



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

DIVISIÓN DE CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES
POSGRADO EN CIENCIAS ECONÓMICAS

“EXPECTATIVAS COMPLEJAS ADAPTATIVAS (ECA) Y
DINÁMICA EN LOS MERCADOS ESPECULATIVOS DEL
SISTEMA FINANCIERO”

TESIS

QUE PRESENTA:

MTRO. ERNESTO XAVIER VERA GÓMEZ

MATRÍCULA: 2181801269

PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS ECONÓMICAS

DIRECTOR: DR. IGNACIO LLAMAS HUITRÓN

SINODO:

PRESIDENTE DR. MARCO ANTONIO PÉREZ MÉNDEZ

VOCAL 1 DR. IGNACIO LLAMAS HUITRÓN

VOCAL 2 DRA. KARLA ALEJANDRA PACHECO SÁNCHEZ

VOCAL 3 DR. ALEJANDRO PUGA CANDELAS

SECRETARIO DR. WASHINGTON JESÚS QUINTERO MONTAÑO

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO, 25 DE MARZO DE 2024



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00032

Matrícula: 2181801269

Expectativas Complejas
Adaptativas (ECA) y Dinámica
en los Mercados
Especulativos del Sistema
Financiero.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 14:30 horas del día 25 del mes de marzo del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. MARCO ANTONIO PEREZ MENDEZ
DR. IGNACIO LLAMAS HUITRON
DRA. KARLA ALEJANDRA PACHECO SANCHEZ
DR. ALEJANDRO PUGA CANDELAS
DR. WASHINGTON JESUS QUINTERO MONTAÑO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS ECONÓMICAS

DE: ERNESTO XAVIER VERA GOMEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



ERNESTO XAVIER VERA GOMEZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTORA DE LA DIVISIÓN DE CSH

DRA. SONIA PEREZ TOLEDO

PRESIDENTE

DR. MARCO ANTONIO PEREZ MENDEZ

VOCAL

DR. IGNACIO LLAMAS HUITRON

VOCAL

DRA. KARLA ALEJANDRA PACHECO SANCHEZ

VOCAL

DR. ALEJANDRO PUGA CANDELAS

SECRETARIO

DR. WASHINGTON JESUS QUINTERO MONTAÑO

Expectativas Complejas Adaptativas (ECA) y Dinámica en los Mercados Especulativos del Sistema Financiero

Resumen

Las expectativas en los modelos económicos tradicionales se encuentran dadas como un dato dentro de las condiciones iniciales. No se tiene en cuenta como es el proceso de su formación ni su implicación en la interacción de los agentes. Se plantea el algoritmo de las Expectativas Complejas Adaptativas (ECA) para estudiar la formación de las expectativas en un mercado particular del sistema financiero. Construimos un mercado artificial basado en el Juego de la Minoría con el objetivo de realizar simulaciones Montecarlo para replicar el comportamiento y dinámica de un mercado real. Se comprueba que la formación de expectativas se puede explicar como un proceso complejo adaptativo, del cual se pueden determinar los precios.

Palabras clave: *Expectativas, Mercados Artificiales, Complejidad, Algoritmo, MBA.*

Complex Adaptive Expectations (CAE) and Dynamics in the Speculative Markets of the Financial System

Abstract

Expectations in traditional economic models are given as a datum within the initial conditions. It does not take into account the process of their formation or their involvement in the interaction of agents. The algorithm of Complex Adaptive Expectations (CAE) is proposed to study the formation of expectations in a particular market of the financial system. We built an artificial market based on the Minority Game with the aim of performing Montecarlo simulations to replicate the behavior and dynamics of a real market. It is proven that the formation of expectations can be explained as a complex adaptive process, from which prices can be determined.

Keywords: *Expectations, Artificial Market, Complexity, Algorithm, ABM.*

Agradecimientos

A mi amiga, novia, prometida y futura esposa Jessie por el apoyo y amor incondicional que recibo día a día. Mi amor, admiración y adoración te pertenecen eternamente a ti.

A la Sra. Cristina, mi madre, por estar cuidando siempre de mí y de Jessie desde la distancia. Nuestros triunfos son tuyos.

A mi familia. En especial a mis hermanos Crithian, Josue y Edu.

Al Dr. Ignacio Llamas por su paciencia, guía y consejos. Gracias por confiar y creer en mis capacidades.

A la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM) y al Posgrado en Ciencias Económicas por poner a disposición su planta académica e instalaciones.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) por los recursos financieros facilitados para mi estancia en México e investigación. CVU: 892577.

Índice general

1. Expectativas en la economía.	17
1.1. Antecedentes teóricos y empíricos.	17
1.1.1. Expectativas Estáticas.	18
1.1.2. Expectativas Adaptativas.	18
1.1.3. Expectativas Extrapolativas.	19
1.1.4. Expectativas Implícitas.	20
1.1.5. Expectativas Racionales.	21
1.1.6. Expectativas Cuasi Racionales.	22
1.1.7. Expectativas Autocumplidas.	22
1.1.8. Expectativas Convergentes y Competitivas.	26
1.2. Expectativas Endógenas y Mercados Artificiales.	27
2. Microcosmos: Expectativas Complejas Adaptativas.	34
2.1. Los agentes.	34

2.1.1.	Racionalidad.	36
2.2.	Expectativas Complejas Adaptativas.	37
2.2.1.	Algoritmo de las ECA.	46
3.	Juego de la Minoría.	55
3.1.	El bar «El Farol».	57
3.2.	El Juego de la Minoría básico.	59
3.2.1.	Los Agentes.	60
3.2.2.	Información pública.	60
3.2.3.	Estrategias de los agentes.	60
3.2.4.	Valoración de las estrategias.	62
3.2.5.	Dinámica y selección de estrategias.	62
3.3.	Fenomenología del Juego de la Minoría.	63
3.3.1.	Propiedades estadísticas de la oferta agregada.	63
3.3.2.	Volatilidad y parámetros de control.	66
3.3.3.	Previsibilidad.	69
3.3.4.	Agentes “Congelados”.	71
3.3.5.	Memoria falsa (o historia falsa).	72
4.	Mercado artificial con ECAs.	79
4.1.	Diseño del mercado artificial.	80

4.1.1.	Los agentes.	80
4.1.2.	Información.	81
4.1.3.	Estrategias.	82
4.1.4.	Valoración de las estrategias.	83
4.1.5.	Selección y calibración de las estrategias.	84
4.1.6.	Riqueza de los agentes.	85
4.1.7.	Dinámica de la formación de precios del mercado artificial.	87
4.1.8.	Resultados obtenidos de las simulaciones computacionales del mercado artificial.	88
4.2.	Mercado Artificial de las ECA con ruido de decisión y perturbación en la valoración de estrategias.	95
4.2.1.	Resultados obtenidos de las simulaciones computacionales del mercado artificial con ruido de decisión y perturbación en la valoración de estrategias.	97
4.3.	Mercado Artificial con memoria “falsa”.	104
4.3.1.	Resultados obtenidos de las simulaciones computacionales del mercado artificial con memoria “falsa”.	106
4.4.	Mercado Artificial con memoria “falsa”, ruido de decisión y perturbaciones en la valoración de las estrategias.	113
4.4.1.	Resultados obtenidos de las simulaciones computacionales del mercado artificial con memoria “falsa”, ruido de decisión y perturbación en la valoración de estrategias.	114

5. Conclusiones	122
5.1. Resumen y conclusiones.	122
5.2. Agenda pendiente.	127
A. Conceptos básicos.	129
A.1. La función generadora.	129
A.1.1. Primeros momentos.	130
A.1.2. Segundos momentos.	132
A.1.3. Generalización Momentos k-ésimos.	134
A.2. Método de punto silla.	137
B. Juego de la Minoría y Función Generadora.	139
B.1. Algunas definiciones importantes.	140
B.1.1. Juego de la Minoría sin ruido de decisión.	140
B.1.2. Ruido de decisión y perturbaciones de valoración para $S = 2$	141
B.1.3. La función generadora o característica.	143
B.1.4. Análisis de la función generadora y el desorden.	146
B.2. Función Generadora promediada por el desorden.	148
B.2.1. Evolución del desorden.	148
B.2.2. Ecuaciones de Punto Silla.	154
C. Programación.	158

C.1. Recursos.	158
C.2. Resultados Adicionales.	158
C.2.1. Resultados con memoria real.	159
C.2.2. Resultados con memoria “falsa” (o historia “falsa”).	163
Bibliografía	167

Preámbulo

Problema de investigación.

Las expectativas como mecanismo de toma de decisiones no es exclusivo del campo de la economía. Toda decisión que implique un resultado a posteriori tiene como base una expectativa. El concepto de expectativa en economía se basa en la anticipación de eventos (pronósticos). En este trabajo las expectativas se abordan como modelos mentales y/o conjeturas, los cuales realizamos dada cierta información (o contexto) para elaborar escenarios y estrategias de acción.

Las expectativas en la teoría económica han tenido un tratamiento de estasis dinámica, no solo para facilitar la modelación empírica, sino también la modelación teórica. En el mejor de los casos, las expectativas, entran de forma exógena en modelos que son planteados de forma ergódica con una dinámica lineal (causa-efecto). Esto parte del principio donde se asume que solo se pueden obtener resultados aproximados de la realidad si se supone la realidad que se quiere estudiar, es decir, sin supuestos no hay teoría¹.

Las aproximaciones hechas a partir de este tipo de enfoques ergódicos de la realidad carecen de sustento que expliquen la dinámica real. Muchas veces no logran aproximar el comportamiento de los agentes que son parte del fenómeno económico. Se plantea un agente omnisciente a través de la teorización ortodoxa de la racionalidad maximizadora, dejando

¹El objetivo no es eliminar los supuestos, se busca evitar el reduccionismo codicioso, partiendo del planteamiento de supuestos menos restrictivos y que sean lo más próximo al fenómeno económico que se quiere estudiar.

de lado que biológicamente somos seres con limitaciones cognitivas². Además, el uso del individualismo metodológico merma la importancia de la injerencia de las relaciones que tienen los agentes del sistema en otros agentes y en el propio sistema. Es decir, se plantea un proceso netamente individual.

En este sentido, las expectativas no tienen un rol fundamental, puesto que los agentes conocen toda la información y son capaces de procesarla. Incluso relajando el supuesto de la racionalidad completa, las expectativas siguen sujetas al ancla metodológica del individualismo. Otros supuestos como el agente representativo descartan el papel de las expectativas en la toma de decisiones, que, además, se contraponen a la idea del individualismo metodológico, como expone Hodgson (2007).

La teoría económica y financiera tradicional argumenta que la formación de las perturbaciones son producto, en principio, de factores exógenos y descarta la formación de ciclos de forma endógena. Las interpretan como un cambio de equilibrio dada la racionalidad de los agentes. Expuesta esta argumentación, no se da cabida a que la propia estructura del sistema puede causar los cambios y oscilaciones que se tienen en el sistema financiero.

Desde nuestro punto de vista, las expectativas yacen en el núcleo de la teoría económica al reconocer la existencia de un mecanismo de formación de precios, pero en contextos ajenos al de existencia de incertidumbre. Estudiar la estabilidad de los mercados y la formación de precios se encuentra dentro de las líneas de investigación principales en teoría económica. En un marco teórico donde la existencia de la incertidumbre es fundamental e inherente en el sistema, no podría tomarse una decisión, de cualquiera que fuera su tipo, sin generar expectativas.

Nos interesa conocer como se forman las expectativas en los mercados, es por esto que utilizamos el Juego de la Minoría como modelo base. Este permite que los agentes generen sus expectativas de forma endógena y tomen decisiones de acuerdo a las estrategias que estos tienen.

²Tampoco se toman en cuenta las limitaciones físicas del ser humano, menos, las del espacio-tiempo que los agentes ocupan en algunas de las modelaciones.

Preguntas de Investigación.

El interés de estudiar las expectativas y su formación endógena, con perturbaciones tanto exógenas como endógenas originadas por la dinámica del propio sistema, en los mercados especulativos del sistema financiero, nos lleva a plantearnos las siguientes preguntas preliminares de investigación:

- ¿Cómo se forman las expectativas en los mercados especulativos del sistema financiero?
- ¿Qué papel juegan la formación de expectativas en la formación de ciclos bursátiles?
- ¿Por qué las relaciones agente-agente, agente-sistema-agente son importantes en la formación de expectativas?
- ¿Cuáles son las implicaciones de tratar a las expectativas como un proceso complejo y sus consecuencias en un sistema dinámico no lineal (como el de un mercado artificial)?

Justificación.

Las expectativas en la modelación teórica y empírica, en economía, se han desarrollado en dos etapas, una de estasis total (expectativas como un dato estático) hasta pasar a una con dinámica lineal (expectativas racionales). Pero esta dinámica solo funciona si y solo si se hacen supuestos muy restrictivos sobre los agentes de una realidad que es lejana a la que se debería estudiar. La teoría económica tradicional supone que los actores calculan su elección maximizando su utilidad esperada. En la mayoría de modelos se parte de un conjunto fijo de preferencias, dadas las dotaciones y restricciones de los factores. Los agentes tienen información completa de lo que ha sucedido en el sistema y que existe competencia perfecta. Además, es común suponer que cuando más cerca están los eventos con el tiempo tienden a seguir las mismas leyes del punto de partida.

En este sentido, las expectativas en el marco de la teoría económica (y financiera) tradicional se centran en el cumplimiento de pronósticos. No hay un consenso en cómo se

forman las expectativas, menos en su rol en la toma de decisiones y cómo influyen en las oscilaciones del sistema. La agenda de investigación de las expectativas tuvo relevancia en la época de posguerra de la Segunda Guerra Mundial, después de este periodo de tiempo se dejó de lado. La mayoría de estas agendas de investigación giran alrededor de la instrumentación de las expectativas para la modelación empírica, sin llegar a profundizar en aspectos teóricos y metodológicos³.

Consideramos que es pertinente que se estudie la formación de las expectativas, ya que no existe un consenso ni un marco integrador, para así entender su funcionamiento y la importancia que tienen en el sistema en que se generan. No hay que descartar los avances de los diferentes autores que han trabajado las expectativas, pero es necesario plantearlas desde otra perspectiva.

El sistema financiero es un gran generador de datos, es de los más prolíficos que tiene la economía como ciencia. Esto hace que el estudio de los mercados financieros sean muy interesantes para utilizar nuevas técnicas matemáticas y tecnologías computacionales. Al ser mercados bien organizados y dinámicos, crean información de buena calidad en comparación de otros mercados en economía. Pero la modelación teórica y empírica gira en torno a las ideas de expectativas estáticas, “adaptativas” y racionales. Siendo la última la que más acogida ha tenido por el reduccionismo que permiten sus condiciones iniciales. Se necesita modelar a un sistema teniendo en cuenta tres factores: Sus agentes, sus relaciones y el sistema; todos conectados de alguna forma entre sí.

El Juego de la Minoría nos permite tener en cuenta estos factores. Forma parte de los modelos modernos en economía y a través de la Modelación Basada en Agentes (MBA) podemos analizar la dinámica del sistema. Necesitamos tener en cuenta que los sistemas económicos están compuestos por “humanos”. Estos aportan cuatro características fundamentales que hacen que el tratamiento de los sistemas se plantee de forma diferente: capacidad de razonamiento, previsión e intencionalidad, comunicación y tecnologías (sociales y físicas).

³Se hicieron avances en el estudio del comportamiento de los agentes a nivel estratégico con la teoría de juegos, pero eran modelos que no estaban al alcance de toda la comunidad de investigadores en economía debido al nivel de matemáticas que se necesitaba dominar.

