Casa abierta al tiempo

TEORIA ESPECTRAL DE ALGEBRAS DE FUNCIONES HOLOMORFAS

TESIS QUE PRESENTA EL

M.C. GENARO ALMENDRA ARAO

PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

ABRIL DE 1995

UNIVERSIDAD AUTONOMA
METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

A MIS PADRES:
Epifania y Ezequiel

A MIS HERMANOS:
Aída, Miguel, José y Félix

A MI ESPOSA:
Francisca Esther

A MI HIJA:
Lizeth

AGRADECIMIENTOS

Deseo agradecerle al Dr. Antoni Wawrzyńczyk su estímulo y apoyo durante el desarrollo del presente trabajo.

También deseo darle las gracias a los miembros del Jurado:

Dr. Hugo Arizmendi
Dra. Shirley Bromberg
Dr. Carlos Hernández
Dr. Andrzej Sołtysiak
Dr. Aleksander Strasburger
Dr. Antoni Wawrzyńczyk

México, D. F., abril de 1995.

Índice

1 INTRODUCCION 3

2 ESPACIOS $\mathcal{A}_p(\Omega)$. EJEMPLOS 7

3 SINTESIS ESPECTRAL 15

4 TEOREMA DE HÖRMANDER 23

5 COMPACTIFICACIONES 29

6 EL COESPECTRO EXTENDIDO 35

7 EL ESPECTRO COMBINADO 43

8 TEOREMA DE MAPEO ESPECTRAL 49

9 FUNCIONALES MULTIPLICATIVOS 57

10 BIBLIOGRAFIA 61

Capítulo 1

INTRODUCCION

En este trabajo se proponen y desarrollan nuevos conceptos y métodos en la teoría espectral de álgebras de funciones.

Estudiamos el coespectro extendido de ideales J de álgebras topológicas $\mathcal{A}_p$ de funciones analíticas con condiciones de crecimiento definidas en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, así como también el espectro combinado extendido de k-uplas de elementos del álgebra cociente $\mathcal{A}_p(\Omega)/J$.

Las álgebras de este tipo surgen en muchos casos como conjuntos de las transformadas de Fourier de funcionales continuos de espacios invariantes por traslación de funciones continuas sobre $\mathbb{R}^n$. El ejemplo más conocido se obtiene tomando el espacio $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$ de distribuciones con soporte compacto. Por el teorema de Paley-Wiener el conjunto de las transformadas de Fourier $(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)')^\wedge$ es exactamente el álgebra $\mathcal{A}_p(\mathbb{C}^n)$ para $p(z) = \log(1 + |z|) + |\mathrm{Im}\, z|$. De la misma manera comenzando con el espacio de funciones enteras $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ el conjunto $(\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)')^\wedge$ coincide con el álgebra $\mathcal{A}_p(\mathbb{C}^n)$ para $p(z) = |z|$.

En el sentido clásico el coespectro de un ideal $J \subset \mathcal{A}_p(\Omega)$ está definido como el conjunto de ceros comunes a los elementos de J, es decir

$$Z(J) = \{z \in \Omega | f(z) = 0, f \in J\}.$$

Lo más desilusionante es que el coespectro $Z(J)$ puede ser vacío para ideales propios J, como puede verse en capítulos 3, 6 y [35]. Recordemos sin embargo que lo mismo sucede para ideales del álgebra $C(\mathbb{C}^n)$

de todas las funciones continuas sobre $\mathbb{C}^n$, en este caso por el teorema de Gelfand y Kolmogoroff los ideales maximales de $C(\mathbb{C}^n)$ están parametrizados por los puntos de la compactificación de Stone-Čech $\beta\mathbb{C}^n$ de $\mathbb{C}^n$. El ideal J_z asociado a un punto $z \in \beta\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{C}^n$ está formado por funciones $f \in C(\mathbb{C}^n)$ tales que z es un punto de acumulación en $\beta\mathbb{C}^n$ del conjunto de ceros de f. En particular esto significa que cada uno de estos ideales contiene el espacio $C_0(\mathbb{C}^n)$ de todas las funciones continuas de soporte compacto, por consiguiente el conjunto de ceros comunes de J_z es vacío. Éste ejemplo sugiere que la compactificación de Stone-Čech puede ser también útil para nuestro propósito el cual es asociar a un ideal arbitrario $J \subset \mathcal{A}_p(\Omega)$ un conjunto no vacío que pueda jugar el rol del coespectro de J.

Lo nuevo es la adición de "puntos en infinito" al coespectro clásico, obteniendo de esta manera en capítulo 6 que el coespectro extendido $\zeta(J, C)$ de J en cualquier compactificación C de Ω es diferente del vacío si y solamente si J es un ideal propio de $\mathcal{A}_p(\Omega)$, también obtenemos que $Z(J) = \zeta(J, C) \cap \mathbb{C}^n$. Denotamos por $\zeta(J)$ el coespectro de J en la compactificación de Stone-Čech. Resulta que el coespectro $\zeta(J)$ determina completamente $\zeta(J, C)$ por proyección simple. Caracterizamos los puntos de $\zeta(J)$ como el conjunto de ceros comunes de las extensiones a $\beta\Omega$ de las funciones $\Omega \ni z \to f(z) \exp cp(z)$ para todo $c > 0$ y $f \in J$. También mostramos que todos los ideales maximales de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ son de la forma

$$J_z = \{f \in \mathcal{A}_p(\Omega) | z \in \zeta(f\mathcal{A}_p(\Omega))\}$$

para $z \in \beta\Omega$.

Nuestro interés en las álgebras de la forma $\mathcal{A}_p(\Omega)/J$ está motivado por el rol jugado por este tipo de álgebras en el análisis espectral de subespacios de funciones invariantes por traslación sobre $\mathbb{R}^n$. En particular si $V \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio invariante por traslación y cerrado, el anulador

$$V^\perp = \{T \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)' | T(f) = 0, f \in V\}$$

es un ideal y es isomorfo por medio de la transformada de Fourier a un ideal $J = (V^\perp)\hat{}$ del álgebra

$$\mathcal{A}_p(\mathbb{C}^n) = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n) | |f(z)| \leq A \exp(B(\log(1 + |z|) + |\operatorname{Im} z|))\},$$

mientras que el espacio dual V' es isomorfo al álgebra cociente $\mathcal{A}_p(\mathbb{C}^n)/J$. En este caso una función exponencial $e_z : \mathbb{R}^n \ni x \to \exp((z|x))$ pertenece a V si y sólo si $z \in Z(J)$. Usando la terminología tradicional: El análisis espectral se cumple en V si $Z(J) = \zeta(J) \cap \mathbb{C}^n$ es diferente del vacío, como se muestra en capítulo 3.

En capítulo 7 se define el espectro combinado extendido de una k-upla $[\mathcal{F}] = ([f_1], \ldots, [f_k]) \in (\mathcal{A}_p(\Omega)/J)^k$ en cualquier compactificación K de $\mathbb{C}^k$ y es denotado por $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$. Nuestra definición asegura que en $\mathbb{C}^k \setminus \sigma(\mathcal{F}, J, K)$ existe una resolvente generalizada, es decir, una k-upla de funciones $R_j(z, \mu)$ tales que

$$\sum_{j=1}^{k} R_j(z, \mu)(f_j(z) - \mu_j) - 1 \in J$$

para $\mu \in \mathbb{C}^k \setminus \sigma(\mathcal{F}, J, K)$. Además para cada $\lambda \in K \setminus \sigma(\mathcal{F}, J, K)$ existe una vecindad O de λ tal que el conjunto $\{R_j(\cdot, \mu) | \mu \in O \cap \mathbb{C}^k\}$ es acotado en $\mathcal{A}_p(\Omega)$. Obtenemos también que el espectro combinado $\sigma(\mathcal{F}, J)$ en la compactificación de Stone-Čech $\beta\mathbb{C}^k$ determina completamente el espectro en cualesquiera otras compactificaciones

$$\sigma(\mathcal{F}, J, K) = P_K \sigma(\mathcal{F}, J)$$

donde P_K es la proyección natural que deja invariantes los puntos de $\mathbb{C}^k$, $P_K : \beta\mathbb{C}^k \to K$.

Resulta que el espectro combinado no es vacío para ideales propios J ya que probamos que

$$\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J)$$

y

$$P_K \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J, K)$$

donde $\tilde{\mathcal{F}}$ es la única extensión a $\beta\Omega$ de la función

$$\mathcal{F} : \Omega \ni z \to (f_1(z), \ldots, f_k(z)) \in \beta\mathbb{C}^k.$$

En capítulo 8 demostramos que si $\mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ se tiene

$$\sigma(\mathcal{Z}, J) = \zeta(J)$$

donde $\mathcal{Z} = (f_1, \ldots, f_k)$ y $f_i(z) = z_i$ para toda i. También obtenemos que si K es el espacio proyectivo real o complejo, $\mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$ o $\mathbf{P}^k(\mathbb{C})$ obtenemos

$$P_K \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K).$$

En ambos casos el espectro combinado $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$ tiene la propiedad de mapeo espectral, es decir, para cada función polinomial $\mathcal{P} : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^m$ la cual se extiende a una función continua $\hat{\mathcal{P}} : \mathbf{P^k}(\mathbb{C}) \to \mathbf{P^m}(\mathbb{C})$ tenemos

$$\hat{\mathcal{P}}\sigma(\mathcal{F}, J, \mathbf{P^k}\mathbb{C}) = \sigma(\mathcal{P} \circ \mathcal{F}, J, \mathbf{P^m}\mathbb{C}).$$

La fórmula análoga para el espacio proyectivo real también es válida.

En el último capítulo mostramos que todos los funcionales multiplicativos sobre $\mathcal{A}_p(\Omega)$ son de la forma evaluación en un punto $z \in \Omega$.

Esto significa en particular que todos los funcionales multiplicativos son continuos.

Capítulo 2

ESPACIOS $\mathcal{A}_p(\Omega)$. EJEMPLOS

En el presente capítulo describimos los espacios $\mathcal{A}_p(\Omega)$ los cuales aparecieron por primera vez en un artículo de Hörmander [16]. Los espacios $\mathcal{A}_p(\Omega)$ están dotados de tres topologías que resultan equivalentes. Demostramos que los espacios $\mathcal{A}_p(\Omega)$ son álgebras topológicas y describimos sus espacios duales. También damos los ejemplos más importantes de estas álgebras.

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ y p una función plurisubarmónica no negativa que satisface

i) $\log(1+|z|)/p(z)$ es acotado sobre Ω.

ii) Existen $A, B, C, D > 0$ tales que para todo $z \in \Omega$ la condición $|z-w| < \exp(-Cp(z)-D)$ implica que $w \in \Omega$ y $p(w) \leq Ap(z)+B$.

Denotamos por $\mathcal{A}_p(\Omega)$ el espacio de funciones analíticas sobre Ω tales que existen A y B mayores que cero, que dependen de f y satisfacen

$$|f(z)| \leq A\exp(Bp(z)), \quad z \in \Omega.$$

Y por $\mathcal{A}_p^r(\Omega)$ el espacio de funciones analíticas sobre Ω con la norma

$$\|f\|_r = \sup_{\Omega} |f(z)|\exp(-rp(z)) < \infty$$

para $r > 0$.

En los espacios $\mathcal{A}_p(\Omega)$ definimos la topología del límite inductivo de los espacios normados $\mathcal{A}_p^r$. De esta manera los espacios $\mathcal{A}_p(\Omega)$ son álgebras topológicas, para ello basta ver que el producto $(f,g) \to f \cdot g$ es continuo, lo cual se demuestra usando el teorema de Mazur-Orlicz sobre la continuidad de aplicaciones bilineales.

En las álgebras topológicas $\mathcal{A}_p(\Omega)$ podemos definir otra topología por medio de una familia de seminormas definidas como sigue:

Sean $K = K(p)$ el conjunto de las funciones continuas $k > 0$ sobre Ω tales que

$$\lim_{z \to \partial\Omega} \exp c\, p(z)/k(z) = 0$$

para todo $c > 0$. Entonces para cada $k \in K(p)$

$$\|f\|_k = \sup_{\Omega}\{\mid f(z) \mid /k(z)\}$$

define una seminorma sobre $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

Un conjunto $S \subset \mathcal{A}_p(\Omega)$ es acotado si está contenido en algún $\mathcal{A}_p^r(\Omega)$ y es acotado en este espacio normado. También en [18] se encuentra el siguiente resultado; una sucesión $f_n \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ converge si y sólo si es acotada y converge casi uniformemente.

Una tercera topología se puede definir en los espacios $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

Para cada $s \geq 0$ sea

$$\mathcal{W}_p^s = L^2(\Omega, \exp(-s\, p(z))d\lambda^n(z))$$

es decir $\mathcal{W}_p^s$ es el espacio de funciones f de Ω en $\mathbb{C}$ medibles con respecto a la medida $\exp(-s\, p(z))d\lambda^n(z)$ y tales que

$$\|f\|_s' = \left(\int_\Omega \mid f(z) \mid^2 \exp(-s\, p(z))d\lambda^n(z)\right)^{1/2} < \infty.$$

En [34] se demuestra que la topología del límite directo de los espacios $\mathcal{A}_p \cap \mathcal{W}_p^s, \|\cdot\|_s'$ y la topología del límite inductivo de los espacios $\mathcal{A}_p^r, \|\cdot\|_r$ son equivalentes en $\mathcal{A}_p(\Omega)$. Y en [26] se demuestra que la topología del límite inductivo de los espacios $\mathcal{A}_p \cap \mathcal{W}_p^s, \|\cdot\|_s'$ y la topología definida por la familia de seminormas dadas anteriormente son equivalentes.

Así tenemos que el álgebra topológica $\mathcal{A}_p(\Omega)$ esta dotada de tres topologías las cuales resultan ser equivalentes.

Ahora podemos demostrar algunas consecuencias importantes de las condiciones i) y ii).

Primero es fácil ver que el espacio de todos los polinomios está contenido en $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

Enseguida demostramos que el álgebra $\mathcal{A}_p(\Omega)$ es cerrada bajo derivación.

Lema 2.0.1 *Si $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ entonces $\frac{\partial f}{\partial z_j} \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ para $j = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Si $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ existen $c_1, c_2 > 0$ tales que $|f(z)| \leq c_1 \exp c_2 p(z)$, luego de ii) si $| w - z | \leq \exp(-Cp(z) - D)$ entonces $|f(z)| \leq c_1 \exp(c_2(Ap(z) + B))$

Y por la desigualdad de Cauchy obtenemos

$$| \frac{\partial f(z)}{\partial z_j} | \leq c_1 \exp(c_2(Ap(z) + B) + Cp(z) + D)$$

por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial z_j} \in \mathcal{A}_p(\Omega)$.

■

El siguiente lema expresa los elementos de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ en términos de funciones de cuadrado integrable.

Lema 2.0.2 *Si f es holomorfa en Ω, entonces $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ si y sólo si existe $k > 0$ tal que*

$$\int_\Omega | f(z) |^2 \exp(-2kp(z)) d\lambda^n(z) < \infty$$

donde $d\lambda^n$ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}^n$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ entonces $|f(z)| \leq A_1 \exp A_2 p(z)$ y por i) existen

$B_1, B_2 > 0$ tales que

$$(1 + |z|)^{2n+1} \leq B_1 \exp B_2 p(z)$$

por lo tanto

$$\int_\Omega \mid f(z) \mid^2 \exp(-(2A_2 + B_2)p(z))d\lambda^n(z) \leq$$

$$B_1 \int_\Omega \frac{\mid f(z) \mid^2}{(1+|z|)^{2n+1}} \exp(-2A_2p(z))d\lambda^n(z) \leq$$

$$B_1A_1^2 \int_\Omega \frac{\exp(2A_2p(z))}{(1+|z|)^{2n+1}} \exp(-2A_2p(z))d\lambda^n(z) =$$

$$B_1A_1^2 \int_\Omega \frac{d\lambda^n(z)}{(1+|z|)^{2n+1}} < \infty.$$

Tomando $k = A_2 + \frac{B_2}{2}$ terminamos.
($\Leftarrow$) Nos basamos en [34].

Debemos mostrar que si f es holomorfa en Ω y existe $k > 0$ tal que

$$\int_\Omega \mid f(z) \mid^2 \exp(-2kp(z))d\lambda^n(z) < \infty$$

entonces $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$.

f holomorfa en Ω implica que para cada bola $B \subset \Omega$ con centro en z y radio $C\exp(-Dp(z))$ se tiene

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1}{\mathrm{vol}B} \int_B \mid f(w) \mid^2 d\lambda^n(w)$$

$$\mathrm{vol}B = \frac{\pi^n}{n!} C^{2n} \exp(-2nDp(z))$$

y

$$|f(z)|^2 \exp(-tp(z)) \leq \frac{n!}{\pi^n C^{2n}} \int_B \mid f(w) \mid^2 \exp((-t+2nD)p(z))d\lambda^n(w).$$

Ahora por ii) obtenemos

$$\frac{n!}{\pi^n C^{2n}} \int_B \mid f(w) \mid^2 \exp((-t+2nD)p(z))d\lambda^n(w) \leq$$

$$\frac{n!}{\pi^n C^{2n}} \int_B | f(w) |^2 \exp(-\frac{p(w)-B}{A}(t-2nD))d\lambda^n(w).$$

Si elegimos $t = 2(nD + kA)$ obtenemos

$$|f(z)|^2 \exp(-2(nD + kA)p(z)) \leq$$

$$\frac{n!}{\pi^n C^{2n}} \exp(2kB) \int_B | f(w) |^2 \exp(-2kp(w))d\lambda^n(w) =$$

$$\frac{M\, n!}{\pi^n C^{2n}} \exp(2kB)$$

donde

$$M = \int_B | f(w) |^2 \exp(-2kp(w))d\lambda^n(w)$$

por lo tanto $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$.

■

El próximo teorema nos describe los funcionales continuos de los espacios $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

Teorema 2.0.1 *Si $T \in (\mathcal{A}_p(\Omega))'$ y T continuo entonces existe una medida acotada μ sobre $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ y $k \in K$ tal que*

$$T(g) = \int_\Omega g(z)d\mu(z)/k(z), \qquad g \in \mathcal{A}_p(\Omega).$$

Demostración. Si $T \in (\mathcal{A}_p(\Omega))'$, entonces T es acotada en una vecindad de cero

$$N_k = \{g \in \mathcal{A}_p(\Omega) | \, |g(z)| \leq k(z) \text{ para todo } z \in \Omega\}$$

en $\mathcal{A}_p(\Omega)$, es decir existe $k \in K$ tal que para todo $g \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ con

$$\max_{z \in \Omega} |g(z)|/k(z) \leq 1$$

y se tiene $T(g) \leq 1$.

Consideremos el subespacio

$$V = \{f \in C_0(\Omega) | \text{existe} \quad g \in \mathcal{A}_p(\Omega) \quad \text{con} \quad f = \frac{g}{k}\}$$

y definamos la función

$$\psi : V \to \mathbb{C} \qquad \text{por} \quad \psi(f) = T(g)$$

ψ es lineal, demostremos que es acotada.
Si $\max_{z\in\Omega} |g(z)/k(z)| = B$, entonces $\max_{z\in\Omega} |\frac{g}{B}(z)/k(z)| = 1$ y $|T(g/B)| \leq 1$, $|T(g)| \leq B$ de donde

$$|\psi(f)| = |T(g)| \leq \max_{z\in\Omega} |g(z)/k(z)| = \max_{z\in\Omega} |f(z)| = \|f\|$$

por lo tanto por el teorema de Hahn-Banach ψ se puede extender como funcional acotado a todo el espacio $C_0(\Omega)$. Luego por el teorema de representación de Riesz existe una medida acotada μ sobre $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tal que

$$\psi(f) = \int_\Omega f(z) d\mu(z), \qquad f \in C_0(\Omega)$$

es decir

$$T(g) = \int_\Omega \frac{g(z)}{k(z)} d\mu(z), \qquad g \in \mathcal{A}_p(\Omega).$$

■

Enseguida describimos los ejemplos más importantes de álgebras topológicas de la forma $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

Ejemplo 2.0.1 *El álgebra $\mathcal{A}_p(\mathbb{D})$.*

Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$ y $p(z) = -\log(1 - |z|)$, es fácil ver que $p(z)$ satisface las condiciones i) y ii). Para mostrar que $p(z)$ es plurisubarmónica basta ver que

$$\triangle p(z) = \frac{\partial p(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial p(z)}{\partial y^2} \geq 0,$$

lo cual se hace directamente.

El álgebra $\mathcal{A}_p(\mathbb{D})$ es el conjunto de funciones holomorfas sobre $\mathbb{D}$ que satisfacen

$$|f(z)| \leq A(1 - |z|)^{-B}$$

para $A, B > 0$ dependiendo de f.

Esta álgebra contiene como subálgebra el espacio H^∞ de funciones holomorfas acotadas en $\mathbb{D}$ con multiplicación puntual.

Ejemplo 2.0.2

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía acotado y $p(z) = -\log\, d(z, \partial\Omega)$. Fácilmente puede verse que $p(z)$ satisface i) y ii). Y del Teorema 2.6.5 de la referencia [17] se tiene que $p(z)$ es plurisubarmónica.

Ejemplo 2.0.3 *El álgebra* $\mathcal{A}_p(\mathbb{C}^n)$.

Para $p(z) = \log(1 + |z|) + |\mathrm{Im}\, z|$, esta álgebra está descrita con detalle en Capítulo 3.

Ejemplo 2.0.4

Sea $p(z) = p(x + iy) = \max(x, 0) + |z|^q$. Fácilmente se demuestra que $p(z)$ satisface i) y ii). Para ver que $p(z)$ es plurisubarmónica basta calcular directamente que el Laplaciano $\triangle p(z) \geq 0$. El espacio $\mathcal{A}_p(\mathbb{C})$ es muy útil para dar importantes contraejemplos.

