} \sum_{j=1}^{\infty} \|[L_j, X]u\|^2 \le \sup_{\substack{\|u\|\le 1\\ \|X\|\le 1}} \|\Gamma_0\pi_j(X)u\|^2 < \infty.$$

La propiedad (ii) se sigue de la propiedad (ii) del Corolario 1. ■

**Proposición 7:** *Sea $\{L_j\}$ una sucesión en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface (6.1) entonces*

$$\sup_{\|u\|=1} \sum_j \left(\|L_j u\|^2 - |\langle u, L_j u\rangle|^2\right) < \infty \tag{7.1}$$

**Demostración:** En la ecuación (6.1) ponemos $X = |u\rangle\langle u|$ y observamos que

$$\|[L_j, X]u\|^2 = \|L_j |u\rangle\langle u| u - |u\rangle\langle u| L_j u\|^2$$

$$= \langle L_j |u\rangle\langle u| u - |u\rangle\langle u| L_j u, L_j |u\rangle\langle u| u - |u\rangle\langle u| L_j u\rangle$$

$$= \left\langle L_j \|u\|^2 u, L_j \|u\|^2 u\right\rangle - \left\langle L_j \|u\|^2 u, \langle u, L_j u\rangle u\right\rangle - \langle\langle u, L_j u\rangle u, L_j u\rangle$$

$$+ \langle |u\rangle\langle u| L_j u, |u\rangle\langle u| L_j u\rangle,$$

pues $|u\rangle\langle u| u = \|u\|^2 u$. Y como $\|u\|^2 = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|[L_j, X]u\|^2 &= \|L_j u\|^2 - \langle L_j u, \langle u, L_j u\rangle u\rangle - \\
&\quad - \langle\langle u, L_j u\rangle u, L_j u\rangle + \langle\langle u, L_j u\rangle u, \langle u, L_j u\rangle u\rangle \\
&= \|L_j u\|^2 - \langle u, L_j u\rangle \langle L_j u, u\rangle - \\
&\quad - \overline{\langle u, L_j u\rangle}\langle u, L_j u\rangle + \langle u, L_j u\rangle \overline{\langle u, L_j u\rangle} \\
&= \|L_j u\|^2 - |\langle u, L_j u\rangle|^2
\end{aligned}$$ ■

[10] Ver apéndice 3.

**Proposición 8:** *Sea $\{L_j\}$ una sucesión en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface (6.1) entonces para cualquier proyección $P$ en $\mathcal{H}$*

$$\sup_{\substack{\|X\|\leq 1 \\ \|u\|=1, Pu=u}} \sum_j \|[PL_jP, PXP]\,u\|^2 < \infty$$

**Demostración:** Cuando $Pu = u$ tenemos

$$\begin{aligned} [PL_jP, PXP]\,u &= (PL_jPPXP - PXPPL_jP)\,u \\ &= (PL_jPXP - PXPL_jP)\,u \\ &= P\,(L_jPX - XPL_j)\,Pu \\ &= P\,(L_jPX - XPL_j)\,u, \end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} P\,[L_j, PXP]\,u &= P\,(L_jPXP - PXPL_j)\,u \\ &= P\,(LjPXPu - XPL_j)\,u \\ &= P\,(L_jPX - XPL_j)\,u \end{aligned}$$

pues $Pu = u$, entonces

$$\begin{aligned} \|[PL_jP, PXP]\,u\| &= \|P\,[L_{j,}PXP]\,u\| \\ &\leq \|[L_j, PXP]\,u\|\,. \end{aligned}$$

El resultado se sigue de la ecuación (6.1). ■

**Proposición 9:** *Sea $dim\mathcal{H} = n < \infty$. Denotamos por $dU$ la diferencial de la medida de Haar*[11] *normalizada del grupo compacto $\mathcal{U}(\mathcal{H})$. Entonces existen constantes positivas $\alpha, \beta$ tales que $\alpha + n\beta = n^{-1}$ y*
(i) $\int \|LUu\|^2\, dU = n^{-1} trL^*L$;
(ii) $\int |\langle u, U^*LUu\rangle|^2\, dU = \alpha trL^*L + \beta\, |trL|^2$ *para todo $L$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y todo vector unitario $u$ en $\mathcal{H}$.*

**Demostración:** Primeramente verificamos que $\mathcal{U}\,(\mathcal{H})$ es grupo topológico con la topología fuerte. Efectivamente, si $\{T_n\}\,, \{S_n\}\,,$ son sucesiones de operadores unitarios que convergen en la topología fuerte (dado que $\mathcal{H}$ es

[11] Ver apéndice 4.

de dimensión finita, la topología fuerte y la débil son equivalentes) a $T, S \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ respectivamente, entonces,

$$T_n^* \xrightarrow{s} T^*,$$

pero $T_n^* = T_n^{-1}$ y $T^* = T^{-1}$ por ser operadores unitarios. Por tanto

$$T_n^{-1} \xrightarrow{s} T^{-1}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|(S_n T_n - ST)\varphi\| &\leq \|S(T_n - T)\varphi\| + \|(S_n - S)T\varphi\| \\ &\leq \|(T_n - T)\varphi\| + \|(S_n - S)T\varphi\| \to 0. \end{aligned}$$

Como $\|T\| \leq 1$ para todo $T \in \mathcal{U}(H)$, entonces $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es compacto ($\dim\mathcal{H} = n < \infty$). En particular, $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ es localmente compacto y por tanto existe en éste, una única medida de Haar regular.

Por la invarianza bilateral de la medida de Haar de $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ el lado izquierdo de (i) es independiente del vector $u$. Así, para cualquier base ortogonal $e_1, \ldots, e_n$, en $\mathcal{H}$ tenemos

$$\int \|LUu\|^2 \, dU = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \int \|LUe_j\|^2 \, dU$$

pues los $e_j$ son unitarios y la medida no depende del unitario elegido, además,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_j \langle LUe_j, LUe_j \rangle &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \langle Ue_j, L^* LUe_j \rangle \\ &= \frac{1}{n} tr\,(L^* L), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \|LUu\|^2 \, dU &= \frac{1}{n} \int tr\,(L^* L) \, dU \\ &= \frac{1}{n} tr\,(L^* L), \end{aligned}$$

pues $\int dU = 1$ y $Ue_j$ es una base de $\mathcal{H}$ y la traza es independiente de la base elegida. Para probar (ii) considérese la forma sesquilineal

$$B(L, M) = \int \overline{\langle u, U^* LUu \rangle} \langle u, U^* MUu \rangle \, dU, \quad \|u\| = 1$$

en el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces

$$B(U^*LU, U^*MU) = B(L, M), \ \forall L, M \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) \tag{9.1}$$

por la invarianza de la medida de Haar.

Por el argumento en la prueba de (i)

$$B(L, 1) = n^{-1} trL. \tag{9.2}$$

Para cualesquiera proyecciones ortogonales $P, Q$ tales que $PQ = 0$ póngase

$$a = B(P, P), \ b = B(P, Q),$$

por (9.1) éstas son constantes positivas independientes de $P, Q$ ya que si $P', Q'$ son proyecciones ortogonales entonces existe $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ tal que $P = U^*P'U$, similarmente para $Q$.( Si $P, Q$ son proyecciones ortogonales en $\mathcal{H}$ tales que $\|P - Q\| < 1$ entonces, $P$ y $Q$ son unitariamente equivalentes[12]). Sea $1 = P_1 + \cdots + P_n$ dado que $TrP_k = 1$, $B(P, 1) = n^{-1}$ por (9.2). Por otra parte si $1 = P + Q_1 + \cdots + Q_{n-1}$ donde $P$, $Q_j$ son proyecciones ortogonales, entonces

$$\begin{aligned} B(P, 1) &= B(P, P + Q_1 + \cdots + Q_{n-1}) \\ &= B(P, P) + B(P, Q_1) + \cdots + B(P, Q_{n-1}) \\ &= B(P, P) + (n-1)B(P, Q) \end{aligned}$$

donde $Q$ es cualquiera de las $Q_i$, así $a + (n-1)b = n^{-1}$ donde $a = B(P, P), b = B(P, Q)$. Por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} b &= \int \langle u, U^*PUu\rangle \langle u, U^*QUu\rangle \, dU \\ &\leq \left\{ \int \langle u, U^*PU\rangle^2 \int \langle u, U^*QU\rangle^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = a \end{aligned}$$

Para todo $L$ autoadjunto con resolución espectral $L = \sum \lambda_j P_j$ donde cada $P_j$ es una proyección unidimensional tenemos

$$B(L, L) = \int \overline{\langle u, U^*LUu\rangle} \langle u, U^*LUu\rangle$$

[12]Ver Weidmann $[W]$, Teorema 4.35 pag 86.

$$
\begin{aligned}
&= \int \overline{\left\langle u, U^* \left(\sum_j \lambda_j L_j\right) U u\right\rangle} \left\langle u, U^* \left(\sum_j \lambda_j L_j\right) U u\right\rangle dU \\
&= B\left(\sum \lambda_j P_j, \sum \lambda_j P_j\right) \\
&= \sum \overline{\lambda j} B\left(P_j, \sum \lambda_j P_j\right) \\
&= \sum_j \lambda_j^2 B(P_j, P_j) + \sum_{j\neq k} \lambda_j \lambda_k B(P_j, P_k) \\
&= a \sum \lambda_j^2 + b \sum_{j\neq k} \lambda_j \lambda_k \\
&= atrL^2 + \frac{b}{2}\left\{(trL)^2 - trL^2\right\}. \qquad (9.3)
\end{aligned}
$$

Para cada par $L, M$, de operadores hermitianos tenemos

$$
B(L,M) = \frac{1}{4}\{B(L+M, L+M) - B(L-M, L-M)\} \qquad (9.4)
$$

pues,

$$
\begin{aligned}
B(L,M) &= \frac{1}{4}\{B(L,L) + B(L;M) + B(M,L) + B(M,M)\} \\
&\quad -\frac{1}{4}(B(L,L) - B(L,M) - B(M,L) + B(M,M))
\end{aligned}
$$

ya que$L$ y $M$ son hermitianos y además

$$
\begin{aligned}
\langle u, U^* L U u\rangle &= \langle Uu, LUu\rangle \\
&= \langle LUu, Uu\rangle \\
&= \langle U^* L U u, u\rangle \\
&= \overline{\langle u, U^* L U u\rangle}
\end{aligned}
$$

de donde se sigue la igualdad $B(L,M) = B(M,L)$.

Por (9.3) y (9.4) tenemos

$$
\begin{aligned}
B(L,M) &= \frac{1}{4}\left\{(a-b)tr(L+M)^2 + b(tr(L+M))^2\right\} \\
&\quad -\frac{1}{4}\left\{(a-b)tr(L-M)^2 + b(tr(L-M))^2\right\} \\
&= (a-b)trLM + btrLtrM
\end{aligned}
$$

para $L, M$ arbitrarios $L = L_1 + iL_2$, $M = M_1 + iM_2$ donde $L_i, M_i$ son hermitianos

$$
B(L,M) = B(L_1 + iL_2, M_1 + iM_2)
$$

$$= (a-b)\{trL_1M_1 + itrL_1M_2 - itrL_2M_1 + trL_2M_2\} +$$
$$+b\{trL_1trM_1 + itrL_1trM_2 - itrL_2trM_1 + trL_2trM_2\}$$

$$= (a-b)trL^*M + b\overline{trL}trM$$

Poniendo $\alpha = a-b$, $\beta = \frac{b}{2}$, $L = M$ y usando la relación $a+(n-1)b = n^{-1}$ tenemos (ii) donde $\alpha, \beta$ son positivos y $\alpha + n\beta = \frac{1}{n}$. ■

**Proposición 10:** *Sea $dim\mathcal{H} = n < \infty$ y sea $\{L_j\}$ una sucesión en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface (6.1). Entonces*

$$\sum_j tr\left(L_j - \frac{1}{n}trL_j\right)^*\left(L_j - \frac{1}{n}trL_j\right) < \infty$$