En particular, nos interesa el sistema financiero, aunque el proceso de formación de expectativas y sus consecuencias se puede extrapolar a cualquier otro tipo de mercado. Entendemos al sistema financiero como un sistema en el cual la formación de expectativas es endógena. Las expectativas son parte importante del proceso de toma de decisiones y en este proceso se generan emergencias. Entonces, hay que modelar un sistema donde:

1. Los agentes tengan capacidades físicas y cognitivas limitadas. También se deben tener en cuenta las heterogeneidades de los mismos.
2. La dinámica de los agentes se fundamenta en la interacción y esta puede ser computacionalmente irreductible, es decir, hay que seguir paso a paso el proceso y no reducirlo, en primera instancia, a una expresión matemática generalizadora.
3. El contexto en que se desarrollen los agentes es importante, porque al interactuar en los mercados del sistema financiero se genera información.
4. Hacer relevante la heurística como transferencia del conocimiento impulsa las acciones del agente, por lo tanto, hay una retroalimentación entre su percepción del medio ambiente y el modelo interno del agente.
5. Las interacciones de los agentes pueden cambiar el entorno en el que se desenvuelven y su propio comportamiento con su toma de decisiones. Esto conduce a fenómenos emergentes dentro del sistema.
6. Los agentes se desenvuelven en un ecosistema complejo y esta complejidad se genera por dos elementos que actúan en conjunto: las interacciones entre los agentes y la retroalimentación hacia el sistema.

Objetivos.

Objetivo General.

1. Proponer un modelo teórico preliminar basado en el Juego de la Minoría con formación de Expectativas Complejas Adaptativas (ECA) que capture la dinámica de los mercados especulativos del sistema financiero.

Objetivos Específicos.

1. Analizar las principales concepciones y tratamientos utilizados de las expectativas en la teoría económica financiera.
2. Describir la unidad de análisis: el agente especulativo, y su entorno como un Sistema Complejo Adaptativo (SCA).
3. Presentar el marco conceptual del Juego de la Minoría.
4. Plantear un mercado artificial a partir de la concepción de la regla minoritaria de comportamiento que incorpore la formación de las expectativas como un proceso complejo adaptativo y sus emergencias.

Hipótesis preliminares.

- Las expectativas se forman a través de las relaciones e interacciones individuales, y de estas con las estructuras sociales en un proceso de constante retroalimentación y recursividad, es decir, su funcionamiento es el de un Sistema Complejo Adaptativo, produciendo la dinámica de los mercados especulativos del sistema financiero.
- Las expectativas complejas adaptativas (ECA) explican el funcionamiento y determinación del sendero homeostático de reproducción del sistema financiero.

Capítulo 1

Expectativas en la economía.

En este primer capítulo abordaremos las principales ideas sobre expectativas en la teoría económica. Estos enfoques son utilizados generalmente en modelos teóricos y empíricos, hacen hincapié en el interés de diferentes programas de investigación de estudiar decisiones económicas después de la Segunda Guerra Mundial. Prevalecen los supuestos de racionalidad completa, competencia perfecta y simetría de la información.

1.1. Antecedentes teóricos y empíricos.

En la teoría económica han surgido diferentes estudios y líneas de investigación sobre las expectativas. Los más prominentes y utilizadas tanto en la modelación empírica como en la teórica, fueron producto de diversos programas de investigación después de la Segunda Guerra Mundial.

El centro de estudio de las expectativas es la formación de precios. Básicamente que tan precisos son los agentes en los escenarios de pronósticos.

1.1.1. Expectativas Estáticas.

Considerar las expectativas como estáticas es muy común para simplificar los problemas de modelación empírica y teórica en los fenómenos económicos. En este sentido, no se le da importancia a la dinámica de cómo se forman o cómo funcionan, puesto que no tienen ningún papel en los modelos.

Nerlove y Bessler (2001) argumentan que cualesquiera que sean estas expectativas y como se formen, la solución de equilibrio de largo plazo se da si el problema de optimización está bien definido y además se supone que las variables exógenas esperadas en el futuro no cambian. Esto implica que lo que suceda hoy no cambia los valores futuros, puesto que todos los agentes tienen las mismas expectativas y estas no cambian.

En el caso de estudios de los mecanismos de precios, es común suponer que el precio del activo o bien es $p_{t-1} = p_t$, es decir, el precio actual se mantendrá en el próximo periodo de tiempo.

Este tipo de expectativas no fue satisfactorio porque implican que los agentes utilizan el valor actual para elaborar escenarios futuros, sin tener en cuenta la información pasada.

1.1.2. Expectativas Adaptativas.

Nerlove (1956) atribuye la idea de expectativas adaptativas a Phillip Cagan, en su tesis para obtener el grado de Ph.D. de 1956, en su disertación sobre hiperinflaciones; pero más tarde Nerlove (1956b, 1958c) dice que la idea es esencialmente de Hicks. Milton Friedman afirma que tuvo la idea de Bill Phillips. Sus primeras aplicaciones fueron en el estudio de la determinación de precios futuros.

Los precios “normales”¹ se revisan en cada periodo en proporción a la diferencia entre el precio observado en el último periodo y la expectativa de los precios previa.

¹El precio “normal”, es un precio promedio que se espera que prevalezca en todos los períodos futuros.

A diferencia de las expectativas estáticas, en las adaptativas, ya existe una dinámica lineal que implica la revisión constante del cumplimiento de las expectativas. Además, estas expectativas están formadas por una multitud de influencias, en este sentido, las influencias y sus efectos se reducen en suponer que el precio normal se representa en función de los precios pasados.

$$p_t^* = p_t^* + \beta(p_{t-1} - p_t^*), \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (1.1)$$

En la ecuación (1.1) Nerlove y Bessler (2001, p. 167) relacionan la idea de expectativas adaptativas con la de elasticidad de las expectativas de Hicks (1946).

Esto quiere decir que, los agentes elaboran creencias de precios futuros con base en la información que han obtenido de precios pasados. Es una suma ponderada de las observaciones pasadas del historial de precios, estas ponderaciones se reducen a medida que aumenta el horizonte temporal.

1.1.3. Expectativas Extrapolativas.

Este tipo de expectativas supone que las variables sobre las cuales se generen las expectativas podrían identificarse directamente con algún valor real pasado. Nerlove (1956a, 1956b) manifiesta que antes ese era el método clásico en el análisis de la oferta agrícola según las expectativas de producción.

Una extensión de este enfoque es el de Goodwin (1947), que consiste en suponer que el precio esperado en el periodo t es el precio real en $t - 1$ sumado o restado a la fracción del cambio en el precio del periodo $t - 2$ a $t - 1$, expresado matemáticamente:

$$p_t^* = p_{t-1} + \alpha(p_{t-1} - p_{t-2}) \quad (1.2)$$

A este tipo de tratamiento de las expectativas (1.2) Muth (1961) lo denominó expec-

tativas extrapolativas, porque prácticamente es extrapolar un precio futuro a partir de los precios realizados.

1.1.4. Expectativas Implícitas.

Las expectativas implícitas fueron propuestas por Mills (1959). Su planteamiento de las expectativas parte del reconocimiento de que es una función de variables observables, como también una estimación de los tomadores de decisiones. A partir de que las expectativas son una estimación, deduce que estas tienen propiedades estadísticas. De esto infiere que los economistas pueden estimar la relación de comportamiento de la expectativa misma de forma implícita².

Como las expectativas pueden deducirse de una estimación tenemos entonces que el error de las expectativas estaría dada por la ecuación (1.3):

$$x = x^e + u \tag{1.3}$$

despejando x^e tenemos:

$$x^e = x - u \tag{1.4}$$

donde u es el error del tomador de decisiones de predecir x . Si tomamos una relación lineal tendremos que:

$$y = Y(x^e) = Y(x - u) \tag{1.5}$$

Esta sería una relación del error en el tipo de variable, ya que la variable observada x difiere de la variable verdadera x^e por un error de observación u . Prácticamente, todo lo que

²Al referirse la expectativa implícita que es una estimación de un valor tal que, si esta fuera la verdadera expectativa, se aproximaría al comportamiento observado (Nerlove y Bessler, 2001).

se sabe sobre las propiedades estadísticas de las estimaciones de tales relaciones se refiere al caso en el que la función Y es lineal (Nerlove y Bessler, 2001, p. 171).

1.1.5. Expectativas Racionales.

Las expectativas racionales han dominado la modelación tanto teórica como empírica de las expectativas desde principio de los 70s, teniendo fuerte influencia en los tomadores de decisiones. Muth (1961) introdujo la hipótesis de las expectativas racionales, que surgió como crítica a las expectativas adaptativas, ya que si existe una tendencia de crecimiento en los precios, los agentes tenderían a infraestimar los precios futuros.

Los modelos de expectativas racionales se basan en la premisa de que toda la información con la que se forma la expectativa se utiliza en el proceso, por lo que los agentes no tienen pronósticos insesgados sistemáticamente y además su estrategia es la mejor respuesta posible al comportamiento de otros agentes.

En el modelo de Muth (1961, p. 325) las expectativas se analizan por medio de la variación de inventario y de su especulación, en este sentido tenemos:

$$P_t = \gamma p_t^e + u_t \quad (1.6)$$

$$I_t = \alpha(p_{t+1}^e - p_t) \quad (1.7)$$

Donde P_t es la producción, p_t son los precios, p_t^e es el precio esperado, es decir, la expectativa de precios, I_t son los inventarios, u_t es el término de perturbación γ y α son constantes.

En las ecuaciones (1.6) y (1.7) se observa la dinámica lineal del modelo, y que solo funciona si y solo si se tiene toda la información y además con el comportamiento de un agente representativo. En esta formulación de las expectativas, en forma general, se reemplaza por

la implicación de que los valores futuros anticipados de las variables relevantes son iguales a sus expectativas condicionadas a todos los datos pasados y al modelo en sí, que describe el comportamiento del modelo basado en esas expectativas.

En otras palabras, dado el modelo de equilibrio general, los agentes son capaces de anticipar dicho valor de equilibrio al momento de desarrollar sus expectativas. A partir de esta idea de expectativas Lucas (1980) formuló su crítica a los modelos macroeconómicos keynesianos por su falta de fundamentos microeconómicos. Manifestaba que se podían obtener resultados diferentes de una política económica a partir de expectativas y preferencias no iguales, haciendo que no se puedan predecir los efectos de la mencionada política.

De la hipótesis de expectativas racionales surgieron dos más, la proposición sobre la ineficiencia de la política y la hipótesis de mercados eficientes. La primera hace referencia a que los agentes son capaces de anular cualquier efecto de política económica, dado que los agentes son capaces de anticiparla. La segunda es que si los agentes tienen expectativas racionales, los precios en los mercados financieros reflejarán toda la información disponible.

1.1.6. Expectativas Cuasi Racionales.

Estas surgen como alternativa para la modelación empírica a través de modelos econométricos. Son una forma de expectativas racionales relajando algunos supuestos al introducir como ruido blanco una perturbación aleatoria. Nerlove (1967) y Carvalho (1972) desarrollan con detalle este tipo de modelos.

1.1.7. Expectativas Autocumplidas.

Farmer (1999) hace referencia a las profecías autocumplidas, es decir, expectativas que se generan a partir de información o creencias falsas, generando expectativas falsas, pero que terminan creyendo los agentes que son verdaderas y con base en estas expectativas generadas toman decisiones.

Su principal interés era modelar expectativas racionales que permitan flexibilidad en la descripción de la dinámica del sistema.

El interés por estudiar la hipótesis de expectativas autocumplidas surge porque ofrecía una posible solución a los problemas de indeterminación y equilibrios múltiples planteados al aplicar expectativas racionales a modelos de finales de los setenta³.

Es una idea muy utilizada dentro de la teoría macroeconómica para explicar que las expectativas pueden ser autocumplidas dentro de la actividad económica. Esto lo podemos ver cuando existen expectativas positivas sobre el estado actual de la economía que se extrapolan a un estado positivo futuro. Si pongamos que las empresas tienen expectativas positivas del estado de la economía, lo que hace que aumenten su inversión y los consumidores su gasto, produciendo un auge económico que valida las expectativas iniciales.

Las profecías autocumplidas son muy comunes dentro del sistema financiero. Cuando mareas de optimistas (o pesimistas) llegan a los mercados financieros, podemos observar como estas profecías autocumplidas se transforman en expectativas, dando como resultado fluctuaciones en los mercados financieros, validando el optimismo (o pesimismo) del agregado de los agentes participantes.

Este tipo de expectativas pueden explicar, en parte, los ciclos económicos cuando una cantidad de información reafirma la expectativa. Esta validación solo es posible si los agentes llegan a tener un comportamiento tipo manada, dejándose llevar por un atractor: un agente o institución que es influyente dentro del mercado financiero. En este caso, las acciones de los agentes dependen de las acciones de otros agentes y, por tanto, del mercado.

Si se espera que el precio de una acción sea mayor, a pesar de no contar con la información suficiente que sostenga este supuesto, la ola optimista hará que otros agentes confíen en esta “corazonada”, y validarán la expectativa inicial, haciendo que se cumpla, es decir que los agentes son inducidos a creer en ella. El resultado económico de ese mercado está condicionado por la profecía.

³Es por esto que a las expectativas autocumplidas también se las llame indeterminadas

Esto también lo podemos observar en la parte real de la economía, cuando el gobierno comunica noticias positivas sobre el futuro cercano de la economía del país, como el anuncio de indicadores adelantados (crecimiento, desempleo, inflación), tenemos que afectan de forma positiva a la actividad económica. Incluso si los datos que utilizan para sus proyecciones fueran falsos, contribuyendo a la validación de las expectativas generadas en un principio. Esta se convertiría en una especie de cortina de humo que los empresarios e inversionistas utilizarían para afianzar su confianza comercial.

De acuerdo con Grisse (2009) hay dos formas de probar si las fluctuaciones económicas son causadas por expectativas autocumplidas. La primera, partiendo de un modelo teórico que identifique el mecanismo subyacente a través del cual las expectativas afectan la actividad económica, para así derivar en las condiciones en las que los parámetros deben cumplirse. Luego se puede calibrar el modelo y probar si las restricciones de los parámetros se cumplen en los datos. La segunda forma es tratar de identificar choques a las expectativas y luego probar si estos choques influyen en la actividad económica, probando que no hay parámetros reales para pronosticar la actividad de los mercados.

Keynes (1936, p. 203) anticipaba una primera idea de expectativas autocumplidas al decir que la tasa de interés es un fenómeno altamente convencional más que psicológico. Ya que el valor real en gran medida se rige por la opinión predominante sobre cuál se espera que sea su valor. Y así, cualquier nivel de interés que se acepte con suficiente convicción como probablemente duradero será duradero.

Como expone Rogers (1996, p. 172), Keynes estaba adelantado a su tiempo en este tema. En la idea de *espíritus animales* subyacía la idea de expectativas autocumplidas, y se mostraba en la teoría de preferencia por la liquidez.

Los equilibrios de expectativas autocumplidas surgen de manera bastante natural en el contexto de modelos de expectativas racionales con múltiples equilibrios estacionarios. Esto se cumple para un agente siempre que todos los demás pronostiquen la opinión media del precio de mercado de la misma forma.

$$E_{t-1}(p_t^*) = p_t - (1 - \Omega)(p_{t-1} - p_{t-1}^*) \quad (1.8)$$

En 1.8 los agentes generan sus expectativas sobre p^* . La expectativa selecciona un valor p^* consistente con la tasa natural de producción. Una vez que se sabe cuál de las reglas de pronóstico es operativa, se determina la solución del modelo, teniendo así una aproximación a los equilibrios estacionarios de expectativas autocumplidas.