Capítulo 3

SINTESIS ESPECTRAL

El espectro $\mathrm{Sp}\, V$ de un subespacio invariante por traslación y cerrado de funciones suaves en $\mathbb{R}^n$ está definido como el conjunto de todas las funciones exponenciales contenidas en V. El espacio de todas las funciones de clase C^∞ sobre $\mathbb{R}^n$ será denotado por $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. En el caso de la recta real cada no trivial $V \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$ tiene espectro no trivial de acuerdo con el teorema de análisis espectral de L. Schwartz [24] y [9]. Para $n \geq 2$ un número de resultados positivos fueron obtenidos por Malgrange [19], Ehrenpreis [11] y [12], sin embargo, el análisis espectral falla en general. Los ejemplos de subespacios no triviales $V \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ cerrados e invariantes por traslación tales que $\mathrm{Sp}\, V = \emptyset$ fueron construidos por Gurevich en 1975 [15].

El espectro de un subespacio invariante coincide con el espectro de un álgebra topológica asociada en una forma natural a V. El espacio dual $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ puede ser identificado con el espacio de distribuciones con soporte compacto sobre $\mathbb{R}^n$ y tiene la estructura de un álgebra convolutiva. Si $V \subset \mathcal{E}$ es un subespacio lineal invariante por traslación entonces el anulador $V^\perp$ de V es un ideal en $\mathcal{E}'$:

$$V^\perp := \{T \in \mathcal{E}' | T(\varphi) = 0,\ \varphi \in V\}$$

y $\mathcal{A}_V := \mathcal{E}'/V^\perp$ es un álgebra unitaria abeliana. Si la topología en $\mathcal{E}'$ es elegida de manera apropiada entonces V y $\mathcal{A}_V$ son mutuamente duales y $\mathcal{A}_V$ es un álgebra abeliana bornológica. Se puede ver que cada funcional multiplicativo continuo sobre $\mathcal{A}_V$ está determinado de manera única por una función exponencial que pertenece a V. En otras palabras $\operatorname{Sp} V$ coincide con el espectro de $\mathcal{A}_V$. Los ejemplos de Gurevich corresponden a álgebras $\mathcal{A}_V$ que no tienen funcionales multiplicativos.

Definimos la topología en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones suaves sobre $\mathbb{R}^n$ por medio del sistema numerable de seminormas

$$P_n(f) = \sum_{|\alpha|\leq n, \|x\|\leq n} \max |D^\alpha f(x)|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma cartesiana en $\mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ y $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$

El espacio $(\mathcal{E}(\mathbb{R}^n), \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ es un espacio de Fréchet.

Denotamos por $\mathbb{E}$ el conjunto de las funciones exponenciales sobre $\mathbb{R}^n$, identificándolo con $\mathbb{C}^n$ por medio de la aplicación

$$\mathbb{C}^n \ni z \to e_z(\cdot) = \exp(-i < z, \cdot >) \in \mathbb{E}$$

Las traslaciones actuan sobre $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ de la siguiente forma

$$L_a f(x) := f(x-a).$$

L. Schwartz mostró en [23] el Teorema de Análisis Espectral el cual afirma que si $0 \neq V \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial cerrado e invariante bajo las traslaciones, entonces su espectro definido como $\operatorname{Sp} V := V \cap \mathbb{E}$, es diferente del vacío. También mostró que el espectro junto con las multiplicidades describe el espacio V. Si para todo $z \in \operatorname{Sp} V$ definimos la multiplicidad $m(z)$ como el mayor número natural k tal que la función $x^k \exp(-i < z, x >)$ pertenece a V, entonces el conjunto de parejas $(z, m(z))$ para $z \in \operatorname{Sp} V$ describe a V de manera única; y el espacio V es el subespacio vectorial cerrado e invariante que contiene a todas las funciones de forma $x^k \exp(-i < z, x >)$ para $z \in \operatorname{Sp} V$, $0 \leq k \leq m(z)$.

Enseguida veremos algunos casos positivos en esta dirección para $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$.

Para ello es necesario definir que las distribuciones del espacio $\mathcal{E}'$ actuan en $\mathcal{E}$ por medio de la convolución

$$T * f(x) := T(L_x \check{f}) = \check{T}(L_{-x} f)$$

donde $\check{f}(x) = f(-x)$ y $\check{T}(f) = T(\check{f})$.

El teorema de síntesis espectral en $\mathbb{R}^n$ se cumple en los siguientes casos particulares.

El teorema de Malgrange afirma que el conjunto de soluciones en $\mathbb{C}^\infty$ de la ecuación $T * f = 0$ para $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ está determinado univocamente por las soluciones de la forma $P(x_1, \ldots, x_n) \exp i(p|x), p \in \mathbb{R}$ donde P es un polinomio de n variables (Ver [19]).

Si un subespacio invariante por traslaciones y cerrado de funciones suaves es además invariante por rotación, el teorema de síntesis espectral es válido (Ver [6] y [9]).

El principio fundamental de Ehrenpreis afirma que el teorema de síntesis espectral se cumple para el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con coeficientes constantes:

$$D_1 f = D_2 f = \ldots = D_k f = 0 \qquad (\text{Ver}\,[12]).$$

Sin embargo en general el Teorema de Síntesis Espectral en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ no se cumple. Esto fué observado por Gurevich en 1975, en [15] demuestra que para todo $n > 1$ existe en $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ un subespacio cerrado, invariante, no trivial que no contiene ninguna función exponencial; para cada $n > 1$ existe un sistema de 6 distribuciones $T_1, \ldots, T_6$ tales que el espacio

$$V = \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) | T_1 * f = \ldots = T_6 * f = 0\}$$

no contiene ninguna exponencial.

El espacio dual $\mathcal{E}' = \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de distribuciones de soporte compacto, es un álgebra asociativa y conmutativa con unidad donde la multiplicación está dada por la convolución

$$(T * S)(\phi) := T_x \otimes S_y(\phi(x + y)).$$

La distribución delta de Dirac

$$\delta_0(f) := f(0)$$

es la unidad de esta álgebra.

Un espacio $V \subset \mathcal{E}$ es invariante con respecto a las traslaciones si y sólo si para todo $T \in \mathcal{E}'$ y $f \in V$ se tiene $T * f \in V$.

La transformada de Fourier de una distribución $T \in \mathcal{E}'$ está definida como

$$\hat{T}(z) := T(e_z), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

donde recordemos

$$e_z(x) = \exp(-i < z, x >)$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ z = (z_1, \ldots, z_n), < z, x >= \sum_j z_j x_j,\ z_j \in \mathbb{C},\ x_j \in \mathbb{R}.$$

Proposición 3.0.1 *El operador $\mathcal{F} : \mathcal{E}' \ni T \to \hat{T}$ es un isomorfismo de álgebras conmutativas.*

Demostración. $\mathcal{F}$ es 1-1: En efecto si $\mathcal{F}(T) \equiv 0$ entonces $\hat{T}(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$, es decir $T(e_z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$ y como el conjunto de las funciones exponenciales es denso en $\mathcal{E}$ obtenemos que $T \equiv 0$.

$\mathcal{F}$ es homomorfismo: En efecto

$$\mathcal{F}(S * T) = (S * T)\hat{} = \hat{S} \cdot \hat{T} = \mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}(T),$$

$\mathcal{F}$ es lineal

$$\mathcal{F}(\lambda S + T) = (\lambda S + T)\hat{} = \lambda \hat{S} + \hat{T} = \lambda \mathcal{F}(S) + \mathcal{F}(T).$$

■

Debido a que la transformada de Fourier es una aplicación inyectiva, la topología definida en $\mathcal{F}(\mathcal{E}') = \mathcal{A}_p$ por medio del sistema de seminormas $\|f\|_k$ (Ver capítulo 2) puede ser transportada al espacio $\mathcal{E}'$, obteniendo entonces $(\mathcal{E}')' = \mathcal{E}$ (Ver [12]).

Así los espacios $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son mutuamente duales y son espacios bornológicos.

La imagen del operador $\mathcal{F}$ está descrita por el Teorema de Paley-Wiener. El teorema de Paley-Wiener afirma que una función holomorfa

ϕ en $\mathbb{C}^n$ es elemento de $\mathcal{A}_p$ si y sólo si existen constantes $A, C, N \geq 0$ tales que

$$|\phi(z)| \leq A(1+|z|)^N \exp(C|\mathrm{Im}\, z|)$$

tomando

$$p(z) := \log(1+|z|) + |\mathrm{Im}\, z|$$

obtenemos que ϕ pertenece a $\mathcal{A}_p$ si y sólo si existen $A, N \geq 0$ tales que

$$|\phi(z)| \leq A\exp(Np(z)).$$

De tal manera la imagen $\mathcal{F}(\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n))$ es exactamente el álgebra $\mathcal{A}_p(\mathbb{C}^n)$.

El operador $\mathcal{F}$ es también un homeomorfismo si el espacio $\mathcal{F}(\mathcal{E}')$ es provisto con la topología de $\mathcal{A}_p(\mathbb{C}^n)$.

El anulador del conjunto $A \subset \mathcal{E}$ está definido como

$$A^\perp = \{T \in \mathcal{E}' | T(f) = 0, f \in A\}.$$

Si $V \subset \mathcal{E}$ es un subespacio cerrado e invariante por traslación, entonces

$$V^\perp = \{T \in \mathcal{E}' | \check{T} * f = 0, f \in V\}.$$

En este caso $V^\perp$ es un ideal cerrado, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.0.2 *Si $V \subset \mathcal{E}$ es un subespacio vectorial cerrado e invariante por traslación, entonces $V^\perp$ es un ideal cerrado del álgebra $\mathcal{E}'$.*

Demostración. Si $S \in \mathcal{E}'$ y $T \in V^\perp$ entonces para todo $f \in V$

$$(S*T)\check{} * f(x) = \check{S} * \check{T} * f(x) = 0$$

por lo tanto $V^\perp$ es un ideal.

Para mostrar que $V^\perp$ es cerrado basta observar que

$$V^\perp = \{T \in \mathcal{E}' | T(f) = 0 \,\text{para todo}\, f \in V\}$$

$$= \cap_{f\in V}\{T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) | T(f) = 0\},$$

es decir $V^{\perp}$ se puede expresar como intersección de una familia de subespacios vectoriales cerrados y por tanto $V^{\perp}$ es cerrado.

■

Ahora como el operador $\mathcal{F}$ es un homeomorfismo obtenemos que el ideal $J_V := \widehat{(V^{\perp})}$ es cerrado en $\mathcal{A}_p$.

Si $A \subset \mathcal{E}$ es un subespacio vectorial entonces $A^{\perp\perp}$ es la clausura débil de A.

Podemos introducir un álgebra topológica abeliana asociada en forma natural con un subespacio invariante por traslaciones y cerrado $V \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, a saber el álgebra

$$\mathcal{A}_V := \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)/V^{\perp}.$$

Enseguida comparemos las propiedades espectrales del álgebra $\mathcal{A}_V$ con aquellas del espacio V. De acuerdo con la definición usual de espectro para algebras conmutativas, $\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}_V$ es el espacio de funcionales multiplicativos continuos sobre $\mathcal{A}_V$. Es fácil ver que cada funcional multiplicativo sobre $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ está dado por una función exponencial por medio de la fórmula

$$\varphi(T) = \hat{T}(\lambda) = T(\exp(-i < \lambda, \cdot >)).$$

Entonces a cada funcional multiplicativo sobre $\mathcal{A}_V$ le corresponde una exponencial que se anula sobre $V^{\perp}$. Aplicando el teorema de Hahn-Banach y el hecho que $V^{\perp\perp} = V$ obtenemos que

$$\exp(-i < \lambda, \cdot >) \in V.$$

Así el espectro de $\mathcal{A}_V$ coincide con el de V.

Si denotamos

$$\mathrm{Sp}\, V := \{z \in \mathbb{C}^n | e_z \in V\}$$

podemos mostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.0.3 *Sea V un subespacio cerrado e invariante por traslaciones de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $z_0 \in \mathrm{Sp}\, V$ si y sólo si los elementos del ideal J_V se anulan en z_0.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $z_0 \in \mathrm{Sp}\, V$ entonces $e_{z_0} \in V$ y por lo tanto para cada $T \in V^\perp$ tenemos que $\hat{T}(z_0) := T(e_{z_0}) = 0$.

($\Leftarrow$) Si para cada $\hat{T} \in (V^\perp)\hat{}$, $\hat{T}(z_0) = 0$ entonces $T(e_{z_0}) = 0$. Ahora usando que $(\mathcal{E}')' = \mathcal{E}$ obtenemos que $V^{\perp\perp} = V$, de esta manera el espacio V es igual a

$$V = \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) | T(f) = 0 \,\text{para todo}\, T \in V^\perp\}$$

por lo tanto podemos deducir que $e_{z_0} \in V$, es decir, $z_0 \in \mathrm{Sp}\, V$.

■

Para $n = 1$, podemos obtener una versión más fuerte de la proposición anterior, para ello daremos la siguiente.

Definición 3.0.1 *Sea $J \subset \mathcal{A}_p(\mathbb{C})$ un ideal y $z_0 \in \mathbb{C}$ un cero común a todos los elementos de J. Decimos que z_0 es cero de orden k para J si k es el mayor número natural tal que para toda $f \in J$*

$$f^{(1)}(z_0) = \cdots = f^{(k)}(z_0) = 0.$$

Teorema 3.0.2 *El ideal $J_V = (V^\perp)\hat{}$ tiene en z_0 cero de orden k si y sólo si $z_0 \in \mathrm{Sp}\, V$ y $m(z_0) = k$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Si $z_0 \in \mathrm{Sp}\, V$ entonces $e_{z_0} \in V$, por lo tanto para todo $\hat{T} \in (V^\perp)\hat{}$, $\hat{T}(z_0) := T(e_{z_0}) = 0$. Si $m(z_0) = k$, por la definición de $m(z_0)$ tenemos que k es el mayor número natural tal que $x^k e_{z_0}(x) \in V$; por otro lado de la teoría de distribuciones sabemos que para $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{T}^{(n)}(z_0) = T_x((-ix)^n e_{z_0}(x))$$

por lo tanto obtenemos que $\hat{T}^{(n)}(z_0) = 0$ para $0 \leq n \leq k$, es decir, z_0 es cero de orden k para J_V.

($\Rightarrow$) Si z_0 es cero de orden k para el ideal J_V, entonces por definición, para todo $\hat{T} \in J_V$, $\hat{T}(z_0) := T(e_{z_0}) = 0$ y puesto que

$$V = \{f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) | T(f) = 0 \,\text{para todo}\, T \in V^\perp\} \tag{3.1}$$

obtenemos que $e_{z_0} \in V$, es decir, $z_0 \in \mathrm{Sp}\, V$.

También si z_0 es cero de orden k para J_V, significa que k es el mayor número natural tal que para todo $\hat{T} \in J_V$, $\hat{T}^{(n)}(z_0) = 0$ para $1 \leq n \leq k$; y como sabemos que

$$\hat{T}^{(n)}(z_0) = T_x((-ix)^n e_{z_0}(x)),$$

por (3.1) obtenemos que k es el mayor número natural tal que $x^k e_{z_0}(x) \in V$, es decir, $k = m(z_0)$.

■

Capítulo 4

TEOREMA DE HÖRMANDER

Este capítulo está dedicado a presentar el teorema de Hörmander, el cual es el argumento fundamental usado para desarrollar el concepto de coespectro extendido y espectro combinado en álgebras $\mathcal{A}_p(\Omega)$. Tomaremos la demostración del artículo de Hörmander [16]. El teorema de Hörmander afirma que el ideal generado en $\mathcal{A}_p(\Omega)$ por la k-upla $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{A}_p(\Omega)^k$ es todo $\mathcal{A}_p(\Omega)$ si y sólo si

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(z)| > C \exp(-Dp(z)) \tag{4.1}$$

para convenientes $C, D > 0$ y para todo $z \in \Omega$.

Esto implica que para cada k-upla $\mathcal{F}$ la cual satisface la desigualdad (4.1) existe una k-upla $\mathcal{H} = (h_1, \ldots, h_k) \in \mathcal{A}_p(\Omega)^k$ tal que

$$\sum_{j=1}^{k} h_j f_j = 1.$$

Necesitaremos un teorema, que aparece en [34], que completa el teorema de Hörmander con información acerca de como las cotas de la k-upla $\mathcal{H}$ dependen de las constantes iniciales C, D en (4.1) y de los valores $\|\partial\mathcal{F}\|_r$ y $\|g\|'_s$, esto nos permitirá acotar las resolventes generalizadas $R(\mu)$ en capítulo 7.

Para presentar las ideas de la demostración del Teorema de Hörmander utilizaremos los espacios de formas diferenciales.

Para cada l, m números naturales y $t \geq 0$ denotamos por $L^l_m(t)$ el espacio de formas diferenciales de tipo $(0, m)$ con coeficientes en $\mathcal{W}^t_p$ y valuadas en $\Lambda^l\mathbb{C}^k$. Y por L^l_m la unión de todos los espacios $L^l_m(t)$ con respecto a t.

Los elementos de $L^l_m(t)$ se pueden escribir como

$$h = \sum_I h_I \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l} \tag{4.2}$$

donde las h_I son formas diferenciales de tipo $(0, m)$ con coeficientes en $\mathcal{W}^t_p$, I es un l-índice de la forma $I = (i_1, \ldots, i_l)$ y $(e_1, \ldots, e_k)$ es una base en $\mathbb{C}^k$. Definimos

$$\|h\|'_s = (\sum_I (\|h_I\|'_s)^2)^{1/2}$$

donde la suma se toma sobre el conjunto de índices i_j's con orden creciente.

Definimos el operador

$$\bar{\partial} : L^l_m \longrightarrow L^l_{m+1}$$

por

$$\bar{\partial} h = \sum_I \bar{\partial} h_I \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l}$$

para h dado por (4.2). El dominio de este operador está formado por los $h \in L^l_m$ tales que $\bar{\partial} h_I$ es elemento de $\mathcal{W}_p$ donde $\mathcal{W}_p := \cup_{t \geq 0} \mathcal{W}^t_p$.

Los espacios L^l_m con el operador $\bar{\partial}$ forman un complejo.

Lema 4.0.3 *Para cada $g \in L^l_{m+1}$ con $\bar{\partial} g = 0$ existe $f \in L^l_m$ tal que $\bar{\partial} f = g$.*

Para su demostración véase [16].

Dotamos a los espacios L^l_m de la estructura de doble complejo de la siguiente forma.

Dada una k-upla de elementos de $\mathcal{A}_p(\Omega)$, $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ definimos un operador lineal

$$\mathrm{P}_{\mathcal{F}} : L^{l+1}_m \rightarrow L^l_m$$

por $\mathrm{P}_{\mathcal{F}} L_m^0 = 0$ y

$$\mathrm{P}_{\mathcal{F}} h = \sum_I \left(\sum_{j=1}^{k} h_{Ij} f_j \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l} \right)$$

para $h \in L_m^{l+1}$ y $Ij = (i_1, \ldots, i_l, j)$. Es fácil ver que el operador $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$ satisface $\mathrm{P}^2{}_{\mathcal{F}} = 0$ y que $\bar{\partial}$ conmuta con $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$.

El doble complejo construido es

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & L_m^{l+2} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L_{m+1}^{l+2} & \longrightarrow \\
 & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{P}_{\mathcal{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{P}_{\mathcal{F}}} & \\
\longrightarrow & L_m^{l+1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L_{m+1}^{l+1} & \longrightarrow \\
 & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{P}_{\mathcal{F}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{P}_{\mathcal{F}}} & \\
\longrightarrow & L_m^{l} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L_{m+1}^{l} & \longrightarrow
\end{array}$$

El siguiente lema es análogo al lema 4.0.3 para el operador $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}$.

Lema 4.0.4 *Sean $\mathcal{F}$ que satisface (4.1), $g \in L_m^l$ y $\mathrm{P}_{\mathcal{F}} g = 0$, entonces existe $h \in L_m^{l+1}$ tal que $g = \mathrm{P}_{\mathcal{F}} h$, y $\bar{\partial} h \in L_{m+1}^{l+1}$ si $\bar{\partial} g = 0$.*

Demostración. Los elementos h_I de la solución h se pueden obtener explicitamente

$$h_I = \sum_{j=1}^{l+1} (-1)^{l+1-j} g_{I(j)} \bar{f}_{i_j} |\mathcal{F}|^{-2}$$

donde $|\mathcal{F}|^2 = \sum_{i=1}^{k} |f_i|^2$, $I = (i_1, \ldots, i_{l+1})$ y $I(j)$ es el l-índice que se obtiene de I eliminando i_j.

Se puede calcular directamente que $\mathrm{P}_{\mathcal{F}} h = g$.

Ahora veamos que $\bar{\partial} h \in L_{m+1}^{l+1}$.

$$\bar{\partial} h = \sum_I \bar{\partial} h_I \otimes e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_l}$$

$$\bar{\partial} h_I = \sum_{j=1}^{l+1} (-1)^{l+1-j} g_{I(j)} \bar{\partial}(\bar{f}_{i_j} |\mathcal{F}|^{-2})$$

ya que $\bar{\partial} g = 0$, de donde $\bar{\partial} h \in L^{l+1}_{m+1}$.

■

Teorema 4.0.3 *Sean $\mathcal{F}$ una k-upla que satisface (4.1), $g \in L^l_m$ tal que $\mathrm{P}_{\mathcal{F}} g = \bar{\partial} g = 0$, entonces la ecuación $\mathrm{P}_{\mathcal{F}} h = g$ tiene una solución $h \in L^{l+1}_m$ tal que $\bar{\partial} h = 0$.*

Demostración. Si $m > n$ o $l > k$ entonces $L^l_m = 0$ y el teorema es trivialmente válido. Supongamos que el teorema se cumple para $l+1, m+1$. Demostremos que se cumple para l, m.