**Demostración:** Por las Proposiciones 7 y 9

$$\int \sum_j \left\{\|L_jUu\|^2 - |\langle u, U^*L_jUu\rangle|^2\right\} dU < \infty \tag{10.1}$$

ya que

$$\int \|L_jUu\|^2 dU = \frac{1}{n}trL^*L$$

y

$$\int |\langle u, U^*L_jUu\rangle|^2 dU = \alpha trL_j^*L_j + \beta |trL_j|^2$$

Entonces, sustituyendo estos valores en (10.1) obtenemos

$$\sum_j \left(\frac{1}{n}trL_j^*L_j - \alpha trL_j^*L_j - \beta |trL_j|^2\right) < \infty$$

además $n\beta = n^{-1} - \alpha$ y así

$$\begin{aligned}\sum_j n\beta\left(trL_j^*L_j\right) - \beta|trL_j|^2 &= n\beta\sum_j\left(trL_j^*L_j - \frac{1}{n}|trL_j|^2\right)\\ &= n\beta\sum_j\left(tr(L_j^*L_j) - \frac{1}{n}\overline{trL_j}trL_j\right)\\ &= n\beta\sum_j\left(tr(L_j^*L_j) - \frac{1}{n}trL_j^*trL_j\right)\end{aligned}$$

dado que $trI = n$

$$= n\beta \sum_j tr\left(L_j^* L_j - \frac{1}{n}\left(trL_j^*\right)L_j - \frac{1}{n}L_j^* trL_j + \frac{1}{n^2}trL_j^* trL_j\right)$$

$$= n\beta \sum_j tr\left(L_j - \frac{1}{n}trL_j\right)^* \left(L_j - \frac{1}{n}trL_j\right) < \infty$$

pues $((trL_j)\,1)^* = \overline{trL_j}1 = trL_j^*1.$ ■

**Proposición 11:** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $\{L_j\}$ cualquier sucesión en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface (6.1). Entonces existe una sucesión de escalares $\{c_j\}$ tales que $\sum_j (L_j - c_j)^* (L_j - c_j)$converge fuertemente.*

**Demostración:** Sean $u, v \in \mathcal{H}$ dos vectores unitarios l.i. y sean $a_j = \langle u, L_j u\rangle$ , $b_j = \langle v, L_j v\rangle$. Sea $P$ la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $u$ y $v$, sea $m_j = \frac{1}{2}trPL_jP$. Por la Proposición 8, ya que $\{L_j\}$ satisface la ecuación (6.1), para toda $P$ proyección ortogonal en $\mathcal{H}$ tenemos que

$$\sup_{\substack{\|X\|\le 1 \\ \|u\|\le 1, Pu=u}} \sum_j \|[PL_jP, PXP]\,u\|^2 \le \infty.$$

Observemos que $\{PL_jP\}$ es una sucesión que satisface (6.1) en $\mathcal{B}\left(span\left\{u,v\right\}\right)$ , pues cada operador acotado en $span\left\{u,v\right\}$ tiene la forma $X = PX'P$ donde $X' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y además para $w \in span\left\{u,v\right\}$ ,

$$\sup_{\substack{\|w\|\le 1 \\ \|X\|\le 1}} \sum_j \|[PL_jP, X]\,w\|^2 = \sup_{\substack{\|u\|\le 1 \\ \|X'\|\le 1, Pu=u}} \sum_j \|[PL_jP, PX'P]\|^2 < \infty$$

pues

$$\|X\|_{\mathcal{B}(span\{u,v\})} = \|X\| = \|X'\|.$$

Podemos aplicar la Proposición 10 y obtenemos que

$$\sum_j tr\left(PL_jP - \frac{1}{2}trPL_jP\right)^* \left(PL_jP - \frac{1}{2}trPL_jP\right) < \infty.$$

Sea $\Lambda_j = PL_jP - m_j1$ entonces

$$\begin{aligned} \|\Lambda_j u\|^2 &= \langle \Lambda_j u, \Lambda_j u\rangle = \left\langle u, \Lambda_j^* \Lambda_j u\right\rangle, \\ \|\Lambda_j v\|^2 &= \langle \Lambda_j v, \Lambda_j v\rangle = \left\langle v, \Lambda_j^* \Lambda_j v\right\rangle \end{aligned}$$

luego
$$\|\Lambda_j u\|^2 + \|\Lambda_j v\|^2 = tr\Lambda_j^*\Lambda_j < \infty$$
por la Proposición 10, es decir
$$\sum_j \left\{\|(PL_jP - m_j1)\,u\|^2 + \|(PL_jP - m_j1)\,v\|^2\right\} < \infty \tag{11.1}$$

Como $Pw = w$ para $w$ en $span\,\{u,v\}$ y $\|u\| = 1$ entonces
$$\begin{aligned}\sum_j \|(PL_jP - a_j)\,u\|^2 &= \sum_j \|P\,(L_j - a_j)\,u\|^2\\ &\leq \sum_j \|(L_j - a_j)\,u\|^2\\ &= \sum_j \left(\|L_j u\|^2 - |a_j|^2\right) < \infty \end{aligned}\tag{11.2}$$
por la Proposición 7. Similarmente
$$\sum_j \|(PL_jP - b_j)\,v\|^2 < \infty \tag{11.3}$$

Ahora, por otra parte
$$\begin{aligned} m_j &= \frac{1}{2}tr_{span\{u,v\}}PL_jP = \frac{1}{2}\left(\langle u, PL_jPu\rangle + \langle v.PL_jPv\rangle\right)\\ &= \frac{1}{2}\,(a_j + b_j)\end{aligned}$$
sustituyendo $m_j$ en (11.2) y usando que $\|u\| = \|v\| = 1$ tenemos
$$\begin{aligned}\|(PL_jP - m_j)\,u\|^2 &= \|PL_jPu\|^2 - \frac{1}{2}\,(a_j + b_j)\,\overline{a_j}\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\overline{a_j} + \overline{b_j}\right)a_j + \frac{1}{4}\,|a_j + b_j|^2\,. \end{aligned}\tag{11.4}$$

También tenemos que
$$\begin{aligned}\|(PL_jP - m_j)\,v\|^2 &= \|PL_jPv\|^2 - \frac{1}{2}\,(a_j + b_j)\,\overline{b_j}\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\overline{a_j} + \overline{b_j}\right)b_j + \frac{1}{4}\,|a_j + b_j|^2 \end{aligned}\tag{11.5}$$
sumando y simplificando (11.4) y (11.5) obtenemos

$$\infty > \sum_j \left\{ \|(PL_jP - m_j)\,u\|^2 + \|(PL_jP - m_j)\,v\|^2 \right\}$$

$$= \sum_j \left( \|PL_jPu\|^2 + \|PL_jPv\|^2 - \frac{1}{2}\left(a_j\overline{b_j} + \overline{a_j}b_j\right) - \frac{1}{2}|a_j|^2 - \frac{1}{2}|b_j|^2 \right). \tag{11.6}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \|(PL_jP - a_j)\,u\|^2 &= \langle (PL_jP - a_j)\,u, (PL_jP - a_j)\,u \rangle \\ &= \|PL_jPu\|^2 - |a_j|^2 . \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\|(PL_jP - b_j)\,v\|^2 = \|PL_jPv\|^2 - |b_j|^2 .$$

Así que,

$$\begin{aligned} \sum_j \left( \|PL_jPu\|^2 - |a_j|^2 \right) &< \infty \\ \sum_j \left( \|PL_jPv\|^2 - |b_j|^2 \right) &< \infty \end{aligned}$$

o bien

$$\sum_j \left\{ \|PL_jPu\|^2 + \|PL_jPv\|^2 - \left( |a_j|^2 + |b_j|^2 \right) \right\} < \infty \tag{11.7}$$

restando a (11.6) la ecuación (11.7) obtenemos

$$\sum_j \frac{1}{2}\left( |a_j|^2 + |b_j|^2 - a_j\overline{b_j} - \overline{a_j}b_j \right) < \infty$$

es decir

$$\sum_j |\langle u, L_ju \rangle - \langle v, L_jv \rangle|^2 < \infty. \tag{11.8}$$

Para cualesquiera $u, v$ linealmente independientes se escoge un vector unitario fijo $u_0$ y se pone $c_j = \langle u_0, L_ju_0 \rangle$ . Entonces para cada vector unitario $w$ tal que $w$ y $u_0$ son l.i.

$$\begin{aligned} \|(L_j - c_j)\,w\|^2 &= \langle (L_j - c_j)\,w, (L_j - c_j)\,w \rangle \\ &= \|L_jw\|^2 - c_j\overline{d_j} - \overline{c_j}d_j + |c_j|^2 \end{aligned}$$

donde $d_j = \langle w, L_j w\rangle$ así que

$$\begin{aligned} |\langle w, L_j w\rangle - \langle u_0, L_j u_0\rangle|^2 &= |d_j - c_j|^2 \\ &= |d_j|^2 - c_j\overline{d_j} - \overline{c_j}d_j + |c_j|^2 \end{aligned}$$

y

$$\|(L_j - d_j)\, w\|^2 = \|L_j w\|^2 - |d_j|^2,$$

entonces

$$\|(L_j - c_j)\, w\|^2 = \|(L_j - d_j)\, w\|^2 + |d_j - c_j|^2 .$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_j \|(L_j - c_j)\, w\|^2 &= \sum_j \left\{\|(L_j - d_j)\, w\|^2 + |d_j - c_j|^2\right\} \\ &= \sum_j \left\{\left(\|L_j w\|^2 - |d_j|^2\right) + |d_j - c_j|^2\right\} < \infty, \end{aligned}$$

por la Proposición 7 y por (11.8).

Cuando $w = cu_0$ tenemos que

$$\|(L_j - c_j)\, cu_0\|^2 = |c|^2 \left(\|L_j u_0\|^2 - |c_j|^2\right)$$

y por la proposición 7 obtenemos

$$\sum_j \|(L_j - c_j)\, w\|^2 < \infty.$$

lo cual implica convergencia débil pues $\left\langle w, \sum_j (L_j - c_j)^* (L_j - c_j)\, w\right\rangle < \infty$.

Hagamos por simplicidad $L_j - c_j := \widetilde{L_j}$ y sea $T_n = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{L_j}^* \widetilde{L_j}$,entonces

$$T_1 \leq T_2 \leq \cdots \leq T_n \leq \cdots < \infty,$$

además, los $T_n$ son autoadjuntos para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto[13], existe $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $T_n \xrightarrow{s} T$. ■

**Definición:** Para cada operador $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y cada $\varphi \in \mathcal{H}$, defínase el operador $\Phi(X)$ mediante la relación

$$\Phi(X)\,\varphi := \sum_j L_j^* X L_j \varphi,$$

[13] Ver Weidmann $[W]$, teorema 4.28

donde escribimos $L_j$ por $\widetilde{L_j}$ de la proposición anterior.

Para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tenemos que

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \Phi(X)\varphi\rangle| &\leq \sum_j |\langle L_j\varphi, XL_j\varphi\rangle| \\ &\leq \|X\| \sum_j \|L_j\varphi\|^2 \\ &= \|X\| \sum_j \left\langle \varphi, L_j^* L_j \varphi \right\rangle < \infty \end{aligned} \tag{D.1}$$

para cada $\varphi \in \mathcal{H}$. El principio de acotamiento uniforme aplicado a la sucesión $\sum_{j=1}^{n} L_j^* L_j$ implica que existe una constante $c$ tal que

$$\|\Phi(X)\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle \varphi, \Phi(X)\varphi\rangle| \leq c\|X\|,$$

es decir, $\Phi(X)$ es un operador acotado para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Entonces $\Phi$ es una transformación de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en sí mismo, estudiemos sus propiedades.

Primero obsérvese que

$$\Phi(1) = \sum_j L_j^* L_j$$

y por (D.1) tenemos que

$$\Phi(X) \leq \|X\| \, \Phi(1), \text{ para todo } X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Además

$$\langle \varphi, \Phi(1)\varphi\rangle = \sum_j \left\langle \varphi, L_j^* L_j \varphi \right\rangle = \sum \|L_j\varphi\|^2 \geq 0,$$

entonces

$$\Phi(1) \geq 0.$$

**Definición:** Sea $H$ un operador autoadjunto en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ defínase el operador $G$ en $\mathcal{H}$ mediante la relación

$$G = \frac{1}{2}\Phi(1) - iH.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle\varphi,-G\varphi\rangle &= \left\langle\varphi,-\left(\frac{1}{2}\Phi(1)-iH\right)\varphi\right\rangle+\overline{\left\langle\varphi,-\left(\frac{1}{2}\Phi(1)-iH\right)\varphi\right\rangle}\\ &= -\langle\varphi,\Phi(1)\varphi\rangle\leq 0,\end{aligned}$$

para cada $\varphi$ en $\mathcal{H}$.

Así mismo

$$\operatorname{Re}\langle\varphi,-G^{*}\varphi\rangle=-\langle\varphi,\Phi(1)\varphi\rangle\leq 0.$$

Entonces como $-G$ y $-G^{*}$ son disipativos, $-G$ es el generador de un semigrupo de contracciones uniformemente continuo, pues $G$ es acotado. Denotemos por $w_t$ a este semigrupo de contracciones.