El problema de utilizar este tipo de expectativas es que parten de que los agentes son racionales para así poder justificar la existencia de los equilibrios múltiples estacionarios, ya que solo en ese caso podrían anticipar el comportamiento de los agentes y así validar la expectativa inicial a pesar de que los datos utilizados sean falsos, confirmando la existencia del equilibrio.

Trabajos como los de Hamilton y Whiteman (1985), Krugman (1991), Farmer y Woodford (1997), Leduc, Sill, y Stark (2007) y Gârleanu y Panageas (2021) han abordado las expectativas autocumplidas desde enfoques teóricos y empíricos, con el objetivo de comprobar su validez al momento de modelar fenómenos económicos.

Los diferentes tratamientos de expectativas tratados tienen puntos en común, se rigen por condiciones iniciales restrictivas en su mayoría, como la racionalidad (desde el punto de vista más ortodoxo), lo que deriva a un comportamiento optimizador a través de la maximización, un agente representativo, una dinámica lineal, el sistema es cerrado sin espacio y una concepción especial sobre el tiempo, todo esto dentro de un marco de competencia perfecta o imperfecta entre los más destacados. Además, el estudio de las expectativas se centra en el sector productivo, relegando la parte financiera a una dependencia de sus implicaciones. En la economía moderna el sector financiero cada vez es más relevante en la toma de decisiones, lo que hace oportuno el estudio de las expectativas en el mercado financiero.

1.1.8. Expectativas Convergentes y Competitivas.

Kirzner (2000) inspirado en el trabajo de Hayek (1931) plantea que las expectativas hacen que las decisiones de los agentes converjan⁴ al equilibrio. Aquí ningún agente tiene motivos para alterar sus planes de consumo y producción. Lo explica a través de un modelo de dos sectores y dos empresas.

El proyecto de investigación hayekiano considera que diferentes restricciones crean diferentes incentivos, lo que a su vez diferentes patrones de comportamiento en la dinámica de los mercados. En este contexto, la evolución del sistema depende de las reglas. Esto implica que las expectativas son endógenas al entorno del individuo y, más específicamente, que las expectativas económicas son endógenas⁵, al proceso del mercado (Butos y Koppl, 1993, p. 331).

En este contexto el equilibrio existe cuando las expectativas están coordinadas. Para Hayek es una característica definitoria de un estado de equilibrio, puesto que las expectativas de las personas son cada vez más correctas dado que son susceptibles de verificación. Existen implicaciones directas entre las expectativas y la actividad económica.

A través de la teoría de expectativas de Hayek, Butos y Koppl (1993, p. 305), explican que esta permite identificarlas como coherentes y competitivas, además que no requiere ni sugiere que estas expectativas sean “racionales” en el sentido que lo plantea Muth (1961) o Lucas (1980) o como los espíritus animales “irracionales” tipo Keynes (1936). Mientras que la perspectiva hayekiana permite comprender el proceso de mercado como un orden espontáneo que se encuentra regido por reglas abstractas, las mismas que se encuentran arraigadas en los hábitos, prácticas, costumbres e instituciones de la sociedad que permiten una generación de conocimiento descentralizado.

Aquí las expectativas también tienen un sentido evolucionista. Porque en la medida que

⁴Es interesante resaltar que Keynes (1936) se interesó por la divergencia de las expectativas como respuesta al trabajo de Hayek (1931).

⁵Desde el punto de vista de Hayek, la mente es endógena al entorno del individuo, lo que implica que sean a su vez endógenas al mercado.

estas no se cumplen, dada la brecha que hay entre el conocimiento del individuo y sus acciones al entorno, permite que los agentes elaboren nuevas conjeturas e hipótesis sobre la realidad que están viviendo. Lo interesante de esta postura es que reconoce que las expectativas surgen gracias a las entradas sensoriales cuya fuente es externa al agente.

Como explica Hayek (2018, p. 45), las expectativas son endógenas al entorno del agente, es decir, son endógenas a la dinámica de los mercados. Sin la información del medio ambiente en que se desenvuelven los agentes no sería posible elaborar expectativas. Esta relación permite a los agentes adaptarse al entorno: la modificación de adaptativa del conocimiento del agente produce modificaciones adaptativas de sus acciones.

De aquí el nombre de expectativas competitivas. Los agentes tienen mecanismos internos que exteriorizan al hacer frente una toma de decisión, la cual es objeto de validación según la información obtenida del medio ambiente, en este caso, el mercado.

La idea expectativas que introdujo Hayek es muy interesante. El problema es la validación empírica, ya que se necesita elaborar el algoritmo que nos permita conocer la validación de las mismas. No obstante, teóricamente son consistentes, las cuales podemos ver aproximaciones y derivaciones de esta idea de expectativas en los trabajos de Butos y Koppl (1993), Kirzner (2000), Cowen (2002), Hill (2004) y Koppl (2002).

Existen más trabajos que han abordado las expectativas, pero los más interesantes, desde nuestro punto de vista, son donde las expectativas se forman de forma endógena en el modelo. Un claro ejemplo de esto es el Juego de la Minoría, el cual discutiremos algunas versiones en la siguiente sección y con más profundidad en la siguiente sección y en el Capítulo 3.

1.2. Expectativas Endógenas y Mercados Artificiales.

La idea de expectativas endógenas nace como iniciativa de tratar de entender como se generan las expectativas en los sistemas económicos. No se convierten en un dato ni se

encuentran dadas en las condiciones iniciales de los modelos. En los modelos tradicionales de economía y finanzas es difícil incluir esta perspectiva de expectativas, ya que las herramientas matemáticas en algunas ocasiones no lo permiten dado que su objetivo es entender otras cuestiones como el equilibrio o la eficiencia del mercado. Recordemos que nos interesa la formación de ellas.

La teoría de juegos ha tenido un gran avance en la elaboración de modelos que incluyan la evolución en la dinámica de los agentes y su comportamiento estratégico. El Juego de la Minoría (JM) es un juego evolutivo que se diferencia de otros modelos de teoría de juegos. Las dos principales diferencias es la dinámica evolutiva y la heterogeneidad de los agentes. Este tipo de juegos estableció un marco teórico en la Modelación Basada en Agentes (ABM por sus siglas en inglés). De acuerdo con Yeung y Zhang (2008, p. 4) el JM son una clase de modelos simples que son capaces de producir algunas de las características macroscópicas que se observan en los mercados financieros⁶. Lo importante de este nuevo tipo de enfoque de modelar sistemas económicos es que permitió elaborar modelos que reproduzcan datos de los mercados reales. Esto permitió un cambio en las investigaciones económicas, ya que podemos centrarnos en la formación de precios y no solo analizar los datos del patrón de precios.

Recordemos que los precios contienen información. Un aumento de precio puede llegar a inducir a los agentes a comprar (o vender) dependiendo de si creen que hay información relevante en ese cambio de precio. Formar expectativas a partir de un cambio de precios es común en los mercados. No necesitamos que las expectativas se encuentren dadas en nuestro modelo, sino capturar las expectativas de los agentes al establecer reglas de comportamiento para los posibles cambios de precios.

Esto nos lleva a plantear *Mercados Artificiales*. Los mercados artificiales son ABM que nos permiten explorar comportamientos de los mercados financieros⁷. El JM es un modelo simple pero muy versátil al momento de plantear un mercado artificial. El primer mercado

⁶A estas características se las llama hechos estilizados como la distribución de cola gruesa o la agrupación de la volatilidad.

⁷En realidad podemos replicar el comportamiento de cualquier mercado en economía, pero recordemos que en este trabajo nos interesan los mercados financieros.

artificial⁸ fue construido en el Instituto de Santa Fe (SFI por sus siglas en inglés) por Arthur, Holland, LeBaron, Palmer, y Tayler (1996). En este trabajo tratan de proponer una teoría de fijación de precios basándose en agentes heterogéneos. Estos agentes son capaces de adaptar sus expectativas a la dinámica del mercado. Además, son el primer mercado artificial que estudia la naturaleza recursiva de las expectativas. Las simulaciones computacionales de este mercado artificial con expectativas endógenas explica que es muy común que los inversores creen en conceptos como comercio técnico, psicología de mercado y efectos de tendencia, mientras que los académicos teóricos creen en la eficiencia de mercado y la falta de oportunidades especulativas; mostrando que ambas visiones son correctas pero en dos etapas diferentes:

- En una etapa de en el que los agentes exploran modelos de expectativas alternativos a un ritmo bajo, el mercado presenta un equilibrio de expectativas racionales y mercado eficiente.
- En la etapa donde la tasa de explotación, expectativas alternativas es a un ritmo más alto, el mercado se autoorganiza en un patrón complejo donde surge el comercio técnico y se producen burbujas y crisis temporales.

En los mercados financieros, los pronósticos de los agentes crean el mundo que los agentes intentan pronosticar. Por lo tanto, los mercados tienen una naturaleza reflexiva en el sentido que los precios son generados por las expectativas de los agentes, pero estas expectativas se forman sobre la base de anticipaciones a las expectativas de los otros agentes. Esta reflexividad o carácter autorreferencial de las expectativas se forman por medios deductivos, de modo que la racionalidad perfecta deja de estar bien definida (Arthur y cols., 1996, p. 37).

En la tabla 1.1 podemos ver las funciones de pago para mercados artificiales basados derivaciones del JM que se fundamentan en las expectativas de los agentes sobre el cambio

⁸Sabemos que desde antes, principios de los 80s, el diseño de mercados o mecanismos existía, pero este fue el primero en incluir simulaciones computacionales para replicar el comportamiento real de un mercado financiero.

Modelo	Función de pago
Juego de la Minoría	$-a_{i,s}^{\mu(t)}(t)A(t)$
Juego de la Mayoría	$a_{i,s}^{\mu(t)}(t)A(t)$
\$-game	$a_{i,s}^{\mu(t)}(t)A(t+1)$

Tabla 1.1: Esquemas de pagos.

de precios en el siguiente paso. Siguiendo a Yeung y Zhang (2008, p. 26) planteamos por simplicidad la expectativa $E_i[A(t+1)|t] = -\varphi_i A(t)$ siendo $A(t)$ la oferta agregada o excedente de demanda y φ_i un parámetro que indica si los agentes están en minoría o mayoría; $a_i(t)$ es la acción del agente i en el tiempo t según su estrategia s y la cadena de información histórica $\mu(t)$.

- Con $\varphi_i > 0$, los agentes esperan que la oferta $A(t+1)$ esté correlacionada negativamente con el paso actual, es decir, que el precio fluctúe, lo que revelaría el comportamiento minoritario de algunos agentes. A este tipo de agentes que buscan estar en minoría se les llama fundamentalistas y su función de pago está determinada por la acción del agente i de acuerdo con la cadena de información (o historia) $\mu(t)$, $-a_{i,s}^{\mu(t)}(t)A(t)$. Este tipo de juego también es denominado juego de suma negativa.
- Con $\varphi_i < 0$, los agentes esperan que la oferta $A(t+1)$ esté correlacionada positivamente con el paso actual, es decir, que el precio desarrolle una tendencia, lo que revelaría el comportamiento mayoritario de algunos agentes. A este tipo de agentes que buscan estar en mayoría se les llama seguidores de tendencia y su función de pago está determinada por la acción del agente i de acuerdo con la cadena de información (o historia) $\mu(t)$, $a_{i,s}^{\mu(t)}(t)A(t)$. Este tipo de juego también es denominado juego de suma positiva.

Vitting Andersen y Sornette (2003) propusieron un modelo similar denominado \$-game, donde su objetivo es mostrar que el mecanismo minoritario es un aporte relativamente menor a la autorrealización de los mercados financieros. Este modelo como mercado artificial tiene una función de pago $a_{i,s}^{\mu(t)}(t)A(t+1)$, donde los agentes no se centran como tal en sus expectativas, sino en la maximización de un pago para abordar el problema de la adaptación. Este modelo también tiene un creador de mercado que proporciona activos en caso de

demanda y compra en caso de oferta, el cual se beneficia de un sesgo sistemático resultante de la falta de cooperación de los agentes. Además, a medida que aumenta la complejidad de la información, las estrategias de los agentes no pueden decodificar la información entrante, lo que produce un comportamiento desincronizado que favorece al creador de mercado.

Otro mercado artificial interesante es el propuesto por Marsili (2001). En este modelo, al igual que en otras versiones del JM, los agentes compran y venden activos en el mercado con el objetivo de beneficiarse de las fluctuaciones de precios. Propone un mercado mixto, es decir, tenemos agentes que se comportan como el grupo minoritario (fundamentalistas) y otros como el grupo mayoritario (seguidores de tendencia)⁹.

Este modelo sigue la propuesta original del juego de la minoría, donde las expectativas de los agentes se revisan en cada periodo de tiempo y se modifican en caso de ser necesario. Para este modelo se define la expectativa como $E_t^i[\Delta p(t+1)] = -\varphi_i \Delta p(t)$ si son agentes fundamentalistas y $E_t^i[\Delta p(t+1)] = \varphi_i \Delta p(t)$ si son seguidores de tendencia (Marsili, 2001, p. 96). Las expectativas juegan un rol importante en la definición del modelo. En los mercados reales sabemos que los agentes deben revisar y calibrar sus expectativas de acuerdo a la información que tienen disponible, en el caso de los mercados financieros los precios son importantes al momento de tomar una decisión financiera. Como todos los agentes tienen acceso al mismo historial de precios, las expectativas deben converger, es decir, se espera que todos los agentes se comporten como un juego minoritario o todos como si fuera un juego mayoritario.

Un mercado artificial importante es el propuesto por Giardina y Bouchaud (2003). Este, a diferencia de los mencionados anteriormente, busca replicar las crisis y burbujas que se observan en los mercados financieros, como también hechos estilizados de los mismos. Argumentan que existen mecanismos genéricos de autoorganización que funcionan como fuerzas evolutivas dentro de los mercados.

Esta es una versión más sofisticada del JM, ya que tiene dos activos: una acción con

⁹En este trabajo la composición de agentes en el mercado es de 50-50. Si hay más agentes de un grupo que de otro, su comportamiento se impondrá en el sistema, convirtiendo el comportamiento del mercado a uno de juego minoritario o mayoritario, según cuál sea el grupo de agentes más grande.

precio fluctuante $\phi_i(t)$ y un bono $B_i(t)$ que rinde a una tasa libre de riesgo ρ . La decisión es comprar acciones (convertir bonos en efectivo), vender acciones o no realizar una acción comercial (es decir, permanecer inactivos, mantener los bonos). Además, es relevante el equilibrio patrimonial de cada agente y se aplica una compensación al mercado; en otras palabras, se hace coincidir la oferta con la demanda. Según la estrategia utilizada por el agente i y la información $I(t)$, cada agente puede tomar una decisión $\epsilon_i(t)$. Dependiendo de la decisión, cada agente compra (o vende) una cantidad $q_i(t)$:

- $q_i(t) = g \frac{B_i(t)}{X(t)}$ para comprar $\epsilon_i(t) = 1$
- $q_i(t) = -g\phi_i(t)$ para vender $\epsilon_i(t) = -1$
- $q_i(t) = 0$ para inactivo $\epsilon_i(t) = 0$.

donde g es la fracción de dinero utilizada en la operación. Esto implica que el mercado está compuesto por agentes prudentes que cambian de posiciones progresivamente. Es decir, que tenemos el comportamiento y/o dinámica de un mercado artificial más cercano a un mercado real. Cuando el precio es demasiado bajo (alto), es posible que compren (vendan) (Giardina y Bouchaud, 2003, p. 423).