Si $g \in L^l_m$ con $\bar{\partial} g = \mathrm{P}_{\mathcal{F}} g = 0$, por Lema 4.0.4 existe $h' \in L^{l+1}_m$ tal que $\mathrm{P}_{\mathcal{F}} h' = g$ y $\bar{\partial} h' \in L^{l+1}_{m+1}$.

Ya que $\bar{\partial}\bar{\partial} h' = 0$ y $\mathrm{P}_{\mathcal{F}} \bar{\partial} h' = \bar{\partial} \mathrm{P}_{\mathcal{F}} h' = \bar{\partial} g = 0$ la hipótesis de inducción implica que existe $h'' \in L^{l+2}_{m+1}$ tal que $\mathrm{P}_{\mathcal{F}} h'' = \bar{\partial} h'$ *y* $\bar{\partial} h'' = 0$.

Ahora por Lema 4.0.3 existe $h''' \in L^{l+2}_m$ tal que $\bar{\partial} h''' = h''$. Si $h = h' - \mathrm{P}_{\mathcal{F}} h'''$ obtenemos que

$$\bar{\partial} h = \bar{\partial} h' - \bar{\partial} \mathrm{P}_{\mathcal{F}} h''' =$$

$$\bar{\partial} h' - \mathrm{P}_{\mathcal{F}} \bar{\partial} h''' =$$

$$\bar{\partial} h' - \mathrm{P}_{\mathcal{F}} h'' = 0$$

y

$$\mathrm{P}_{\mathcal{F}} h = \mathrm{P}_{\mathcal{F}} h' - \mathrm{P}^2{}_{\mathcal{F}} h''' = \mathrm{P}_{\mathcal{F}} h' = g.$$

■

Teorema 4.0.4 *(Hörmander) Sea p una función plurisubarmónica no negativa en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ que satisface 2.i) y 2.ii). Entonces $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ generan $\mathcal{A}_p(\Omega)$ si y sólo si (4.1) es válido.*

Demostremos que Teorema 4.0.3 es equivalente a Teorema 4.0.4.

Proposición 4.0.4 *Son equivalentes Teorema 4.0.3 y Teorema 4.0.4.*

Demostración. Teorema 4.0.3 implica Teorema 4.0.4: Tomando $g(z) = 1$ para todo $z \in \Omega$, $l = 0$ y $m = 0$ en Teorema 4.0.3, obtenemos que existe $h \in L^1_0$ tal que $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}h = g$; es decir $\mathrm{P}_{\mathcal{F}}h = \sum_{j=1}^{k} h_j f_j = 1$ y como $h \in L^1_0$, por Lema 2.0.2 se tiene que $h_j \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ para $j = 1, \ldots, k$. Por lo tanto $f_1, \ldots, f_k$ generan $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

Teorema 4.0.4 implica Teorema 4.0.3: Si Teorema 4.0.4 se cumple entonces la k-upla $\mathcal{F}$ satisface (4.1) y por lo tanto también se cumple Lema 4.0.4, luego podemos realizar el mismo razonamiento por indución que en la demostración de Teorema 4.0.3.

■

Además del teorema de Hörmander, como comentamos en la introdución de éste capítulo, necesitaremos de una versión mas extensa de éste teorema la cual aparece en [34], también aquí se encuentran versiones mas explícitas de los lemas de Hörmander demostrados anteriormente.

Dada una k-upla $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{A}_p(\Omega)^k$ denotamos

$$\|\partial\mathcal{F}\|_r = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left\|\frac{\partial}{\partial z_i} f_j\right\|_r .$$

Teorema 4.0.5 *Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $s \geq 0$ existen $t, r \geq 0$ y un polinomio $W_{k,s}$ con coeficientes positivos tales que para cada $g \in \mathcal{A}_p(\Omega)^s$, cada k-upla $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p(\Omega)^k$ que satisface (4.1) y $\|\partial\mathcal{F}\|_r < \infty$ existen $h_j \in \mathcal{A}_p(\Omega)^t$ que cumplen*

$$\sum_{j=1}^{k} h_j f_j = g$$

y

$$\|h_j\|_t \leq \frac{1}{C} W_{k,s}\left(\frac{\|\partial\mathcal{F}\|_r}{C}\right)\|g\|_s.$$

Capítulo 5

COMPACTIFICACIONES

En la primera parte del presente capítulo caracterizaremos la compactificación de Stone-Čech demostrando que es única hasta homeomorfismo y en la segunda parte estableceremos una correspondencia uno a uno entre los puntos de la compactificación de Stone-Čech de un espacio topológico X y el conjunto de ideales maximales del espacio de funciones continuas sobre el espacio X.

Definición 5.0.2 *Un espacio compacto K se llama una compactificación de un espacio topológico X si existe una inyección $j : X \to K$ tal que $j(X)$ es denso en K.*

Definición 5.0.3 *Dos subconjuntos A y B de un espacio X se llaman completamente separados en X si existe una función continua f en $C(X)$ tal que $f(a) = 0$ para todo a en A y $f(b) = 1$ para todo $b \in B$.*

Definición 5.0.4 *Un espacio X es completamente regular si cada subconjunto cerrado F de X es completamente separado de cualquier punto x que no está en F y cada punto es cerrado.*

De aquí en adelante X será un espacio completamente regular.

Ahora enunciamos el teorema de Stone-Čech, para una demostración véase [30].

Teorema 5.0.6 *(Stone-Čech) Cada espacio completamente regular X tiene una compactificación βX tal que cualquier función continua de X valuada en un espacio compacto K se puede extender continuamente de manera única a βX.*

El siguiente corolario nos permitirá demostrar que la compactificación βX de un espacio X es "la mas grande" compactificación.

Corolario 5.0.1 *Cualquier compactificación de X es imagen continua de βX bajo una función que deja fijos los puntos de X.*

Demostración. Sea K una compactificación de X, entonces la inyección $i : X \to K$ la cual deja fijos los puntos de X, se puede extender $(\tilde{i})$ a βX por el teorema anterior. Ahora demostremos que $\tilde{i}$ es sobreyectiva. $\tilde{i}(\beta X)$ es cerrado, $X \subset \tilde{i}(\beta X) \subset K$ y X es denso en K, entonces $\tilde{i}(\beta X) = K$.

■

En el conjunto de las compactificaciones de un espacio topológico X podemos establecer un orden parcial de la siguiente manera, si K_1 y K_2 son dos compactificaciones de X, definimos $K_1 \prec K_2$ si y sólo si existe una función continua $g : K_2 \to K_1$ sobreyectiva que deja fijos los puntos de X.

Entonces el corolario anterior muestra que βX es un elemento maximal en el conjunto de las compactificaciones de X.

Definición 5.0.5 *Dado un espacio X a la compactificación βX se le llama compactificación de Stone-Čech.*

El siguiente corolario muestra que la compactificación de Stone-Čech es única hasta homeomorfismo.

Corolario 5.0.2 *Sea K una compactificación de X tal que cada función continua de X a un espacio compacto tiene una extensión a K, entonces K es homeomorfo a βX bajo un homeomorfismo que deja fijos los puntos de X.*

Demostración. La inyección de X en βX tiene una extensión f a K y la inyección de X en K tiene una extensión g a βX por el teorema anterior. Como $f \circ g|_X = 1_X$ y X es denso en βX tenemos que $f \circ g = 1_{\beta X}$. Análogamente $g \circ f = 1_{\beta X}$. Por lo tanto f y g son homeomorfismos dejando los puntos de X fijos y $f = g^{-1}$.

■

El siguiente teorema establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de la compactificación de Stone-Čech de un espacio topológico X y el conjunto de ideales maximales del espacio de funciones continuas sobre el espacio X, para una demostración véase [28].

Teorema 5.0.7 *(Gelfand-Kolmogoroff) Los ideales maximales de $C(X)$ (donde X es un espacio topológico) están en correspondencia uno a uno con los puntos de βX y está dada por*

$$M_z = \{f \in C(X) | z \in \overline{Z(f)}^{\beta X}\}$$

donde $z \in \beta X$ y $Z(f)$ denota el conjunto de ceros de la función f.

Corolario 5.0.3 *βX es homeomorfo al espacio de ideales maximales de $C(X)$.*

Demostración. Como el teorema de Gelfand-Kolmogoroff establece una correspondencia uno a uno, basta demostrar que para todo $S \subset \beta X$, $\overline{\tau(S)} = \tau(\bar{S})$ donde τ esta dado por

$$\beta X \ni z \xrightarrow{\tau} M_z \in \mathcal{M}(C(X)).$$

$\tau(\bar{S}) \subset \overline{\tau(S)}$: Si $z \in \bar{S}$, entonces cada elemento de $C(X)$ que se anula en S, se anula también en z. Entonces por la definición de la clausura en un espacio de ideales maximales

$$\overline{\tau(S)} = \cap\{\mathcal{C}(f) | f(\{S\}) = \{0\}\}$$

donde $\mathcal{C}(f)$ es el conjunto de ideales maximales que contienen a f, así obtenemos que $\tau(z) = M_z \in \overline{\tau(S)}$.

$\overline{\tau(S)} \subset \tau(\bar{S})$: Deseamos mostrar que si $M_z \in \overline{\tau(S)}$ entonces $z \in \bar{S}$. Supongamos que $z \notin \bar{S}$, entonces existe un elemento de $C(X)$ que se anula en S pero no en z, esto muestra que $\tau(z) = M_z \notin \overline{\tau(S)}$.

■

Ejemplo 5.0.5

Sean H^∞ el álgebra de Banach de funciones analíticas acotadas en el disco unitario abierto $\mathbb{D}$ y $\mathcal{M}(H^\infty)$ el conjunto de funcionales lineales multiplicativos sobre H^∞. El espacio $\mathcal{M}(H^\infty)$ es compacto en la topología de Gelfand (Ver [35]).

El operador ψ definido por

$$\mathbb{D} \xrightarrow{\psi} \mathcal{M}(H^\infty) \qquad \lambda \to \psi_\lambda$$

$$\psi_\lambda : H^\infty \to \mathbb{C} \qquad f \to f(\lambda)$$

es un homeomorfismo de $\mathbb{D}$ en $\psi(\mathbb{D})$, así podemos considerar a $\mathbb{D}$ como un subconjunto abierto de $\mathcal{M}(H^\infty)$.

Inmediatamente surge la pregunta ¿Es $\mathcal{M}(H^\infty)$ una compactificación del disco $\mathbb{D}$?. La respuesta es positiva y para ello necesitamos dos teoremas.

En el siguiente teorema daremos una condición necesaria y suficiente para que el disco unitario abierto $\mathbb{D}$ sea denso en $\mathcal{M}(H^\infty)$.

Teorema 5.0.8 *El disco unitario abierto $\mathbb{D}$ es denso en $\mathcal{M}(H^\infty)$ si y sólo si para cada familia $f_1, \ldots, f_n$ de funciones analíticas acotadas en $\mathbb{D}$ tales que*

$$|f_1(\lambda)| + \ldots + |f_n(\lambda)| \geq \delta > 0, \qquad |\lambda| < 1$$

existen funciones analíticas acotadas $g_1, \ldots, g_n$ tales que $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1$.

Demostración. $(\Leftarrow)$ Supongamos que $\bar{\mathbb{D}} \neq \mathcal{M}(H^\infty)$ entonces existe $\phi_0 \in \mathcal{M}(H^\infty)$ tal que $\phi_0 \notin \overline{\psi(\mathbb{D})} = \bar{\mathbb{D}}$, luego existe una vecindad $V(\phi_0; f_1, \ldots, f_n; \delta)$ de ϕ_0 que no intersecta a $\mathbb{D}$, recordemos que la base de vecindades de ϕ_0 está dada por los conjuntos de forma

$$V(\phi_0; f_1, \ldots, f_n; \delta) = \{\phi \in \mathcal{M}(H^\infty) | \, |\phi(f_j) - \phi_0(f_j)| < \delta; j = 1, \ldots, n\}.$$

Podemos tomar aquella vecindad para la cual $f_1, \ldots, f_n \in \operatorname{Ker} \phi_0$; así la vecindad de ϕ_0 que nos interesa esta dada por

$$V(\phi_0; f_1, \ldots, f_n; \delta) = \{\phi \in \mathcal{M}(H^\infty) | \, |\phi(f_j)| < \delta; j = 1, \ldots, n\}.$$

Como $\psi_\lambda \in \psi(\mathbb{D})$ entonces $\psi_\lambda \notin V(\phi_0; f_1, \ldots, f_n; \delta)$, así para todo $\lambda \in \mathbb{D}$

$$|\psi_\lambda(f_j)| = |f_j(\lambda)| \geq \delta$$

es decir $|f_1| + \ldots + |f_n| \geq \delta$ en $\mathbb{D}$.

Por otro lado $f_1, \ldots, f_n$ están en el ideal propio $\operatorname{Ker} \phi_0 \subset H^\infty$, esto implica que 1 no está en el ideal que ellos generan, por lo tanto no existen $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty$ tales que $f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1$.

($\Rightarrow$) Supongamos que $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$ tales que $|f_1(\lambda)| + \ldots + |f_n(\lambda)| \geq \delta > 0$, para $\lambda \in \mathbb{D}$ y que no existen $g_1, \ldots, g_n \in H^\infty$ tales que

$$f_1 g_1 + \ldots + f_n g_n = 1.$$

esto implica que el ideal generado por $f_1, \ldots, f_n$ es un ideal propio de H^∞ el que denotamos por $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = I$. Ahora escojemos $\phi_0 \in \mathcal{M}(H^\infty)$ tal que $\operatorname{Ker} \phi_0 = I$ y

$$\phi_0 : H^\infty \to \mathbb{C} \qquad g \to g + I$$

ϕ_0 definido de esta manera es un elemento de $\mathcal{M}(H^\infty)$. Veamos que $\phi_0 \notin \bar{\mathbb{D}}$. Consideremos la siguiente vecindad de ϕ_0

$$V(\phi_0; f_1, \ldots, f_n; \delta/n) = \{\phi \in \mathcal{M}(H^\infty) | \, |\phi(f_j) - \phi_0(f_j)| < \delta/n;$$

$$j = 1, \ldots, n\} = \{\phi \in \mathcal{M}(H^\infty) | \, |\phi(f_j)| < \delta/n; j = 1, \ldots, n\}.$$

V no intersecta a $\mathbb{D}$, porque si $\phi \in V \cap \mathbb{D}$ entonces ϕ es de la forma $\phi = \psi_\lambda$ y obtendríamos

$$|\phi(f_j)| = |\psi_\lambda(f_j)| = |f_j(\lambda)| < \delta/n; j = 1, \ldots, n.$$

es decir

$$|f_1(\lambda)| + \ldots + |f_n(\lambda)| < \delta$$

para $\lambda \in \mathbb{D}$ lo cual es una contradicción.

■

Enseguida enunciamos el Teorema de corona el cual apareció por primera vez en un artículo de L. Carleson en 1962 (Ver [8]).

Teorema 5.0.9 *(Teorema de corona) Si $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty$ tales que*

$$|f_1(\lambda)| + \ldots + |f_n(\lambda)| \geq \delta > 0, \qquad |\lambda| < 1$$

Entonces $f_1, \ldots, f_n$ generan H^∞.

Así usando los dos teoremas anteriores obtenemos inmediatamente que $\mathcal{M}(H^\infty)$ es una compactificación del disco $\mathbb{D}$.

Capítulo 6

EL COESPECTRO EXTENDIDO

En la primera parte del presente capítulo introducimos el nuevo concepto de coespectro extendido [1], el cual para cualquier ideal propio de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ resulta ser diferente del vacío, en contraste con el coespectro clásico. Presentamos una serie de resultados que nos permiten describir el coespectro extendido de un ideal propio J de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ como el conjunto de ceros de una familia de funciones asociadas a J y obtener el coespectro extendido de un ideal J en cualquier compactificación de Ω como proyección del coespectro extendido del ideal J en la compactificación de Stone-Čech.

En la segunda parte demostramos que todos los ideales maximales de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ son de la forma

$$J_z = \{f \in \mathcal{A}_p(\Omega) | \lim_{\Omega \ni w \to z} (f \exp(cp))(w) = 0, \text{ para todo } c > 0\}$$

para $z \in \beta\Omega$.

Con el objeto de dar en esta parte una exposición mas completa incorporamos resultados de [2].

Definición 6.0.6 *Para un ideal dado $J \subset \mathcal{A}_p(\Omega)$ y una compactificación C de Ω, denotamos por*

$$\rho(J, C) = \{z \in C | \exists f_j \in J, K > 0 \, y \, una \, vecindad \, O \, de \, z \, en \, C$$

$$tal\,que \sum_{j=1}^{k} |f_j(w)| \geq \exp(-Kp(w))\, para\, todo\, w \in \mathcal{O} \cap \Omega\}.$$

Los puntos que pertenecen a $\rho(J,C)$ los llamamos puntos regulares para J en C. El coespectro extendido de J en C denotado por $\zeta(J,C)$ es el complemento de $\rho(J,C)$. Denotamos por $Z(J)$ el coespectro clásico de J es decir el conjunto de ceros comunes a los elementos de J en Ω.

De la definición de coespectro extendido es obvio que
$Z(J) = \zeta(J,C) \cap \Omega$ para cualquier compactificación C de Ω.

El siguiente teorema afirma que el coespectro extendido de un ideal J en cualquier compactificación es diferente del vacío si y solamente si J es un ideal propio.

Teorema 6.0.10 *El conjunto $\zeta(J,C)$ es vacío si y sólo si $J = \mathcal{A}_p(\Omega)$.*

Demostración. Supongamos que $\rho(J,C) = C$. Por la definición, para cada $z \in C$ existe $\mathcal{O}(z)$, $k > 0$ y $f_j^z \in J$ tal que

$$\sum_{j=1}^{k_z} |f_j^z(w)| \geq \exp(-kp(w)), \quad w \in \mathcal{O}(z) \cap \Omega.$$

Por la compacidad de C podemos elegir una subcubierta finita $\{\mathcal{O}(z_i)\}_{i=1,\ldots,r}$ de la cubierta $\{\mathcal{O}(z)\}_{z\in C}$. Sean $\{f_j^{z_1}\},\ldots,\{f_j^{z_r}\}$ y $k_1,\ldots,k_r$ los correspondientes elementos de J y correspondientes constantes positivas. Tomando $c = \max\{k_1,\ldots,k_r\}$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_z} |f_j^{z_i}(z)| \geq \exp(-cp(z)), \quad z \in \Omega$$

Por teorema de Hörmander 4.0.4 las funciones $f_j^{z_1},\ldots,f_j^{z_r}$ generan $\mathcal{A}_p(\Omega)$, es decir $J = \mathcal{A}_p(\Omega)$.

La implicación inversa es inmediata por teorema de Hörmander.

■

En contraste al coespectro extendido $\zeta(J,C)$, el coespectro clásico $Z(J)$ puede ser vacío para ideales propios, como muestran el ejemplo encontrado por Gurevich desarrollado en capítulo 3, y también el siguiente

Ejemplo 6.0.6 [18]

Sean $\Omega = \mathbb{C}$ y $p(z) = p(x+iy) = \max(x,0) + |z|^q$ donde $0 \leq q < 1$, entonces si $f(z) = e^z$, $f \in \mathcal{A}_p(\mathbb{C})$. Por otro lado si $g(z) = e^{-z}$, $g \notin \mathcal{A}_p(\mathbb{C})$ puesto que en el eje real si $z = -t$, $t > 0$.

$$|g(z)|e^{-Ap(z)} = e^{t-A|t|^q} \to \infty \quad \text{cuando} \quad t \to \infty.$$

Por lo tanto el ideal principal $J_f = e^z\mathcal{A}_p(\mathbb{C})$ es un ideal propio y sin embargo su coespectro $Z(J_f)$ es vacío, porque $f(z) = e^z$ no se anula en ninguna parte.

La propiedad de la compactificación de Stone-Čech dada en Teorema 5.0.6 nos permite describir el coespectro extendido de un ideal J como el conjunto de ceros de una familia de funciones asociadas a J.

Teorema 6.0.11 *Sea J un ideal de $\mathcal{A}_p$. Entonces*

$$\zeta(J) = \{z \in \beta\Omega | (f\exp(cp))\tilde{}(z) = 0, \; para\, todo\, c > 0, f \in J\}.$$

Demostración. Si J es un ideal propio y $z \in \zeta(J)$ entonces por la definición del coespectro para cada $f \in J, \varepsilon > 0, c > 0, \mathcal{O}(z)$ existe $w \in \mathcal{O}(z)$ tal que

$$|f(w)|\exp(cp(w)) \leq \varepsilon$$

luego por la continuidad de la extensión obtenemos la afirmación. El inverso es obvio.

■

A su vez la descripción del coespectro extendido obtenida en el teorema anterior nos permite mostrar el siguiente

Teorema 6.0.12 *Sean I, J ideales propios de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ y sea $\mathcal{J}$ el ideal generado por I y J. Entonces*

$$\zeta(\mathcal{J}) = \zeta(I) \cap \zeta(J)$$

Demostración. Supongamos que $z \in \zeta(I) \cap \zeta(J)$. Para cada $f \in \mathcal{J}$ existe $g \in I$, $h \in J$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ tales que $f = \varphi g + \psi h$. Existen también constantes $a, b, c, d > 0$ para las cuales $|\varphi| \leq a \exp(bp)$ y $|\psi| \leq c \exp(dp)$. Para un arbitrario $\gamma > 0$ obtenemos

$$|f \exp(\gamma p)| \leq a|g| \exp((b+\gamma)p) + c|h| \exp((d+\gamma)p).$$

Ambos miembros de esta desigualdad son funciones continuas las cuales por Teorema 6.0.11 se extienden a funciones que se anulan en z, y por lo tanto $z \in \zeta(\mathcal{J})$. Así hemos probado que

$$\zeta(I) \cap \zeta(J) \subset \zeta(\mathcal{J}).$$

Puesto que $I \subset \mathcal{J}$ y $J \subset \mathcal{J}$ la contención opuesta es también válida. ■

Enseguida mostramos que el coespectro extendido en la compactificación de Stone-Čech $\zeta(J)$ de J determina completamente el coespectro extendido de J en otras compactificaciones.