**Proposición 14:** *La transformación $\Phi$ es completamente positiva y normal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en sí mismo.*

**Demostración:** Inmediata, pues $\Phi(X)$ está en la forma de Kraus (I.5). ■

Si $\theta$ es el generador del semigrupo dinámico cuántico $T_t$, entonces para cada $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\frac{d}{dt}T_t(X)=\theta(T_t(X)),t\geq 0,$$

donde la derivada es en la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

**Proposición 15:** *Supóngase que $\theta(X)=-G^{*}X-XG+\Phi(X)$, entonces para cada $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la ecuación diferencial*

$$\frac{d}{dt}T_t(X)\varphi=\theta(T_t(X))\varphi,T_0(X)=X \tag{15.1}$$

*es equivalente a la ecuación integral*

$$T_t(X)\varphi=w_t^{*}Xw_t\varphi+\int_0^t d\tau w_{t-\tau}^{*}\Phi(T_\tau(X))w_{t-\tau}\varphi \tag{15.2}$$

*donde la derivada y la integral son en la topología fuerte de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

**Demostración:** (15.2)$\Rightarrow$(15.1) Sustituyendo $w_t = e^{-tG}, w_t^* = e^{-tG^*}$ en (15.2) y derivando obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T_t(X)\varphi &= -G^* w_t^* X w_t \varphi - w_t^* X w_t G \varphi \\ &\quad + \frac{d}{dt}\int_0^t d\tau w_{t-\tau}^* \Phi(T_\tau(X)) w_{t-\tau}\varphi\end{aligned}$$

sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^t d\tau e^{-(t-\tau)G^*}\Phi(T_\tau) e^{-(t-\tau)G}\varphi &= \Phi(T_t(X))\varphi + \int_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(w_{t-\tau}^*\Phi(T_\tau(X))w_{t-\tau}\varphi\right) \\ &= \Phi(T_t(X))\varphi + \int_0^t d\tau\left[-G^* w_{t-\tau}^*\Phi(T_\tau(X))w_{t-\tau}\varphi\right] - \\ &\quad - \int_0^t d\tau\left[-w_{t-\tau}^*\Phi(T_\tau(X))w_{t-\tau}G\varphi\right],\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}T_t(X)\varphi. &= -G^* T_t(X)\varphi + T_t(X)G\varphi + \Phi(T_t(X))\varphi \\ &= \theta(T_t(X))\varphi.\end{aligned}$$

(15.1)$\Rightarrow$(15.2) Tenemos para $\tau \geq 0$ y para cada $\varphi \in \mathcal{H}$,

$$\Phi(T_\tau(X))\varphi = G^* T_\tau(X)\varphi + T_\tau(X)G\varphi - \frac{d}{d\tau}T_\tau(X)\varphi \text{ y } T_0(X) = X.$$

entonces, para $0 \leq \tau \leq t$ y $\varphi = w_{t-\tau}\psi$, $\psi \in \mathcal{H}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}w_{t-\tau}^*\Phi(T_\tau(X))w_{t-\tau}\varphi &= w_{t-\tau}^* G^* T_\tau(X)w_{t-\tau}\varphi + w_{t-\tau}^* T_\tau(X)Gw_{t-\tau}\varphi \\ &\quad - w_{t-\tau}^*\left(\frac{d}{d\tau}T_\tau(X)\right)w_{t-\tau}\varphi \\ &= \frac{d}{d\tau}w_{t-\tau}^* T_\tau(X)w_{t-\tau}\varphi,\end{aligned}$$

hemos usado la regla de Leibnitz $\frac{d}{dt}w_t\varphi = -Gw_t\varphi$ y $\left(\frac{d}{dt}w_t\varphi\right)^* = \frac{d}{dt}(w_t^*)$, pues $w_t = e^{-tG}$ y $G^*$ conmuta con $e^{-tG^*}$. Integrando con respecto a $\tau$ en $[0,t]$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^t d\tau w_{t-\tau}^*\Phi(T_\tau(X))w_{t-\tau}\varphi &= w_{t-\tau}^* T_\tau(X)w_{t-\tau}\varphi \,|_0^t \\ &= w_{t-\tau}^* X w_{t-\tau}\varphi - T_t(X)\varphi\end{aligned}$$

así

$$T_t(X)\psi = w_t^* X w_t \psi + \int_0^t d\tau w_{t-\tau}^* \Phi(T_\tau(X)) w_{t-\tau}. \qquad \blacksquare$$

**Proposición 16:** $\frac{d}{d\tau}\|w_{t-\tau}\varphi\|^2 = \langle w_{t-\tau}\varphi, \Phi(1) w_{t-\tau}\varphi\rangle$ , para cada $\varphi \in \mathcal{H}$.

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\|w_{t-\tau}\varphi\|^2 &= \frac{d}{d\tau}\langle w_{t-\tau}\varphi, w_{t-\tau}\varphi\rangle = \langle G w_{t-\tau}\varphi, w_{t-\tau}\varphi\rangle + \langle w_{t-\tau}\varphi, G w_{t-\tau}\varphi\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\Phi(1) w_{t-\tau}\varphi, w_{t-\tau}\varphi\right\rangle + i\langle H w_{t-\tau}\varphi, w_{t-\tau}\varphi\rangle \\
&\quad + \left\langle w_{t-\tau}\varphi, \frac{1}{2}\Phi(1) w_{t-\tau}\varphi\right\rangle - i\langle w_{t-\tau}\varphi, H w_{t-\tau}\varphi\rangle
\end{aligned}$$

observando que tanto $H$ como $\Phi(1)$ son autoadjuntos se cancelan y agrupan términos para obtener lo buscado. $\blacksquare$

**Proposición 17:** *Sean* $T_t^{(0)} = 0, T_t^{(n)}(X) = w_t^* X w_t \psi + \int_0^t d\tau w_{t-\tau}^* \Phi\left(T_\tau^{(n-1)}(X)\right) w_{t-\tau}\psi$ *entonces* $T_t^{(n)}(X) \underset{n}{\rightarrow} \widetilde{T_t}$ *en la topología fuerte de* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *y* $\widetilde{T_t}$ *satisface la ecuación (15.2).*

**Demostración:** Haremos la demostración siguiendo los siguientes pasos:
(i) Para todo $X \geq 0, 0 \leq T_t^{(n)}(X) \leq \|X\| \cdot 1$
(ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $X$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $J_t^{(n)}(X)$ es uniformemente acotado donde

$$J_t^{(n)}(X) = \int_0^t d\tau w_{t-\tau}^* \Phi\left(T_\tau^{(n)}(X)\right) w_{t-\tau}.$$

(iii) Para cada $n \in \mathbb{N}, T_t^{(n)}$ satisface la condición (iv) en la definición de semigrupo y es continuo en la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para cada $t > 0$ fijo.
(iv) $T_t^{(n)}(X) \leq T_t^{(n+1)}(X)$ para toda $X \geq 0$.

Sabemos que

$$\left\langle \varphi, T_t^{(n)}(X)\varphi\right\rangle = \langle w_t\varphi, X w_t\varphi\rangle + \int_0^t d\tau \left\langle w_{t-\tau}\varphi, \Phi\left(T_\tau^{(n-1)}(X)\right) w_{t-\tau}\varphi\right\rangle.$$

Demostraremos (i) por inducción sobre $n$. Para $n = 1$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle \varphi, T_t^{(1)}(X)\varphi\right\rangle = \langle w_t\varphi, X w_t\varphi\rangle \\
&\leq \|w_t\varphi\| \|X w_t\varphi\| \leq \|X\|
\end{aligned}$$

pues $w_t$ es de contracciones y $X$ es positivo. Entonces $0 \leq T_t^{(1)}(X) \leq \|X\| \cdot 1$. Supongamos $0 \leq T_t^{(n-1)}(X) \leq \|X\| \cdot 1$ para cada $X \geq 0$, entonces $\int_0^t d\tau \left\langle w_{t-\tau}\varphi, \Phi\left(T_\tau^{(n-1)}(X)\right) w_{t-\tau}\varphi\right\rangle \geq 0$, pues $\Phi$ es completamente positivo y

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\left\langle \varphi, T_t^{(n)}(X)\varphi\right\rangle\right| \\ &\leq \|w_t\varphi\|^2\|X\| + \left|\int_0^t d\tau \left\langle w_{t-\tau}\varphi, \Phi\left(T_\tau^{(n-1)}(X)\right) w_{t-\tau}\varphi\right\rangle\right|, \end{aligned}$$

pero

$$\left|\int_0^t d\tau \left\langle w_{t-\tau}\varphi, \Phi\left(T_\tau^{(n-1)}(X)\right) w_{t-\tau}\varphi\right\rangle\right| \leq \int_0^t d\tau \left\|T_\tau^{(n-1)}(X)\right\| \langle w_{t-\tau}\varphi, \Phi(1)\, w_{t-\tau}\varphi\rangle \tag{17.1}$$

pues $\langle \varphi, \Phi(X)\varphi\rangle \leq \|X\| \langle \varphi, \Phi(1)\varphi\rangle$ . Además por la Proposición 16 y la hipótesis de inducción, la expresión del lado derecho de (17.1) es menor igual que

$$\|X\| \int_0^t d\tau \frac{d}{d\tau}\|w_{t-\tau}\varphi\|^2 = \|X\| \left(\|\varphi\|^2 - \|w_{t-\tau}\varphi\|^2\right),$$

entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \varphi, T_\tau^{(n)}(X)\varphi\right\rangle \\ &\leq \|X\|\|w_{t-\tau}\varphi\|^2 + \|X\|\left(\|\varphi\|^2 - \|w_{t-\tau}\varphi\|^2\right) \\ &= \|X\|\|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

es decir se cumple (i).

La propiedad (ii) se sigue de la desigualdad (17.1) y la desigualdad anterior.

Probaremos (iii) y (iv) simultáneamente por inducción:

$T_\tau^{(1)}(X) = w_t^* X w_t$ entonces para cada $\varphi \in \mathcal{H}$ y cada par de sucesiones finitas $(X_i), (Y_i)$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i,j} Y_i\varphi, T_t^{(1)}(X_i^* X_j)\, Y_j\varphi\right\rangle &= \sum_{i,j} \langle Y_i\varphi, w_t^*(X_i^* X_j)\, w_t Y_j\varphi\rangle \\ &= \left\langle \sum_i X_i w_t Y_i\varphi, \sum_i X_i w_t Y_i\varphi\right\rangle \\ &= \left\|\sum_i X_i w_t Y_i\varphi\right\|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

por otra parte
$$0 = T_t^{(0)} \leq T_t^{(1)}.$$

Para $n = 1$, $T_t^{(1)} = w_t^* X w_t$. Si $X_n \to X$ en la norma, es decir, si $\|X_n - X\| \underset{n}{\to} 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\left\|T_t^{(1)}(X_n) - T_t^{(1)}(X)\right\| &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left\|T_t^{(1)}(X_n)\varphi - T_t^{(1)}(X)\varphi\right\| \\
&= \sup_{\|\varphi\|=1} \|w_t^* X_n w_t \varphi - w_t^* X w_t \varphi\| \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \|X_n - X\| \|w_t \varphi\| \\
&\leq \|X_n - X\| \underset{n}{\to} 0
\end{aligned}$$

es decir $T_t^{(1)}$ es continuo en la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Supongamos que (iii) se cumple para $n$. Escribimos

$$T_t^{(n+1)}(X) = T_t^{(1)}(X) + \int_0^t d\tau T_{t-\tau}^{(1)}\left(\Phi\left(T_\tau^{(n)}(X)\right)\right)$$

como $T_{(\cdot)}^{(1)}$, $\Phi$ y $T_t^{(n)}$ cumplen la propiedad (iv) en la definición de sdc, por hipótesis, y dada la linealidad de la integral, $T_t^{(n+1)}$ también satisface la propiedad (iv).

Supongamos que $X_N \underset{N}{\to} X$ en la norma de operadores entonces

$$\begin{aligned}
\left\|T_t^{(n)}(X_N) - T_t^{(n)}(X)\right\| &= \left\|T_t^{(1)}(X_N - X) + \int_0^t d\tau T_{t-\tau}^{(1)}\left(\Phi\left(T_\tau^{(n)}(X_N - X)\right)\right)\right\| \\
&\leq \|X_N - X\| + \int_0^t d\tau \left\|T_{t-\tau}^{(1)}\left(\Phi\left(T_\tau^{(n)}(X_N - X)\right)\right)\right\| \\
&\leq \|X_N - X\| + \int_0^t d\tau \left\|\Phi\left(T_\tau^{(n)}(X_N - X)\right)\right\| \\
&\leq \|X_N - X\| + \int_0^t d\tau \left\|T_\tau^{(n)}(X_N - X)\right\| \|\Phi(1)\| \\
&\leq \|X_N - X\| + \beta t \|X_N - X\| \underset{N}{\to} 0,
\end{aligned}$$

con $\beta = \|\Phi(1)\|$ y $X \geq 0$.