El desarrollo de mercados artificiales es una herramienta prometedora. Los trabajos seminales mencionados en el área de economía compleja y evolutiva muestra como podemos replicar datos obtenidos de los mercados financieros reales. Con la construcción y posterior calibración de un ABM podemos recrear situaciones específicas en un mercado artificial, considerando comportamientos *típicos* observados en los inversores de los mercados reales. No tenemos que suponer las expectativas, sino que establecemos reglas de comportamiento y observamos como los agentes forman las expectativas a partir de estas reglas. Las reglas son reglas simples, donde tratamos que capturar como los agentes reales se enfrentarían a un proceso de toma de decisión.

En el siguiente capítulo desarrollaremos una aproximación de un algoritmo de comportamiento para agentes que participen en un mercado artificial. Para este algoritmo utilizaremos

el modelo del JM para ver la dinámica del mercado y la formación de expectativas de nuestros agentes. En el capítulo 3 y 4 tratamos de replicar los datos obtenidos en el sistema financiero.

Capítulo 2

Microcosmos: Expectativas Complejas Adaptativas.

En este capítulo introduciremos algunos conceptos importantes para nuestra concepción de expectativas y posterior construcción del algoritmo de comportamiento de los agentes de nuestro mercado artificial. Enfatizamos el uso del enfoque de la economía compleja y evolutiva con ciertas formalizaciones que nos permitirán entender mejor la formación de expectativas y como los agentes toman decisiones.

2.1. Los agentes.

Partiremos de la premisa de que en la economía, como en otras ciencias sociales, tratamos de modelar el comportamiento de seres humanos. Esto implica que nos alejamos de la idea tradicional del agente económico concebido en la teoría económica ortodoxa: el *homo economicus*.

Como seres humanos tenemos dos motivaciones principales: reproducirnos como seres vivos y reproducirnos como seres sociales. Además, estas dos están implícitas en la sobrevi-

vencia como especie.

Reproducirnos como seres vivos, implica que necesitamos sobrevivir como especie. Como cualquier otro ser vivo, estamos sujetos a los procesos entrópicos de la naturaleza. A su vez, los seres vivos necesitan una cantidad básica y mínima de nutrientes para cumplir con sus funciones fisiológicas dentro del entorno en el que se desarrollan.

Reproducirse como seres sociales, implica que los seres humanos, al igual que otros seres vivos, se reproducen en un entorno o ecosistema. Este entorno, al cual denominamos sociedad, mercados, instituciones o culturas, otorga a las personas características y/o reglas conductuales que construyen patrones de comportamiento, los cuales están sujetos a la trayectoria histórica de su evolución como seres sociales.

Las estructuras sociales son complejas y tienen varios niveles organizacionales. A diferencia de otras estructuras compuestas por seres vivos, las estructuras sociales tienen varios niveles de organización que son difíciles de percibir, y a veces modelar, porque la mayoría del tiempo se encuentran en constante fricción. Pero podemos jerarquizarlas de acuerdo al rol que tengan en la estructura social.

Como expone Senge (2006), la naturaleza de la estructura en los sistemas humanos es sutil porque somos parte de la estructura. Esto implica que los agentes pueden alterar la estructura en la cual operan. Además, siguiendo a Maturana y Varela (2004) y Luhmann (1998), las estructuras sociales son un sistema autorreferencial y autopoietico, esto debido a que el sistema y subsistemas están constituidos, básicamente, por elementos producidos por los propios sistemas, de los cuales estos mismos elementos serían partes-componentes. Esto otorga a la dinámica del sistema un carácter coevolutivo endógeno que es propenso a sufrir choques exógenos.

Los agentes dentro del marco de la complejidad económica, partiendo del paradigma de la evolución, buscan sobrevivir en el entorno en el que se desenvuelven¹. A diferencia de la concepción de los sistemas (agentes y mercados) en la economía tradicional, que es

¹En este punto nos alejamos del agente shackeliano donde los individuos solo eligen entre diferentes cursos de acción, proponemos uno que toma en cuenta secuelas futuras, es decir el «que pasa si».

racional, mecanicista y eficiente, la complejidad económica utiliza herramientas matemáticas y computacionales que le permiten partir de supuestos menos restrictivos.

2.1.1. Racionalidad.

El comportamiento biológico y social de los seres humanos está alejado de lo recomendado por la economía tradicional. En el sentido estricto, este enfoque es muy restrictivo. La maximización de una utilidad o un comportamiento optimizador está impulsado por la racionalidad que se supone, es completa en los agentes. Es posible que el marco analítico de la economía tradicional nos haya permitido hacer aproximaciones a través de los modelos y conceptos ideados para explicar alguna realidad de interés, pero como todo modelo tiene sus limitaciones. Generalmente, el modelo del equilibrio general es la base de una cantidad considerable de modelos empíricos en la economía. Pero como todo modelo tiene sus limitaciones.

La racionalidad perfecta, lógica y deductiva es útil para generar soluciones a problemas teóricos (Arthur, 2014, p. 31) como los del equilibrio general, parcial y estocástico. Pero este planteamiento exige un comportamiento inhumano.

Como expone Sweezy (1938, p. 234-235), la previsión perfecta es un supuesto necesario si asumimos que las expectativas forman parte de las condiciones dadas. Implica que si las expectativas son datos, obviamente no pueden cambiar en el curso del proceso que se examina. Lo que está perfectamente previsto debe ser la solución de equilibrio (o al menos una de ellas) elaborada en el planteamiento estático; porque si no es así, habrá ocasión de revisar las expectativas, lo que excluye *ex hypothesi*. Pero si todos prevén la posición de equilibrio y además saben que debe realizarse, por supuesto que se lo deberá incluir desde el principio.

Brian Arthur (2014), plantea que existen dos razones por la cual deja de funcionar la racionalidad perfecta:

1. La razón obvia es que más allá de un cierto nivel de complejidad, la capacidad lógica humana deja de funcionar (es limitada).
2. En situaciones de interacción y complicaciones, los agentes no pueden confiar en que los otros agentes con los que están tratando se comporten con una racionalidad perfecta, por lo que se ven obligados a adivinar su comportamiento.

La segunda razón implica que los lleva a un mundo de creencias subjetivas y creencias subjetivas sobre creencias subjetivas. Lo que es una panarquía de creencias, ya que esta autorreferencialidad depende de la interacción e iteración de los agentes dentro del sistema.

2.2. Expectativas Complejas Adaptativas.

Dentro del planteamiento de las Expectativas Complejas Adaptativas (ECA) los agentes tienen racionalidad limitada e inductiva. Ellos son capaces de reconocer patrones en la información o comportamientos y así generar hipótesis sobre los futuros estados (o alternativos) del mundo del que están viviendo, a los cuales denominamos «posibles estados». Además, como menciona Gilboa (2004), se destaca la incapacidad que tienen los agentes para describir entornos inciertos a través de una distribución de probabilidad aditiva única.

El pensamiento inductivo, de acuerdo con Arthur (2014, p. 33), consta de una multitud de elementos en forma de modelos mentales, hipótesis o creencias que se adaptan al entorno agregado que crean conjuntamente. Los que llegan a funcionar bien entre sí, bajo algún criterio, logran un grado de adaptación mutua. Como veremos en el capítulo 3, en el problema del bar “El Farol”, los modelos con racionalidad inductiva aproximan mejor el comportamiento de los agentes en los mercados.

En los mercados financieros, los agentes buscan obtener beneficios como en cualquier otro mercado del sistema económico, pero no siempre es el máximo beneficio. Es decir, los agentes o un grupo de ellos solo buscan obtener algún beneficio o rentabilidad. Otras veces los agentes tan solo desean no obtener pérdidas. El sentido de sobrevivir a la competencia

intrínseca que conlleva participar en algún mercado, genera en los agentes el deseo de seguir participando en ellos.

Participar o no en un mercado implica una decisión previa. Los agentes no lo hacen de forma automática o natural², sino que lleva, en cierto grado, un proceso. Este es un tipo de decisión que se hace con conocimiento de lo que implica participar o no a un mercado en específico. Existen decisiones espontáneas, las cuales se pueden dar por heurísticas³ o por experiencia adquirida con el pasar del tiempo al interactuar con otros agentes en el mercado. Estar operando en un mercado conlleva un grado de posibilidad en el cual los agentes consideran que obtendrán algún tipo de rentabilidad o beneficio (o que al menos no perderán).

Los agentes deben diferenciar y elegir de acuerdo a lo que les parezca más creíble, y si es posible que sea rentable, es decir, deben discernir la posibilidad de los eventos de acuerdo a sus expectativas transformadas en estrategias para tomar una decisión económica.

Esto nos lleva a la siguiente conjetura: *podemos modelar la economía como un sistema de retroalimentación de expectativas*. Como los agentes basan sus expectativas en la información disponible, la realización histórica de sus variables de interés se construyen a partir de los posibles estados del mundo concebidos de acuerdo con sus expectativas formadas según los modelos mentales.

Plantear agentes heterogéneos nos permite realizar un análisis más cercano a la realidad de los mercados. Estos agentes pueden formar diferentes hipótesis o creencias subjetivas sobre los posibles estados del mundo. Con esto en mente, los agentes pueden plantear un conjunto de diferentes estrategias para afrontar los posibles escenarios de decisión que se les presenten.

Con esto en mente, podemos proponer un modelo sencillo que capture el proceso de formación de expectativas. Supongamos que existe un conjunto S que contiene todos los

²A menos que sean participantes asiduos en los mercados, lo que conlleva que tengan experiencia suficiente para saber si les conviene o no participar en algún mercado en particular.

³Una heurística es una regla simple o general que utilizamos para hacer una acción y/o decisión.

estados del mundo para diferente tiempo t . Si habláramos de un agente con racionalidad perfecta, este tipo de agente conocería todos los elementos de este conjunto.

$$\mathcal{S} = \bigcup_t S_t \quad (2.1)$$

Como seres humanos no somos capaces de conocer todas las contingencias o estados del mundo que pueden existir, solo podemos conocer una cantidad limitada. Además, tenemos una percepción limitada e imprecisa de los estados del mundo⁴. El agente individual j , o el agregado, está en la capacidad de elegir o tomar decisiones solo en la medida que crea su propio conjunto de opciones.

$$\Gamma_t = \{h_{t,1}, h_{t,2}, \dots, h_{t,j}, \dots\} \quad (2.2)$$

El conjunto Γ contiene todos los estados en el tiempo t que, de acuerdo con sus limitaciones, los agentes pueden concebir. Es decir, que depende, no solo de su capacidad de razonamiento adquirida con la experiencia, sino también, de la capacidad de percepción que tienen los agentes del mundo y sus posibles estados a partir de la información obtenida de su entorno⁵.

Esto limita al conjunto $h_{t,j}$, que son los estados del mundo que los agentes consideran posibles, de todos los estados que son capaces de percibir e imaginar. Los estados del mundo varían con el tiempo. No necesariamente siempre tendremos que $h_{t,j} \neq h_{t+1,j}$, pero es más común que encontrar un estado que no haya sufrido algún tipo de variación ($h_{t,j} = h_{t+1,j}$). Si este último es el caso, implicaría que existe una especie de refuerzo en mantener ese estado del mundo. En la economía tradicional es normal encontrar este tipo de planteamiento gracias

⁴En la medida en que el futuro es la consecuencia impredecible de las elecciones creativas realizadas por los agentes individuales, su representación del entorno incierto es necesariamente incompleta (Basili y Zappia, 2009, p. 248).

⁵Cualquier modelo efectivo de la toma de decisiones real requiere el reconocimiento explícito de las actividades mentales del individuo, en la medida en que el futuro lo imagina cada hombre para sí mismo y este proceso de la imaginación es una parte vital del proceso de decisión (Shackle, 1976, p. 3).

a los supuestos de partida del modelo.

Siguiendo a Arthur (2014, p. 32), los agentes hacen seguimiento de su desempeño de una colección privada de tales hipótesis o creencias. Cuando llega el momento de tomar decisiones, actúan sobre la que actualmente es la más preferible (o posiblemente la más rentable). Esto no impide que una acción o decisión particular pueda ser resultado de una combinación de varios estados del mundo.

En este sentido, las expectativas son estados del mundo que los agentes consideran posibles. Pueden llegar a realizarse y son cambiantes con el pasar del tiempo.

$$h_{t,j} \subseteq S_t, \Gamma_t \subseteq 2^{|S_t|} \quad (2.3)$$

Los agentes no son capaces de conocer con exactitud como está estructurado su entorno, menos el mundo, es por esto que Γ_t es una partición, un subconjunto, de todos los estados del mundo y sus combinaciones posibles, es decir, del conjunto potencia de S_t , $P(S_t)$. Por lo tanto $\Gamma_t \neq S_t$. Si los agentes conocieran todos los posibles estados del mundo, también estarían en la capacidad de conocer todas las combinaciones de estos, 2^{S_t} .

Supongamos que solo existieran 4 estados del mundo para un tiempo particular: $S_t = \{a, b, c, d\}$ en este contexto el conjunto potencia de los estados del mundo sería $2^4 = 16$, es decir, todos los elementos de S y la combinación de ellos, como el propio conjunto S y el conjunto vacío: $P(S_t) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \emptyset, S\}$. En este ejemplo partimos del supuesto de la existencia de solo 4 posibles estados del mundo, ¿pero qué sucede si son más de 4 estados?, digamos que existen 10 agentes en el sistema y que cada uno concibe 2 posibles estados del mundo, ahora tendremos que $S_t = 20$ y que $P(S) = 2^{20} = 1'048,576$ estados posibles del mundo. Esto implica que el conjunto de posibles estados del mundo Γ_t contiene las combinaciones y los estados que todos los agentes consideran posibles, esto no quiere decir que un agente es capaz de conocer Γ_t . Cada agente es capaz de conocer una cantidad limitada, como ya se mencionó con anterioridad $h_{t,j}$. Adicionalmente, en el agregado no importa el orden o la jerarquía que cada

agente le dé a su conjunto, puesto que pertenecen al mismo conjunto universo de estados.

La heterogeneidad de los agentes se encuentra explicada por dos factores fundamentales: capacidad cognitiva y experiencia. Si bien la información juega un papel importante en la generación de posibles estados del mundo, la interpretación de esta depende de la experiencia que se tenga interactuando en el sistema, así como de la capacidad cognitiva que tengan los agentes para interpretarla. Como menciona Shackle (1974, p. 3), en el mundo de la experiencia no estamos completamente informados, pero tampoco estamos completamente perdidos, haciendo alusión que los seres humanos están en un punto entre la ignorancia y el conocimiento pleno, pero nunca en los extremos.

Si seguimos el ejemplo de Basili y Zappia (2009), y suponemos que al agente se le pide que elabore una lista exhaustiva de los distintos eventos específicos que pueden afectar el valor de las inversiones alternativas, como lo requiere la aplicación de la probabilidad subjetiva⁶, Shackle (1976, p. 22) nos diría que esto no tiene sentido, puesto que al final el agente se quedaría sin tiempo para hacer su respectiva compilación, se daría cuenta de que tal tarea no tiene fin y se vería obligado a terminar su lista con una hipótesis residual, un reconocimiento de que cualquiera de las cosas que él ha enumerado puede suceder, y también cualquier cantidad de otras cosas impensadas e incapaces de ser contempladas antes de que llegue el plazo de decisión: una caja de Pandora de posibilidades más allá del alcance de la formulación.