Teorema 6.0.13 *Sean C una compactificación arbitraria de Ω y $P : \beta\Omega \to C$ la proyección que deja invariantes los puntos de Ω. Entonces para cada ideal $J \subset \mathcal{A}_p(\Omega)$*

$$P(\zeta(J)) = \zeta(J, C).$$

Demostración. Para demostrar que $P(\zeta(J)) \subset \zeta(J, C)$ probemos que $P(z) \in \rho(J, C)$ implica $z \in \rho(J)$. En efecto, si $\mathcal{O}(P(z)), f_j \in J, c > 0$ son tales que

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(w)| \geq \exp(-cp(w))$$

para $w \in \mathcal{O} \cap \Omega$, entonces $\mathcal{U} = P^{-1}(\mathcal{O}(P(z)))$ es la vecindad de z tal que la misma desigualdad es válida para los puntos de $\mathcal{U} \cap \Omega$. Esto significa que $P^{-1}(\rho(J, C)) \subset \rho(J)$, o equivalentemente $P(\zeta(J)) \subset \zeta(J, C)$.

Para probar la otra inclusión, supongamos que $z \in \zeta(J, C)$ pero $P^{-1}(z) \subset \rho(J)$ y obtengamos una contradicción.

Si $x \in P^{-1}(z)$ existen $f_j \in J$; $\varepsilon, c > 0$ tales que

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j(y)| \exp(cp(y)))\check{} > \varepsilon$$

en alguna vecindad de x. Puesto que $P^{-1}(z)$ es compacto podemos encontrar una N-upla $f_1, \ldots, f_N \in J$; $\varepsilon, c > 0$ tales que

$$(\sum_{i=1}^{N} |f_i| \exp(cp))\check{}(x) > \varepsilon$$

para todo $x \in P^{-1}(z)$.

Por otro lado si $z \in \zeta(J, C)$ entonces en cada vecindad $\mathcal{U}$ de z en C existe $z_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U} \bigcap \Omega$ tal que

$$(\sum_{i=1}^{N} |f_i(z_{\mathcal{U}})| \exp(cp(z_{\mathcal{U}})) \leq \varepsilon/2.$$

Por la compacidad de $\beta\Omega$ la sucesión generalizada $(z_{\mathcal{U}})$ tiene un punto de acumulación x el cual debe pertenecer a $P^{-1}(z)$ por la definición de la sucesión. Esto implica que

$$(\sum_{i=1}^{N} |f_i| \exp(cp))\check{}(x) \leq \varepsilon/2$$

lo cual es una contradicción.

■

IDEALES MAXIMALES DE $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

Primero mostremos que todo ideal maximal de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ es de la forma

$$J_z = \{f \in \mathcal{A}_p(\Omega) | (f \exp(cp))\check{}(z) = 0, \text{ para todo } c > 0\}$$

para $z \in \beta\Omega$.

Proposición 6.0.5 *Todos los ideales maximales de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ son de la forma J_z para algún $z \in \beta\Omega$.*

Demostración. Sea J un ideal maximal de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ entonces por Teorema 6.0.10, el coespectro extendido $\zeta(J)$ es diferente del vacío, así existe $z \in \zeta(J)$ y por Teorema 6.0.11 $J \subset J_z$. Ahora por la maximalidad del ideal J, tenemos que $J = J_z$.

■

De manera natural se tienen las siguientes preguntas:
1)¿Para cuales $z \in \beta\Omega$, se tiene $J_z \neq \{0\}$?
2)¿Para cuales $z \in \beta\Omega$, el ideal J_z es maximal?
3)Si J_z es maximal ¿Es válido $\zeta(J_z) = \{z\}$?

A las primeras dos preguntas no pudimos darles respuesta y la respuesta a la tercera pregunta es negativa.

Primero mostremos que 3) es equivalente a
3') Si $z, z' \in \beta\Omega$, $z \neq z'$ entonces $J_z \cap J_{z'}$ no es maximal.
Para ello es conveniente introducir la siguiente terminología.

Definición 6.0.7 *Decimos que una función $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ tiene cero fuerte en $z \in \beta\Omega$ si para todo $c > 0$*

$$\lim_{\Omega \ni w \to z} f(w) \exp c\,p(w) = 0.$$

Proposición 6.0.6 *3) si y sólo si 3').*

Demostración. 3) implica 3'): Si $\zeta(J_z) = \zeta(J_{z'})$ entonces $z = z'$.

3') implica 3): Sean $z, z' \in \beta\Omega$, $z \neq z'$ entonces $J_z \cap J_{z'}$ es diferente de J_z y de $J_{z'}$. Esto significa que existe al menos una función en $\mathcal{A}_p(\Omega)$ tal que tiene cero fuerte en z y no en z', así que $z' \notin \zeta(J_z)$. Esto significa que el coespectro extendido del ideal J_z, $\zeta(J_z)$ es el conjunto $\{z\}$.

■

Proposición 6.0.7 [2] *Sean (z_n) y (z'_n) dos sucesiones en Ω sin elementos comunes y sin puntos de acumulación en Ω. Supongamos que para cada $c > 0$, $|z_n - z'_n| \exp(cp(z_n)) \to 0$. Entonces para cada $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ y $b > 0$*

$$|f(z_n) - f(z'_n)| \exp(bp(z_n)) \to 0.$$

Demostración. Inmediatamente tenemos la desigualdad

$$|f(z_n) - f(z'_n)| \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial z_i}(tz_n + (1-t)z'_n)||z_{n_i} - z'_{n_i}|dt. \qquad (6.1)$$

Las derivadas parciales pertenecen a $\mathcal{A}_p(\Omega)$, entonces para apropiados $A, B > 0$ y para toda i

$$|\frac{\partial f}{\partial z_i}(w)| \leq A\exp(Bp(w)).$$

Por otro lado para n suficientemente grande los puntos z_n y z'_n satisfacen la condición.

$$|z_n - z'_n|\exp(c_1 p(z_n) + c_2) \leq 1$$

por lo tanto $p(tz_n + (1-t)z'_n) \leq c_3 p(z_n) + c_4$. La ecuación (6.1) implica que

$$|f(z_n) - f(z'_n)| \leq An^{1/2}\exp(B(c_3 p(z_n) + c_4))|z_n - z'_n|.$$

Después de multiplicar por $\exp(cp(z_n))$ obtenemos en el miembro derecho una sucesión que tiende a cero de acuerdo a las hipótesis sobre las sucesiones (z_n) y (z'_n).

■

Usando la proposición anterior, se construyen en [2], dos puntos $z, z' \in \beta\Omega$ tales que $z \neq z'$ y sin embargo $J_z = J_{z'}$, es decir no se cumple 3') y por lo tanto tampoco se cumple 3).

La construcción es como sigue:

Sean $Z = \{z_n\}$ y $Z' = \{z'_n\}$ dos sucesiones como en Proposición 6.0.7. Sea $\{\mathcal{U}\}$ un ultrafiltro de subconjuntos de Z con límite z, $\{\mathcal{U}'\}$ el ultrafiltro de subconjuntos de Z' que se forma substituyendo los z_n por z'_n y z' el límite de $\{\mathcal{U}'\}$.

Los conjuntos Z y Z' son cerrados y disjuntos en Ω por lo tanto sus cerraduras en $\beta\Omega$ son disjuntas. Y como $z \in \bar{Z}$ y $z' \in \bar{Z}'$ obtenemos $z \neq z'$.

Proposición 6.0.8 [2] *Bajo las anteriores suposiciones sobre Z y Z' tenemos que*

$$J_z = J_{z'}.$$

Demostración. Sigue de la Proposición 6.0.7 y de la construcción de los puntos z, z' que

$$\lim_{\Omega \ni w \to z} f(w) \exp\, c\, p(w) = 0$$

implica

$$\lim_{\Omega \ni w \to z'} f(w) \exp\, c\, p(w) = 0$$

esto significa que $J_z \subset J_{z'}$. Como se observó en la demostración de Proposición 6.0.7 $p(z'_n) \leq c_3 p(z_n) + c_4$ para n grande, lo que implica

$$|z_n - z'_n| \exp(cp(z'_n)) \leq |z_n - z'_n| \exp(c(c_3 p(z_n) + c_4)) \to 0$$

de donde $J_{z'} \subset J_z$.

■

De la desigualdad de la Proposición 6.0.7 se obtiene que las extensiones continuas de las funciones $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ a $\beta\Omega$ toman los mismos valores en z y z', demostrándose inmediatamente la

Proposición 6.0.9 [2] *Las funciones sobre $\beta\Omega$ y valuadas en la esfera de Riemann obtenidas como extensiones continuas de elementos de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ no separan los puntos de $\beta\Omega \setminus \Omega$.*

Recordemos que en [19] se demuestra que las extensiones de funciones enteras sobre $\mathbb{C}$ separan puntos de $\beta\mathbb{C}$.

Capítulo 7

EL ESPECTRO COMBINADO

Empezamos el capítulo demostrando que la invertibilidad de un elemento $[f] \in \mathcal{A}_p(\Omega)/J$ puede expresarse en términos del correspondiente coespectro. Enseguida definimos el concepto de espectro combinado de una k-upla $\mathcal{F}$ en cualquier compactificación K de $\mathbb{C}^k$(Ver [1]). Demostramos que para todos los puntos finitos en alguna vecindad de cada punto regular $\lambda \in K$ existe una resolvente generalizada $R(\mu)$ y el conjunto de todas las $R(\mu)_{\mu \in \mathcal{U}}$ es acotado.

Igual que en el caso del coespectro, el espectro combinado $\sigma(\mathcal{F}, J)$ determina completamente el espectro $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$ por proyección simple. Establecemos una relación entre el espectro combinado $\sigma(\mathcal{F}, J)$ y la imagen del coespectro extendido $\zeta(J)$ bajo la extensión continua $\tilde{\mathcal{F}}$.

Sea J un ideal del álgebra $\mathcal{A}_p(\Omega)$, la invertibilidad de un elemento $[f]$ del álgebra cociente $\mathcal{A}_p(\Omega)/J$ puede expresarse en términos de $\zeta(J)$, como lo indica el siguiente.

Teorema 7.0.14 *Sea $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$. Son equivalentes*
a) La clase $[f]$ es invertible en $\mathcal{A}_p(\Omega)/J$.
b) $\zeta(J_f) \cap \zeta(J) = \emptyset$.
c) $\exists\ c > 0$ tal que $(f \exp(cp))\tilde{}$ no se anula sobre $\zeta(J)$.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b). $[f]$ invertible implica existen $g \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ y $h \in J$ tales que $fg - 1 = h$. Por otro lado el ideal generado por f y J

es igual a $\mathcal{A}_p(\Omega)$, por lo tanto por Teorema 6.0.10 su coespectro es $\emptyset$ y por Teorema 6.0.12 es igual a $\zeta(J_f) \cap \zeta(J)$.

b) $\Rightarrow$ c). Supongamos que no se cumple c) es decir para todo $c > 0$, $(f\exp(cp))\check{}$ se anula sobre $\zeta(J)$. Sea A_c el conjunto compacto de ceros en $\zeta(J)$ de la función $(f\exp(cp))\check{}$. Claramente $c < d$ implica $A_d \subset A_c$. Luego como $\zeta(J)$ es compacto se tiene que $\cap_{c>0} A_c \neq \emptyset$, y por otro lado tenemos que $\cap_{c>0} A_c \subset \zeta(J_f) \cap \zeta(J)$, esto contradice b).

c) $\Rightarrow$ a). Si $[f]$ no es invertible en $\mathcal{A}_p(\Omega)/J$ esto significa que el ideal $\mathcal{J}$ generado por f y J no es trivial, y por tanto $\zeta(\mathcal{J}) \neq \emptyset$, si $z \in \zeta(\mathcal{J})$ tendríamos que para cada $c > 0$ la función $(f\exp(cp))\check{}$ se anula en z, esto contradice c).

■

Comparemos la situación con el modelo clásico del álgebra de Banach $C(X)$ de funciones continuas sobre un conjunto compacto X. Si J es un ideal cerrado de $C(X)$ y $\zeta(J)$ es el conjunto de ceros comunes a los elementos de J, entonces la invertibilidad de $[f]$ en $C(X)/J$ es equivalente a la condición que f no se anula sobre $\zeta(J)$ ó equivalentemente que $\zeta(J_f) \cap \zeta(J) = \emptyset$. En este caso el espectro de $[f]$ en el álgebra cociente coincide con el conjunto de valores de f sobre $\zeta(J)$. El conjunto $\zeta(J)$ juega el rol del espectro del álgebra cociente si éste espectro es definido como el conjunto de funcionales multiplicativos sobre $C(X)$.

Enseguida definimos el espectro combinado extendido de una k-upla $\mathcal{F}$ en una compactificación arbitraria K de $\mathbb{C}^k$.

Definición 7.0.8 *Denotamos por $\mathcal{F}$ una k-upla $(f_1, \ldots, f_k)$ de elementos de $\mathcal{A}_p(\Omega)$. Sea $\lambda \in K$. Decimos que λ es regular para $\mathcal{F}$ relativo a J si existen $c > 0, d > 0$ y una vecindad $\mathcal{O}(\lambda)$ de λ en K tal que para todo $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$ y $z \in \zeta(J)$*

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j| \exp(cp))\check{}(z) \geq d. \tag{7.1}$$

El conjunto de puntos regulares para $\mathcal{F}$ en K es denotado por $\rho(\mathcal{F}, J, K)$. $\rho(\mathcal{F}, J, K)$ es abierto en K. Su complemento lo llamamos el *espectro combinado* de $\mathcal{F}$ en K con respecto a J y es denotado por $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$. Denotamos por $\sigma(\mathcal{F}, J)$ (resp. $\rho(\mathcal{F}, J)$) el espectro (resp.

el conjunto de puntos regulares) de $\mathcal{F}$ en la compactificación de Stone-Čech $\beta\mathbb{C}^k$.

Observemos que los conjuntos $\rho(\mathcal{F}, J, K)$ y $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$ dependen solamente de las clases $[\mathcal{F}] = ([f_1], \ldots, [f_k])$, por lo tanto estamos tratando con una extensión del concepto de espectro combinado de una k-upla de elementos de $\mathcal{A}_p(\Omega)/J$.

En el siguiente teorema probaremos que para todos los puntos finitos $\mu's$ en alguna vecindad de cada punto regular $\lambda \in K$ existe una resolvente generalizada $R(\mu)$ y el conjunto de todas las $R(\mu)_{\mu \in \mathcal{U}}$ es acotado.

Teorema 7.0.15 *Sean $\lambda \in \rho(\mathcal{F}, J, K)$ y $\mathcal{O} \subset K$ una vecindad de λ en la cual la desigualdad (7.1) se cumple para algunos $c, d > 0$. Denotemos por $\mathcal{U} = \mathcal{O} \cap \mathbb{C}^k$. Entonces existen funciones $R_j(\cdot, \mu) \in \mathcal{A}_p(\Omega)$, $\mu \in \mathcal{U}$ tales que*

$$\sum_{j=1}^{k} (f_j - \mu_j) R_j(\cdot, \mu) - 1 \in J \tag{7.2}$$

para todo $\mu \in \mathcal{U}$.

Existen $r > 0, b > 0$ tales que $\|R_j(\cdot, \mu)\|_r \leq b$ para todo $\mu \in \mathcal{U}$.

Demostración. Si $z \notin \zeta(J)$ existe $g_z \in J$ y $c_z > 0$ tal que

$$|g_z(w)| > \exp(-c_z p(w))$$

para todo w en alguna vecindad de z en Ω.

Por hipótesis λ es regular para $\mathcal{F}$ por lo tanto existen $c > 0, d > 0$ tal que para todo $w \in \Omega \cap \zeta(J)$ se tiene

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(w) - \mu_j| \exp(cp(w)) \geq d.$$

Como $\beta\Omega$ es compacto podemos elegir un número finito de funciones $g_1, \ldots, g_m \in J$ tales que para un apropiado $c > 0$ y para todo $(w, \mu) \in \Omega \times \mathcal{U}$

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(w) - \mu_j| + \sum_{i=1}^{m} |g_i(w)| \geq \exp(-cp(w)).$$

Por Teorema 4.0.4 las funciones

$$\{f_j - \mu_j, g_i\}_{1\leq j\leq k, 1\leq i\leq m}$$

generan el álgebra $\mathcal{A}_p(\Omega)$. Entonces existen funciones $R_j \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ tales que

$$\sum_{j=1}^{k} R_j(w,\mu)(f_j(w)-\mu_j) + \sum_{j=k+1}^{k+m} R_j(w,\mu)g_{j-k}(w) = 1 \qquad (7.3)$$

puesto que la segunda suma es elemento de J obtenemos la fórmula (7.2). La segunda parte del teorema es consecuencia del Teorema 4.0.5.
■

Por la aplicación usual de una partición de la unidad podemos construir una resolvente global de clase $C^\infty(\Omega)$. Sin embargo la no unicidad de la resolvente hace difícil el estudio de sus propiedades globales.

La ecuación (7.3) nos permite formular la condición de regularidad de un punto en una forma ligeramente mas fuerte.

Corolario 7.0.4 *Sea K una compactificación de $\mathbb{C}^k$. Un punto $\lambda \in K$ es regular para $\mathcal{F}$ relativo a J si y sólo si existe una vecindad $\mathcal{O}(\lambda), d > 0, c > 0$ y una vecindad $\mathcal{U}$ de $\zeta(J)$ tal que (7.1) es válido para todo $z \in \mathcal{U}$ y para todo $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$.*

Demostración. Supongamos que λ satisface la definición 7.0.8. Puesto que $R_j(w,\mu) \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ existen $a > 0, c > 0$ tales que $\|R_j(\cdot,\mu)\| \leq a\exp(cp)$ para todo $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$.

Definamos

$$\mathcal{U} = \{z \in \beta\Omega | (a\exp(cp) \sum_{j=k+1}^{k+m} |g_{j-k}|)\tilde{}(z) < 1/2\}.$$

El conjunto $\mathcal{U}$ es una vecindad de $\zeta(J)$. Debido a (7.3) obtenemos para cada $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$ y $z \in \mathcal{U}$

$$1 \leq a(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j| \exp(cp))\tilde{}(z) + 1/2.$$

Tomando $d < 1/2a$ obtenemos el resultado deseado.

■

Exactamente como en el caso del coespectro el conocer el espectro $\sigma(\mathcal{F}, J)$ nos permite determinar $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$ para una compactificación arbitraria K por simple proyección. Denotamos por $P_K : \beta\mathbb{C}^k \to K$ la proyección natural que deja invariantes los puntos de $\mathbb{C}^k$.

Proposición 7.0.10 $P_K(\sigma(\mathcal{F}, J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K)$.

Demostración. Demostremos primero que $P_K(\sigma(\mathcal{F}, J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J, K)$. Supongamos que $\lambda \in K$ es regular para $\mathcal{F}$ relativo a J. Sea $\mathcal{O}(\lambda)$ una vecindad de λ tal que (7.1) se satisface. Entonces $P_K^{-1}(\mathcal{O}(\lambda))$ es una vecindad de $P_K^{-1}(\{\lambda\})$ para la cual (7.1) es también válido. Esto significa que todos los elementos de $P_K^{-1}(\{\lambda\})$ son regulares y por lo tanto $P_K(\sigma(\mathcal{F}, J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J, K)$.

Para demostrar la otra contención supongamos que $\lambda \in \sigma(\mathcal{F}, J, K)$, por lo tanto para todo $c, d > 0$ y para cada vecindad $\mathcal{O}$ de λ existe $\mu^{\mathcal{O}} \in \mathcal{O} \cap \mathbb{C}^k$ y $z^{\mathcal{O}} \in \sigma(J)$ tal que

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j^{\mathcal{O}}| \exp(cp))\tilde{}(z^{\mathcal{O}}) < d.$$

Por la compacidad de $\beta\mathbb{C}^k$ la sucesión generalizada $\{\mu^{\mathcal{O}}\}$ tiene un punto de acumulación, digamos $\mu \in \beta\mathbb{C}^k$. Ahora sigue de la construcción que $P_K \mu = \lambda$.

El punto μ es singular puesto que existe al menos una subsucesión $\mu^{\mathcal{U}}$ que converge a μ tal que

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j^{\mathcal{U}}| \exp(cp))\tilde{}(z^{\mathcal{U}}) < d.$$

■

Cualquier k-upla $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ de elementos de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ puede considerarse como una función continua

$$\Omega \ni z \to (f_1(z), \ldots, f_k(z)) \in \mathbb{C}^k \subset \beta\mathbb{C}^k,$$

por lo tanto existe una única extensión continua de esta función a $\beta\Omega$, la cual denotamos por $\tilde{\mathcal{F}}$. El siguiente resultado establece la relación entre $\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$ y $\sigma(\mathcal{F}, J)$.

Teorema 7.0.16

$$\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J). \tag{7.4}$$

Demostración. Sea $\lambda \in \tilde{\mathcal{F}}(w)$ y $w \in \zeta(J)$. Supongamos que $\lambda \in \rho(\mathcal{F}, J)$ y lleguemos a una contradicción. λ regular implica que

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j| \exp(cp))\check{}(z) \geq d \tag{7.5}$$

para todo $z \in \zeta(J)$, $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$.