Pues

$$\begin{aligned}
\|\Phi(X)\| &= \sup_{\|\varphi\|=1} \langle \varphi, \Phi(X)\varphi \rangle \\
&\leq \|X\| \sup_{\|\varphi\|=1} \langle \varphi, \Phi(1)\varphi \rangle \\
&= \|X\| \|\Phi(1)\|
\end{aligned}$$

ya que $\Phi(X)$ es positivo y autoadjunto, $\Phi(1)$ es autoadjunto y acotado y, además, $T_t^{(n)} \leq \|X\| \cdot 1$, por hipótesis de inducción. Si $X$ no es positivo se escribe como combinación lineal de cuatro operadores positivos y

$$\begin{aligned} \|\Phi(X)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{4} \Phi(c_i X_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{4} |c_i| \, \|\Phi(X_i)\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{4} |c_i| \, \|X_i\| \, \|\Phi(1)\| \\ &\leq 4k \|X\| \end{aligned}$$

donde $k = m\acute{a}x\,(|c_i|)$. Con esto terminamos la demostración de (iii).

Para la propiedad (iv) escribimos

$$\begin{aligned} T_t^{(n+1)}(X) - T_t^{(n)}(X) &= \int_0^t d\tau \left\{ T_{t-\tau}^{(1)}\left(\Phi\left(T_\tau^{(n)}(X)\right)\right) - T_{t-\tau}^{(1)}\left(\Phi\left(T_\tau^{(n-1)}(X)\right)\right) \right\} \\ &= \int_0^t d\tau \left\{ T_{t-\tau}^{(1)}\left(\Phi\left(T_\tau^{(n)}(X) - T_\tau^{(n-1)}(X)\right)\right) \right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

pues por hipótesis de inducción $T_t^{(n)}(X) - T_t^{(n-1)}(X) \geq 0$ y $\Phi(X) \geq 0$ si $X \geq 0$.

Por las propiedades (i) a (iv) tenemos que$\left\{ \left\langle \varphi, T_t^{(n)}(X)\varphi \right\rangle \right\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de números reales para cada $\varphi \in \mathcal{H}$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), X \geq 0$. Sea

$$\widetilde{T_t}(X)[\varphi] := \sup_n \left\langle \varphi, T_t^{(n)}(X)\varphi \right\rangle, X \geq 0.$$

$\widetilde{T_t}(X)[\varphi]$ es una forma cuadrática acotada, pues

$$0 \leq \left\langle \varphi, T_t^{(n)}(X)\varphi \right\rangle \leq \|X\| \, \|\varphi\|^2, \ \forall n,$$

para cada $X \geq 0$. Entonces por el teorema de representación de formas cuadráticas[14], existe $\widetilde{T_t}(X)$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\widetilde{T_t}(X)[\varphi] = \widetilde{T_t}\varphi$. Además $T_t^{(n)}(X) \overset{w}{\nearrow} \widetilde{T_t}(X)$, $X \geq 0$. Tenemos que para $X \geq 0, T_{t-\tau}^{(1)}\left(\Phi\left(T_\tau^{(n)}(X)\right)\right) \overset{w}{\nearrow}$

[14] Ver Kato $[Ka]$, capítulo VI, teorema 2.1

$T_{t-\tau}^{(1)}(\Phi(T_\tau(X)))$ y la convergencia también es en sentido fuerte pues la sucesión es creciente. Así mismo, por el teorema de convergencia monótona

$$\int_0^t d\tau T_{t-\tau}^{(1)}\left(\Phi\left(T_\tau^{(n)}(X)\right)\right) \overset{w}{\nearrow} \int_0^t d\tau T_{t-\tau}^{(1)}\left(\Phi\left(\widetilde{T}_\tau(X)\right)\right)$$

y la convergencia también es fuerte. Por lo tanto, $\widetilde{T}_t$ satisface la misma ecuación (15.2). Para $X$ general basta representar a este operador como combinación lineal de operadores positivos. ■

**Teorema :** *(Gorini-Kossakowski-Sudarshan, Lindblad) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Un operador $\theta$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el generador de un semigrupo dinámico cuántico uniformemente continuo si y sólo si, existen un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$, un operador acotado $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ y un operador acotado y autoadjunto $H$ en $\mathcal{H}$ tales que se satisface lo siguiente:*
*(i) $\theta(X) = i[H, X] - \frac{1}{2}\{L^*LX + XL^*L - 2L^*X \otimes 1L\}$ para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*
*(ii) El conjunto*

$$\{(LX - (X \otimes 1)L)u \mid X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), u \in \mathcal{H}\}$$

*es total en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.*

**Demostración:** $(\Rightarrow)$ Sea $\theta$ generador del s.d.c. $\{T_t\}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por las Proposicion 2 y el Corolario 1 podemos construir un espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ y un mapeo lineal $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ tal que se cumplen las propiedades (i) a (iii) del Corolario 1 y el conjunto $\{\pi(X)u \mid X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), u \in \mathcal{H}\}$ es total en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Como en la prueba de la Proposición 6 construimos el isomorfismo unitario $\Gamma_0 : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} \bigoplus \cdots$ tal que $\Gamma_0\pi(X)u = \bigoplus_j \left[\widetilde{L_j}, X\right]u$ para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $u \in \mathcal{H}$ y la ecuación (6.1) se cumple. Por la Proposición 11 escogemos $\{c_j\}$ tal que: $\sum_j \left\|\widetilde{L_j} - c_j\right\|^2 < \infty$. Sea $L_j = \widetilde{L_j} - c_j$ entonces $\sum_j \|L_j u\|^2 < \infty$, y $\sum_j L_j^* L_j$ es fuertemente convergente. Definimos

$$Lu = \Gamma_0^{-1}\left\{\bigoplus_j L_j u\right\}$$

entonces

$$\pi(X) = LX - X \otimes 1_{\mathcal{K}} L,\ X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

donde $1_{\mathcal{K}}$ es el operador identidad en $\mathcal{K}$. Efectivamente,

$$\pi(X)u = \Gamma_0^{-1}\left\{\bigoplus_j [L_j, X]\, u\right\}$$

como en la prueba de la Proposición 6

$$
\begin{aligned}
&= \Gamma_0^{-1}\left\{\bigoplus_j (L_jX - XL_j)\, u\right\} \\
&= \Gamma_0^{-1}\left(\bigoplus_j L_jXu\right) - \Gamma_0^{-1}\left(\bigoplus_j XL_ju\right) \\
&= LXu - \Gamma_0^{-1}\left(X \bigoplus_j L_ju\right)
\end{aligned}
$$

Sea

$$\theta_1(X) = -\frac{1}{2}\{L^*LX + XL^*L - 2L^*X \otimes 1L\}$$

usando la propiedad (ii) del Corolario 1 podemos demostrar que

$$
\begin{aligned}
\theta_1(X^*Y) - \theta_1(X^*)Y - X\theta_1(Y) &= \pi(X)^*\pi(Y) \qquad (**) \\
&= \theta(X^*Y) - \theta(X^*)Y - X\theta(Y)
\end{aligned}
$$

para todo $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Tenemos

$$
\begin{aligned}
\theta_1(X^*Y) &= -\frac{1}{2}\{L^*LX^*Y + X^*YL^*L - 2L^*X^*Y \otimes 1L\} \\
\theta_1(X^*)Y &= \frac{1}{2}\{L^*LX^*Y + X^*L^*LY - 2L^*X^* \otimes 1LY\} \\
-X^*\theta_1(Y) &= \frac{1}{2}\{X^*L^*LY + X^*YL^*L - 2X^*L^*Y \otimes 1L\}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\theta_1(X^*Y) - \theta_1(X^*)Y - X\theta_1(Y) &= X^*L^*LY + L^*X^*Y \otimes 1L - \\
&\quad -L^*X^* \otimes 1LY - X^*L^*Y \otimes 1L
\end{aligned}
$$

Por otra parte

$$
\begin{aligned}
\pi(X)^*\pi(Y) &= ((LX)^* - (X \otimes 1L)^*)(LY - Y \otimes 1L) \\
&= (X^*L^* - L^*X^* \otimes 1)(LY - Y \otimes 1L) \\
&= X^*L^*LY - X^*L^*Y \otimes 1L - \\
&\quad -L^*X^* \otimes 1LY + L^*X^* \otimes 1Y \otimes 1L
\end{aligned}
$$

pero

$$(X^* \otimes 1)(Y \otimes 1) = X^*Y \otimes 1$$

de donde se sigue la igualdad (**) y así $\theta - \theta_1$ es una derivación acotada en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Más aún, tenemos $\theta(X)^* = \theta(X^*)$ y $\theta_1(X)^* = \theta_1(X^*)$ pues

$$\theta_1(X^*) = -\frac{1}{2}\{L^*LX^* + X^*L^*L - 2L^*X^* \otimes 1L\}$$

y

$$\theta_1(X)^* = -\frac{1}{2}\{(L^*LX)^* + (XL^*L)^* - 2(L^*X \otimes 1L)^*\}$$

de donde se sigue facilmente la igualdad buscada. Por lo tanto $\theta(X) - \theta_1(X) = i[H, X]$ para toda $X$ y algún $H$ acotado y autoadjunto.

Finalmente, queremos que $L$ sea acotado, pero

$$\begin{aligned} Lu &= \Gamma_0^{-1}\left\{\bigoplus_j L_j u\right\} \\ \|Lu\|^2 &\leq \left\|\Gamma_0^{-1}\right\| \sum_j \|L_j\|^2 = \sum_j \|L_j\|^2 < \infty \end{aligned}$$

pues $\Gamma_0^{-1}$ es unitario.

($\Leftarrow$) $\theta$ es acotado ya que $L, X, H$ son acotados y $\|X \otimes 1\| = \|X\| \|1\| = \|X\|$. Sea

$$T_t = e^{t\theta},$$

este es un semigrupo uniformemente continuo en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En efecto, $T_0 = 1$ y calculando directamente de la serie obtenemos $T_{t+s} = T_tT_s$ además, tenemos la estimación

$$\|T_t - 1\| < t\,\|\theta\|\, e^{t\|\theta\|}$$

y

$$\left\|\frac{T_t - 1}{t} - \theta\right\| \leq \|\theta\|\,\|T_t - 1\|$$

lo que implica que$\{T_t\}$ es semigrupo uniformemente continuo de operadores acotados con generador $\theta$. Además, dado que

$$T_t(1) = 1 + \frac{t\theta(1)}{1!} + \frac{t^2\theta^2(1)}{2!} + \cdots$$

y $\theta(1) = 0$ obtenemos $T_t(1) = 1$.

Considérese el homorfismo unitario $\Gamma_0 : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H} \bigoplus \cdots$ que satisface $\Gamma_0 u \otimes v = \bigoplus_j \langle e_j, v \rangle u$ donde $e_1, e_2, \ldots$ es una base ortonormal en $\mathcal{K}$. Entonces $L$ esta dado por $\Gamma_0 L u = \bigoplus_j L_j u$ para todo u en $\mathcal{H}$, donde $\{L_j\}$ es una sucesión de operadores acotados en $\mathcal{H}$, $\sum_j L_j^* L_j$ converge fuertemente y $\|L\|^2 = \sum_j \|L_j\|^2$ la propiedad (i) se puede escribir como

$$\theta(X) = i[H, X] - \frac{1}{2} \sum_j \left( L_j^* L_j X + X L_j^* L_j - 2 L_j^* X L_j \right).$$

También como

$$\begin{aligned} \theta(X) &= \Phi(X) - \left( \frac{1}{2} \Phi(1) - iH \right) X - X \left( \frac{1}{2} \Phi(1) + iH \right) \\ &= \Phi(X) - GX - XG^*, \end{aligned}$$

donde

$$G = \frac{1}{2} \Phi(1) - iH.$$

Sea $\widetilde{T_t}$ la solución de (15.2) construida en la Proposición 17. La proposición 15 y el teorema de unicidad para ecuaciones diferenciales implican que $\widetilde{T_t} = T_t$. Entonces $T_t$ es un semigrupo en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ uniformemente continuo que cumple la propiedad (iv) en la definicion de sdc. Notemos que $T_t$ es de contracciones pues

$$\left\| T_t^{(n)}(X) \right\| \leq \|X\|$$

para toda $n$ y por lo tanto lo mismo es cierto para $T_t$.

Por (13.1) y (13.2), $-G$ es generador de un semigrupo de contracciones uniformemente continuo en $\mathcal{H}$, $w_t$. Mostraremos ahora que $T_t$ es normal. Si $X_N \overset{w}{\to} X$ (podemos suponer que $X_N \overset{w}{\nearrow} X$), tenemos para todo $t \geq 0$ fijo que

$$\langle w_t \varphi, w_t X_N \psi \rangle \underset{N}{\to} \langle w_t \varphi, w_t X \psi \rangle$$

para todo $\varphi, \psi$ en $\mathcal{H}$. Entonces $T_t^{(1)}$ es normal.