En este contexto podemos plantear dos agentes (i, j) donde el agente i posee una mayor cantidad de información (o experiencia) que el agente j , es decir $i \neq j$. Esto implica que el agente i está en la facultad de percibir o imaginar estados del mundo posibles con una mayor claridad que el agente j . Lo que se traduce que es capaz de elaborar mejores estrategias. En la primera iteración, suponiendo que la mayor experiencia y/o conocimiento genera estados más posibles de futuro, tendremos entonces que si de alguna forma se pudiera medir o cuantificar

⁶El trabajo de Savage (1972), con su utilidad subjetiva esperada, hizo posible aplicar las reglas de la teoría de la probabilidad a las creencias individuales. Este enfoque se centra en dos supuestos fundamentales: 1) Una lista completa de posibles estados futuros del mundo está disponible para el individuo; y 2) el procesamiento de la información consiste en un proceso bayesiano de actualización de creencias individuales (una distribución de probabilidades previa) cuando el/ella recibe una señal de realización de un estado.

los cursos de acción, los resultados de i serían mejores que los del agente j , como observamos a continuación:

$$A_i^{h_{t,1}} \succ A_j^{h_{t,1}}, h_i \succ h_j \quad (2.4)$$

Pero, a pesar de que posea mayor información, esta lista seguiría siendo limitada. Los agentes entonces solo podrán elaborar su conjunto de forma difusa. Las borrosidades del entorno producto de la escasa o mala información, sumado a las expectativas de otros agentes, hacen que las retroalimentaciones del sistema no logren llegar a todos los agentes. El agregado evolucionará de forma más lenta y en algunos casos caótica.

En este escenario preliminar, que se ha aproximado a una formalización del comportamiento de los agentes, este puede verse como un algoritmo que atribuye un sentido causal a las expectativas o a un subconjunto de ellas:

$$\Psi_t = \{F_t(h), h \in \Gamma_t\} \quad (2.5)$$

Los agentes pueden tomar decisiones, las cuales pertenecen a un conjunto de posibles decisiones, que se dan a partir de los posibles estados del mundo $h_{t,j}$

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_j, \dots\} \quad (2.6)$$

Si replicamos la fundamentación de Dosi, Marengo, y Fagiolo (2005), tendremos que existe un repertorio conductual finito que está construido a partir de las decisiones atómicas básicas de cada uno de los agentes, y se encuentran en D . Es decir, que dependen y cambian por las expectativas y el tiempo.

$$\Omega_t = \{\omega_{t,1}, \omega_{t,2}, \dots, \omega_{t,j}, \dots\} \quad (2.7)$$

Si seguimos el planteamiento de modelación de los estados del mundo realizado con anterioridad (2.3) tendremos que:

$$\omega_{t,j} \subseteq D, \Omega_t \subseteq 2^D \quad (2.8)$$

De acuerdo con Dosi y cols. (2005), el aprendizaje implica una aplicación de categorías y «modelos mentales» que constituyen una estructura causal. En este sentido, los modelos mentales nos permiten procesar la información con la cual generamos conjeturas, las cuales son nuestra estructura causal: las expectativas.

Las decisiones atómicas Ω_t son un subconjunto del conjunto potencia de posibles decisiones $P(D) = 2^D$. Esto implica que los agentes pueden utilizar una estrategia (que se ha transformado en una decisión) que ya utilizaron con anterioridad o una que haya sido utilizada por otros agentes, es decir, existe una disonancia en las estrategias. Dos estrategias iguales o diferentes pueden ser ejecutadas en un mismo periodo de tiempo, no son mutuamente excluyentes⁷.

Cada estrategia transformada en decisión conlleva un curso de acción diferente. A esto Shackle (1974) lo denominó «secuela». Cada secuela de una decisión tomada por un agente del sistema está determinada por el entorno, y el entorno incluye las decisiones tomadas ahora y en el futuro por otros agentes, esto gracias a la influencia que tienen las decisiones de los agentes en la formación de expectativas. Una expectativa en t puede ser un curso de acción o una decisión $t + 1$. Además, solo se puede elegir una u otra decisión si existen rivalidades de algún tipo entre ellas, es decir, si existe alguna tipificación que las diferencie entre sí, $\omega_{t,1} \neq \omega_{t,2}$.

Esto nos lleva a definir que: *un estado del mundo existente no puede ser plural, en el sentido que un agente no puede experimentar dos estados del mundo al mismo tiempo*. Lo que

⁷Aunque, como explica Shackle (1974, p. 3), la presencia de respuestas rivales puede frustrar el intento de elegir entre dos cursos de acción mutuamente excluyentes, ya que esta elección dependerá de lo que se conciba como secuela en un caso y en el otro. Cuando, para cada curso, existen secuelas rivales sugeridas, una comparación de las respectivas secuelas puede mostrar el curso A puede dar el resultado preferido, y otra comparación similar puede favorecer el curso de acción B .

implica que el estado del mundo existente es único, ya que se pueden suponer otros estados, pero no experimentarlos. Por lo tanto, *una decisión es producto de ficciones, hipótesis o conjeturas de los estados del mundo posibles* $h_{t,j}$: lo que nosotros llamamos ECAs.

Recordemos que el sistema financiero es un sistema de precios. La formación de los precios depende de la toma de decisiones, que a su vez depende de las expectativas. La propia dinámica del sistema financiero está impulsada por la interacción de los agentes. Esta interacción es dispersa y heterogénea. En algunos casos, puede ser, homogénea. Al actuar de forma paralela, dos agentes que son heterogéneos pueden llegar a una misma conclusión. A medida que interactúan, aprenden de otros agentes y se adaptan a los entornos sociales, culturales, políticos, económicos y naturales en los que se reproducen como seres vivos y sociales. Esto crea causalidad recursiva en el sistema: los agentes obtienen retroalimentación y a su vez retroalimentan al sistema que pertenecen. Este comportamiento coevolutivo puede producir que el sistema sea ordenado o caótico, pero siempre es autorreferencial. Siempre estará oscilando, formando así un sendero homeostático.

La homeostasis es un conjunto de fenómenos (o emergencias) que hace que el sistema se autorregule. Este caso, sabemos que los sistemas económicos (como los mercados) tienen cierto grado de autorregulación. Hablamos de un sendero porque entendemos que si se pasa una cota inferior o superior, el sistema necesitará intervención.

Los precios en el sistema financiero son el resultado de un proceso complejo adaptativo que dependen de las expectativas (propias y de otros agentes), la imaginación y la información. En la mayoría de casos, los agentes se encuentran motivados por no tener pérdidas sobre obtener ganancias⁸. Los agentes sociales construyen el futuro a partir de referencias individuales y sociales. Esto produce la existencia de variación y volatilidad de los precios dentro del sistema financiero.

La hipótesis de mercado eficiente, en la teoría tradicional, argumenta que los precios reflejan toda la información disponible. Pero suponer esto es homérico, porque habría que

⁸La teoría de prospectiva de Kahneman y Tversky (1979) explica por qué, algunas de las personas otorgan más peso a las pérdidas que a las ganancias.

pensar que existe algún tipo de fórmula que transforma desde el espacio de información a los precios sin tener en cuenta el proceso de decisión. Lo que sí podemos decir es que los mercados dentro del sistema crean y agregan (o destruyen) información a través de los precios, pero no que son la única fuente. Friedrich Hayek (1945) en su artículo «El uso del conocimiento en la sociedad», plantea que los precios reflejan información, pero que esta información es parcial.

Al llevar información, la cual está compuesta en una n -dimensión (multidimensional) a un vector unidimensional (los precios) se omite una gran cantidad de información, esta puede ser relevante o no, cosa que dependerá de la percepción y experiencia de los agentes. Puesto que las personas no son capaces de procesar y comprender toda la información del sistema, el agregado de agentes tampoco podrá ser capaz de lograrlo.

En este punto hay que hacer otra diferencia que se produce en la teorización de las expectativas en la economía tradicional con respecto a la propuesta en este trabajo: las expectativas se generan en un marco de incertidumbre fundamental. Los agentes al tomar una decisión se enfrentan a la incertidumbre. Los agentes toman decisiones con racionalidad limitada (información y capacidad limitada para transformarla en entendimiento limitado) sobre los estados del mundo y, por ello, no pueden elaborar distribuciones de probabilidad confiables de dichos estados del mundo, la incertidumbre es inevitable. En este contexto, los agentes, pueden llegar a mostrar «aversión» a la incertidumbre cuando sobrestiman probabilidades de aquellos estados en los cuales ven patrones favorables. Tienen una sensación disonante en el sistema, esto quiere decir que diferentes expectativas pueden ser operativas y ser posibles al mismo tiempo. Esto es posible por la composición de un sistema con agentes heterogéneos con acceso a la información disponible.

Podemos concluir que *las expectativas son producto de un proceso individual y social a la vez*. Su formación es parte de un proceso complejo adaptativo. Las expectativas de los agentes se basan en las expectativas de otros agentes que consideran posibles estados del mundo diferentes. En este sentido, las expectativas se construyen a partir de referencias sociales elaboradas por la interacción de los agentes en el sistema, habiendo una constante

retroalimentación. Son ciclos anidados de adaptación⁹, que dependen de la estructura y respetan la jerarquía de los diferentes niveles de organización del sistema.

El futuro tiene un componente de aleatoriedad, esto implica que los agentes no lo puedan adivinar. A pesar de que parezca contra intuitivo, los agentes lo construyen. Su construcción es a partir de las referencias sociales de los agentes que pertenecen al sistema. Las expectativas son parte de estas referencias, es decir, qué gran parte del futuro se construye a partir de expectativas que los agentes consideran como posibles estados del mundo, ligadas a la información obtenida y la interacción de los agentes en el sistema; además, estas son autorreferenciales, producto que se elaboran con elementos que el propio sistema les otorga. De aquí el interés e importancia de estudiar la formación y funcionamiento de las expectativas en el sistema financiero.

2.2.1. Algoritmo de las ECA.

La unidad de análisis son los agentes especulativos que negocian en los mercados del sistema financiero comprando o vendiendo activos. El algoritmo de las ECA se plantea en los mercados donde se realizan compras y ventas de activos financieros, y puede tener aplicabilidad en cualquier otro proceso de toma de decisiones. El comportamiento del agente puede plantearse como algorítmico, es decir, tiene reglas que nos permiten derivar sus estrategias para la toma de decisiones y de la formación de sus expectativas. Una primera aproximación sobre el algoritmo de las ECA y el comportamiento de los agentes especulativos puede ser la siguiente:

1. **Generación de expectativas sobre portafolio.** Los agentes generan información en el sistema¹⁰, y a su vez el sistema les otorga información. Esta información es pública y puede categorizarse como:

⁹Los ciclos de adaptación tienen tres propiedades: potencial inherente de un sistema a posibles cambios, capacidad de control interno y capacidad de adaptación o resiliencia (Holling, 2001).

¹⁰En este trabajo también se hace relevante la calidad de la información, ya que como expone Ellsberg (2015, p. 16-17), cuando la ambigüedad es extrema, según cualquiera de sus índices: la información relevante es escasa y, obviamente, no es confiable y es contradictoria; habrá diferencias en las expectativas expresadas por diferentes individuos; baja confianza en las estimaciones disponibles. Las reflexiones sombrías de Shackle

- Exógena, como noticias o eventos no asociados directamente al funcionamiento del sistema financiero (o mercado de interés), y
- Endógena, a través de los precios y volúmenes de transacciones (permite generar la percepción del riesgo).

Según la información obtenida, los agentes generan modelos mentales e hipótesis del comportamiento no solo del portafolio de activos especulativos, sino también del sistema en que ese portafolio trabaja. Es decir, del entorno del sistema financiero. Con estas conjeturas, los agentes elaboran estrategias para tomar decisiones.

2. **Diversificación y selección de portafolio.** Los agentes de acuerdo a sus expectativas, que son temporalmente basadas en la rentabilidad verosímil de los activos puestos en negociación, diversifican y seleccionan activos para que pertenezcan a su portafolio. Esto lo tendrán en un corto periodo de tiempo, para especular y aprovechar las fluctuaciones de los precios. Los agentes esperan los resultados de las operaciones financieras que ejecutan de acuerdo con la información y expectativas generadas que, según sus creencias y modelos mentales, consideran que tienen un grado de posibilidad alto. Contrastan los resultados obtenidos con los resultados esperados, es decir, con las expectativas generadas antes de ejecutar la operación.

3. **Adaptación de las expectativas.** Los agentes descartan las expectativas convertidas en hipótesis que no se cumplieron y generan nuevas expectativas. En otras palabras, se modifican o generan nuevas estrategias. Esto produce un efecto de histéresis en el sistema, ya que no se regresará al punto inicial dada la retroalimentación que existe entre agente-agente y agente-sistema-agente. Después de calibrarse, con base al fortalecimiento o debilitamiento de las expectativas, los agentes se adaptan al nuevo entorno de toma de decisiones con posibles nuevas estrategias, produciendo una adaptación en la formación de expectativas futuras. Las expectativas que se cumplen se mantienen con adecuaciones según el nuevo contexto de toma de decisión y las que no se cumplieron se descartan en pro de nuevas expectativas que parezcan tener un grado más alto

parecen demasiado inquietantemente relevantes para las mismas circunstancias en las que se centra este estudio para ser descartadas.

de posibilidad. Esto produce que las estrategias se modifiquen (o no) en cada paso de tiempo.

Los agentes hacen un seguimiento del desempeño de sus expectativas revisando si sus estrategias les dieron resultado en la medida que obtienen retroalimentación del sistema. Se aferran a algunas de las expectativas no porque sean correctas, sino porque alguna de ellas permitieron a los agentes elaborar estrategias que les funcionaron en el pasado. Arthur (2014, p. 33) menciona que este tipo de modelos tienen una especie de expectativas que se cumplen temporalmente; donde modelos mentales, hipótesis o creencias que se logran realizar de forma temporal (aunque no perfectamente), y dan paso a creencias o hipótesis diferentes cuando dejan de cumplirse, como se explica en el paso 3 del algoritmo.

El algoritmo de comportamiento planteado le da a las expectativas el carácter coevolutivo. Las expectativas para sobrevivir dentro del universo de estados posibles del mundo deben mostrar su valía, compitiendo y/o adaptándose. Lo que produce que el entorno creado por otras expectativas (de otros agentes) se vea modificado en cada iteración ¹¹. Esta coevolución de las expectativas de los agentes en un mundo en que ellos mismos las crean una y otra vez, les da el carácter de ser autorreferenciales como habíamos mencionado anteriormente.

Los insumos para la generación de expectativas de los agentes es la información (tanto exógena como endógena que se genera en el sistema) traducida en estrategias. En el sistema financiero la información endógena puede llegar a ser los precios, índices bursátiles, rendimientos, tasas de interés; la información exógena puede ser nuevas leyes, resultados de otros mercados, crecimiento de la economía, etc. Además, de las heurísticas preconcebidas que tienen los agentes del sistema, los factores señalados forman parte de la toma de decisiones.

Retomemos el planteamiento del modelo que proponemos. Como vimos en la ecuación (2.5) el algoritmo atribuye un sentido causal de las expectativas a partir de los posibles estados del mundo. Se sigue un modelo similar a los planteados por Shackle (1976) y Ellsberg

¹¹En la heterogeneidad, las expectativas tienen un carácter recursivo: los agentes deben formar sus expectativas a partir de sus anticipaciones de las expectativas de otros agentes, y esta autorreferencia impide que las expectativas se formen por medios deductivos. (Arthur, 2014, p. 42).

(2015) donde los agentes tienen solo una representación aproximada del conjunto de estados del mundo, actúan sobre la base de una partición que no es fina como para hacer viable la utilidad subjetiva de Savage (1972). Pero a su vez las ECAs se diferencian porque se tiene retroalimentaciones de otros agentes como del sistema, produciendo que en cada iteración se tengan tantos escenarios distintos que hacen que modifiquen sus estrategias de acuerdo con la dinámica del sistema.

$$\forall h_t \in \Gamma_t, \pi_p(h_t) = \mu_p(h_t) \quad (2.9)$$

En (2.9) Γ_t representa un conjunto mutuamente excluyente de los estados del mundo que los agentes con sus limitaciones pueden concebir. La función π representa el estado de conocimiento de un agente sobre los estados del mundo, distinguiendo lo posible de lo menos posible. En este contexto $\pi(h_t) = 0$ significa que el estado h_t se rechaza como imposible, mientras que $\pi(h_t) = 1$ significa que el estado h_t es totalmente posible. Aquí la interpretación del valor 0 es el de probabilidad.