Por corolario 7.0.4 la anterior desigualdad se cumple para $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$ y $z \in \mathcal{U}$ donde $\mathcal{U}$ es una vecindad de $\zeta(J)$. Elegimos un punto finito arbitrario z de $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}(\lambda))$. Tomemos $\mu_0 = \mathcal{F}(z)$. Claramente $\mu_0 \in \mathcal{O}(\lambda)$ pero el miembro izquierdo de (7.5) se anula en z. Esto es una contradicción.

■

Aplicando a ambos miembros de (7.4) la proyección P_K para una compactificación arbitraria K de $\mathbb{C}^k$, obtenemos

Corolario 7.0.5 $P_K \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J, K)$.

Por lo tanto usando Teorema 6.0.10 obtenemos inmediatamente.

Teorema 7.0.17 $\sigma(\mathcal{F}, J, K) \neq \emptyset$ *si y sólo si* J *es ideal propio de* $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

Capítulo 8

TEOREMA DE MAPEO ESPECTRAL

Comenzamos el capítulo preguntándonos cuando $\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J)$; demostramos que en $\mathbb{C}^k$ se cumple la igualdad y que para $\mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ se tiene la igualdad en cualquier compactificación K de $\mathbb{C}^k$.

Imponiendo una condición topológica a una compactificación K de $\mathbb{C}^k$ demostramos que el espectro combinado de la k-upla $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k) \in \mathcal{A}_p(\Omega)^k$ en la compactificación K con respecto a J es igual a la proyección natural sobre K del coespectro extendido del ideal J bajo la extensión continua $\hat{\mathcal{F}}$, éste resultado nos permite demostrar, usando la terminología de álgebras topológicas, que el teorema de mapeo espectral se cumple para el espacio proyectivo $\mathbf{P}^k(\mathbb{C})$ y también para toda compactificación C tal que $\mathbf{P}^k(\mathbb{C}) \succ C$.

La pregunta ¿La inclusión (7.4) es una igualdad? permanece abierta. En el caso general podemos solamente probar que $\sigma(\mathcal{F}, J) \setminus \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \beta\mathbb{C}^k \setminus \mathbb{C}^k$, es decir en $\mathbb{C}^k$ ambos conjuntos coinciden.

Teorema 8.0.18 $\sigma(\mathcal{F}, J) \cap \mathbb{C}^k = \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \cap \mathbb{C}^k$.

Demostración. Debido al Teorema 7.0.16 falta probar que $\sigma(\mathcal{F}, J) \cap \mathbb{C}^k \subset \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$. Si $\lambda \in \sigma(\mathcal{F}, J) \cap \mathbb{C}^k$ entonces para cada $n > 0$

y $n \in \mathbb{N}$ existen $\mu^{(n)} \in B(\lambda, 1/n)$ y $z_n \in \zeta(J)$ tales que

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j^{(n)}| \exp(cp))^{\sim} \leq 1/n.$$

Como $\exp(cp)$ es mayor o igual a 1 en todo su dominio compactificado, tenemos

$$(\sum_{j=1}^{k} |\tilde{f}_j(z_n) - \mu_j^{(n)}| \leq 1/n$$

por lo tanto las sucesiones $\{\tilde{\mathcal{F}}(z_n)\}$ y $\{\mu^{(n)}\}$ son equivalentes y por consiguiente ambas convergen a λ.

Ahora $\zeta(J)$ compacto implica que la sucesión (z_n) tiene un punto de acumulación en algún $z \in \zeta(J)$. Esto significa que $\tilde{\mathcal{F}}(z) = \lambda$.

■

El teorema anterior implica que si existe $\lambda \in \sigma(\mathcal{F}, J) \setminus \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$ entonces en los puntos finitos de cada vecindad de λ las resolventes generalizadas existen y sin embargo forman un subconjunto no acotado en $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

El siguiente teorema muestra que en el caso $\Omega = \mathbb{C}^n$ y $\mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ tenemos la igualdad en (7.4).

Denotamos por $\mathcal{Z}$ la n-upla para la cual la i-ésima función es $f_i(z) = z_i$, entonces $\tilde{\mathcal{Z}}$ es la identidad en $\beta\mathbb{C}^n$.

Teorema 8.0.19 *Sea $\Omega = \mathbb{C}^n$. Entonces*

$$\sigma(\mathcal{Z}, J) = \zeta(J).$$

Demostración. La inclusión $\zeta(J) \subset \sigma(\mathcal{Z}, J)$ es consecuencia de Teorema 7.0.16. Mostremos que $\sigma(\mathcal{Z}, J) \subset \zeta(J)$. Supongamos que $\lambda \in \sigma(\mathcal{Z}, J)$. Por Corolario 7.0.4 para $c, \varepsilon > 0$ y para cada vecindad $\mathcal{O}$ de λ y V de $\sigma(J)$ existen $z \in V \cap \mathbb{C}^n$ y $\mu \in \mathcal{O} \cap \mathbb{C}^n$ tales que

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j - \mu_j| \exp(cp(z)) < \varepsilon. \tag{8.1}$$

Debemos de probar que para cada $f \in J$ y $d > 0$, la extensión $(f\exp(dp))\tilde{}$ se anula en λ. Por Corolario 2.5 en [5] existen funciones $Q_j \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^{2n})$ tales que

$$f(z) - f(\mu) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(z,\mu)(z_j - \mu_j)$$

y para algunas constantes C y D que dependen de f, la desigualdad

$$|Q_j(z,\mu)| \leq C\exp(D(p(z) + p(\mu))$$

se cumple en $\mathbb{C}^{2n}$. Recordemos que la función p satisface la propiedad que existen $A, B > 0$ tal que la relación $|z - \mu| \leq 1$ implica $p(\mu) \leq Ap(z) + B$. Podemos elegir la vecindad V de tal manera que $|f\exp(d(Ap + B))|\tilde{} < \varepsilon$ en V. Obteniendo

$$|f(z) - f(\mu)|\exp(dp(\mu)) \leq \exp(dp(\mu))\sum_{j=1}^{n}|Q_j(z,\mu)||z_j - \mu_j|$$

$$\leq C\exp((D+d)p(\mu) + Dp(z))\sum_{j=1}^{n}|z_j - \mu_j|$$

$$\leq C\exp(D+d)B)\exp(((D+d)A + D)p(z))\sum_{j=1}^{n}|z_j - \mu_j|.$$

Como las constantes A, B, C, D dependen solamente de las funciones f y p, podemos suponer que la constante c se eligió desde el comienzo como $(D+d)A + D$ y en lugar de ε en (8.1) el valor $\varepsilon/C\exp((D+d)B)$. De esta forma obtenemos

$$|f(z) - f(\mu)|\exp(dp(\mu)) \leq \varepsilon$$

Tomando en cuenta que

$$|f(z)|\exp(dp(\mu)) \leq |f(z)|\exp(d(Ap(z) + B)) \leq \varepsilon$$

tenemos $|f(\mu)\exp(dp(\mu))| \leq 2\varepsilon$ para algún $\mu \in \mathcal{O} \cap \mathbb{C}^n$. Puesto que la vecindad $\mathcal{O}$ de λ es arbitraria concluímos que $(f\exp(dp))\tilde{}(\lambda) = 0$.

■

Ahora aplicando Teorema 6.0.13 y Proposición 7.0.10 obtenemos

Corolario 8.0.6 *Para una compactificación arbitraria K de $\mathbb{C}^n$*

$$\sigma(\mathcal{Z}, J, K) = \zeta(J, K).$$

Observemos que para la compactificación de Alexandroff K_a de $\mathbb{C}^k$ tenemos

$$P_{K_a}\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K_a).$$

Esta ecuación asegura que Teorema 8.0.18 es válido y que ambos miembros pueden ser no acotados solamente al mismo tiempo.

Fácilmente se demuestra la siguiente

Proposición 8.0.11 *Supongamos que para alguna compactificación K de $\mathbb{C}^k$ tenemos la igualdad*

$$P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K)$$

y que $K \succ C$. Entonces

$$P_C\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, C).$$

Demostración. Basta aplicar la proyección $P_{KC} : K \to C$ a ambos miembros de la primer igualdad.

■

Imponiendo una condición topológica a la compactificación K de $\mathbb{C}^k$, obtenemos

Teorema 8.0.20 *Sea K una compactificación de $\mathbb{C}^k$ tal que para todo $\lambda, v \in K$ existen vecindades O de λ y U de v tales que*

$$\inf_{\mu \in O \cap \mathbb{C}^k, w \in U \cap \mathbb{C}^k} |\mu - w| > 0$$

Entonces

$$P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K).$$

Demostración. Debido al Corolario 7.0.5 falta mostrar que $\sigma(\mathcal{F}, J, K) \subset P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$. Sabemos que para puntos finitos la inclusión es válida, por lo tanto supongamos que $\lambda \in \sigma(\mathcal{F}, J, K)\setminus\mathbb{C}^k$ y que $\lambda \notin P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$.

Por la condición impuesta sobre K para cada $w \in P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$ existen vecindades O_w de λ y U_w de w, así como una constante ε_w tal que

$$|\mu - w| > \varepsilon_w \quad \text{para todo}\, \mu \in O_w \cap \mathbb{C}^k \quad \text{y} \quad w \in U_w \cap \mathbb{C}^k.$$

Como $A = P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$ es compacto existe una subcubierta finita de la cubierta $\{U_w\}_{w\in A}$, obteniendo entonces las vecindades

$$U = \cup_{1\leq i\leq m} U_{w_i} \qquad \text{y} \qquad O = \cap_{1\leq i\leq m} O_{w_i}$$

tales que $|\mu - w| > \varepsilon = \min_{1\leq i\leq m}\{\varepsilon_{w_i}\}$ para todo $\mu \in O \cap \mathbb{C}^k$ y $w \in U \cap \mathbb{C}^k$.

Ahora por la singularidad de λ existe $\mu' \in O\cap\mathbb{C}^k$ y $z \in (P_K\tilde{\mathcal{F}})^{-1}(U)$ tal que $(\sum_{j=1}^k |f_j - \mu'_j|)\check{}(z) < \varepsilon$.

Por la continuidad de la extensión existe $z' \in (P_K\tilde{\mathcal{F}})^{-1}(U) \cap \mathbb{C}^n$ tal que la desigualdad anterior se cumple, lo cual es una contradicción, por lo tanto $\lambda \in P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$.

■

Es fácil ver que los espacios proyectivos $\mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R}), \mathbf{P}^k(\mathbb{C})$ satisfacen la hipótesis del teorema anterior. Por ejemplo para el espacio proyectivo real $\mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$, sabemos que

$$\mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R}) = \{[\lambda] = \{\lambda, -\lambda\} | \lambda \in S^{2k}\}$$

donde

$$S^{2k} = \{\lambda \in \mathbb{R}^{2k+1} | \|\lambda\| = 1\}.$$

Sean $[\lambda], [\nu] \in \mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$ tales que $[\lambda] \neq [\nu]$, definamos

$$\|[\lambda], [\nu]\| = \min_{\lambda'\in[\lambda], \nu'\in[\nu]} \|\lambda' - \nu'\|$$

y

$$V = B([\lambda], \frac{1}{4}\|[\lambda] - [\nu]\|)$$

$$W = B([\nu], \frac{1}{4}\|[\lambda] - [\nu]\|)$$

luego podemos tomar

$$O = S^{2k} \cap V \qquad y \qquad U = S^{2k} \cap W$$

las cuales son vecindades de $[\lambda]$ y $[\nu]$ respectivamente, y

$$\inf_{\mu\in O, w\in U} \|\mu - w\| \geq \frac{1}{2}\|[\lambda] - [\nu]\| > 0.$$

Así podemos obtener el siguiente corolario.

Corolario 8.0.7 *Para una arbitraria $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p(\Omega)^k$ y para $K = \mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$ ó $K = \mathbf{P}^k(\mathbb{C})$ tenemos*

$$P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K).$$

Observemos que el espectro combinado $\sigma(\mathcal{F}, J)$ tiene otras propiedades las cuales son caracteristicas para varios tipos de espectro combinado considerados en la teoría de álgebras de Banach conmutativas y no conmutativas.

El espacio $\beta\mathbb{C}^k$ puede considerarse de forma natural como un subconjunto cerrado del k-ésimo producto Cartesiano $\beta\mathbb{C} \times \ldots \times \beta\mathbb{C}$. Como la inyección natural consideramos la extensión continua del map $\mathbb{C}^k \hookrightarrow \prod_{i=1}^k \beta\mathbb{C}$. Usando esta convención demostremos la siguiente

Proposición 8.0.12

$$\sigma(\mathcal{F}, J) \subset \prod_{i=1}^{k} \sigma(\{f_i\}, J).$$

Demostración. Es fácil ver por la definición de $\rho(\mathcal{F}, J)$, que si un punto $\lambda \in \beta\mathbb{C}^k$ proyectado en $\prod_{i=1}^k \sigma(\{f_i\}, J)$ sobre la m-ésima variable nos da λ_m el cual es regular para f_m relativo a J, entonces λ es regular para $\mathcal{F}$.

■

Sea $P^{(m)} = (P_1, \ldots, P_m)$ una m-upla de polinomios de k variables complejas. Denotamos por $\tilde{P}^{(m)}$ la extensión continua a $\beta\mathbb{C}^k$ de la función

$$(z_1, \ldots, z_k) \to (P_1(z), \ldots, P_m(z)) \in \beta\mathbb{C}^m.$$

El siguiente teorema es el teorema de mapeo espectral en un sentido, para el espectro combinado de $\mathcal{F}$ en $\beta\mathbb{C}^k$ con respecto al ideal J.

Teorema 8.0.21 *Para cada k-upla $\mathcal{F}$ y para cada $P^{(m)}$*

$$\tilde{P}^{(m)}(\sigma(\mathcal{F}, J)) \subset \sigma(P^{(m)} \circ \mathcal{F}, J).$$

Demostración. Escribimos P en lugar de $P^{(m)}$. Por el teorema de Taylor para $z \in \Omega \cap \mathbb{C}^n$ y $\mu \in \mathbb{C}^k$ tenemos

$$P_i(\mathcal{F}) - P_i(\mu) = \sum_{|\alpha|=1}^{r} Q_{i\alpha}(\mu)(f_1 - \mu_1)^{\alpha_1} \dots (f_k - \mu_k)^{\alpha_k}$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ es un multiíndice, $Q_{i\alpha}$ son polinomios de k variables y r es el máximo de los ordenes de los polinomios P_i. Supongamos que $\lambda \in \sigma(\mathcal{F}, J)$ entonces para todo $c, \varepsilon > 0$ existen en cada vecindad de λ y en cada vecindad de $\zeta(J)$ puntos finitos μ y z respectivamente, tales que

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(z) - \mu_j| \exp cp(z) \leq \varepsilon/(m \sum_{|\alpha|=1}^{r} |Q_{i\alpha}(\mu)|) < 1.$$

Por lo tanto obtenemos

$$\sum_{i=1}^{m} |P_i(\mathcal{F}(z)) - P_i(\mu)| \exp(cp(z)) \leq$$

$$(\sum_{i=1}^{m} \sum_{|\alpha|=1}^{r} |Q_{i\alpha}(\mu)||f_1(z) - \mu_1|^{\alpha_1} \dots |f_k(z) - \mu_k|^{\alpha_k}) \exp(cp(z)) \leq$$

$$m \sum_{|\alpha|=1}^{r} |Q_{i\alpha}(\mu)| \sum_{i=1}^{k} \exp(cp(z))|f_i(z) - \mu_i| \leq \varepsilon.$$

Esto significa que $\tilde{P}(\lambda) \in \sigma(P \circ \mathcal{F}, J)$.

■

El siguiente teorema es una versión del teorema de mapeo espectral completo para el espacio proyectivo $\mathbf{P}^k(\mathbb{C})$.

Supongamos que $\hat{P} : \mathbf{P}^k(\mathbb{C}) \to \mathbf{P}^m(\mathbb{C})$ es una aplicación que envia $\mathbf{P}^k(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}^k$ en $\mathbf{P}^m(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}^m$ y tal que su restricción a $\mathbb{C}^k$ es de la forma $P = (P_1, \dots, P_m)$, donde los P_i son polinomios de k variables complejas.

Como $\hat{P}$ es una extensión continua única de una función polinomial, satisface la relación

$$\hat{P} \circ P_{\mathbf{P}^k(\mathbb{C})} = P_{\mathbf{P}^m(\mathbb{C})} \circ \tilde{P}. \tag{8.2}$$

Teorema 8.0.22 *Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p(\Omega)^k$. Entonces*

$$\hat{P}(\sigma(\mathcal{F}, J, \mathbf{P}^k(\mathbb{C}))) = \sigma(P \circ \mathcal{F}, J, \mathbf{P}^m(\mathbb{C})).$$

Demostración. Aplicando Corolario 8.0.7 y (8.2) obtenemos

$$\hat{P}(\sigma(\mathcal{F}, J, \mathbf{P}^k(\mathbb{C}))) = \hat{P}(P_{\mathbf{P}^k(\mathbb{C})}\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))) =$$

$$P_{\mathbf{P}^m(\mathbb{C})}(\tilde{P} \circ \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))) = \sigma(P \circ \mathcal{F}, J, \mathbf{P}^m(\mathbb{C})).$$

■

Si consideramos el espacio proyectivo real $\mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$ como compactificación de $\mathbb{C}^k$, obtenemos la misma fórmula

$$\hat{P}(\sigma(\mathcal{F}, J, \mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R}))) = \sigma(P \circ \mathcal{F}, J, \mathbf{P}^{2m}(\mathbb{R}))$$

donde

$$\hat{P} : \mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R}) \to \mathbf{P}^{2m}(\mathbb{R})$$

es una función polinomial compleja sobre $\mathbb{C}^k$ que envia los puntos en infinito en puntos en infinito, $\mathbb{C}^k$ esta sumergido canónicamente en $\mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$.

Capítulo 9

FUNCIONALES MULTIPLICATIVOS

El funcional de la evaluación en un punto dado $z \in \Omega$

$$\chi_z \ : \ \mathcal{A}_p(\Omega) \ni f \to f(z) \in \mathbb{C}$$

es un funcional multiplicativo continuo sobre $\mathcal{A}_p(\Omega)$ lo cual se demuestra usando que la topología del álgebra $\mathcal{A}_p(\Omega)$ esta dada por un sistema de seminormas. Es natural preguntarse si los funcionales de la forma χ_z for $z \in \Omega$ son los únicos funcionales multiplicativos continuos sobre $\mathcal{A}_p(\Omega)$. La respuesta es positiva y en [13] podemos encontrar este resultado, en cuya demostración se usa cálculo funcional de Waelbroeck. En este capítulo probamos un resultado más fuerte y la prueba es más simple, no usamos cálculo funcional de Waelbroeck. Mostramos que todos los funcionales multiplicativos sobre $\mathcal{A}_p(\Omega)$ son de la forma χ_z para algún $z \in \Omega$. Esto significa que todos los funcionales multiplicativos son continuos y los ideales maximales $\mathcal{M}_z$ para $z \notin \Omega$ son de codimensión mayor que 1.

Teorema 9.0.23 *Cada funcional multiplicativo diferente de cero sobre $\mathcal{A}_p(\Omega)$ es de la forma χ_z para algún $z \in \Omega$.*

Demostración. Sea $\chi: \mathcal{A}_p(\Omega) \to \mathbb{C}$ un funcional multiplicativo no trivial. Entonces su kernel $J_\chi = \{f \in \mathcal{A}_p(\Omega) | \chi(f) = 0\}$ es un ideal de codimensión 1 y su coespectro extendido es no trivial por teorema. Así para $\mu \in \zeta(J_\chi)$ y $f \in J_\chi$:

$$\lim_{\Omega \ni w \to \mu} f(w) = 0$$

por Teorema 6.0.11. Ahora para cada $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ tenemos $f - \chi(f) \in J_\chi$ de donde

$$\lim_{\Omega \ni w \to \mu} f(w) = \chi(f). \tag{9.1}$$

En particular tomando $f_j(w) = w_j$ obtenemos $\chi(f_j) = \lim_{\Omega \ni w \to \mu} w_j$. Esto implica que si tomamos $z = (\chi(f_1), \ldots, \chi(f_n))$, z pertenece a $\overline{\Omega}$ (cerradura en $\mathbb{C}^n$!). Si $z \in \Omega$ entonces por (9.1) el funcional χ es igual a χ_z. Si $z \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$. Necesitamos el siguiente resultado, que en la terminología de Waelbroeck dice que el conjunto Ω es un conjunto espectral para $\mathcal{Z}$:

Proposición 9.0.13 [13], [34] *Existe $t > 0$ tal que para cada $\lambda \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$ existen $r_j(\lambda) \in \mathcal{A}_p^t$ que satisfacen*

$$\sum_{j=1}^{n} (w_j - \lambda_j) r_j(\lambda) = 1 \tag{9.2}$$

para todo $w \in \Omega$.

Substituyendo $\lambda_j = \chi(f_j)$ en (9.2) y aplicando χ a ambos miembros obtenemos una contradicción.

■

Ahora podemos obtener los siguientes corolarios.