Supóngase que $T_t^{(n)}$ es normal y recordemos que $\Phi$ también es normal, entonces como la composición de transformaciones normales es una transformación normal

$$T_{t-\tau}^{(1)} \left( \Phi \left( T_\tau^{(n)}(X_N) \right) \right) \underset{N}{\overset{w}{\nearrow}} T_{t-\tau}^{(1)} \left( \Phi \left( T_\tau^{(n)}(X) \right) \right),$$

pues todas estas transformaciones preservan positividad. De aquí resulta por el teorema de convergencia monótona que

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi, \int_0^t d\tau T_{t-\tau}^{(1)} \left( \Phi \left( T_\tau^{(n)} \left( X_N \right) \right) \right) \psi \right\rangle &= \int_0^t d\tau \left\langle \varphi, T_{t-\tau}^{(1)} \left( \Phi \left( T_\tau^{(n)} \left( X_N \right) \right) \right) \psi \right\rangle \\
&\underset{N}{\rightarrow} \int_0^t d\tau \left\langle \varphi, T_{t-\tau}^{(1)} \left( \Phi \left( T_\tau^{(n)} \left( X \right) \right) \right) \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \varphi, \int_0^t d\tau T_{t-\tau}^{(1)} \left( \Phi \left( T_\tau^{(n)} \left( X \right) \right) \right) \psi \right\rangle
\end{aligned}$$

y de esto se sigue que $T_t$ es normal. ■

# Apendice 1

# Teorema de Gelfand-Naimark-Segal

Sea $V$ un conjunto arbitrario y sea $K : V \times V \to \mathbb{C}$ una función que satisface lo siguiente:

$$\sum_{i,j} \overline{\alpha_i}\alpha_j K(x_i, x_j) \geq 0$$

para toda $\alpha_i \in \mathbb{C}, x_i \in V, i = 1, \ldots, n$. A tal función se le llama *kernel definido positivo* en $V$.

La construcción de Gelfand-Naimark-Segal (GNS) permite asociar con $(V, K)$ otro par $(\mathcal{H}, \pi)$, único salvo isomorfismo, donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $\pi$ es una función tal que

$$K(x, y) = \langle \pi(x), \pi(y) \rangle_H .$$

A $(\mathcal{H}, \pi)$ se le llama *par de Gelfand* asociado a $(V, K)$.

Tenemos entonces el siguiente

**Teorema:** *(Construcción de Gelfand-Naimark-Segal) Sea $W$ cualquier conjunto y sea $K$ un kernel definido positivo en $W$. Entonces existen un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y una función $\pi : W \to \mathcal{H}$ que satisface*
*(i) El conjunto $\{\pi(x), x \in W\}$ es total en $\mathcal{H}$.*
*(ii) $K(x, y) = \langle \pi(x), \pi(y) \rangle$ para todo $x, y \in W$.*
*(iii) Si $\mathcal{H}'$ es otro espacio de Hilbert y $\pi' : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ es otra transformación que satisface (i) y (ii) con $\mathcal{H}$ y $\pi$ reemplazadas por $\mathcal{H}'$ y $\pi'$ respectivamente, entonces existe un isomorfismo unitario $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ tal que $U\pi(x) = \pi'(x)$ para toda $x \in \mathcal{W}$.*

**Demostración:** Tomemos el conjunto $\mathbb{C}^W = \{f : W \to \mathbb{C}\}$ considérense las funciones $\chi_{\{x\}} : W \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\chi_{\{x\}}(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq y \\ 1 \text{ si } x = y \end{cases}$$

Sea $V = span\left\{\chi_{\{x\}} : x \in W\right\}$, el conjunto $\left\{\chi_{\{x\}} : x \in W\right\}$ es l.i. en $V$ pues si $x_1, x_2 \ldots \in W, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \in \mathbb{C}$ entonces, si $\sum_i \alpha_i \chi_{\{x_i\}}(x_j) = 0$, tenemos que

$$\alpha_j = \sum_i \alpha_i \chi_{\{x_i\}}(x_j) = 0;$$

para cada $j$. Definimos ahora

$$\left\langle \sum_i \alpha_i \chi_{\{x_i\}}, \sum_j \alpha_j \chi_{\{x_j\}} \right\rangle_V := \sum_{i,j} \overline{\alpha_i} \alpha_j K(x_i, x_j)$$

Sea $N = \{x \in W : \langle \chi(x), \chi(x) \rangle_V = 0\}$ entonces la completación de $V/N$ es el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ buscado.

Si definimos $\pi : W \to V/N$ por la correspondencia $\pi(x) = \overline{\chi_{\{x\}}}$ donde $\overline{\chi_{\{x\}}}$ es la clase de equivalencia de $\chi_{\{x\}}(y)$ tenemos el par de Gelfand $(V/N, \pi)$ buscado.

Para probar (iii) considérese $S = \{\pi(x) : x \in W\}, S' = \{\pi(x) : x \in W\}$ y la transformación $U : \pi(x) \to \pi'(x)$ de $S$ en $S'$. Entonces $U$ es una transformación que preserva el producto escalar, por lo tanto[15], se extiende de manera única a un isomorfismo de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}'$.

$\blacksquare$

Para una demostración de este teorema aplicado a formas, ver V.S. Sunder $[S]$.

[15] Ver Parthasarathy $[P2]$, Proposición7.2

# Apendice 2

# Teorema de Stone-von Neumann.

**Definición:** Sea $U_t$ un grupo unitario fuertemente continuo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Un subespacio cerrado $D_- \subset \mathcal{H}$ se llama entrante si:

(i) $U_t[D_-] \subset D_-$ para $t \leq 0$.

(ii) $\cap_t U_t[D_-] = \{0\}$

(iii)$\overline{U_t[D_-]} = \mathcal{H}$

**Teorema:** *Sean $U_t, V_t$ dos grupos uniparamétricos fuertemente continuos en un espacio de Hibert $\mathcal{H}$ que satisfacen*

$$U_t V_s = e^{its} V_s U_t \text{ para todo } s, t.$$

*Entonces existe un espacio de Hilbert $\mathcal{N}$ y un operador unitario $\Gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R};\mathcal{N})$ tal que $(\Gamma U_t \Gamma^{-1} f)(x) = f(x-t)$ y $(\Gamma V_s \Gamma^{-1} f)(x) = e^{-isx} f(x)$.*

**Demostración:** Sean $P, Q$, autoadjuntos con $U_t = e^{-itP}$ y $V_s = e^{-isQ}$. Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de vectores en $\mathcal{H}$ de la forma

$$\varphi_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t,s) U_t V_s \varphi dt ds$$

donde $\varphi \in \mathcal{H}$ y $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Se puede probar[16] que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}$, $\mathcal{D} \subset D(Q), \mathcal{D} \subset D(P)$, y que $\mathcal{D}$ es invariante bajo $U_s, V_t$. Por el teorema

[16]Simon y Reed $[S-R]$, teorema VIII.8.

de Stone $P$ y $Q$ son esencialmente autoadjuntos en $\mathcal{D}$. Sea $\psi \in \mathcal{D}$, como $U_t\psi$ está también en $\mathcal{D}$, podemos derivar ambos miembros de la igualdad

$$U_t V_s = e^{its} V_s U_t$$

con respecto a $s$. Poniendo $s = 0$, obtenemos

$$U_t Q U_{-t} \psi = (Q - ti)\,\psi \tag{A2.1}$$

Dado que esta relaciíon es cierta en $\mathcal{D}$, el cual es un *esencia* de $Q$ y de $Q - tI$, concluimos que $Q$ y $Q - tI$ son unitariamente equivalentes y A2.1 se cumple para todo $\psi \in D(Q)$. Ahora, sea $\{E_\Omega\}$ la familia espectral de $Q$. Entonces $\{U_t E_\Omega U_{-t}\}$ es una familia espectral para $U_t Q U_{-t}$. Dado que $E_\Omega = \chi_\Omega(Q)$, $(A2.1)$ implica que

$$U_t E_{(-\infty,x)} U_{-t} = E_{(-\infty,x+t)} \tag{A2.2}$$

para todo $x$ y $t$ en $\mathbb{R}$.

Sea $D_- = Ran E_{(-\infty,0]}$. Mostraremos que $D_-$ es un subespacio *entrante* para $U_t$ en $\mathcal{H}$. Primeramente, $(A2.2)$ implica que $U_t D_- = Ran E_{(-\infty,x+t]}$ para todo $t$. Así,
(i) $U_t D_- \subset D_-, t \leq 0$;
(ii) $\cap_t U_t D_- = \{0\}$;
(iii) $\overline{\cup_t U_t D_-} = \mathcal{H}$;
por las propiedades usuales de las proyecciones. Tenemos así[17], que existe un espacio de Hilbert auxiliar $\mathcal{N}$ y un operador unitario $\Gamma_-$ de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R};\mathcal{N})$ tal que $\Gamma_- D_- = \mathcal{L}^2(-\infty,0;\mathcal{N})$ y $\Gamma_- U_t \Gamma_-^{-1}$ es una traslación a la derecha en $t$ unidades. Finalmente, dado que $\Gamma_- E_{(-\infty,0)} \Gamma_-^{-1} \chi_{(-\infty,0)}$, $(A2.2)$ implica que $\Gamma_- E_{(-\infty,x)} \Gamma_-^{-1} = \chi_{(-\infty,x)}$ para toda $x$. Por tanto, $\Gamma_- Q \Gamma_-^{-1}$ es una multiplicación por $x$ y $\Gamma_- e^{-iQs} \Gamma_-^{-1}$ es igual a una multiplicación por $e^{-isx}$. ■

[17]Simon y Reed op. cit. teorema XI.82.

# Apendice 3

# Teorema de representación de derivaciones de álgebras de von Neumann.

En este apéndice, se da una caracterización para los operadores derivación que se utiliza ampliamente en la demostración del teorema de principal de esta tesis. Primeramente, damos la definición de estos operadores.

**Definición:** Un álgebra de von Neumann $A$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $A = A''$.

Un álgebra $A$ de von Neumann tal que $T^* \in A$ siempre que $T \in A$ se llama $*-$álgebra.

En particular $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un álgebra de von Neumann.

**Definición:** Una derivación $\delta$ de un álgebra de von Neumann $A$ es un operador lineal de una *-subálgebra $D(\delta)$, el dominio de $\delta$, en $U$ con las siguientes propiedades

(i) $\delta(A)^* = \delta(A^*), A \in D(\delta)$,

(ii) $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B), A, B \in D(\delta)$.

**Teorema:** *Sea $\mathcal{A}$ un algebra de von Neuman y $\delta$ una derivación de $\mathcal{A}$. Entonces existe un $T_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\|T_0\| \leq \delta$ y $\delta\ (T) = [T_0, T]$ para todo $T \in \mathcal{A}$.*

**Demostración:** 1º Sea $\mathcal{U}$ el grupo de los operadores unitarios en $\mathcal{A}$. Para $U \in \mathcal{U}$, definimos la aplicación $A_U : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ por

$$A_U(T) = (UT + \delta\ (U))\, U^{-1}.$$

Si $U, V \in \mathcal{U}$, tenemos

$$\begin{aligned} A_U A_V(T) &= \left[U(VT + \delta(V))\, V^{-1} + \delta(U)\right] U^{-1} \\ &= UVTV^{-1}U^{-1} + U\delta(V)\, V^{-1}U^{-1} + \delta(U)\, U^{-1} \\ &= (UVT + \delta(UV))\, V^{-1}U^{-1}, \end{aligned}$$

entonces

$$A_U A_V = A_{UV}$$

Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ que poseen las siguientes propiedades:
(i) $\mathcal{K}$ es no vacío, convexo y débil compacto;
(ii) $A_U(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ para todo $U \in \mathcal{U}$;
(iii) cada elemento de $\mathcal{K}$ tiene norma menor igual que $\|\delta\|$

Primeramente, $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Efectivamente, sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ el conjunto de $\delta(U)\, U^{-1}$ para $U \in \mathcal{U}$. Si $U, V \in \mathcal{U}$, tenemos

$$\begin{aligned} A_V\left(\delta(U)\, U^{-1}\right) &= \left(V\delta(U)\, U^{-1} + \delta(V)\right) V^{-1} \\ &= \delta(VU)\, U^{-1}V^{-1}, \end{aligned}$$

Así, $A_V(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Consecuentemente, la envolvente convexo debilmente cerrada de $\mathcal{M}$ es un elemento de $\mathcal{E}$. Si $(\mathcal{K}_i)$ es una familia totalmente ordenada de conjuntos $\mathcal{E}$, tenemos $\cap\mathcal{K}_i \in \mathcal{E}$. Por el lema de Zorn, existe en $\mathcal{E}$ un elemento minimal $\mathcal{K}_0$.