Si Γ_t es exhaustivo, al menos uno de los elementos de Γ_t debería ser el estado de resultados observados, de modo que $\exists h_t, \pi(h_t) = 1$. Diferentes eventos pueden tener simultáneamente un grado de posibilidad igual a 1.

En particular, suponemos que se pueden capturar formas extremas de estados epistémicos:

- Conocimiento completo¹², donde para algunos h_0 , $\pi(h_0) = 1$ y $\pi(h) = 0, \forall h \neq h_0$ (solo h_0 es posible), y
- Completa ignorancia donde $\pi(h_t) = 0 \forall h_t \in \Gamma_t$ donde todas las configuraciones de los estados pueden ser posibles, algo así como la entropía.

Por ejemplo, dada una consulta simple de la forma ¿ocurre el evento P ? Donde P es un

¹²Pero se supone que las decisiones se toman en condiciones de incertidumbre fundamental. Si los resultados coinciden con los esperados, sería por “mera” casualidad y el agente solo lo puede conocer a posteriori.

subconjunto de estados, la respuesta a la consulta se puede obtener calculando los grados de posibilidad y necesidad, respectivamente (asumiendo la escala de posibilidad $L = [0, 1]$):

$$\Pi(P) = \sup \pi(h_t); N(P) = \inf(1 - \pi(h_t)) \quad (2.10)$$

Con el algoritmo planteado en mente, podemos pensar que los ciclos bursátiles son una emergencia producto de la dinámica de la formación de expectativas en el sistema. La estructura del sistema influye en el comportamiento de los agentes y en su toma de decisiones. Las expectativas que se cumplan darán lugar a la formación de los ciclos bursátiles. Es decir, que los ciclos son producto de las expectativas generalizadas que se aceptan en el sistema. El comportamiento de los agentes que participan en el sistema es de seres humanos y tienen regularidades de comportamiento. La estructura social e institucional combinada con el comportamiento de los agentes produce oscilaciones en el comportamiento de las variables, creando un sendero homeostático.

Los ciclos se producen de forma endógena, el propio sistema crea sus crisis gracias a la interacción de los agentes en él. Pueden existir factores exógenos, como cierto tipo de información (noticias, decisiones políticas, desastres naturales, innovaciones en otros sistemas) que pueden crear o alterar un ciclo bursátil. Pero es la propia estructura del sistema la que permite que el ciclo se presente por mucho tiempo¹³.

La modificación adaptativa del conocimiento de los agentes producen que sus decisiones se modifiquen de forma adaptativa. El criterio de aptitud es la confirmación de la expectativa indicada por el éxito de las acciones de los agentes.

Siguiendo a Butos y Koppl (1993, p. 314-315), podemos asumir que la formación del sistema de expectativas tienen cuatro componentes centrales:

1. Las expectativas se forman en un contexto de ignorancia sobre la realidad. La incerti-

¹³Los choques exógenos indudablemente inician y ayudan a impulsar la dinámica del sistema. Si bien los factores exógenos influyen, la camisa de fuerza de equilibrio de la economía tradicional ha llevado a un énfasis excesivo sobre este factor (Beinhocker, 2006, p. 185).

dumbre¹⁴ es un resultado de restricciones abstractas e inherentes sobre lo que se puede conocer. Los agentes no son capaces de conocer el mundo como es, la mente construye una representación de su entorno que no llega a ser completa.

2. Las expectativas se forman como resultado de un aparato clasificador mental. La mente construye teorías de la realidad utilizando reglas de determinación para organizar los datos sensoriales. El mapeo del mundo del agente limita la gama de “modelos” que el agente puede emplear.
3. La actividad cognitiva funciona como un mecanismo de adaptación. Un criterio de bondad de ajuste permite al agente valorar la utilidad de las hipótesis de la realidad y las expectativas que estas generan. Las expectativas que fallen inducen a su revisión pasando a un proceso de eliminación a nivel individual.
4. Las expectativas se construyen de forma endógena como una consecuencia necesaria del papel que juegan los estímulos sensoriales en la teoría cognitiva de Hayek.

Por lo tanto, las expectativas y los comportamientos de los agentes se endogenizan en virtud de que adaptan el comportamiento a las «condiciones de filtrado» o reglas sociales del juego según nuestro algoritmo. En consecuencia, se generarán resultados de mercado que no solo son involuntarios, sino que, dependiendo de estas condiciones de filtrado, también pueden ser desordenados y posiblemente indeseables.

Las expectativas son una forma de conocimiento. Este es incompleto per se. Si seguimos a Shackle, son pensamientos basados en la imaginación. mientras que para Hayek son reglas de conducta, como habilidades o propensiones a hacer una acción. Para nosotros tiene de ambos componentes.

Butos y Koppl (1993, p. 317), hacen una distinción entre Shackle y Hayek: si los pensamientos, como argumenta Shackle son inconstantes y más o menos variables, entonces las

¹⁴En la visión evolutiva de Hayek, la incertidumbre no necesariamente causa descoordinación de acciones de los agentes, por el contrario, tienden a la coordinación, ya que los precios contienen información del sistema.

expectativas económicas (como pensamientos, no como propensiones) también pueden ser inconstantes y poco fiables. Mientras que si las expectativas se entienden como propensiones incorporadas en reglas de acción, seleccionadas por su valor de supervivencia (como lo vimos en el juego de la minoría), como lo expone Hayek, y adaptadas por las fuerzas competitivas del mercado para adaptarse al entorno en el cual van a operar, se esperaría que fueran más estables y confiables.

Esto tiene sentido dado que las estructuras sociales y los patrones, resultados de las acciones individuales de los agentes, son atribuibles a la adaptación de las reglas sencillas. Los agentes no se coordinan, pueden existir señales de colusión o coordinación, producto de la interacción de los agentes que buscan obtener el máximo provecho de la regla, pero son casos específicos y aislados del agregado.

Todos los agentes en la dinámica de los mercados siguen normas explícitas e implícitas, es decir, que el orden (o caos) es resultado del seguimiento de reglas. Este orden, entonces, sigue patrones de comportamiento, los cuales son complicados de discernir a nivel individual, pero que en el agregado son más claros. Por lo que podemos decir que las expectativas, transformadas en estrategias, gobiernan las actividades de los mercados.

De acuerdo con esto, las desviaciones de las expectativas convertidas en estrategias, muchas veces se castigan con pérdidas o en un caso extremo salidas del mercado. Esto lo podemos observar como no seguir la expectativa autocumplida. No siempre el agregado seguirá un patrón obvio, pero siempre existirá un patrón el cual en el agregado sigue impulsado por la expectativa, haciendo que se ejecute una estrategia en particular.

No estamos diciendo que los agentes sean irracionales, por el contrario, los agentes actúan de forma racional de acuerdo a las heurísticas y experiencia que estos hayan obtenido de otros procesos de decisión. Para que sea un proceso evolutivo, deben existir mecanismos que vinculen los cambios en el entorno con las heurísticas de supervivencia (seguir operando en el mercado) que componen, de cierta forma, el orden de la estructura social.

De acuerdo con Campbell (1974), la adaptación con el entorno implica procesos y meca-

nismos de selección que introducen o generan variación, y procesos que preservan y propagan la variación. Es decir, algunos procesos y mecanismos funcionan como una retroalimentación negativa, mientras que otros como una positiva. Este proceso completo es similar a la evolución biológica: la supervivencia.

Si este proceso de adaptación de las expectativas es muy cambiante, entonces nos encontraremos con mercados fluctuantes. En el entorno económico en el cual se validan las expectativas compiten las conjeturas hechas por los agentes. Como ya habíamos mencionado, las estrategias que funcionen seguirán vigentes, mientras que las que no, serán reemplazadas en virtud de nuevas que satisfagan las condiciones iniciales impuestas por el entorno.

Lo interesante es que bajo presión de atractores, o como los denomina Koppl (2002) «Grandes Jugadores», las expectativas de estos pueden influir en el sistema, haciendo que los agentes descarten sus expectativas individuales, en pro de creer que las conjeturas de estos agentes sean más convincentes. Pero existe un problema con esta idea del gran jugador, solo es operativa si las restricciones del sistema son laxas.

Este tipo de agentes grandes, como banqueros centrales, ministros de finanzas o CEO's participan de forma activa en la toma de decisiones que influyen en los resultados de la dinámica de los mercados¹⁵. Cuando tenemos demasiados agentes de este tipo, el mecanismo evolutivo podría llegar a funcionar mejor que la hipótesis de mercado eficiente. Esto sucede porque el mercado es demasiado denso, las expectativas de estos agentes tienen un alto grado de influencia en las decisiones económicas de los mercados.

En este tipo de mercados densos y con mucho ruido, los precios de los activos financieros pueden ser propensos a seguir modas pasajeras, incluso pueden llegar a producir burbujas financieras. El pastoreo y comportamiento de manada es común en la concepción de las burbujas financieras, lo que debería crear, de acuerdo con Mandelbrot (1972), ciclos aperiódicos. Eso produce que existan desviaciones de la tendencia, las cuales también se pueden interpretar como burbujas especulativas.

¹⁵Como argumentan Butos y Koppl (1993, p. 323), los grandes jugadores deben ser, en alguna proporción, inmunes a la disciplina de ganancias y pérdidas, además, deben tener poder y usarlo.

Estos grandes jugadores (o jugadores atractores) introducen al mercado comportamientos del tipo: lo que los agentes hacen y lo que deberían hacer. Se enfrentan a dilemas, poniendo en discusión sus propias expectativas. Sin la postura evolutiva sería complicado modelar esta disyunción que existe entre los agentes heterogéneos que hacen parecer que existe homogeneidad al adoptar expectativas de agentes atractores.

Consideramos interesante el planteamiento propuesto hasta el momento. Es importante entender por qué las expectativas tienen un rol fundamental en los sistemas económicos. Ahora procederemos a introducir el Juego de la Minoría. Este modelo, considerado en el entorno de los econofísicos como *toy model*, nos permitirá entender analíticamente el algoritmo que hemos argumentado a lo largo de este capítulo.

Capítulo 3

Juego de la Minoría.

La investigación económica se ha centrado durante mucho tiempo en los agregados, dejando de lado el cómo se forman las estructuras a partir de las interacciones de los agentes. Patrones de comportamiento, reglas o el surgimiento de instituciones son fenómenos que se generan a partir de estas interacciones “microscópicas”, es decir, de decisiones individuales con diversas motivaciones.

Este es un punto de inflexión que expone una de las falencias de los estudios tradicionales en materia de teoría económica: homogeneidad. La creación de mercados artificiales con la modelación moderna de agentes considera la evolución, adaptación y/o aprendizaje parte de la dinámica de los sistemas. Es de nuestro interés capturar el algoritmo de las ECA y el Juego de la Minoría nos ayuda a ejemplificarlo de forma fiel.

El Juego de la Minoría (JM) nace de la formulación matemática del problema del bar “El Farol” planteado por Arthur (1994) quien analiza la toma de decisiones desde el punto de vista del razonamiento inductivo. Preliminarmente, fue concebido para ayudarnos a comprender mejor los fenómenos cooperativistas y las fluctuaciones en los sistemas económicos que están compuestos por un gran número de agentes. La propuesta de matematización, en primera instancia, resulta de la modelización de Challet y Zhang (1997) de un juego evolutivo. Este modelo es muy versátil y aplicable a cualquier sistema económico o social que esté

formado por agentes que toman decisiones de manera egoísta¹, en el cual tratan de anticipar, de alguna forma, las decisiones de los otros agentes.

El JM entra en el marco conceptual de la Econofísica. Es un modelo sencillo adaptativo de múltiples agentes (Yeung y Zhang, 2008, p. 3). Esta se caracteriza por aplicar técnicas matemáticas y conceptos de la física teórica y experimental a fenómenos sociales y económicos. En particular, el JM es intrigante e interesante por su poder para encontrar propiedades a partir de ecuaciones planteadas de forma microscópica². En el caso particular del JM sus ecuaciones estocásticas no evolucionan a un estado de equilibrio, sino que describe de forma aproximada el comportamiento de sistemas con agentes interactuantes.

A diferencia de los modelos planteados en economía para estudiar la toma de decisiones y la interacción de los agentes, en el marco de teoría de juegos, en el JM no se supone que los agentes tienen racionalidad completa. La racionalidad completa implica que los agentes son capaces de conocer y anticipar las decisiones de los otros agentes. En cierta parte, esta suposición facilita el planteamiento matemático de muchos fenómenos económicos, pero modelamos sistemas idealizados que muchas veces no nos ayudan a entender a nivel macroscópico la dinámica del sistema. En el JM, por el contrario, los agentes tienen racionalidad inductiva, donde toman sus decisiones a partir de la información, la cual no es completa y es pública.

Como parte de este capítulo abordaremos una introducción al JM donde trataremos de responder: qué es el JM y por qué es importante estudiarlo para mejorar la comprensión de los sistemas sociales y económicos. Para responder estas preguntas empezaremos abordando el problema del bar “El Farol”, el cual supone que los agentes razonan de forma inductiva, para luego proseguir con los constituyentes básicos del JM.

¹Cuando nos referimos a agentes egoístas, hablamos de agentes que persiguen su beneficio propio.

²Esta vendría a ser una característica de la Mecánica Estadística.

3.1. El bar «El Farol».

En teoría de juegos se describe cómo los agentes interactúan y compiten en un sistema determinado. Cada agente obtendrá una ganancia, la cual depende de las decisiones de otros agentes que también participan en el sistema. La teoría de juegos nace como una iniciativa para construir herramientas para anticipar las estrategias en la Segunda Guerra Mundial, pero su poder de modelar sistemas competitivos ha hecho que se apliquen en diferentes áreas del conocimiento como la política o la biología. En este sentido, los agentes buscan tener estrategias óptimas con el fin de obtener la máxima ganancia promedio posible entre todos los agentes que participan en el sistema. Para esto los agentes deben tener toda la información y además deben ser capaces de procesarla de forma lógica y precisa.

Considerando que la mayoría está de acuerdo con la idea de que el ser humano no toma decisiones racionalmente de forma deductiva y perfecta³. Es decir, que ambas suposiciones no pueden cumplirse. No estamos argumentando que los agentes deben dejar de ser racionales completamente y que sus decisiones solo se basan en la aleatoriedad de la suerte. El proceso de toma de decisiones tiene tres ingredientes claves: el conocimiento adquirido mediante el estudio, la experiencia y la intuición. La suma de estos elementos genera algún grado de racionalidad instrumental en los agentes, los cuales la utilizan para elaborar y seleccionar estrategias para el logro de sus objetivos. En el caso de los mercados financieros, el objetivo es obtener ganancias y a veces es también evitar las pérdidas.

Entonces, la realidad de los procesos de toma de decisiones aplicados a los mercados (o a la vida cotidiana) se pueden modelar mejor si tomamos en cuenta que los agentes razonan de forma inductiva.