Corolario 9.0.8 *Todos los funcionales multiplicativos sobre $\mathcal{A}_p(\Omega)$ son continuos. Todos los ideales maximales de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ de codimension 1 son de la forma $\mathcal{M}_z$ donde $z \in \Omega$.*

Demostración. Todos los funcionales multiplicativos sobre $\mathcal{A}_p(\Omega)$ son continuos puesto que por el teorema anterior son de la forma χ_z. Sea J un ideal maximal de $\mathcal{A}_p(\Omega)$ tal que $\mathcal{A}_p(\Omega)/J \cong \mathbb{C}$ entonces definimos la siguiente aplicación

$$\varphi : \mathcal{A}_p(\Omega) \ni f \to [f] \in \mathbb{C}$$

φ es un funcional multiplicativo diferente de cero, por lo tanto existe $z \in \Omega$ tal que $\varphi = \varphi_z$, φ es sobreyectiva, así $\mathcal{A}_p(\Omega)/\ker\varphi_z \cong \mathcal{A}_p(\Omega)/J$ y

$$J \cong \ker\varphi_z = \{f \in \mathcal{A}_p(\Omega) \mid \varphi_z(f) = 0\} = \{f \in \mathcal{A}_p(\Omega) \mid f(z) = 0\} = \mathcal{M}_z.$$

■

Corolario 9.0.9 *Para cada $\mu \in \beta\Omega \setminus \Omega$ existe $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ tal que*

$$\lim_{\Omega \ni z \to \mu} |f(z)| = \infty.$$

Demostración. Supongamos que existe $\mu \in \beta\Omega \setminus \Omega$ tal que para toda $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$

$$\lim_{\Omega \ni z \to \mu} |f(z)| < \infty.$$

entonces la siguiente aplicación

$$\varphi: \mathcal{A}_p(\Omega) \ni f \to \tilde{f}(\mu) \in \mathbb{C}$$

es un funcional multiplicativo no trivial y por lo tanto existe $w \in \Omega$ tal que $\varphi = \varphi_w$, es decir, para todo $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$, $\tilde{f}(\mu) = f(w)$, si tomamos $f_i(z) = w_i - z_i$ entonces $\tilde{f}_i(\mu) = f_i(w) = 0$ y

$$\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2(z) = \sum_{i=1}^{n} | w_i - z_i |^2$$

esta función sólo tiene un único cero en $z = w$, lo cual es una contradicción.

■

Capítulo 10

BIBLIOGRAFIA

1. G. Almendra y A. Wawrzyńczyk, *Multivariable spectral theory of algebras of analytic functions, Bol. Soc. Mat. Mex., 39, (1994), en prensa.*

2. G. Almendra y A. Wawrzyńczyk, *Maximal ideals and multiplicative functionals in the algebras of holomorphic functions, (1995), sometido para su publication.*

3. S. C. Bagchi y A. Sitaram, *Spherical mean-periodic functions on semi-simple Lie groups, Pacific J. Math., 84 (1979), 241-250.*

4. C. A. Berenstein y B. A. Taylor, *A new look at interpolation theory for entire functions of one variable, Advances in Math., 33, (1979), 109-143.*

5. C. A. Berenstein y B. A. Taylor, *Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis, J. Anal. Math., 38, (1980), 188-254.*

6. L. Brown, B. M. Schreiber y B. A. Taylor, *Spectral synthesis and the Pompeiu problem, Ann. Inst. Fourier, 23, (1973), 125-154.*

7. N. Bourbaki, *Théories spectrales, Hermann, 1967.*

8. L. Carleson, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, Ann. of Math., 2, 76, (1962), 547-559.*

9. J. Chargoy, *Promedios esféricos, análisis espectral y la ecuación de Weyl, Tesis, Universidad Autónoma Metropolitana, México, 1995.*

10. J. Delsarte, *Les fonctions moyenne-périodiques, J. Math. pures et appl., 9, 14, (1935), 403-453.*

11. L. Ehrenpreis, *Solution of some problems of division, IV, Amer. J. of Math. 57, (1960), 522-588.*

12. L. Ehrenpreis, *Fourier analysis in several complex variables, Wiley-Interscience, New York, 1970.*

13. J-P. Ferrier, *Spectral theory and complex analysis, North-Holland, Mathematics Studies 4, 1973.*

14. R. C. Gunning y H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables, Englewood Cliffs, 1965.*

15. D. I. Gurevich, *Countrexamples to the problem of L.Schwartz, Funktsional. Anal. i Prilozhen.,2, 9, (1975), 29-35.*

16. L. Hörmander, *Generators of some rings of analytic functions, Ann. of Math., 2, 76, (1962), 943-949.*

17. L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables, Springer Verlag, 1990.*

18. J. J. Kelleher, B. A. Taylor, *Closed ideals in locally convex algebras of analytic functions, J. Reine Angew. Math., 255, (1972), 190-209.*

19. J. J. Kelleher, B. A. Taylor, *The entire functions separate $\beta\mathbb{C}$, Proc. Amer. Math. Soc., 33, 2, (1972), 506-506.*

20. B. Malgrange, *Existence et approximation des solutions des solutions des équationss aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, 6, (1955-56), 271-355.*

21. B. Malgrange, *Sur les systèmes différentiells à coefficients constants, Coll. C.N.R.S., (1963) 113-122.*

22. V. P. Palamadov, *Linear differential operators with constant coefficients, Grundl. d. Math. Wiss., 168. Springer-Verlag, 1970.*

23. S. S. Platonov, *Spectral synthesis on symmetric spaces of rank 1, Algebra y analiz, 4, (1992), 174-187.*

24. L. Schwartz, *Théorie générale des fonctions moyenne- périodiques, Ann. of Math., 48, 4, (1947), 857-929.*

25. B. A. Taylor, *Some locally convex spaces of entire functions, Proc. of Symp. in Pure Math., vol. XI, 431-467, AMS, 1968.*

26. B. A. Taylor, *A seminorm topology for some (DF)-spaces of entire functions, Duke J. Math., 38 (1971), 379-385.*

27. K. Trimèche, *Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators, Harwood Academic Publishers, 1988.*

28. R. C. Walker, *The Stone-Čech compactification, Springer Verlag, 1976.*

29. L. Waelbroeck, *Lectures in spectral theory, Dept. of Math., Yale University, 1963.*

30. A. Wawrzyńczyk, *Spectral analysis and synthesis on symmetric spaces, J. Math. Anal. and Appl., 127 (1975), 1-52.*

31. A. Wawrzyńczyk, *Solution of the spectral analysis problem on the space of horocycles, Bol. Soc. Mat. Mex., 35, 2, (1990), 49-59.*

32. A. Wawrzyńczyk, *How to make nontrivial the spectrum of a translation invariant space of smooth functions, J. Math. Anal. and Appl., en prensa.*

33. A. Wawrzyńczyk, *El espectro extendido y el análisis espectral de espacios invariantes, Aport. Mat., Comunicaciones 11, (1992), 41-55.*

34. A. Wawrzyńczyk, *A note on generating ideals of holomorphic functions, Comment. Math., en prensa.*

35. W. Żelazko, *Banach Algebras, Elsevier Publ. Comp. and PWN, 1973.*

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N.
Departamento de Matemáticas
Apartado Postal 14–740
07000 México, D. F.

16 de noviembre de 1994

Sr. Profesor Genaro Almendra
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa
Presente

Estimado Profesor Almendra:

Me permito comunicar a usted que recibimos la nueva versión del artículo titulado: **"Multivariable spectral theory of algebras of analytic functions"**, que el profesor Antoni Wawrzynczyk y usted presentaron para su posible publicación en el Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.

Hemos recibido el reporte sobre esta nueva versión y me es grato comunicarle que ha sido aceptado para su publicación en el Boletín. Para propósitos editoriales, comunico a usted que estamos programando la inclusión de dicho artículo para el volumen 39, correspondiente a 1994, que aparecerá a principios del año próximo.

Agradezco a usted cumplidamente su interés y colaboración y aprovecho la oportunidad para saludarle atentamente.

ERamírez de A

ENRIQUE RAMIREZ DE ARELLANO
Editor General
Boletín de la Sociedad
Matemática Mexicana
e.mail: eramirez@mvax1.red.cinvestav.mx

*nar

Tel: 752 0677, 754 0200 ext. 4103–06, 754 4466
Fax: 752 6412, 586 6290, 752 0590
E–mail: eramirez@math.cinvestav.mx

Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana Vol. 39, 1994

MULTIVARIABLE SPECTRAL THEORY OF ALGEBRAS OF ANALYTIC FUNCTIONS

BY GENARO ALMENDRA* AND ANTONI WAWRZYŃCZYK†

1. Introduction

The present paper is devoted to the study of cospectra of ideals J of algebras $\mathscr{A}(\Omega)$ of holomorphic functions with restricted growth defined in an open set $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. We consider also the joint spectra of k-tuples of elements of the quotient algebra $\mathscr{A}(\Omega)/J$.

The principal innovation is the addition of "points at infinity" to the classical cospectrum $Z(J) = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0,\ f \in J\}$. The obtained extended cospectrum is briefly speaking the set of common zeroes of the functions $f \in J$ extended continuously to the Stone-Čech compactification $\beta\Omega$ of Ω. The extended cospectrum is then a subset of $\beta\Omega$ although we consider later also the cospectra in other compactifications of Ω.

The appearence of $\beta\Omega$ in the spectral analysis of algebras of continuous functions on Ω is not surprising. In the case of the algebra $\mathscr{C}(\Omega)$ of all continuous functions on Ω the theorem of Gelfand-Kolmogoroff identifies the space $\beta\Omega$ with the set of the maximal ideals of the algebra. To the point $z \in \beta\Omega$ there correspond under this identification the ideal

$$M_z = \{f \in C(\Omega) |\ z \in \overline{Z(f)}\}.$$

In the above formula $Z(f)$ denotes the set of zeros of the function f and the closure is taken in the compact space $\beta\Omega$.

In case of the algebras of functions with restricted growth the relation between the points of $\beta\Omega$ and maximal ideals must be modified. Briefly speaking we treat the cospectrum of an ideal of the form $f\mathscr{A}(\Omega)$ as the obstacle to the invertibility of f. Even if the function $1/f$ makes sense in some subset of Ω the invertibility depends upon the behaviour of this function at infinity which is restricted by the growth condictions defining the algebra $\mathscr{A}(\Omega)$. A point $z \in \beta\Omega$ is cospectral ($z \in \zeta(J)$) if for every neighbourhood O of z there exists an element $f \in J$ such that $1/f$ does not behave in O as elements of $\mathscr{A}(\Omega)$ should do. In the same way we define the cospectrum $\zeta(J, C)$ of J in an arbitrary compactification C of Ω. First of all we succeed in proving that nontrivial ideal J have nonempty cospectrum for an arbitrary compactification C.

*Research supported by CONACyT
†Partially supported by SNI

It results that $\zeta(J) = \zeta(J, \beta\Omega)$ determines $\zeta(J, C)$ for an arbitrary compactification C. If $P_C : \beta\Omega \to C$ is the natural projection which leaves invariant the points of Ω then

$$\zeta(J, C) = P_C\zeta(J).$$

If we associate to a point $z \in \beta\Omega$ the ideal

$$\mathcal{M}_z = \{f \in \mathcal{A}(\Omega) | \; z \in \zeta(f\mathcal{A}(\Omega))\}$$

we can obtain all maximal ideals of $\mathcal{A}(\Omega)$ as $\mathcal{M}_z$ for appropiate $z \in \beta\Omega$.

The continuous multiplicative functionals of the algebra $\mathcal{A}(\Omega)$ correspond however to the points of Ω and are of the form $f \to f(z)$ with $z \in \Omega$.

Our interest in the algebras of the form $\mathcal{A}(\Omega)/J$ is motivated by the rôle played by this type of algebras in the spectral analysis of translation invariant function spaces on $\mathbb{R}^n$. In particular if $V \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ is a linear translation invariant closed subspace the annihilator

$$V^\perp = \{T \in C^\infty(\mathbb{R}^n)' | \; T(f) = 0, \; f \in V\}$$

is isomorphic by means of the Fourier transform to an ideal J of the algebra

$$\mathcal{A}_p(\mathbb{C}^n) = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n) | \; |f(z)| \le A \exp(B(\log(1 + \|z\|) + \|\mathrm{Im} z\|))\},$$

while the dual space V' is isomorphic to the quotient algebra $\mathcal{A}_p(\mathbb{C}^n)/J$.

This being the case an exponential function $\mathbf{e}_z : \mathbb{R}^n \ni x \to \exp((z|x))$ belongs to V if and only if $z \in Z(J)$. Using the traditional terminology: the spectral analysis holds in V if $Z(J) = \zeta(J) \cap \mathbb{C}^n$ is nonvoid. It is well known however that the latter set can be empty.

Now, it can be seen that the set $\zeta(J) \cap \mathbb{C}^n$ is equal to the joint spectrum of the n-tuple $\mathcal{Z} = ([z_1], \dots, [z_n]) \in (\mathcal{A}(\mathbb{C}^n)/J)^n$. In section 3 we introduce the notion of the extended joint spectrum and we prove that the latter is equal just to $\zeta(J)$ in case of the n-tuple $\mathcal{Z}$. It means that both the study of the generalized cospectrum $\zeta(J)$ as well as of the extended joint spectrum can be treated as a subsequent step in the development of the spectral analysis and synthesis.

The mentioned extended joint spectrum of a k-tuple $\mathcal{F} = ([f_1], \dots, [f_k]) \in (\mathcal{A}(\Omega)/J)^n$ is defined as a closed subset of an arbitrary compactification K of $\mathbb{C}^k$ and is denoted by $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$. Our definition assures that in $\mathbb{C}^k \setminus \sigma(\mathcal{F}, J, K)$ there exists a generalized resolvent that is a k-tuple of functions $R_j(z, \mu)$ such that

$$\sum_{j=1}^{k} R_j(z, \mu)(z_j - \mu_j) - 1 \in J, \tag{1}$$

for $\mu \in \mathbb{C}^k \setminus \sigma(\mathcal{F}, J, K)$. Moreover, for every $\lambda \in K \setminus \sigma(\mathcal{F}, J, K)$ there exists a neighbourhood O of λ such that the set $\{R_j(\cdot, \mu) | \; \mu \in O \cap \mathbb{C}^k\}$ is bounded in $\mathcal{A}(\Omega)$.

It results that the joint spectrum in the Stone-Čech compactification $\beta\mathbb{C}^k$ determines joint spectra in other compactifications:

$$\sigma(\mathcal{F}, J, K) = P_K\sigma(\mathcal{F}, J, \beta\mathbb{C}^k).$$

In what follows we write just $\sigma(\mathcal{F}, J)$ in place of $\sigma(\mathcal{F}, J, \beta\mathbb{C}^k)$.

The joint spectrum is never empty for proper ideals J because we prove that

$$\bar{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J)$$

and

$$P_K\bar{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J, K).$$

In the formula above $\bar{\mathcal{F}}$ denotes the unique continuous extension to $\beta\Omega$ of the mapping $\Omega \ni z \to (f_1, \dots, f_k) \in \beta\mathbb{C}^k$.

In the case when K is equal to the real or complex projective space $\mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$ or $\mathbf{P}^k(\mathbb{C})$ we have the equality

$$P_K\bar{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K).$$

In both cases the spectrum $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$ have the spectral mapping property what means the following:

For every polynomial mapping $\mathcal{P}: \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^m$ which extends to a continuous application $\hat{\mathcal{P}}: \mathbf{P}^k(\mathbb{C}) \to \mathbf{P}^m(\mathbb{C})$ we have

$$\hat{\mathcal{P}}\sigma(\mathcal{F}, J, \mathbf{P}^k\mathbb{C}) = \sigma(\mathcal{P} \circ \mathcal{F}, J, \mathbf{P}^m\mathbb{C}).$$

The analogous formula for the real projective space is also valid.

In the last section we prove that all multiplicative functionals on $\mathcal{A}_p(\Omega)$ are the evaluations of $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ at a fixed $z \in \Omega$.

The present paper presents the results of an investigation not finished yet. The interest of the authors concentrates at this moment at those properties of ideals which can be expressed in terms of their cospectrum $\zeta(J)$. It can be seen for example that the slowly decreasing n-tuple $\mathcal{F}$ (see [1] for the definition and fundamental properties) whose cospectrum consists uniquely of "points at infinity" generates $\mathcal{A}_p(\Omega)$. It explains the fact that proper ideals generated by slowly decreasing tuples have always nontrivial the classical cospectrum. The slowly decreasing tuples were created as those which generate closed ideals. This property is also related with the appearence of the points at infinity in $\zeta(J_{\mathcal{F}})$.

It is easy to see that the ideal $f\mathcal{A}_p(\Omega)$ is not closed if and only if f is a topological divisor of zero in $\mathcal{A}_p(\Omega)$, exactly as in the case of commutative Banach algebras without divisors of zero. More generally, an ideal J consists of joint topological divisors of zero if and only if $J_{\mathcal{F}}$ is not closed for every k-tuple of elements of J.

If the spectral analysis is valid in $\mathcal{A}_p(\Omega)$ then every ideal J whose spectrum consists of points at infinity is dense in $\mathcal{A}_p(\Omega)$. It consists of joint topological divisors of zero, just like for example the maximal ideals corresponding to the points of the Shilov boundary in the Banach algebras case. If we are interested in the development of concepts like the Shilov boundary or of the peak points of the spectrum for $\mathcal{A}_p(\Omega)$ we must study profoundly the behaviour of the elements of $\mathcal{A}_p(\Omega)$ on $\beta\Omega$. In some particular cases described in [8] (specially for $\Omega = \mathbb{C}$) it is possible to formulate determinate results. In the case of the unit disc $D \subset \mathbb{C}$ the structure of ideals can be also described in terms of the classical and extended spectrum. These results involving the topology of the Stone-Čech compactification $\beta\Omega$ will be published in separate paper. The present one is devoted almost exclusivelly to the properties of the extended spectrum which follows by Hörmander's theorem 2.1.

The authors are very indebted to Professor K. Jarosz and to Professor W. Żelazko for interesting conversations and important suggestions.

2. Preliminaries

In what follows Ω will denote an open subset of $\mathbb{C}^n$ and p a function on Ω which is positive plurisubharmonic and satisfies the following conditions

1. $\log(1 + \|z\|)/p(z)$ is bounded on Ω.
2. there exist A, B, C, $D > 0$ such that for all $z \in \Omega$ the condition $\|z - w\| < \exp(-Cp(z) - D)$ implies $w \in \Omega$ and $p(w) \leq Ap(z) + B$.

In case of $\Omega = \mathbb{C}^n$ the above conditions are satisfied for $p(z) = |z|^r$, $r > 0$ as well as for the function $p(z) = \log(1 + \|z\|) + \|\mathrm{Im}\ z\|$ which was already introduced in the previous section. If Ω is a domain of holomorphy we obtain a function satisfying 1 and 2 putting $p(z) = -\log(d(z, \partial\Omega))$, where $\partial\Omega$ is the boundary of Ω and d denotes the Euclidean distance in $\mathbb{C}^n$.

This type of pairs (Ω, p) was introduced by Hörmander in [6] with the purpose to study the finitely generated ideals of the algebra of functions which are holomorphic in Ω and have its growth determinated by p.

We denote by $\mathcal{C}(\Omega)$ the space of all continuous functions on Ω and by $\mathcal{A}(\Omega)$ the space of functions holomorphic in Ω. For $r > 0$ let $\mathcal{C}_p^r$ denote the set of continuous functions which satisfy

$$\|f\|_r = \sup_{\Omega} |f(z)| \exp(-rp(z)) < \infty$$

and $\mathcal{C}_p(\Omega) = \bigcup_{r>0} \mathcal{C}_p^r$.

We also introduce $\mathcal{A}_p^r = \mathcal{A}(\Omega) \cap \mathcal{C}_p^r(\Omega)$ and $\mathcal{A}_p(\Omega) = \bigcup_{r>0} \mathcal{A}_p^r$. In the spaces $\mathcal{A}_p(\Omega)$ and $\mathcal{C}_p(\Omega)$ we define the inductive limit topologies of the normed spaces $(\mathcal{A}_p^r, \|\cdot\|_r)$ and $(\mathcal{C}_p^r, \|\cdot\|_r)$ respectively.

The spaces $\mathcal{A}_p(\Omega)$ and $\mathcal{C}_p(\Omega)$ are topological algebras which constitute the principal subject of our research.

As proved in [6] the conditions 1 and 2 assure that

i. The space of all polynomials belongs to $\mathcal{A}_p(\Omega)$.
ii. If $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ then $\frac{\partial}{\partial z_j} f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ for any $1 \le j \le n$.

The following theorem of Hörmander (and its extension given later) is the fundamental argument used to develope the notion of the cospectrum and joint spectrum in algebras $\mathcal{A}_p(\Omega)$.

THEOREM (2.1) *[6] Suppose that the function $p > 0$ on $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ is plurisubharmonic and satisfies the conditions 1 and 2. Then the ideal generated by the functions $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ is the whole $\mathcal{A}_p(\Omega)$ if and only if there exist c_1, c_2 0 such that*

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j| \ge c_1 \exp(-c_2 p). \tag{2}$$

The proof of the above theorem uses the celebrated results of Hörmander about the solution of the equation $\bar{\partial} h = g$ in spaces of differential forms with measurable coefficients which behave at infinity as elements of $\mathcal{C}_p(\Omega)$.

In case of the algebra $\mathcal{C}_p(\Omega)$ the above theorem is trivially valid and its proof is just the first step in the Hörmander's proof. Given the functions $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{C}_p(\Omega)$ which satisfy the condition(2) we can construct

$$h_j = \frac{\bar{f}_j}{\sum_{j=1}^{k} |f_j|^2}.$$

Thanks to the condition (2) and the relation $\sum_{j=1}^{k} |f_j| \le k^{1/2} (\sum_{j=1}^{k} |f_j|^2)^{1/2}$ we see that $h_i \in \mathcal{C}_p(\Omega)$. The direct calculation gives $\sum_{j=1}^{k} h_j f_j = 1$, hence for arbitrary $\phi \in \mathcal{C}_p(\Omega)$ we have $\phi = \sum_{j=1}^{k} f_j (h_j \phi)$. The ideal generated by the functions $\{f_j\}$ is just $\mathcal{C}_p(\Omega)$. We shall need however a strengthened version of Theorem 2.1 providing several informations about the coefficients $h_j \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ which permit to generate the function 1 from $\mathcal{F}$.