Supóngase que se ha probado que $\mathcal{K}_0$ se reduce a un solo punto $T_0$, en otras palabras $\mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_0 = \{0\}$ . Tenemos entonces, para cada $U \in \mathcal{U}$,

$$T_0 = A_U(T_0) = UT_0U^{-1} + \delta(U)\, U^{-1}$$

por tanto $\delta(U) = [T_0, U]$ y por linealidad $\delta(T) = [T_0, U]$ para cada $T \in \mathcal{A}$. Nótese que $\mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_0$ es convexo y débil-compacto, y que

$$U(\mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_0)\, U^{-1} = \mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_0$$

para cada $U \in \mathcal{U}$, dado que

$$U(S - T)\, U^{-1} = A_U(S) - A_U(T)$$

para $S, T \in \mathcal{K}_0$.

$2^o$ Si $\mathcal{A}$ es el producto de álgebras de von Neumann $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, tenemos $\delta(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{A}_1$ y $\delta(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_2$[18], Podemos así, suponer que $\mathcal{A}$ es semi-finita o puramente infinita[19]. Si $\mathcal{A}$ es semi-finita, el conjunto de proyecciones $E$ de $\mathcal{A}$ tales que $\mathcal{A}_E$ es finita es un filtro creciente con supremo $I$[20]. Por lo tanto, es suficiente demostrar sólo el caso cuando $\mathcal{A}$ es finita y $\sigma$-finita[21].

$3^o$ Supóngase que $\mathcal{A}$ es finita y $\sigma$-finita, y sean $S, T \in \mathcal{K}_0$. Entonces, existe una traza finita, normal *confiable*[22] en $\mathcal{A}$; Esta traza define una norma $\|\cdot\|_2$ pre-Hilbert en $\mathcal{A}$. Sea $\alpha = \sup_{R \in \mathcal{K}_0} \|R\|_2 < +\infty$. Sea $H \subset \mathcal{K}_0$ el conjunto de $A_U\left(\frac{1}{2}(S+T)\right)$ para $U \in \mathcal{U}$; sea $H' \subset \mathcal{K}_0$ la componente convexa cerrada en la topología débil de $H$; por (i), $H$ es invariante bajo los $A_U$, entonces también lo es $H'$, entonces $H' = \mathcal{K}_0$ por la minimilidad de $\mathcal{K}_0$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un $R \in \mathcal{K}_0$ tal que $\alpha - \varepsilon < \|R\|_2$; como la norma $\|\|_2$ es semicontinua por abajo en la topología débil[23], existe un operador $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$\begin{aligned} \alpha - \varepsilon &< \left\| A_U\left(\frac{1}{2}(S+T)\right)\right\|_2 \\ &= \left\| \frac{1}{2}\left(A_U(S) + A_U(T)\right)\right\|_2 . \end{aligned}$$

Dado que $\|A_U(S)\|_2 \leq \alpha$ y $\|A_U(T)\|_2 \leq \alpha$ y $\|\cdot\|_2$ es una norma pre-Hilbert, existe un $U$ tal que

$$\begin{aligned} \|A_U(S) - A_U(T)\|_2 &= \left\| U(S-T)U^{-1}\right\|_2 \\ &= \|S-T\|_2 . \end{aligned}$$

Por tanto $S = T$.

$4^o$ Supóngase que $\mathcal{A}$ es puramente infinita y $\sigma$-finita, y sean $S, T \in \mathcal{K}_0$. Sea $f$ una forma lineal débil continua en $\mathcal{A}$. Sea $\alpha = \sup_{R \in \mathcal{K}_0} |f(R)| < \infty$. Argumentando exactamente como en $3^0$: para cada $\varepsilon > 0$, existe $U$ tal que

$$\alpha - \varepsilon \leq \left| \frac{1}{2}\left(f(A_U(S)) + f(A_U(T))\right)\right| ;$$

[18]Dixmier $[D]$, Von Neuman Algebras, Lema 2, Parte III, capítulo 9.

[19]Dixmier, op.cit. capítulo 6

[20]Dixmier, op.cit. cap.2,prop.5 y coro.1 de la prop.7

[21]Dixmier, op.cit. cap.9 lemas 5 y 6

[22]Una forma lineal $\Phi$ se llama confiable si $\Phi(T) = 0$ y $T \in \mathcal{A}^+$ implica que $T = 0$.

[23]Dixmier, op.cit. parte I capítulo 6, corolario de la proposición 2

como $f(A_U(S)) \leq \alpha$ y $f(A_U(T)) \leq \alpha$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$|f(A_U(S) - A_U(T))| = \left|f\left(U(S-T)U^{-1}\right)\right|$$

es suficientemente pequeño.

Si $\mathcal{K}_0 - \mathcal{K}_0 \neq 0$, podemos escoger $S, T \in \mathcal{K}_0$ es un elemento no cero del centro[24] de $\mathcal{A}$; entonces

$$U(S-T)U^{-1} = S - T$$

para todo $U \in \mathcal{U}$, y por lo demostrado en este párrafo tenemos que $f(S-T) = 0$. Por tanto $S - T = 0$, lo cual es una contradicción. ■

[24] Dixmier, op.cit. parte III,cap.8,coro.6 del teo.1

# Apendice 4

# Teorema de existencia de la medida de Haar.

Sea $X$ un grupo topológico, Hausdorff, localmente compacto. Una medida de Haar sobre $X$ es una medida de Borel $\mu$, no identicamente cero que es invariante por la izquierda y por la derecha:

$$\begin{aligned} \mu(xS) &= \mu(S) \\ \mu(Sx) &= \mu(S), \end{aligned}$$

para todo boreliano $S \subset X$ y para todo punto $x \in X$.

**Lema:** *Sea $G$, un abierto de Borel no vacío, fijo. Para un compacto no vacío $C$, considérese el conjunto de números naturales $n$, que tienen la propiedad de que existe una serie de puntos $x_1, \ldots, x_n$ tales que $C \subseteq \cup_1^n x_i G$. Dado que $C$ es compacto, este conjunto de enteros es no vacío. El símbolo $C : G$, designa el natural más pequeño de este conjunto con esta propiedad. Si $C = \emptyset$ diremos por definición que $C : G = \emptyset : G = 0$.*

*Podemos definir una función entera sobre $\mathcal{C} = \{C : C$ es compacto en $X\}$ en términos de un parámetro $G \neq \emptyset$ :*

$$C \to C : G$$

*Entonces $C \to C : G$ tiene las siguientes propiedades:*
*(i) Invarianza por la izquierda.*
*(ii) $C \to C : G$ es real ( de hecho natural) y monótona.*
*(iii) Subaditividad finita.*

*(iv) Aditividad débil en sentido finito.*

**Demostración:**(i) Invarianza por la izquierda:

$$(yC) : G = c : G$$

para todo $C \in \mathcal{C}$, $y \in X$.

Ya que $C \subseteq \cup_{i=1}^{n} x_i G$ si y sólo si $C \subseteq \cup_{i=1}^{n} (yx_i) G$

(ii) $C \to C : G$ es real ( de hecho natural) y monótona:

$$C_1 \supseteq C_2 \text{ implica } C_1 : G \geq C_2 : G$$

Esto se prueba, haciendo notar que si $C_1 \supseteq C_2 \neq \emptyset$ y $x_1, \ldots x_n$ es una serie tal que

$$C_1 \subset \cup_{i=1}^{n} x_i G$$

entonces,

$$C_2 \subset \cup_{i=1}^{n} x_i G$$

de modo que $n \geq C_2 : G$.

(iii) Subaditividad finita:

$$(C_1 \cup C_2) : G \leq C_1 : G + C_2 : G$$

puesto que si $\cup_{i=1}^{n_1} x_i G, \cup_{i=1}^{n_2} x_i G$, cubren respectivamente a $C_1, C_2$ donde $n_1 = C_1 : G, n_2 = C_2 : G$ entonces

$$(\cup_{i=1}^{n_1} x_i G) \cup (\cup_{i=1}^{n_2} x_i G)$$

cubre a $C_1 \cup C_2$ y por lo tanto

$$(C_1 \cup C_2) : G \leq n_1 + n_2.$$

(iv) Aditividad débil en sentido finito: Si $C_1 G^{-1} \cap C_2 G^{-1} = \emptyset$, entonces

$$(C_1 \cup C_2) : G = C_1 : G + C_2 : G.$$

En efecto, supongamos que $C_1 \cap xG \neq \emptyset, x \in C_2 G^{-1}$ entonces existen $c_1 \in C_1, g \in G$ tales que $c_1 = xg$, así $x = c_1 g^{-1} \in C_1 G^{-1}$. Similarmente, si $C_2 \cap xG \neq \emptyset, x \in C_2 G^{-1}$. Entonces, la hipótesis $C_1 G^{-1} \cap C_2 G^{-1} = \emptyset$, implica que para todo $x \in X$, al menos una de las intersecciones $C_1 \cap xG, C_2 \cap xG$

es vacía. Supongamos que $C_1, C_2$ son no vacíos y $C_1G^{-1} \cap C_2G^{-1} = \emptyset$. Sea $(C_1 \cup C_2) : G = n$, entonces existen $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$C_1 \cup C_2 \subseteq \cup^n x_i G$$

Se sigue de la hipótesis, que existe un $k \in \mathbf{N}$,$1 \leq k \leq n$, tal que después de alguna permutación de los índices

$$C_1 \subseteq \cup_{i=1}^k x_i G, C_2 \subseteq \cup_{i=k}^n x_i G$$

entonces

$$(C_1 \cup C_2) : G = n = k + (n-k) \geq C_1 : G + C_2 : G.$$

Sea $A \in \mathcal{C}$ con interior no vacío. Para $C \in \mathcal{C}$, definimos $C : A = 0$ si $C = \emptyset$, y si $C \neq \emptyset, C : A$ es el mínimo natural $n$ para el cual existe una serie $x_1, \ldots, x_2$ tal que

$$C \subseteq \cup_1^n x_i A.$$

Sean $A$ un compacto con $int\,(A) \neq \emptyset, G \neq \emptyset, C$ un compacto:

$$C : G \leq (C : A)\,(A : G) \tag{A4.1}$$

Efectivamente, Supongamos que $C \neq \emptyset$. Si

$$C_1 \subseteq \cup_{i=1}^m x_i A, \;\; A \subseteq \cup_{i=1}^k y_j G,$$

entonces

$$\begin{aligned} C &\subseteq \cup_{i=1}^m x_i \left(\cup_{j=1}^n y_j G\right) \\ &= \cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^n (x_i y_j)\, G, \end{aligned}$$

de manera que

$$mn \geq C : G.$$

Consideremos $C : G$ como una función de dos variables:

$$(C, G) \to C : G$$

$C \in \mathcal{C}$, $\emptyset \neq G$, $G$ abierto de $X$.

Queremos una forma modificada de esta función, que sea acotada, considerada como una función de $G$, para $C$ fijo. Sea $A$ un compacto con interior no nulo. Definimos para $G \neq \emptyset$, la función $\lambda_G$ sobre $\mathcal{C}$ por la fórmula

$$\lambda_G(C) = \frac{C : G}{A : G}$$

por (A4.1)

$$0 \leq \lambda_G(C) \leq C : A$$

Así, para $C$ fijo (y $A$ fijo), $C : A$ es una cota superior de $\lambda_G(C)$ . Supongamos $A$ fijo para todas las funciones de la forma $\lambda_G(G)$ , entonces las variables son $G, C$. Para $G$ fijo $C \to \lambda_G(C), C \to C : A$, son las mismas funciones salvo un factor positivo, entonces $C \to \lambda_G(C)$ posee las mismas propiedades (i), (ii), (iii), (iv) establecidas para $C \to C : A$. ■

**Teorema:** *Todo grupo topológico Hausdorff localmente compacto posee una única medida de Haar regular.*

**Demostración:** Sea $X$ un grupo topológico, Hausdorff y localmente compacto. Sea $A \subset X$ un compacto con interior no vacío. A cada $C \in \mathcal{C}$ le asociamos un intervalo cerrado y acotado (por tanto compacto) $[0, C : A]$ . El espacio producto, es entonces compacto y Hausdorff:

$$\Phi = \Pi_{C \in \mathcal{C}} [0, C : A]$$

Es conveniente identificar un elemento $(x_i)$ de $\Phi$ con la función real $\phi$ definida en $\mathcal{C}$:

$$\phi(C) = x_i \in [0, C : A]$$

La proyección del espacio producto sobre el espacio factor $[0, C : A]$ , para $C$ dado, es

$$\phi \to \phi(C), (\phi \in \Phi)$$

así, esta función, de parámetro $C$, es real y continua (por la definición, la base de la topología producto está dada por estas proyecciones).