El problema del bar “El Farol” fue concebido para explicarnos por qué los agentes razonan de forma inductiva y no de forma lógica y deductiva. Este problema fue planteado de la siguiente forma. El bar “El Farol” se encuentra en la ciudad de Santa Fe. Entre sus

³Arthur y cols. (1996, p. 19) demostraron que una vez introducidos agentes heterogéneos a los mercados artificiales, el razonamiento deductivo falla. Utilizar la idea de razonamiento inductivo es natural y realista como en los mercados financieros reales.

actividades cotidianas organiza las noches de los jueves de música irlandesa, el cual es un evento muy popular entre los habitantes de la ciudad. Ahora, imaginemos que un grupo de residentes de la ciudad deciden de forma independiente cada jueves ir o no ir al bar “El Farol”. Como todo espacio, este tiene una capacidad máxima de aforo permitido. Supongamos que el bar tiene un espacio para albergar 60 personas. Ahora digamos que si el bar supera las 50 personas el lugar estará muy lleno y la noche no será agradable porque no se apreciará la estancia. Cada persona entonces tendrá que tratar de intuir si el bar estará muy concurrido o no y decidirá hacer lo contrario que el resto de personas supuestamente decidan, es decir: ir al bar cuando probablemente la mayoría decidiera quedarse en su casa (o ir a otro lado) y viceversa. Los agentes prefieren estar en la minoría, ya que pertenecer a la mayoría les sería menos placentero. En este contexto se descarta por completo que los agentes razonen de forma deductiva, ya que no es posible saber a ciencia cierta qué piensan las otras personas. Entonces, los agentes realizarán un seguimiento de forma inconsciente del rendimiento de sus estrategias, es decir, que utilizaran las estrategias que mejor resultados les han dado.

Lo paradójico es que esperaríamos que este sistema evolucione de forma determinista, pero esto no sucede. Dado un estado inicial, la dinámica del sistema depende de la capacidad predictora de las estrategias utilizadas por los agentes para decidir si ir al bar no. Esto no implica que surgirá un patrón de asistencia trivial. En caso de existir un patrón y un agente o un grupo de agentes tratará de explotarlo, la misma interacción de los agentes lo anularía. Por lo tanto, la asistencia promedio de los residentes al bar debería oscilar el valor crítico de 50 personas. La calidad de los predictores en esencia se define en términos de las decisiones de los otros agentes. Si un agente llegara a cambiar alguno de sus predictores, afectaría al rendimiento de los predictores del resto de agentes, haciendo que exista una falla sistémica.

El problema del bar “El Farol” es un ejemplo sencillo de la dinámica compleja que pueden tener los sistemas sociales y económicos, donde las decisiones que toman unos influyen en el resto de agentes del sistema. Todos los agentes buscan tomar la decisión que les permita estar en la minoría, ya sea yendo al bar o quedándose en casa. En el caso de los mercados financieros o comerciales, donde tienen que decidir si comprar (o vender) un activo o un bien, el precio resultante será alto si los vendedores son minoritarios, pero bajos si son la mayoría.

Entonces, realmente el JM es aplicable a casi cualquier situación cotidiana que implique que los agentes deban basar su toma de decisiones dadas las decisiones de los otros agentes.

Podemos decir entonces que el JM es la matematización del problema del bar “El Farol”. Las matemáticas que se utilizan son las que podemos observar aplicadas en el área de Mecánica Estadística en Física. Estas técnicas nos permiten estudiar el comportamiento colectivo de grandes sistemas con constituyentes heterogéneos y nos permite detectar y analizar las transiciones de fase.

3.2. El Juego de la Minoría básico.

El JM tradicional, como mencionamos anteriormente, es la matematización del problema del bar “El Farol”. Por lo cual, al igual que Coolen (2005), cambiaremos al dialecto económico. En este sentido, ya no hablamos de asistentes del bar, sino de agentes comerciantes. Su decisión binaria ya no será ir o no ir al bar, sino comprar o vender. Los predictores ahora pasan a ser estrategias. Cambiamos la posible experiencia agradable o desagradable (en caso de ir al bar y estuviera con muchas personas) por ganancias o pérdidas. Por último, la asistencia total al bar se convierte en la oferta total de mercado. De la misma forma que en el problema del bar “El Farol”, los agentes tomarán decisiones con el objetivo de pertenecer al grupo de agentes minoritarios. Por la ley de oferta y demanda sabemos que el mercado como mecanismo favorece a los vendedores cuando la mayoría de los agentes participantes quieren comprar, y favorece a los compradores cuando la mayoría de los vendedores eligen vender. Es por esto que se llama JM.

El modelo del JM estará compuesto por N agentes, etiquetados con $i = 1, 2, \dots, N$ que participan en mercados puramente especulativos. En este mercado existe solo un activo negociable. Además, el juego evoluciona de forma discreta, las etapas las denotamos por $t = 1, 2, 3, \dots, T$. Ahora procedemos a plantear los ingredientes básicos del JM:

3.2.1. Los Agentes.

Los agentes son *chartistas*⁴. Tienen razonamiento inductivo y basan sus decisiones en la mejor elección que conocen. Además, adaptan su comportamiento de acuerdo a su experiencia.

Acciones de los agentes.

En cada etapa t , cada agente i toma una decisión binaria $b_i(t) \in \{-1, 1\}$. Esto lo llamamos oferta agregada⁵, la cual representa las acciones de los agentes: *comprar* (-1) vs. *vender* ($+1$). La oferta agregada reescalada⁶ en la etapa t está definida como

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N b_i(t)$$

3.2.2. Información pública.

Los agentes toman sus decisiones basándose en la información histórica de la oferta agregada, la cual es pública. En el paso t dan los signos de las ofertas, es decir, si los compradores o vendedores fueron el grupo minoritario, en los M pasos más recientes, la cadena

$$\left(\text{sign}[A(t-M)], \dots, \text{sign}[A(t-2)], \text{sign}[A(t-1)] \right) \in \{-1, 1\}^M$$

3.2.3. Estrategias de los agentes.

Una estrategia da una predicción en el siguiente paso de tiempo. Como habíamos mencionado en el capítulo anterior, las estrategias son una transformación de las expectativas de

⁴Estos agentes tienen como comportamiento analizar la realización de precios mediante gráficos sin anclarse en el análisis fundamental del precio.

⁵Algunos autores lo trabajan como excedente de demanda.

⁶Siempre se utiliza un factor de reescalado con respecto al sistema. En otras versiones del JM utilizan $1/N$ o $1/P$.

los agentes en acciones de decisión.

Cada agente i tiene un número fijo de estrategias. Es decir, S estrategias \mathbf{R}^{ia} , donde $a = 1, 2, \dots, S$. Una estrategia \mathbf{R}^{ia} define un mapeo de las cadenas de información a una acción comercial recomendada, lo que implica que convierte la información en una decisión:

$$\mathbf{R}^{ia} : \{-1, 1\}^M \rightarrow \{-1, 1\}$$

Una estrategia funciona como una tabla de búsqueda con entradas de 2^M , cada una puede tomar valores ± 1 . Estas entradas permanecen fijas durante todo el juego.

Posible historia		a_1	a_2	a_3	a_4
-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	+1	-1	-1	-1	+1
+1	-1	-1	-1	+1	+1
+1	+1	-1	+1	+1	+1

Tabla 3.1: Posibles acciones a_1 , a_2 , a_3 y a_4 del agente i según su tabla estrategias \mathbf{R}^{ia}

La tabla 3.1 es un ejemplo para los últimos $M = 2$ elementos de 4 historias posibles. Si el agente i usa la estrategia a en el paso t , actuará (de forma determinista) según

$$b_i(t) = \mathbf{R}^{ia} \left(\text{sign}[A(t - M)], \dots, \text{sign}[A(t - 2)], \text{sign}[A(t - 1)] \right)$$

Para obtener ecuaciones cerradas, finalmente debemos definir cómo nuestros agentes determinan cuáles de sus estrategias personales usar. Una buena estrategia es una que habría prescrito muchas decisiones minoritarias. Dadas las definiciones anteriores, una estrategia \mathbf{R}^{ia} es buena en el escenario t si

$$\mathbf{R}^{ia} \left(\text{sign}[A(t - M)], \dots, \text{sign}[A(t - 2)], \text{sign}[A(t - 1)] \right) = -\text{sign}[A(t)]$$

3.2.4. Valoración de las estrategias.

Cada agente i realiza un seguimiento de una valoración p_{ia} para cada una de sus estrategias, midiendo su registro de seguimiento (independientemente si las usaron o no):

$$p_{ia}(t+1) = p_{ia}(t) - A(t)\mathbf{R}^{ia} \left(\text{sign}[A(t-M)], \dots, \text{sign}[A(t-2)], \text{sign}[A(t-1)] \right)$$

3.2.5. Dinámica y selección de estrategias.

En cada paso t del juego, cada agente i seleccionará su mejor estrategia $a_i(t)$ de las estrategias \mathbf{R}^{ia} que tiene en esa etapa del proceso, definida como

$$a_i(t) = \arg \max_{a \in \{1,2,\dots,S\}} \{p_{ia}(t)\}$$

las entradas de búsqueda de las estrategias \mathbf{R}^{ia} se plantean al azar de $\{-1, 1\}$ con probabilidades iguales antes del inicio del juego.

Los grados microscópicos de libertad son las valoraciones de las estrategias $\{p_{ia}(t)\}$. A partir de los ingredientes básicos del modelo 3.2.1 - 3.2.5, se observa que estas valoraciones evolucionan de acuerdo con las siguientes ecuaciones no lineales pero deterministas:

$$p_{ia}(t+1) = p_{ia}(t) - A(t) \mathbf{R}^{ia} \left(\text{sign}[A(t-M)], \dots, \text{sign}[A(t-2)], \text{sign}[A(t-1)] \right) \quad (3.1)$$

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathbf{R}^{ia_i(t)} \left(\text{sign}[A(t-M)], \dots, \text{sign}[A(t-2)], \text{sign}[A(t-1)] \right) \quad (3.2)$$

$$a_i(t) = \arg \max_{a \in \{1, 2, \dots, S\}} \{p_{ia}(t)\} \quad (3.3)$$

Tenemos que tener en cuenta dos posibles problemas. El primero ya lo salvamos al definir N como impar, lo que implica que $\text{sign}[A(t)]$ estaría definido y siempre podemos determinar el grupo minoritario. Pero para N par deberíamos de tener un criterio de desempate. El segundo, de forma similar, si en el paso t del juego y para algún agente i existen dos o más estrategias diferentes $a, a' \in \{1, 2, \dots, S\}$ con $p_{ia}(t) = p_{ia'}(t)$, entonces seleccionaremos $a_i(t)$, la estrategia que el agente i usa en el paso t , de forma aleatoria con probabilidades iguales entre a y a' .

Además, sabemos que El JM es un juego de suma negativa. Esto debido a que el grupo ganador siempre es más pequeño que el grupo perdedor. Esto describe de forma aproximada la dinámica real de un mercado financiero especulativo, ya que los especuladores inflaran el precio de un activo hasta que este colapsa.

3.3. Fenomenología del Juego de la Minoría.

En esta sección elaboraremos simulaciones numéricas de las ecuaciones planteadas (3.1) - (3.3) para ver la evolución del modelo al seleccionar cantidades experimentales. Esto nos ayudará posteriormente para poder plantear el modelo de forma analítica (ver el apéndice B).

3.3.1. Propiedades estadísticas de la oferta agregada.

Primero revisaremos las propiedades de la oferta agregada de mercado $A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N b_i(t) \in \mathbb{R}$, como se observa al iterar las ecuaciones (3.1) - (3.3) un resultado típico, al realizar simulaciones lo podemos observar en la figura 3.1.

De acuerdo con Coolen (2005, p. 8-9):

- Los valores de las ofertas agregadas $A(t)$ se distribuyen alrededor de cero (ver figura 3.2), con una varianza N^0 . Un promedio distinto de cero para las ofertas implicaría un potencial de predicción de los agentes (algo que habrían hecho y luego desestimado).
- Para tamaños pequeños de memoria M , las fluctuaciones de la oferta agregada $A(t)$ alrededor de su valor promedio son fuertemente no gaussianas, lo que puede sugerir que las ofertas individuales $b_i(t)$ deben estar correlacionadas de alguna manera complicada.
- Como se observa en la figura 3.3, la magnitud de las fluctuaciones en $A(t)$ en el mercado artificial depende de forma no monótona del tamaño de memoria M de los agentes.

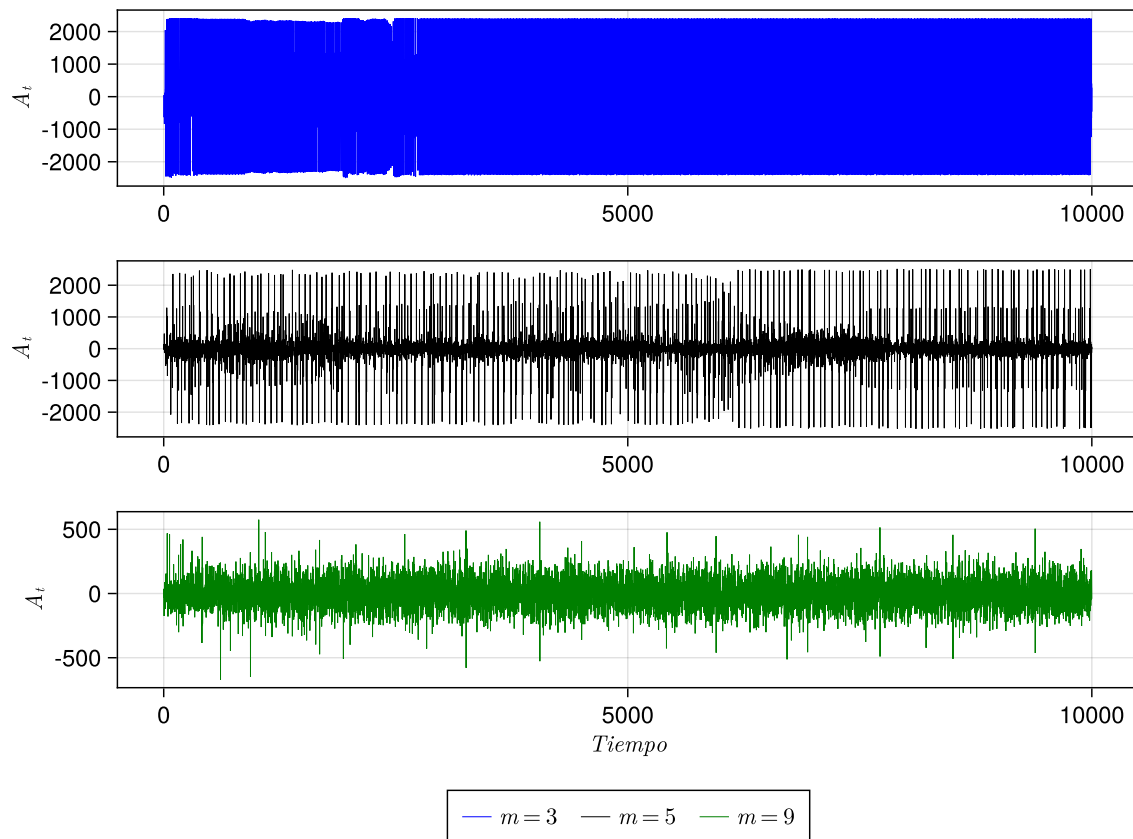


Figura 3.1: Valores de A_t para $N = 5001$ con memoria real $M = 3, 5, 9$ y $S = 2$ estrategias. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

Esto tiene sentido, ya que dependiendo de que tan “inteligentes” sean nuestros agentes, las fluctuaciones del mercado se verán afectadas. Pero podemos observar en la figura 3.3 que para valores muy grandes de memoria, $M = 15$ por ejemplo, las fluctuaciones incrementan. Aún no está claro como afecta valores de memorias muy grandes en el mercado artificial, pero podemos asumir que la racionalidad completa no nos mejora el comportamiento de los agentes, sino que se vuelve más inestable el mercado.