For given $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ let us denote

$$\|\partial \mathcal{F}\|_r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\partial}{\partial z_i} f_j \right\|_r .$$

In [13] the following result is proved:

THEOREM (2.2) *For every $k \in \mathbf{N}$ and $s \geq 0$ there exist t, $r \geq 0$ and a polynomial $W_{k,s}$ with positive coefficients such that for every $g \in \mathcal{A}_p^s$ and every k-tuple $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_p(\Omega)^k$ which satisfies the condition (2) and $\|\partial\mathcal{F}\|_r \leq \infty$ there exist $h_j \in \mathcal{A}_p^t$ obeying*

$$\sum_{j=1}^{k} h_j f_j = g$$

and

$$\|h_j\|_t \leq \frac{1}{c_1} W_{k,s}\left(\frac{\|\partial\mathcal{F}\|_r}{c_1}\right)\|g\|_s.$$

3. The cospectrum

In what follows we present a number of definitions and results parallely for the algebras $\mathcal{C}_p(\Omega)$ and $\mathcal{A}_p(\Omega)$. In order to simplify the exposition we understand by $\mathcal{A}$ anyone of these algebras. Let (C, j) be a compactification of Ω, that is to say C is a compact completely regular space and $j: \Omega \to C$ is a continuous injection with dense image.

Definition (3.1) For a given ideal $J \in \mathcal{A}$ and a compactification C of Ω we denote

$$\rho(J, C) = \Big\{z \in C \,|\, \exists f_j \in J, K > 0 \text{ and a neighbourhood } \mathcal{O} \text{ of } z \text{ in } C \text{ such that } \sum_{j=1}^{k} |f_j(w)| \geq \exp(-Kp(w)) \text{ for all } w \in \mathcal{O} \cap \Omega\Big\}.$$

The points belonging to $\rho(J, C)$ are called *regular points* for J in C. The complement of $\rho(J, C)$ is called *the extended cospectrum* of J in C and is denoted by $\zeta(J, C)$. We denote by $Z(J)$ the classical cospectrum of J that is the set of common zeros of the elements of J in Ω.

It is easily seen that $Z(J) = \zeta(J, C) \cap \Omega$ independently of the particular compactification of Ω.

THEOREM (3.1) *The set $\zeta(J, C)$ is empty if and only if $J = \mathcal{A}$.*

Proof. Suppose that $\rho(J, C) = C$. For every $z \in C$ there exist $\mathcal{O}(z)$, $K > 0$ and $f_j^z \in J$ such that

$$\sum_{j=1}^{k_z} |f_j^z(w)| \geq \exp(-Kp(w)),\ w \in \mathcal{O}(z) \cap \Omega.$$

By the compactness of C we can choose a finite subcovering $\{\mathcal{O}(z_i)\}_{i=1,\ldots,r}$ from the covering $\{\mathcal{O}(z)\}_{z \in C}$. Let $\{f_j^{z_1}\}, \ldots, \{f_j^{z_r}\}$ and $K_1, \ldots, K_r$ be the corresponding elements of J and corresponding positive constants. Taking $c = \max(K_1, \dots, K_r)$ we obtain

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_z} |f_j^{z_i}(z)| \geq \exp(-cp(z)),\ z \in \Omega.$$

By Theorem 2.1 (or its version for $\mathscr{E}_p(\Omega)$) the functions $f_j^{z_1}, \dots, f_j^{z_r}$ generate $\mathscr{A}$, that is $J = \mathscr{A}$. The converse is obvious. ∎

In contrast to $\zeta(J, C)$ the classical cospectrum can be empty as shows the example found by Gurevich [5].

The family Comp Ω of all compactifications of Ω has its natural order defined as follows:

$$(C_1, j_1) \succ (C_2, j_2)$$

provided that there exists a continuous surjection $P: C_1 \to C_2$ such that $j_2 = P \circ j_1$. The maximal element of Comp Ω with respect to the order $\succ$ is the Stone-Čech compactification $\beta\Omega$ which is unique up to homeomorphism.

We denote: $\zeta(J) = \zeta(J, \beta\Omega)$ and $\rho(J) = \rho(J, \beta\Omega)$.

The Stone-Čech compactification can be defined equivalently up to a homeomorphism as the compact space containing Ω and such that any continuous map $\phi: \Omega \to K$ valued in a compact space K can be uniquely extended to a continuous map $\tilde{\phi}: \beta\Omega \to K$. This property of $\beta\Omega$ permits us to describe the cospectrum of J as the zero set of a family of functions associated to J.

THEOREM (3.4) *Let J be an ideal of $\mathscr{A}$. Then*

$$\zeta(J) = \{z \in \beta\Omega |\ (f \exp(cp))^{\tilde{}}(z) = 0 \text{ for all } c > 0,\ f \in J\}.$$

Proof. If J is a proper ideal and $z \in \zeta(J)$ then by the very definition of the cospectrum for arbitrary $\epsilon > 0$, $c > 0$ and every neighbourhood $\mathscr{O}$ of z there exists $w \in \mathscr{O}$ such that

$$|f(w)| \exp(cp(w)) \leq \epsilon.$$

By the continuity of the extension we obtain the assertion. The converse is obvious. ∎

The description of the cospectrum obtained above implies in particular the following:

THEOREM (3.2) *Let I, J be proper ideals of $\mathscr{A}_p$ and let $\mathscr{J}$ be the ideal generated by I and J. Then*

$$\zeta(\mathscr{J}) = \zeta(I) \cap \zeta(J).$$

Proof. Assume that $z \in \zeta(I) \cap \zeta(J)$. For every $f \in \mathcal{J}$ there exist $g \in I$, $h \in J$ and $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_p$ such that $f = \varphi g + \psi h$. There exist also constants $a, b, c, d > 0$ for which $|\varphi| \leq a\exp(bp)$ and $|\psi| \leq c\exp(dp)$. For an arbitrary $\gamma > 0$ we obtain

$$|f\exp(\gamma p)| \leq a|g|\exp((b+\gamma)p) + c|h|\exp((d+\gamma)p).$$

Both terms of the last sum are continuous functions which by Theorem 3.2 extend to functions vanishing at z. Applying the same theorem we obtain $z \in \zeta(\mathcal{J})$. We have proved that

$$\zeta(I) \cap \zeta(J) \subset \zeta(\mathcal{J}).$$

Since $J \subset \mathcal{J}$ and $I \subset \mathcal{J}$ the opposite relation is also valid. ■

In case of the algebra $\mathcal{C}_p(\Omega)$ the description of the cospectrum can be simplified because for $f \in J$ the function $f\exp(cp)$ belongs to J. We obtain:

$$\zeta(J) = \{z \in \beta\Omega |\ \tilde{f}(z) = 0,\ f \in J\}.$$

It follows immediately from this observation that the cospectrum of $J \subset \mathcal{A}_p(\Omega)$ is equal to the cospectrum of the ideal of $\mathcal{C}_p(\Omega)$ generated by J. In particular if we consider the cospectrum of an ideal $J_{\mathcal{F}}$ generated by several elements $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ it does not matter in which of two algebras we generate the ideal. By this reason we have decided to simplify the notation of $\zeta(J)$ the cospectrum avoiding to anote the algebra in question.

It is important to observe that the cospectrum $\zeta(J)$ of J determines completely the cospectra of J in other compactifications as shows the following

THEOREM (3.3) *Let C be an arbitrary compactification of Ω and let $P\colon \beta\Omega \to C$ be the projection which leaves invariant the points of Ω. Then for every ideal $J \subset \mathcal{A}$*

$$P(\zeta(J)) = \zeta(J, C).$$

Proof. We prove the relation $P(\zeta(J)) \subset \zeta(J, C)$ by showing that $P(z) \in \rho(J, C)$ implies $z \in \rho(J)$. In fact, if $\mathcal{O}(P(z))$, $f_j \in J$, $c > 0$ are such that

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(w)| \geq \exp(-cp(w))$$

for $w \in \mathcal{O} \cap \Omega$, then $\mathcal{U} = P^{-1}(\mathcal{O}(P(z)))$ is the neighbourhood of z such that the same inequality is valid for the points of $\mathcal{U} \cap \Omega$. It means that $P^{-1}(\rho(J, C)) \subset \rho(J)$, or equivalently $P(\zeta(J)) \subset \zeta(J, C)$.

In order to prove the opposite inclusion, we assume that $z \in \zeta(J, C)$ but $P^{-1}(z) \subset \rho(J)$. This will lead to a contradiction.

Suppose that for every $x \in P^{-1}(z)$ there exist $f_j \in J$ and $\epsilon, c > 0$ such that $(\sum_{j=1}^{k} |f_j(y)| \exp(cp(y)))^{\sim} > \epsilon$ in some neighbourhood of x. Since $P^{-1}(z)$ is compact we can find an N-tuple $f_1, \ldots, f_N \in J$ and $\epsilon > 0, c > 0$ such that

$$(\sum_{i=1}^{N} |f_i| \exp(cp))^{\sim}(x) > \epsilon$$

for all $x \in P^{-1}(z)$.

On the other hand if $z \in \zeta(J, C)$ we know that in each neighbourhood $\mathcal{U}$ of z in C there exists $z_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U} \cap \Omega$ such that

$$\sum_{i=1}^{N} |f_i(z_{\mathcal{U}})| \exp(cp(z_{\mathcal{U}})) \leq \epsilon/2.$$

By the compactness of $\beta\Omega$ the net $(z_{\mathcal{U}})$ has an accumulation point x which must belong to $P^{-1}(z)$ by the definition of the net. It implies that $(\sum_{i=1}^{N} |f_i| \exp(cp))^{\sim}(x) \leq \epsilon/2$. This is the contradiction. ∎

The description of the maximal ideals plays the fundamental rôle in the spectral theory of topological algebras. If J is a maximal ideal of $\mathcal{A}$ (not neccessarily closed) and $z \in \zeta(J)$ then by the very definition of the cospectrum $J \subset J_z = \{f \in \mathcal{A}_p | (f \exp(Cp))^{\sim}(z) = 0 \text{ for all } C > 0\}$.

The set J_z is a proper ideal of $\mathcal{A}$ hence by the maximality of J both ideals coincide. It follows that all maximal ideals of $\mathcal{A}$ are of the form J_z for $z \in \beta\Omega$. The question arise if $\zeta(J_z) = \{z\}$ and if the ideal J_z is maximal for each point $z \in \beta\Omega$. It is true for the algebra $\mathcal{C}_p(\Omega)$ because continuous bounded functions separate points of $\beta\Omega$. This being the case we obtain the identification between the space $\beta\Omega$ and the space $\mathcal{M}(\mathcal{C}_p)$ of all maximal ideals of $\mathcal{C}_p(\Omega)$. For the algebra $\mathcal{A}_p(\Omega)$ this is not the case. One construct distinct points z, $w \in \beta\Omega \setminus \Omega$ which can not be separated by elements of $\mathcal{A}_p(\Omega)$, hence $J_z = J_w$.The construction was suggested by the reviewer.et us take two sequences (z_j) and (w_j) whose elements form discrete disjoint sets and such that $\|z_j - w_j\| \exp(cp(z_j))$ tends to zero for all $c > 0$. It follows that $|f(z_j) - f(w_j)| \exp(cp(z_j)) \to 0$ for all $c > 0$. The closures of the sets $\{z_j\}$ and $\{w_j\}$ in $\beta\Omega$ are disjoint. Let Φ be an ultrafilter of subsets of $\{z_j\}$ which defines an element $z \in \beta\Omega \setminus \Omega$ which belongs to the closure of $\{z_j\}$. Substituting in each subset from Φ the element z_j by w_j we obtain an ultrafilter which defines $w \in \beta\Omega$ belonging to the closure of $\{w_j\}$. Hence $z \neq w$. On the other hand the elements of $\mathcal{A}_p(\Omega)$ do not separate z from w.

It is an open problem if for general $\mathcal{A}_p(\Omega)$ every point $z \in \beta\Omega$ gives us J_z which is maximal. At least in some particular cases it seems to be true.

The construction was suggested by the reviewer.L

4. The quotient algebra $\mathcal{A}/J$

Let us consider an ideal $J \subset \mathcal{A}$ and the quotient algebra $\mathcal{A}/J$. The invertibility of an element $[f] \in \mathcal{A}/J$ can be expressed in terms of the corresponding cospectra.

THEOREM (4.1) *Let $f \in \mathcal{A}$. The following conditions are equivalent:*

a. *The class $[f]$ is invertible in $\mathcal{A}/J$.*
b. $\zeta(J_f) \cap \zeta(J) = \emptyset$.
c. $\exists c > 0$ *such that* $(f \exp(cp))^\frown$ *does not vanish on* $\zeta(J)$.

Proof. The class $[f]$ is invertible if there exist $g \in \mathcal{A}$ and $h \in J$ such that $fg - 1 = h$. Equivalently, the ideal generated by f and J is equal to $\mathcal{A}$. Its cospectrum is empty and by Theorem 3.3 it is equal to $\zeta(J_f) \cap \zeta(J)$. This proves $a) \Rightarrow b)$.

Now, suppose that $c)$ is not valid, that is $\forall c > 0$ the function $(f \exp(cp))^\frown$ vanishes somewhere in $\zeta(J)$. Denote by A_c the (compact) set of zeroes in $\zeta(J)$ of the function $(f \exp(cp))^\frown$. Obviously $c < d$ implies $A_d \subset A_c$. By the compactness of $\zeta(J)$ the set $\bigcap_{c>0} A_c \subset \zeta(J_f) \cap \zeta(J)$ is nonvoid. We proved that $b) \Rightarrow c)$.

Finally assume that the condition $c)$ is satisfied and consider the ideal $\mathcal{J}$ generated by f and J, whose cospectrum is $\zeta(J_f) \cap \zeta(J)$ according to Theorem 3.3. If $\mathcal{J}$ is nontrivial and $z \in \zeta(\mathcal{J})$ then in particular for every $c > 0$ the extension of the function $f \exp(cp)$ vanishes at z. This contradicts c) and the invertibility of $[f]$ is proved. ■

Let us compare the situation with the classical model of the Banach algebra of $\mathcal{C}(X)$ of continuous functions on a compact set X. If J is a closed ideal in $\mathcal{C}(X)$ and $\zeta(J)$ is the set of common zeroes of the elements of J then the invertibility of $[f]$ in $\mathcal{C}(X)/J$ is equivalent to the condition that f does not vanish on $\zeta(J)$ or equivalently that $\zeta(J_f) \cap \zeta(J) = \emptyset$. In this case the spectrum of $[f]$ in the quotient algebra coincides with the set of values of f on $\zeta(J)$. The set $\zeta(J)$ plays also the rôle of the spectrum of the quotient algebra if the latter concept is defined as the set of multiplicative functionals on $\mathcal{C}(X)$.

Now we pass to define the extended spectrum of elements of the algebra $\mathcal{A}$. To avoid repetitions of arguments we define at once the extended joint spectrum of a k-tuple of elements in an arbitrary compactification K of $\mathbb{C}^k$.

Definition (4.1) Denote by $\mathcal{F}$ a k-tuple $(f_1, \ldots, f_k)$ of elements of $\mathcal{A}$. Let $\lambda \in K$. We say that λ is regular for $\mathcal{F}$ relative to J if there exist $c > 0$, $d > 0$ and a neighbourhood $\mathcal{O}(\lambda)$ of λ in K such that for all $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$ and $z \in \zeta(J)$

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j| \exp(cp))^\frown(z) \geq d. \tag{4}$$

The set of regular points for $\mathcal{F}$ in K is denoted by $\varrho(\mathcal{F}, J, K)$. It is open in K. Its complement is called the joint spectrum of $\mathcal{F}$ in K with respect to J and is denoted $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$. We denote by $\sigma(\mathcal{F}, J)$ (resp. $\varrho(\mathcal{F}, J)$) the spectrum (resp. the set of regular points) of $\mathcal{F}$ in the Stone-Čech compactification $\beta\mathbb{C}^k$.

Let us observe that the sets $\varrho(\mathcal{F}, J, K)$ and $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$ depend in fact only on classes $[\mathcal{F}] = ([f_1], \dots, [f_k])$ hence we deal with an extension of the concept of the joint spectrum of a k-tuple of elements of $\mathcal{A}/J$. First of all we shall prove that for all finite points μ's in some neighbourhood of each regular element $\lambda \in K$ there exists a generalized resolvent $R(\mu)$ and the set of all $R(\mu)_{\mu\in\mathcal{U}}$ is bounded.

THEOREM (4.2) *Let $\lambda \in \varrho(\mathcal{F}, J, K)$ and let $\mathcal{O} \subset K$ be a neighbourhood of λ in which the inequality* (4) *is valid for some c, $d > 0$. Denote $\mathcal{U} = \mathcal{O} \cap \mathbb{C}^k$. There exist functions $R_j(\cdot, \mu) \in \mathcal{A}$, $\mu \in \mathcal{U}$ such that*

$$\sum_{j=1}^{k} (f_j - \mu_j) R_j(\cdot, \mu) - 1 \in J \tag{5}$$

for all $\mu \in \mathcal{U}$. There exist $r > 0$, $b > 0$ such that $\|R_j(\cdot, \mu)\|_r \le b$ for all $\mu \in \mathcal{U}$.

Proof. If $z \notin \zeta(J)$ then there exists $g_z \in J$ and $c_z > 0$ such that

$$|g_z(w)| > \exp(-c_z p(w))$$

for all w in some neighbourhood of z in Ω.

By the supposition that λ is regular for $\mathcal{F}$ we obtain that

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(w) - \mu_j| \exp(cp(w)) \ge d$$

for appropriate $c > 0, d > 0$ and for all $w \in \Omega$ in some neighbourhood of $\zeta(J)$.

By the compactness of $\beta\Omega$ we can choose a finite number of functions $g_1, \dots, g_m \in J$ such that for some $c, d > 0$ and for all $(w, \mu) \in \Omega \times \mathcal{U}$

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(w) - \mu_j| + \sum_{i=1}^{m} |g_i(w)| \ge \exp(-cp(w)). \tag{6}$$

By Theorem 2.1 (or its version for $\mathcal{C}_p(\Omega)$) the functions

$$\{f_j - \mu_j, g_i\}_{1\le j\le k,\, 1\le i\le m}$$

generate the space $\mathcal{A}$. In particular there exist functions $R_j \in \mathcal{A}$ such that

$$\sum_{j=1}^{k} R_j(w, \mu)(f_j(w) - \mu_j) + \sum_{j=k+1}^{k+m} R_j(w, \mu) g_{j-k}(w) = 1. \tag{7}$$

Since the second sum is an element of J we obtain the formula (5). The second part of the assertion follows by Theorem 2.2 in case of the algebra $\mathcal{A}_p(\Omega)$ and directly by the definition of the resolvents defined in section 2 when the algebra $\mathcal{C}_p(\Omega)$ is considered. ∎

By the usual application of a partition of unity we can construct easily a global resolvent of the class $C^\infty(\Omega)$. Nevertheless the nonuniqueness of the resolvent makes difficult the study of its global properties.

The equation (7) permits us to formulate the condition of regularity of a point in a slightly stronger form.

COROLLARY (4.1) *Let K be a compactification of $\mathbb{C}^k$. A point $\lambda \in K$ is regular for $\mathcal{F}$ relative to J if and only if there exist a neighbourhood $\mathcal{O}(\lambda)$, $d > 0$, $c > 0$ and a neighbourhood $\mathcal{V}$ of $\zeta(J)$ such that* (4) *is valid for all $z \in \mathcal{V}$ and for all $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$.*

Proof. Assume that λ satisfies all conditions determined in Definition (4.1). Let $c > 0$, $a > 0$ be such that the functions $R_j(w, \mu)$ in (7) satisfy $|R_j(\cdot, \mu)| \leq a \exp(cp)$ for all finite $\mu \in \mathcal{O}(\lambda)$. Next define

$$\mathcal{V} = \{z \in \beta\Omega | (a \exp(cp) \sum_{j=k+1}^{k+m} |g_{j-k}|)^{\hat{}}(z) < \frac{1}{2}\}.$$

The set $\mathcal{V}$ is a neighbourhood of $\zeta(J)$. Thanks to (7) we obtain for every finite $\mu \in \mathcal{O}(\lambda)$ and for $z \in \mathcal{V}$:

$$1 \leq a(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j| \exp(cp))^{\hat{}}(z) + \frac{1}{2}.$$

Choosing $d < \frac{1}{2a}$ we obtain the desired result. ∎

Exactly as in the case of the cospectrum the knowledge of the spectrum $\sigma(\mathcal{F}, J)$ permits us to obtain $\sigma(\mathcal{F}, J, K)$ for an arbitrary compactification K by simple projection. Let us denote by $P_K : \beta\mathbb{C}^k \to K$ the natural projection which leaves invariant the points of $\mathbb{C}^k$.

PROPOSITION (4.1) $P_K(\sigma(\mathcal{F}, J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K)$.

Proof. Suppose that $\lambda \in K$ is regular for $\mathcal{F}$ relative to J. Let $\mathcal{O}(\lambda)$ be a neighbourhood of λ such that (4) is satisfied. Then $P_K^{-1}(\mathcal{O}(\lambda))$ is the neighbourhood of an $P_K^{-1}(\lambda)$ for which (4) is also satisfied. It means that all elements of $P_K^{-1}(\lambda)$ are regular and consequently $P_K(\sigma(\mathcal{F}, J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J, K)$.

Now assume that $\lambda \in \sigma(\mathcal{F}, J, K)$. For all $d, c > 0$ and for each neighbourhood O of λ there exist $\mu^O \in O \cap \mathbb{C}^k$ and $z^O \in \sigma(J)$ such that

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j^O| \exp(cp))\check{}(z^O) < d.$$

By the compactness of $\beta\mathbb{C}^K$ the generalized sequence $\{\mu^O\}$ has an accumulation point, say $\mu \in \beta\mathbb{C}^k$. It follows by the construction that $P_K\mu = \lambda$.