Sea $\mathcal{W}$ la base de $\mathcal{V}_e$ formada de las vecindades abiertas de Borel de la identidad $e$,del grupo $X$. Para $C \in \mathcal{C}, U \in \mathcal{W}$,

$$0 \leq \lambda_U(C) \leq C : A \tag{A4.2}$$

Entonces, cada $U \in \mathcal{W}$ determina el subconjunto no nulo de $\Phi$ :

$$\Omega(U) = \{\lambda_V : U \supseteq V \in \mathcal{W}\}$$

Sean $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{W}$. Entonces $\cap_1^n U_i \in \mathcal{W}$, y $\cap_1^n U_i \subseteq U_j$ $(j = 1, ..., n)$, así

$$\Omega(\cap_1^n U_i) \subseteq \cap_1^n \Omega(U_i).$$

Ya que para $U \in \mathcal{W}$, $\Omega(U)$ es no vacío ($\lambda_U \in \Omega(U)$) y

$$\cap_1^n \Omega(U_i) \supseteq \Omega(\cap_1^n U_i) \neq \emptyset.$$

Esto establece la propiedad de intersecciones finitas para la familia de subconjuntos de $\Phi$ : $\{\Omega(U)\}_{U \in \mathcal{W}}$. Dado que $\Phi$ es compacto,

$$\cap_{U \in \mathcal{W}} \overline{\Omega(U)} \neq \emptyset.$$

Así, existe $\lambda \in \cap_{U \in \mathcal{W}} \overline{\Omega(U)}$. Demostraremos etapa por etapa que $\lambda$ es una medida distinta de cero, que es invariante por la izquierda y siendo un elemento de $\Phi$, es una función real, no negativa sobre $\mathcal{C}$.

(i) $\lambda$ es monótona. En efecto, sean $C_1 \subseteq C_2$. Ya que $\phi \to \phi(C_2) - \phi(C_1)$ es continua,.

$$\Delta = \{\phi \in \Phi : \phi(C_1) \leq \phi(C_2)\}$$

es cerrado. para $U \in \mathcal{W}$, $\lambda_U$ es una función monótona sobre $\mathcal{C}$, entonces $\lambda_U \in \Delta$ . Dado que $U$ es un elemento cualquiera de $\mathcal{W}$, $\Omega(U) \subseteq \Delta$, entonces

$$\lambda \in \overline{\Omega(U)} \subseteq \Delta,$$

es decir,

$$\lambda(C_1) \leq \lambda(C_2).$$

Las demás propiedades de $\lambda$ serán establecidas por el mismo argumento de continuidad.

(ii) Para dos compactos dados $C_1, C_2$, el conjunto

$$\Delta = \{\phi \in \Phi : \phi(C_1 \cup C_2) \leq \phi(C_1) + \phi(C_2)\}$$

es cerrado (dado que $\phi \to \phi(C_1 \cup C_2) - \phi(C_1) - \phi(C_2)$ es continua). Para $U \in \mathcal{W}$, $\lambda_U$ es subaditiva en sentido finito, entonces $\lambda_U \in \Delta$. Así, $\Omega(U) \subseteq \Delta, \lambda \in \Omega(U)$, es decir,

$$\lambda(C_1 \cup C_2) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2).$$

(iii) Supongamos que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Existen vecindades $W_1, W_2$ de $C_1, C_2$ respectivamente, tales que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.Existe una vecindad $V_1$ de $e$ tal que $C_1 V_1 \subseteq W_1$, entonces existe una vecindad abierta de Borel $U_1$ de $e$ tal que $U_1^{-1} \subseteq V_1$, de suerte que

$$C_1 U_1^{-1} \subseteq C_1 V_1 \subseteq W_1.$$

De la misma manera, existe una vecindad abierta de Borel $U_2$ de $e$ tal que

$$C_2 U_2^{-1} \subseteq W_2.$$

$U = U_1 \cap U_2$ es una vecindad abierta de Borel de $e$, tal que $C_1 U^{-1} \subseteq W_1$, $C_2 U^{-1} \subseteq W_2$, así $C_1 U^{-1} \cap C_2 U^{-1} = \emptyset$.

Para la aditividad débil en sentido finito,

$$\lambda_U (C_1 + C_2) = \lambda_U (C_1) + \lambda_U (C_2).$$

El conjunto

$$\Delta = \{\phi \in \Phi : \phi (C_1 + C_2) = \phi (C_1) + \phi (C_2)\}$$

es cerrado, y hemos mostrado que existe $U \in \mathcal{W}$ tal que $\Omega (U) \subseteq \Delta$, así $\lambda \in \overline{\Omega (U)} \subseteq \Delta$, es decir

$$\lambda (C_1 + C_2) = \lambda (C_1) + \lambda (C_2).$$

(iv) $\Delta = \{\phi \in \Phi : \phi (A) = 1\}$ es cerrado. Para $U \in \mathcal{W}$,

$$\lambda_U (A) = \frac{A : U}{A : U} = 1,$$

entonces $\Omega (U) \subseteq \Delta, \lambda \in \overline{\Omega (U)} \subseteq \Delta$, es decir,

$$\lambda (A) = 1,$$

en particular, $\lambda$ no es identicamente cero.

(v) Dado $C$ y $x \in X$, el conjunto

$$\Delta = \{\phi \in \Phi : \phi (xC) = \phi (C)\}$$

es cerrado. Para $U \in \mathcal{W}$, $\lambda_U$ es invariante por la derecha, entonces $\Omega (U) \subseteq \Delta, \lambda \in \overline{\Omega (U)} \subseteq \Delta$, es decir,

$$\lambda (xC) = \lambda (C).$$

$\lambda$ induce una medida de Borel $\mu$ regular. Dado que

$$\lambda(C) \leq \mu(C),$$

.$\mu$ no es identicamente cero. Por el teorema de invarianza, $\mu$ es invariante por la izquierda, es decir, $\mu$ es una medida regular de Haar. ■

Finalmente, establecemos sin demostración el siguiente teorema

**Teorema:** *Sea $G$ un grupo topológico localmente compacto. Existe un funcional $I$ en $\mathcal{C}_{00}^{+}$ tal que:*
*(i) $I(f)$ es real y positiva para $f \neq 0$.*
*(ii) $I(f+g) = I(f) + I(g)$ para toda $f, g \in \mathcal{C}_{00}^{+}$.*
*(iii) $I(\alpha f) = \alpha I(f)$ para $\alpha \geq 0$ y $f \in \mathcal{C}_{00}^{+}$.*
*(iv) $I(f_U) = I(f)$ para $U \in G$ y $f \in \mathcal{C}_{00}^{+}$, donde $f_U(X) = f(XU)$ para $U, X \in G$;similarmente $I({}_U f) = I(f)$ con ${}_U f(X) = f(UX)$.*

*Donde $\mathcal{C}_{00}$ y $\mathcal{C}_{00}^{+}$ son el conjunto de funciones de soporte compacto y el conjunto de funciones no negativas de soporte compacto en $G$ respectivamente. Al funcional $I$ se le conoce como integral de Haar en $\mathcal{C}_{00}^{+}$.*

# Apendice 5

# Productos tensoriales, sumas directas y trazas de operadores.

## Productos tensoriales de espacios de Hilbert.

Valiéndonos del teorema de construccion de Gelfand-Naimark-Segal del apéndice 1, podemos introducir el producto tensorial de espacios de Hilbert de la siguiente manera:

**Definición:** Sean $\mathcal{H}_i$, $1 \leq i \leq n$, espacios de Hilbert y sea $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_1 \times \cdots \times \mathcal{H}_n$ entonces la función

$$K(\underline{u}, \underline{v}) = \Pi_{i=1}^{n} \langle u_i, v_i \rangle, \underline{u} = (u_1, \ldots, u_n), \underline{v} = (v_1, \ldots v_n)$$

donde $u_i, v_i \in \mathcal{H}_i$ es un kernel en $\mathcal{H}'$. Considérese el par de Gelfand $(\mathcal{H}, \pi)$ asociado a $(\mathcal{H}', K)$ entonces $\mathcal{H}$ es llamado producto tensorial de $\mathcal{H}_i$, $i = 1, ..., n$. Escribimos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i, \\
\pi(\underline{u}) &= u_1 \otimes \cdots \otimes u_n = \bigotimes_{i=1}^{n} u_i
\end{aligned}$$

y llamamos a $\pi(\underline{u})$ el producto tensorial de los vectores $u_i$.

A continuación enunciamos algunas propiedades:

**Proposición:** *Sean $\mathcal{H}_i$, $1 \leq i \leq n$, espacios de Hilbert y sea $T_i$ un operador acotado en $\mathcal{H}_i$ para cada $i$ . Entonces, existe un operador $T$ único en $\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i$ que satisface:*

$$T \otimes_{i=1}^{n} u_i = \otimes_{i=1}^{n} T_i u_i \text{ para todo } u_i \in \mathcal{H}_i, 1 \leq i \leq n.$$

además $\|T\| = \Pi_i \|T_i\|$ .

**Proposición:** *Sea $\mathcal{H}_i$, $1 \leq i \leq n$ espacios de Hilbert y sean $S_i, T_i$ operadores acotados en $\mathcal{H}_i$ para cada $i$. Sean $S = \otimes_{i=1}^{n} S_i, T = \otimes_{i=1}^{n} T_i$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.*
*(i) La aplicación definida de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \times \cdots \times \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n)$, $(T_1, ..., T_n) \to T$ es multilineal;*
*(ii) $ST = \otimes_{i=1}^{n} S_i T_i, T^* = \otimes_{i=1}^{n} T^*$;*
*(iii) Si cada $T_i$ tiene una inverso acotado entonces $T$ tiene inverso acotado y $T^{-1} = \otimes_{i=1}^{n} T_i^{-1}$;*
*(iv) $T$ es autoadjunto, unitario, normal, o proyección cuando cada uno de los $T_i$ es autoadjunto, unitario, normal o proyección;*
*(v) $T$ es positivo si cada $T_i$ es positivo;*
*(vi) Si $T_i = | u_i\rangle\langle v_i |$ donde $u_i, v_i \in \mathcal{H}_i$ para cada $i$ entonces*

$$T = | u_1 \otimes \cdots \otimes u_n\rangle\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_n | .$$

# Sumas directas de operadores

**Definición:** *Sea $T_j$ un operador autoadjunto en $\mathcal{H}_j$, $j = 1, 2, ...$ En el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \oplus \mathcal{H}_j$ definimos*

$$D(T) = \left\{ u \mid u = \bigoplus_j u_j, u_j \in D(T_j), \sum_j \|T_j u_j\| < \infty \right\} \subset \mathcal{H},$$

$$T \bigoplus_j u_j := \bigoplus_j T_j u_j.$$

**Proposición:** *Sea $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n), n = 1, 2, ...,$ donde $\{\mathcal{H}_n\}$ es una sucesión de espacios de Hilbert. Suponga que $sup_n \|A_n\| < \infty$. Entonces existe un único operador $A = \oplus_n A_n$ en $\mathcal{H} = \oplus_n \mathcal{H}_n$ que satisface*

$$A \oplus_n u_n = \oplus_n A_n u_n;$$

*además*
$$\|A\| = \sup_n \|A_n\|.$$
*Si* $\{A_n\}, \{B_n\}$ *son dos sucesiones de operadores tales que* $A_n, B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ *para cada* $n$ *y* $\sup_n (\|A_n\| + \|B_n\|) < \infty$ *entonces sus sumas directas* $A = \oplus_n A_n$ *y* $B = \oplus_n B_n$ *satisfacen lo siguiente:*

*(i)* $A + B = \oplus_n (A_n + B_n)$, $AB = \oplus_n A_n B_n$, $A^* = \oplus_n A_n^*$;

*(ii) Si cada* $A_n$ *tiene un inverso acotado y* $\sup \|A_n^{-1}\| < \infty$ *entonces* $A$ *tiene un inverso acotado y* $A^{-1} = \oplus_n A_n^{-1}$;

*(iii)* $A$ *es autoadjunto , normal, unitario, positivo o proyección de cuando cada* $A_n$ *tiene las mismas propiedades.*

*(iv) Si* $A$ *es de la clase de traza*[25] *entonces cada* $A_n$ *es de la clase de traza y* $\|A\|_1 = \sum_n \|A_n\|_1$, $trA = \sum_n trA$.

## Traza de operadores, principales propiedades.

**Definición:** *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert separable,* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una base ortonormal. Entonces, para cada operador positivo* $A$ *definimos* $trA = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle$. *El número* $trA$ *es llamado traza de* $A$ *y es independiente de la base escogida.*

**Lema:** *La traza tiene las siguientes propiedades:*

*(a)* $tr(A + B) = trA + trB$.

*(b)* $tr(\lambda A) = \lambda trA$ *para todo* $\lambda \geq 0$.

*(c)* $tr(UAU^{-1}) = trA$ *para cualquier operador unitario* $U$.

*(d) Si* $0 \leq A \leq B$, *entonces* $trA \leq trB$.

**Demostración:** Dada una base ortogonal $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, definimos $tr_{\varphi}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle$. Si $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$es otra base ortonormal entonces

$$\begin{aligned} tr_{\varphi}(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi_n, A\varphi_n \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\| A^{\frac{1}{2}}\varphi_n \right\|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \left| \left\langle \psi_m, A^{\frac{1}{2}}\varphi_n \right\rangle \right|^2 \right) \end{aligned}$$

[25] Ver la siguiente sección del apéndice.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle A\psi_m,\varphi_n\rangle\right|^2\right)\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left\|A^{\frac{1}{2}}\psi_m\right\|^2\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\langle\psi_m, A\psi_m\rangle\\
&= tr_{\psi}(A)
\end{aligned}
$$

Dado que todos los términos son positivos, el intercambio de las sumas está permitido. Las propiedades (a), (b) se siguen facilmente de la linealidad del producto interior (d), también es inmediata, para ver (c) notamos que si $\{\varphi_n\}$ es una base ortonormal, también lo es $\{U\varphi_n\}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
tr\left(UAU^{-1}\right) &= tr_{(U\varphi)}\left(UAU^{-1}\right)\\
&= tr_{\varphi}(A)\\
&= tr(A).
\end{aligned}
$$

■

**Definición:** *Un operador $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es llamado de la clase de traza si y sólo si $tr\,|A|<\infty$. La familia de los operadores de la clase de traza se denota por $\mathcal{T}_1$.*

*$\mathcal{T}_1$ es un *-ideal bilateral en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, es decir: (i) $\mathcal{T}_1$ es un espacio vectorial; (ii) Si $A\in\mathcal{T}_1$ y $B\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$; entonces $AB\in\mathcal{T}_1, BA\in\mathcal{T}_1$; (iii) Si $A\in\mathcal{T}_1$, entonces $A^*\in\mathcal{T}_1$.*

*Un elemento $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tiene rango finito $n$ si $\dim(T)=n<\infty$. Se denota por $\mathcal{T}_0$ al conjunto de todos los operadores de rango finito. $\mathcal{T}_0$ es un *-ideal bilateral.*

*Un elemento $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ se llama operador compacto si para toda sucesión $\{u_n\}$ de vectores unitarios en $\mathcal{H}$, $\{Tu_n\}$ tiene una subsucesión convergente. Denotamos por $\mathcal{T}_\infty$ el conjunto de operadores compactos. $\mathcal{T}_\infty$ es también un *-ideal bilateral.*

**Teorema:** *(Schatten) Sea $\mathcal{H}$ cualquier espacio complejo de Hilbert separable. Para cualquier operador de la clase de traza $T$ y cualquier operador acotado $X$ en $\mathcal{H}$ sea $(T,X)=trTX$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

*(i) Con la norma $\|T\|_1=tr\,|T|$ el conjunto $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ de los operadores de la clase de traza en $\mathcal{H}$ es isométricamente isomorfo al dual del espacio de*

*Banach $\mathcal{T}_\infty$ de los operadores compactos en $\mathcal{H}$ con la norma de operadores bajo la correspondencia $T \to (T,\cdot)\mid_{\mathcal{T}_\infty(\mathcal{H})}$, $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$;*

*(ii) El espacio de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de los operadores acotados en $\mathcal{H}$ es isométricamente isomorfo al dual de $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ con la norma $\|\cdot\|_1$ bajo la correspondencia $X \to (\cdot, X)\mid_{\mathcal{T}_1(\mathcal{H})}, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

**Demostración:** El teorema es consecuencia directa de los siguientes lemas:

**Lema V.1:** *Sea $\lambda$ cualquier funcional acotada en el espacio de Banach $\mathcal{T}_\infty$. Entonces existe un $T \in \mathcal{T}_1$ único, tal que $\lambda(X) = trTX$ para todo $X$. Más aún*

$$\sup_{\substack{X\in\mathcal{T}_\infty(\mathcal{H})\\ \|X\|=1}} |\lambda(X)| = \|T\|_1$$

*donde $\|T\|_1 = \sup_{\substack{\|X\|=1\\ X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})}} |trTX|$. Conversamente, para todo $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ la transformación $X \to trTX$ es un funcional acotado en $\mathcal{T}_\infty(\mathcal{H})$.*

**Demostración:** Para cualesquiera $u, v \in \mathcal{H}$, $\mid u\rangle\langle v\mid \in \mathcal{T}_\infty$ y $B(u,v) = \lambda(\mid u\rangle\langle v\mid)$ es una forma sesquilineal que satisface

$$B(u,v) = \|\lambda\|\,\|u\|\,\|v\|.$$

Entonces existe un operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\begin{aligned}\lambda(\mid u\rangle\langle v\mid) &= \langle v, Tu\rangle \\ &= trT\mid u\rangle\langle v\mid \quad \text{para todo } u,v\in\mathcal{H}\end{aligned}$$

Considérese la descomposición normal $T = U|T|$ y escójase una base ortonormal $\{u_n\}$ en $R(|T|)$ tal que $v_j = Uu_j$ sea una base ortonormal en $R(T)$. Entonces para cada $n$ fijo, $\sum_{j=1}^{n} \mid u_j\rangle\langle v_j\mid = X_n$ es un operador de rango finito y norma uno y

$$\begin{aligned}\lambda(X_n) &= \sum_{j=1}^{n}\langle v_j, Tu_j\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle U^* v_j, |T|\,u_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n}\langle u_j, |T|\,u_j\rangle \leq \|\lambda\|.\end{aligned}$$

Escójase una base ortonormal de $N(|T|) = R(|T|)^{\perp}$, junte ésta con $\{u_n\}$ y constrúyase una base ortogonal $\{f_k\}$ en $\mathcal{H}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} \langle f_j, |T| f_j \rangle \leq \|\lambda\| .$$

Por la proposición 9.14 del libro de Parthasarathy [P2], $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$,

$$\|T\|_1 = \sum_{j=1}^{n} \langle f_j, |T| f_j \rangle \leq \|\lambda\|$$

y $\lambda(X) = trTX$ para todo $X$ en $\mathcal{T}_\infty(\mathcal{H})$. Por otra parte por la proposición 9.12 de la obra citada $\|\lambda\| \leq \|T\|_1$. Así, $\|\lambda\| = \|T\|_1$. ■

**Lema V.2:** *Sea $\lambda$ cualquier funcional acotado en el espacio de Banach $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ con $\|\cdot\|_1$. Entonces existe un operador único $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\lambda(T) = trTX$ para todo $T$ en $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ y $\|\lambda\| = \|X\|$. Recíprocamente, para todo $X$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la transformación $T \to trTX$ es un funcional lineal acotado en $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$.*

**Demostración:** Como en la prueba de la proposición anterior la transformación $(v, u) \to \lambda(|\, u\rangle\langle v\,|)$ es una forma sesquilineal acotada y por lo tanto existe un $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface

$$\lambda(|\, u\rangle\langle v\,|) = trX \mid u\rangle\langle v \mid .$$

Por la proposición 9.3 de [P2] cualquier $T \in \mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ puede ser expresada como

$$T = \sum_j s_j(T) \mid u_j\rangle\langle v_j \mid$$

donde $\sum s_j(T) < \infty$ y $\{u_j\}, \{v_j\}$ son conjuntos ortonormales. Entonces $\lambda(T) = trTX = trXT$. Más aún

$$|trXT| = \left| \sum_j s_j(T) \langle u_j, Xv_j \rangle \right| \leq \|X\| \|T\|_1.$$

Entonces, $\|\lambda\| \leq \|X\|$. Si $T = \mid u\rangle\langle v \mid$ donde $\|u\| = \|v\| = 1$ entonces $|trXT| = |\langle v, Xu\rangle|$ y $\|T\|_1 = 1$. Entonces

$$\sup_{\|T\|_1 = 1} |trXT| = \|X\|$$

y $\|\lambda\| = \|X\|$. ■

**LemaV.3:** *Sea $T$ que pertence a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces $T$ es combinación lineal de operadores unitarios.*

**Demostración:** Cada $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ puede escribirse de manera uníca de la forma $T = T_1 + iT_2$, donde $T_1, T_2$ son hermitianos. En efecto,

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ y } T_2 = \frac{i}{2}(T^* - T)$$

Considerando este hecho ahora es suficiente considerar el caso cuando $T$ es hermitiano tal que $\|T\| \leq 1$. En este caso $I - T^2 \geq 0$. Escribiendo

$$U = T + i\left(I - T^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

tenemos que $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ y

$$\begin{aligned} UU^* &= U^*U = \left(T + i\left(I - T^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(T - i\left(I - T^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= T^2 + I - T^2 = I \end{aligned}$$

así que $U$ es unitario. Más aún

$$T = \frac{1}{2}(U + U^*)$$ ■

# Bibliografía


[*A*] Alicki y Lendi, Quantum Dynamical Semigroups, Lectures Notes on Mathematical Physics.

[*Br*] Bratelli, PET, Jørgensen, A, Kishimoto, and D.W. Robinson, *A $C^*$-algebraic Schoenberg theorem, Ann. Inst. Fourier (Grenoble)34, 155-187, 1984.*

[*Ch*1]Chebotarev A.M. and Fagnola F., *On a remarkable quantum dynamical semigroup*, Lect. Notes Math.1613,1-16,1995.

[*Ch*2] Chebotarev, A.M., *The theory of conservative dynamical semigroups and its applications, preprint* MIEM, 1990.

[*Ch*3] Chebotarev, A.M. *Sufficient conditions of the conservatism of a minimal dynamical semigroup.* Math Notes, vol 52. N.4, pp112-127. 1992.

[*Ch-F*] Chebotarev, A.M. and Fagnola, F. *Sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups.* J.Funct: Anal. 118 (1993), pp.131-153.

[*Chr-E*] Christiansen E and Evans D.E. Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups, J. Funct.Anal. 118,131-153,1993.

[*Da*1] Davis, E.B. Quantum theory of open systems, Academic Press, 1976.

[*Da*2] E.B: Davis *Generators of dynamical Semigroups, J. Funct. Analysis 34, 421-432, 1979.*

[*D*] Dixmier, Von Neumann Algebras, North Holland Mathematical Library 1981.

[*E-L*] Evans D.E. and Lewis J.T, Dilations of irreversible evolutions in algebraic quantum theory. Comm. Dublin Inst. Ach. Stud. Ser. A 24,1997.

[*E*1] Emery M., *On Azema's martingales*,Sem. Prob.XXIII, Lect. Notes Math. 1372, 67-87, 1989.

[*E*2] Emery M., *Sur les martingales d'Azema*, Sem. Prob. XXIV,442-447,1990.

[*F-M*] Fagnola, F. y Monte, R. *Quantum extensions of semigroups generated*

*by Bessel Processes*, Math Notes Russian Acad. Sci. Vol 60, 389-401.
[*G*] García J.C., *Divergence criteria for random series related to the Azéma-Emery martingale process*, Math. Notes Russian Acad. Sci. 57, 361-368, 1995.
[*G-Q*] García, J.C.and Quezada, R., *On strong perturbations of covariant generators of quantum dynamical semigroups;* en memorias del IV Simposio de Probabilidad y procesos estocásticos, Aport. Mat. 12, 91-105, 1996.
[*G-K-S*] Gorini, V., Kossakowski, A., Sudarshan, E.C.G., *Completely positive dynamical semigroups of n-level systems,* J.Math.Phys.17,821-825,1976.
[*H*] A.S. Holevo, *On conservativity of covariant dynamical semigroups,* Rep. Math. Phys. ,33, pp 95-100, 1993.
[*H-P*] Hudson R.L. Parthasarathy K.R. Quantum Ito's formula and estochastic evolution Comm. Math Phys. 93,301-323, 1984.
[*P*2] Parthasarathy, K.R. An introduction to quantum stochastic calculus, Birkhäuser Verlag, 1992.
[*P*1] Parthasarathy, K.R. Azéma Martingales and quantum estochastic Calculus, Proc. R.C. Bose Symposium, 551-569
[*S-R*] Simon B.and Reed M. Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press 1980.
[*S*] Sunder, V.S., An invitation to Von Neumann Algebras. Academic press.
[*Ka*] Kato, T. Perturbation Theory for lineal operators, Springer Verlag 1980.
[*K*] Kraus, K. General estate changes in Quantum theory, Ann.Phys. 64,311-335.
[*L*] Lindblad 1976, *On the generators of quantum dinamical semigroups,* Comm. Math. Phys.48, 119-130, 1976
[*M*] Meyer, P.A., Quantum Probability for probabilists, Lecture Notes in Math 1338, 1993.
[*W*] Weidmann, J. Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer Verlag, 1980.
[*Y*] Yosida, Kôsaku, Functional Analysis, Springer-Verlag 1978.