The point μ is singular because at least for a subsequence μ^U which converges to μ we have

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j^U| \exp(cp))\check{}(z^U) < d. \qquad \blacksquare$$

Any k-tuple $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_k)$ of elements of $\mathcal{A}$ can be treated as a continuous mapping

$$\Omega \ni z \to (f_1(z), \ldots, f_k(z)) \in \mathbb{C}^k \subset \beta\mathbb{C}^k.$$

There exists a unique continuous extension of this map on the domain $\beta\Omega$ which is denoted in the sequel by $\tilde{\mathcal{F}}$. The following result determines the relation between $\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$ and $\sigma(\mathcal{F}, J)$.

THEOREM (4.3)

$$\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J). \tag{8}$$

Proof. Let $\lambda = \tilde{\mathcal{F}}(w)$ where $w \in \zeta(J)$. Suppose that λ is regular for $\mathcal{F}$ with respect to J that is

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j| \exp(cp)\check{}(z) \geq d \tag{9}$$

for all $z \in \zeta(J)$, $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$.

By Corollary 4.1 the above inequality remains valid for $\mu \in \mathcal{O}(\lambda) \cap \mathbb{C}^k$ and $z \in \mathcal{V}$ where $\mathcal{V}$ is a neighbourhood of $\zeta(J)$. Let us choose an arbitrary finite point z from $\mathcal{V} \cap \tilde{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{O}(\lambda))$. Take $\mu_0 = \mathcal{F}(z)$. Obviously $\mu_0 \in \mathcal{O}(\lambda)$ but the left hand side of (9) vanishes at z. This is a contradiction. $\blacksquare$

By applying to both sides of (8) the projection P_K for an arbitrary compactification K of $\mathbb{C}^k$ we obtain immediately

COROLARY (4.2)

$$P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \sigma(\mathcal{F}, J, K). \tag{10}$$

5. Towards the spectral mapping theorem

The question if the inclusion (8) is in fact an equality remains open. In the general case we can only prove that $\sigma(\mathcal{F}, J) \setminus \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \subset \beta\mathbb{C}^k \setminus \mathbb{C}^k$ that is to say inside $\mathbb{C}^k$ both sets coincide.

THEOREM (5.1)

$$\sigma(\mathcal{F}, J) \cap \mathbb{C}^k = \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) \cap \mathbb{C}^k.$$

Proof. In virtue of Theorem 4.3 it remains to prove that $\sigma(\mathcal{F}, J) \cap \mathbb{C}^k \subset \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$. If $\lambda \in \sigma(\mathcal{F}, J) \cap \mathbb{C}^k$ then for arbitrary $c > 0$ and natural n we can find $\mu^{(n)} \in B(\lambda, \frac{1}{n})$ and $z_n \in \zeta(J)$ such that

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu_j^{(n)}| \exp(cp)\right)^{\sim}(z_n) \leq \frac{1}{n}.$$

The factor $\exp(cp)$ is no less than 1 in the whole compactified domain which implies

$$\sum_{j=1}^{k} |\tilde{f}_j(z_n) - \mu_j^{(n)}| \leq \frac{1}{n}.$$

The sequences $\{\tilde{\mathcal{F}}(z_n)\}$ and $\{\mu^{(n)}\}$ are equivalent hence both of them tend to λ. Since the cospectrum $\zeta(J)$ is compact the sequence (z_n) has an accumulation point in some $z \in \zeta(J)$. It means that $\tilde{\mathcal{F}}(z) = \lambda$. ∎

The above result means that if there exists $\lambda \in \sigma(\mathcal{F}, J) \setminus \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$ then for the finite elements of some neighbourhood of λ the generalized resolvents do exist but they form an unbounded subset in $\mathcal{A}$.

In the very special case of $\Omega = \mathbb{C}^n$ and $\mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ we have equality in (8).

Let us denote by $\mathcal{Z}$ the n tuple for which the i-th function is just $f_i(z) = z_i$. The corresponding mapping $\tilde{\mathcal{Z}}$ is the identity in $\beta\mathbb{C}^n$.

THEOREM (5.2) *Let $\Omega = \mathbb{C}^n$. Then*

$$\sigma(\mathcal{Z}, J) = \zeta(J). \tag{11}$$

Proof. The relation $\zeta(J) \subset \sigma(\mathcal{Z}, J)$ follows by Theorem (4.3). It remains to prove that $\sigma(\mathcal{Z}, J) \subset \zeta(J)$. Suppose that $\lambda \in \sigma(\mathcal{Z}, J)$. According to Corollary (4.1) for arbitrary c, $\epsilon > 0$ and for every neighbourhood O of λ and V of $\sigma(J)$ there exists $z \in V \cap \mathbb{C}^n$ and $\mu \in O \cap \mathbb{C}^n$ such that

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j - \mu_j| \exp(cp(z)) < \epsilon. \tag{12}$$

Our aim is to prove that for every $f \in J$ and $d > 0$, the extension $(f \exp(dp))^{\check{}}$ vanishes at λ. In virtue of Corollary (2.5) in [1] there exist functions $Q_j \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^{2n})$ such that

$$f(z) - f(\mu) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(z,\mu)(z_j - \mu_j)$$

and for some constants C, D depending only upon f the inequality

$$|Q_j(z,\mu)| \leq C \exp(D(p(z) + p(\mu))$$

is valid on $\mathbb{C}^{2n}$. Recall that the function p has the property that for appropriate $A, B > 0$ the relation $\|z - \mu\| \leq 1$ implies that $p(\mu) \leq Ap(z) + B$. Choose the neighbourhood V in such a way that $|f \exp(d(Ap + B))|^{\check{}} < \epsilon$ in V. We obtain

$$\begin{aligned} |f(z) - f(\mu)| \exp(dp(\mu)) &\leq \exp(dp(\mu)) \sum_{j=1}^{n} |Q_j(z,\mu)||z_j - \mu_j| \\ &\leq C \exp\big((D + d)p(\mu) + Dp(z)\big) \sum_{j=1}^{n} |z_j - \mu_j| \\ &\leq C \exp\big((D + d)B\big) \exp\big(((D + d)A + D)p(z)\big) \sum_{j=1}^{n} |z_j - \mu_j|. \end{aligned}$$

Since the constants A, B, C, D depend only on the functions f and p we can suppose that the constant e was chosen from the beginning as $((D + d)A + D)$ and in place of ϵ in (12) the value $\epsilon/C \exp((D + d)B)$ has been used. In this way we obtain

$$|f(z) - f(\mu)| \exp(dp(\mu)) \leq \epsilon.$$

Taking into account that $|f(z)| \exp(dp(\mu)) \leq |f(z)| \exp(d(Ap(z) + B)) \leq \epsilon$ we obtain $|f(\mu) \exp(dp(\mu))| \leq 2\epsilon$ for several $\mu \in O \cap \mathbb{C}^n$. Since the neighbourhood O is arbitrary we conclude: $(f \exp(dp))^{\check{}}(\lambda) = 0$. ■

Now applying Theorem 3.4 and Proposition 4.1 we obtain

COROLARY (5.1) *For an arbitrary compactification K of $\mathbb{C}^n$*

$$\sigma(Z, J, K) = \zeta(J, K).$$

Coming back to the question of the equality in place of the inequality in (10) let us observe that for the compactification of Alexandroff K_a of $\mathbb{C}^k$ we have in fact

$$P_{K_a}\bar{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K_a).$$

This equation asserts simply that Theorem 5.1 is valid and both sides can be unbounded only at the same time.

Let us observe also the following

PROPOSITION (5.1) *Assume that for certain compactification K we have the equality*

$$P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K).$$

and that $K \succ C$. Then

$$P_C\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, C).$$

Proof. It suffices to apply the projection $P_{KC}: K \to C$ to both sides of the first equation. ∎

We can also obtain the equality in (16) by imposing several topological condition on the compactification K of $\mathbb{C}^k$.

THEOREM (5.3) *Let K be a compactification of $\mathbb{C}^k$ such that for all $\lambda, \nu \in K$ there exist neighbourhoods O of λ and U of ν such that*

$$\inf_{\mu \in O\cap\mathbb{C}^k, \omega\in U\cap\mathbb{C}^k} \|\mu - \omega\| > 0.$$

Then

$$P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K).$$

Proof. In virtue of Corollary 4.2 it remains to prove that $\sigma(\mathcal{F}, J, K) \subset P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$. We know that for finite points the inclusion is valid, hence suppose that $\lambda \in \sigma(\mathcal{F}, J, K)\setminus\mathbb{C}^k$ and that $\lambda \notin P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$.

According to our supposition for every $w \in P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$ there exist neighbourhoods O_w of λ and U_w of w as well as a constant ϵ_w such that $\|\mu - \omega\| > \epsilon_w$ for all $\mu \in O_w \cap \mathbb{C}^k$ and $\omega \in U_w \cap \mathbb{C}^k$. Since the set $A = P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$ is compact we can choose a finite subcovering from the covering $\{U_w\}_{w\in A}$ obtaining in this way neighbourhoods

$$U = \bigcup_{1\le i\le m} U_{w_i} \text{ and } O = \bigcap_{1\le i\le m} O_{w_i}$$

such that $\|\mu - \omega\| > \epsilon = \min_{1\le i\le m}\{\epsilon_{w_i}\}$ for all finite $\mu \in O$ and $\omega \in U$.

However by the singularity of λ there exists $\mu' \in O\cap\mathbb{C}^k$ and $z \in (P_K\tilde{\mathcal{F}})^{-1}(U)$ such that

$$(\sum_{j=1}^{k} |f_j - \mu'_j|)^{\tilde{}}(z) < \epsilon.$$

By continuity the same is valid for some $z' \in (P_K\tilde{\mathcal{F}})^{-1}(U) \cap \mathbb{C}^n$. This is a contradiction, hence $\lambda \in P_K\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))$. ∎

In particular it is easy to see that the projective spaces $\mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$, $\mathbf{P}^k(\mathbb{C})$ which are compactifications of $\mathbb{C}^k$ satisfy the assumptions of the above theorem. We obtain

COROLARY (5.2) *For an arbitrary* $\mathcal{F} \in \mathcal{A}^k$ *and for* $K = \mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$ *or* $K = \mathbf{P}^k(\mathbb{C})$ *we have*

$$P_K \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J)) = \sigma(\mathcal{F}, J, K).$$

Let us now observe that the spectrum $\sigma(\mathcal{F}, J)$ has other properties which are characteristic for various types of joint spectra considered in the theory of commutative and noncommutative Banach algebras.

The space $\beta\mathbb{C}^k$ can be considered in a natural way as a closed subset of the k-th Cartesian product $\beta\mathbb{C} \times \ldots \times \beta\mathbb{C}$. As the natural injection we consider the continuous extension of the mapping: $\mathbb{C}^k \hookrightarrow \prod_{i=1}^k \beta\mathbb{C}$. Using this convention we can assert the following:

PROPOSITION (5.2)

$$\sigma(\mathcal{F}, J) \subset \prod_{i=1}^{k} \sigma(\{f_i\}, J).$$

Proof. We assert only that if a point $\lambda \in \beta\mathbb{C}^k$ projected in $\prod_{i=1}^k \sigma(\{f_i\}, J)$ on the m-th variable gives us λ_m which is regular for f_m relative to J, then λ is regular for $\mathcal{F}$. This is obvious by the definition of $\varrho(\mathcal{F}, J)$. ■

Let $\mathcal{P}^{(m)} = (P_1, \ldots, P_m)$ be a tuple of polynomials of k complex variables. Denote by $\tilde{\mathcal{P}}^{(m)}$ the continuous extension to $\beta\mathbb{C}^k$ of the mapping $(z_1, \ldots, z_k) \to (P_1(z), \ldots, P_m(z)) \in \beta\mathbb{C}^m$.

THEOREM (5.4) *For every k-tuple $\mathcal{F}$ and for every $\mathcal{P}^{(m)}$*

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(m)}(\sigma(\mathcal{F}, J)) \subset \sigma(\mathcal{P}^{(m)} \circ \mathcal{F}, J).$$

Proof. For simplicity we write just $\mathcal{P}$ in place of $\mathcal{P}^{(m)}$. Given finite points $z \in \Omega$ and $\mu \in \mathbb{C}^k$ let us write

$$P_i(\mathcal{F}) - P_i(\mu) = \sum_{|\alpha|=1}^{r} Q_{i\alpha}(\mu)(f_1 - \mu_1)^{\alpha_1} \ldots (f_k - \mu_k)^{\alpha_k},$$

where $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ is a multiindex, $Q_{i\alpha}$ are polynomials of k variables and r is the maximum of the orders of the polynomials P_i. Assume that $\lambda \in \beta\mathbb{C}^k$ belongs to the spectrum of $\mathcal{F}$ relative to J. Given c, ϵ we can find in each neighbourhood of λ and a finite point μ such that in every neighbouhood of $\zeta(J)$ there exists z which satisfies

$$\sum_{j=1}^{k} |f_j(z) - \mu_j| \exp(cp(z)) \le \min\{\epsilon/M, 1/2\},$$

where $M = \sum_{i=1}^{m} \sum_{|\alpha|=1}^{r} |Q_{i\alpha}(\mu)|$. We obtain

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} &|P_i(\mathcal{F}(z)) - P_i(\mu)| \exp(cp(z)) \\
&\leq \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{|\alpha|=1}^{r} |Q_{i\alpha}(\mu)||f_1(z) - \mu_1|^{\alpha_1} \ldots |f_k(z) - \mu_k|^{\alpha_k}\Big) \exp(cp(z)) \\
&\leq M \sum_{i=1}^{k} \exp(cp(z))|f_i(z) - \mu_i| \leq \epsilon.
\end{aligned}
$$

This proves that $\tilde{\mathcal{P}}(\lambda) \in \sigma(\mathcal{P} \circ \mathcal{F}, J)$. ■

Using the terminology of the spectral theory of topological algebras the above result is the one-way spectral mapping theorem for $\sigma(\mathcal{F}, J)$.

If we consider the projective space as the compactification of $\mathbb{C}^k$ we can obtain a version of the complete spectral mapping theorem.

Assume that $\hat{\mathcal{P}}: \mathbf{P}^k(\mathbb{C}) \to \mathbf{P}^m(\mathbb{C})$ is a continuous application which maps $\mathbf{P}^k(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}^k$ into $\mathbf{P}^m(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{C}^m$ and such that its restriction to $\mathbb{C}^k$ is of the form $\mathcal{P} = (p_1, \ldots, p_m)$, where p_i are polynomials of k complex variables. As a unique continuous extension of a mapping of polynomial type $\hat{\mathcal{P}}$ satisfies the relation

$$
\hat{\mathcal{P}} \circ P_{\mathbf{P}^k(\mathbb{C})} = P_{\mathbf{P}^m(\mathbb{C})} \circ \tilde{\mathcal{P}}. \tag{13}
$$

THEOREM (5.5) *Let $\mathcal{F} \in \mathcal{A}^k$. Then*

$$
\hat{\mathcal{P}}(\sigma(\mathcal{F}, J, \mathbf{P}^k(\mathbb{C}))) = \sigma(\mathcal{P} \circ \mathcal{F}, J, \mathbf{P}^m(\mathbb{C})).
$$

Proof. We calculate applying Corollary 5.2 and (13):

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{P}}(\sigma(\mathcal{F}, J, \mathbf{P}^k(\mathbb{C}))) &= \hat{\mathcal{P}}(P_{\mathbf{P}^k(\mathbb{C})}\tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))) \\
&= P_{\mathbf{P}^m(\mathbb{C})}(\tilde{\mathcal{P}} \circ \tilde{\mathcal{F}}(\zeta(J))) = \sigma(\mathcal{P} \circ \mathcal{F}, J, \mathbf{P}^m(\mathbb{C})).
\end{aligned}
$$
■

If we use the real projective space $\mathbf{P}^{2i}(\mathbb{R})$ as the compactification of $\mathbb{C}^i$ we obtain in the same way the formula

$$
\hat{\mathcal{P}}(\sigma(\mathcal{F}, J, \mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R}))) = \sigma(\mathcal{P} \circ \mathcal{F}, J, \mathbf{P}^{2m}(\mathbb{R})), \tag{14}
$$

valid for every

$$
\hat{\mathcal{P}}: \mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R}) \to \mathbf{P}^{2m}(\mathbb{R})
$$

which is of complex polynomial type on $\mathbb{C}^k$ (canonically imbedded in $\mathbf{P}^{2k}(\mathbb{R})$) and which sends the points at infinity into points at infinity.

6. Multiplicative functionals on $\mathcal{A}_p(\Omega)$

The functional of the evaluation at a given point $z \in \Omega$

$$\chi_z : \mathcal{A}_p(\Omega) \ni f \to f(z) \in \mathbb{C}$$

is a continuous multiplicative functional on $\mathcal{A}_p(\Omega)$. It is natural to ask if the functionals of the form χ_z for $z \in \Omega$ are the unique continuous multiplicative functionals on $\mathcal{A}_p(\Omega)$. The answer is positive and in [4] we can find this result. It is deduced however from the same fact which is the subject of our Theorem 2.3 and it seems that its proof in [4] is not complete. In this section we prove a stronger result and the proof is simpler. In particular it does not make use of the functional calculus of Waelbroeck.

It results that all multiplicative functionals on $\mathcal{A}_p(\Omega)$ are given by the evaluation at a fixed point $z \in \Omega$. In particular it means that all multiplicative functionals are continuous and the maximal ideals $\mathcal{M}_z$ for $z \notin \Omega$ are of codimension > 1.

THEOREM (6.1) *Every nonzero multiplicative functional on $\mathcal{A}_p(\Omega)$ is of the form χ_z for some $z \in \Omega$.*

Proof. Let $\chi : \mathcal{A}_p(\Omega) \to \mathbb{C}$ be a nontrivial multiplicative functional. Its kernel $J_\chi = \{f \in \mathcal{A}_p(\Omega) | \chi(f) = 0\}$ is an ideal of codimension 1. Its extended cospectrum is nontrivial and for $\mu \in \zeta(J_\chi)$ we have for every $f \in J_\chi$:

$$\lim_{\Omega \ni w \to \mu} f(w) = 0$$

by Theorem 3.2.

Since $f - \chi(f) \in J_\chi$ for an arbitrary $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ we obtain

$$\lim_{\Omega \ni w \to \mu} f(w) = \chi(f) \tag{15}$$

for all $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$. In particular taking $f_j(w) = w_j$ we observe that $\chi(f_j) = \lim_{\Omega \ni w \to \mu} w_j$. It implies in particular that $z = (\chi(f_1), \dots, \chi(f_n))$ belongs to $\bar{\Omega}$ (closure in $\mathbb{C}^n$!). If $z \in \Omega$ then the functional χ is equal to χ_z by (15) and we are done.

Suppose that $z \in \bar{\Omega} \setminus \Omega$. We need the following result which in the Waelbroeck's terminology says that Ω is a spectral set for Ξ:

PROPOSITION (6.1) [4], [13] *There exists $t > 0$ such that for every $\lambda \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$ there exist $r_j(\lambda) \in \mathcal{A}_p^t$ which satisfy*

$$\sum_{j=1}^{n} (w_j - \lambda_j) r_j(\lambda) = 1 \tag{16}$$

for all $w \in \Omega$. The set of all functions $\{r_j(\lambda)\}$ is bounded in $\mathcal{A}_p^t$.

Putting $\lambda_j = \chi(f_j)$ in (16) and applying χ to both sides we obtain a contradiction. ∎

The following corollaries are obvious.

COROLARY (6.1) *All multiplicative functionals on $\mathcal{A}_p(\Omega)$ are continuous. All maximal ideals of $\mathcal{A}_p(\Omega)$ of codimension 1 are of the form $\mathcal{M}_z$ where $z \in \Omega$.*

COROLARY (6.2) *For every $\mu \in \beta\Omega \setminus \Omega$ there exists $f \in \mathcal{A}_p(\Omega)$ such that* $\lim_{\Omega \ni w \to \mu} |f(w)| = \infty$.

GENARO ALMENDRA
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO
AREA DE MATEMÁTICAS

ANTONI WAWRZYŃCZYK
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS

REFERENCES

[1] C.A.BERENSTEIN AND B.A.TAYLOR, *Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with applications to harmonic analysis*, J. Anal. Math., **38**, (1980), 188–254.
[2] L.CARLESON, *Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math. 2, **76**, (1962), 547–559.
[3] L. EHRENPREIS, Fourier Analysis in Several Complex variables, Wiley-Interscience, New York, 1970.
[4] J-P. FERRIER, Spectral Theory and Complex Analysis, North-Holland, Mathematics Studies 4, 1973.
[5] D.I.GUREVICH, *Countrexamples to the problem of L.Schwartz, Funktsional.* Anal. i Prilozhen., 2, **9**, (1975), 29–35.
[6] L. HÖRMANDER, *Generators of some rings of analytic functions*, Ann. of Math., 2, **76**, (1962), 943–949.
[7] L. HÖRMANDER, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Springer Verlag, 1990.
[8] J. J. KELLEHER, B. A. TAYLOR, *Closed ideals in locally convex algebras of analytic functions*, J. Reine Angew. Math. **255**, (1972), 190–209.
[9] R. C. WALKER, The Stone-Čech Compactification, Springer Verlag, 1976.
[10] L. WAELBROECK, Lectures in spectral theory, Dept. of Math., Yale University, 1963.
[11] A. WAWRZYŃCZYK, *How to make nontrivial the spectrum of a translation invariant space of smooth functions*, Informe de Investigación, UAM-I, 1991.
[12] A. WAWRZYŃCZYK, *El espectro extendido y el análisis espectral de espacios invariantes*, Aport. Mat., Comunicaciones **11**, (1992), 41–55.
[13] A. WAWRZYŃCZYK, *A note on generating ideals of holomorphic functions*, Informe de Investigación, UAM-I, 1993, submitted for publication.
[14] W. ZELAZKO, Banach Algebras, Elsevier Publ. Comp. and PWN, 1973.