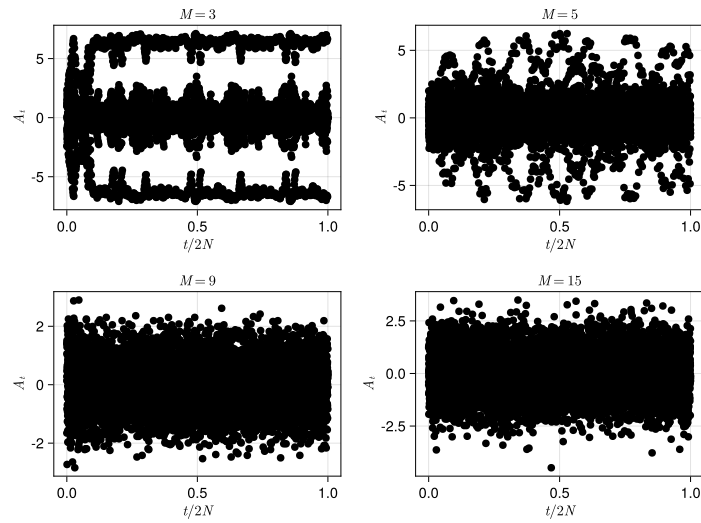


Figura 3.2: Valores de A_t para $N = 5001$ agentes con memoria real $M = 3, 5, 9, 15$ y $S = 2$ estrategias. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

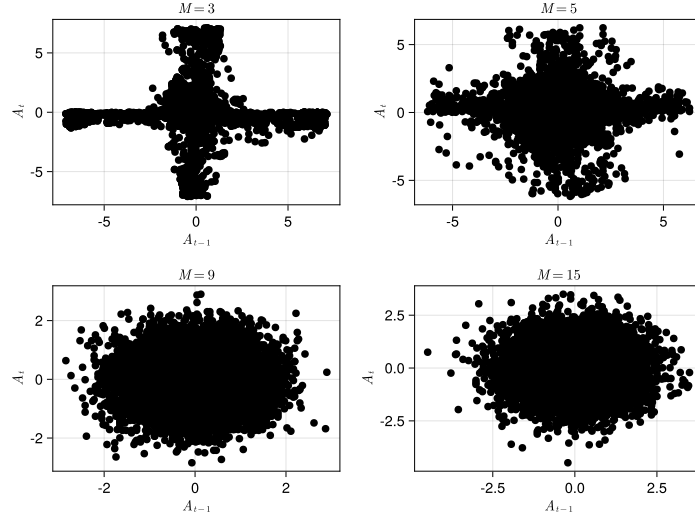


Figura 3.3: Valores de A_t versus A_{t-1} para $N = 5001$ agentes con memoria real $M = 3, 5, 9, 15$ y $S = 2$ estrategias. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

3.3.2. Volatilidad y parámetros de control.

En finanzas cómo en economía es común hacer análisis de series de tiempo. Definimos el promedio de $\langle A \rangle$ y la volatilidad σ para una serie $A(t)$:

$$\langle A \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A(t), \quad \sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[A(t) - \langle A \rangle \right]^2 \quad (3.4)$$

Pero este promedio $\langle A \rangle$ y volatilidad de la oferta agregada de mercado mide las fluctuaciones cuando el juego se encuentra en el estado estacionario. Es decir, que las variables b_i que define el comportamiento de la oferta agregada del JM son invariantes respecto al tiempo. Entonces, las ecuaciones descritas en (3.4) solo nos servirían si el juego, después de cierto tiempo t , es estacionario.

Según Coolen (2005, p. 10), para el JM consideraremos primero el caso de la toma de decisiones cuando es aleatoria. $b_i(t)$ tomará valores aleatorios de $\{1, -1\}$ en cada paso del

juego, de modo que $\langle b_i \rangle = 0$ y $\langle b_i b_j \rangle = \delta_{ij}$, tendremos que

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \langle b_i \rangle = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T A^2(t) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle b_i b_k \rangle \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1 = 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Entonces, con $\sigma > 1$ describe un mercado ineficiente, mientras que uno con $\sigma < 1$ un mercado eficiente. Cuando hablamos de eficiencia, no lo decimos en el contexto tradicional, sino en la capacidad que tienen los agentes que participan en el mercado de procesar la información que tienen disponible.

Recordemos que la volatilidad es la variación promedio temporal de la oferta. Yeung y Zhang (2008, p. 2) mencionan que la volatilidad es una medida inversa de la eficiencia de la distribución de recursos en el juego: la información. Por lo tanto:

- una volatilidad alta corresponde a grandes fluctuaciones de la oferta, lo que implica un juego ineficiente;
- mientras que una volatilidad baja corresponde a fluctuaciones menores en la oferta, lo que implicaría un juego eficiente.

Savit, Manuca, y Riolo (1999) descubrieron el parámetro de control α , que se define como la relación entre la información posible del sistema y el tamaño del sistema $\alpha = 2^M/N$. Este parámetro nos permite ver cambios en la escala de los observables macroscópicos del

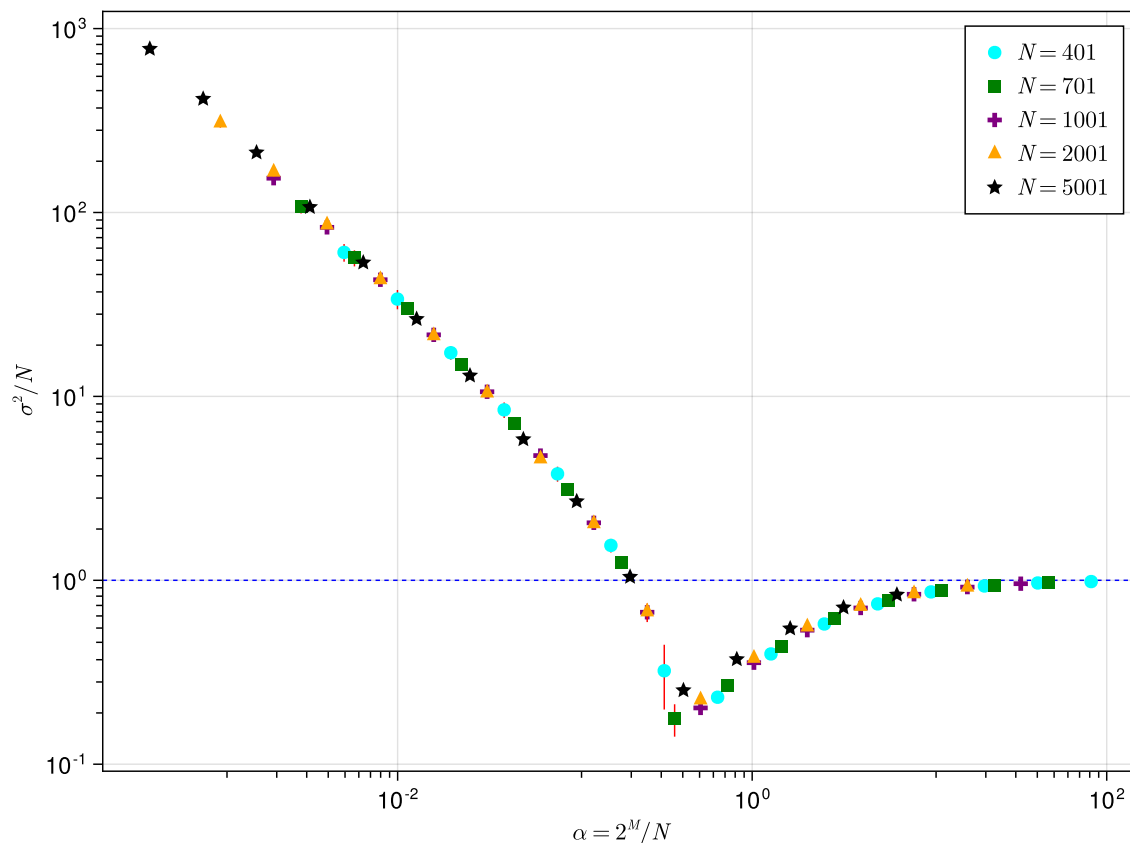


Figura 3.4: Curva teórica de la volatilidad para diferentes valores de memoria real $m = 1, \dots, 15$ y $S = 2$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 100000 pasos de tiempo para diferentes tamaños del sistema.

juego para diferentes cantidades de información y tamaño del sistema. Además, nos permite observar una transición de fase en el valor crítico de α (es decir, α_c) que separa una parte fase simétrica de una asimétrica. En la fase simétrica o impredecible $\alpha < \alpha_c$, los agentes no pueden predecir las acciones ganadoras de acuerdo con su memoria M de historia pasada, mientras que en la fase asimétrica o predecible $\alpha > \alpha_c$ los agentes tienen un sesgo en las acciones ganadoras.

- Cuando α es pequeño, la volatilidad del juego es mayor que el límite de lanzamiento de una moneda, lo que implica comportamientos colectivos de los agentes peores que las elecciones aleatorias. A esta fase del juego se la denomina régimen peor que aleatorio.
- Cuando α aumenta, la volatilidad disminuye y entra en una región donde los agentes

se desempeñan mejor que las elecciones aleatorias. A esta fase del juego se la denomina régimen mejor que aleatorio.

- Cuando α aumenta aún más, la volatilidad aumenta nuevamente y se acerca al límite del lanzamiento de una moneda.

3.3.3. Previsibilidad.

Moro (2004, p. 8) nos expone el hecho de que los agentes parezcan explotar la información de las series temporales de la oferta agregada $A(t)$ llamo la atención de la comunidad de econofísicos. Se encontró que $W(t+1) = \text{sign}A(t)$, que es el grupo ganador, es independiente de la secuencia de los M últimos valores de la historia en la región de alta volatilidad, es decir, cuando $\alpha > \alpha_c$. Para cuantificar este comportamiento, se propuso medir la probabilidad condicional de que $W(t+1)$ conozca $\mu(t)$ a través de la información entrópica mutua de $W(t)$ y $W(t+1)$. En otras palabras

$$H = \frac{1}{2^M} \sum_{\nu=1}^{2^M} \langle W(t+1) | \mu(t) = \nu \rangle^2 \quad (3.7)$$

donde μ es la memoria de los M resultados pasados. Como se observa en la figura 3.5 H mide la información de la serie temporal de $A(t)$ disponible para los agentes que participan en el mercado. Si $H \neq 0$ indica la presencia de información útil ⁷ en la serie de tiempo de $A(t)$.

Con este punto de referencia, podemos apreciar en la figura 3.4 la tasa de éxito en el JM está cerca de $1/2$ alrededor del mínimo de σ^2/N . Pero es menor en la región donde la volatilidad es alta. Para valores pequeños de α se observa un mercado altamente ineficiente, ya que es peor que si los agentes hayan tomado decisiones puramente aleatorias. En cambio, para valores grandes de α , el mercado es eficiente en el procesamiento de la información disponible.

⁷En algunos modelos también indica la presencia de arbitraje

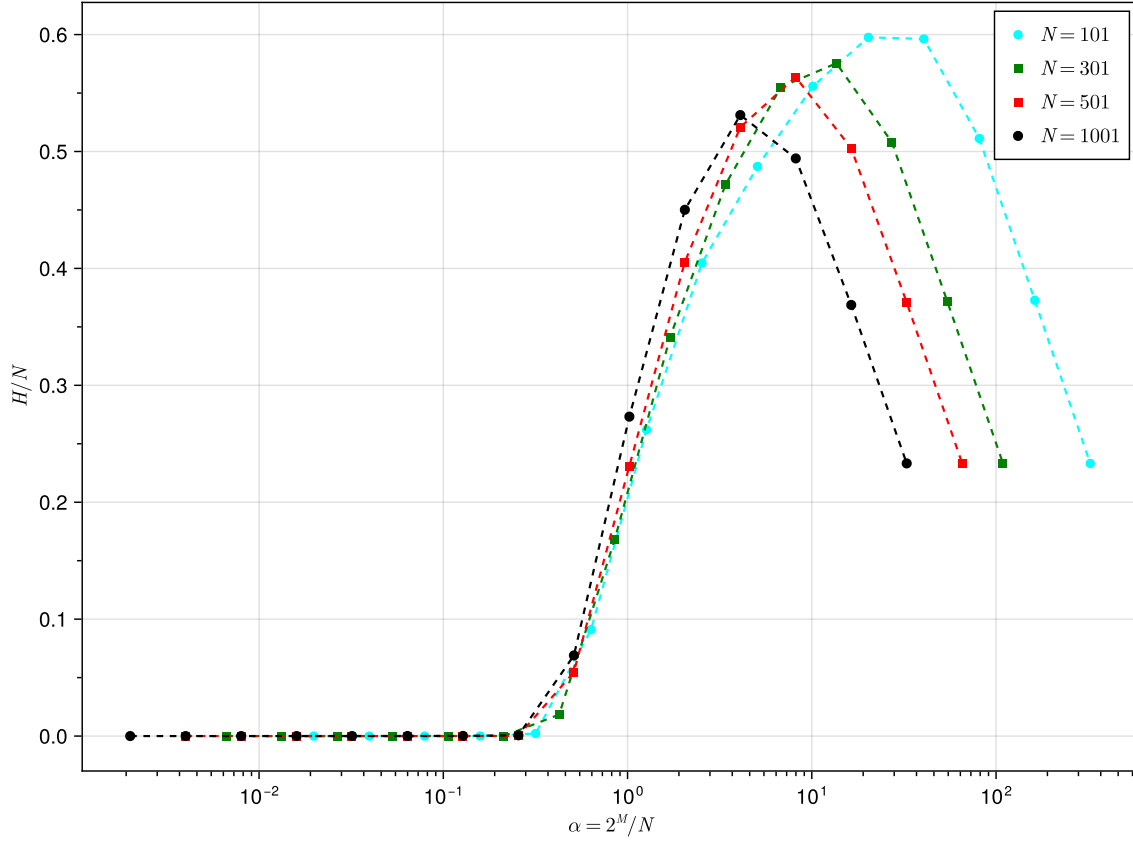


Figura 3.5: Valores del parámetro H para $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria real $M = 1, \dots, 15$ y $S = 2$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo.

De acuerdo con Coolen (2005, p. 25), las curvas de volatilidad obtenidas para diferentes tamaños del sistema N (como se muestra en la figura 3.4, pero con un número idéntico de estrategias por agente, colapsan casi perfectamente cuando se trazan en función de la relación $\alpha = 2^M/N$. Esto nos dice que para los cálculos mecánicos estadísticos, donde uno analiza el límite $N \rightarrow \infty$, la cantidad α será el parámetro de control relevante. Además, para aquellos interesados en comprender los mercados (financieros) reales, parecían indicar que, al menos para valores intermedios de la relación α , los agentes en el JM desarrollan experiencia: pueden y aprenden (implícitamente) a predecir las decisiones que tomarán los agentes. sus competidores y, por lo tanto, predecir el mercado, únicamente sobre la base de la experiencia. Para los mecanicistas estadísticos, por otro lado, la figura 3.4 sugirió la existencia de una transición de fase de no equilibrio en algún valor crítico α_c .

3.3.4. Agentes “Congelados”.

En el JM podemos observar que los cambios a nivel microscópico más importantes se dan cuando los agentes cambian de estrategias. De acuerdo con Coolen (2005, p. 12) un agente congelado, es aquel que no cambia de estrategia de una etapa a otra durante todo el juego. Definimos $\zeta_i \in [0, 1]$ como la fracción de iteraciones en el estado estacionario donde el agente i cambia su estrategia activa

$$\zeta_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [1 - \delta_{a_i(t), a_i(t-1)}] \quad (3.8)$$

donde $\delta_{a_i(t), a_i(t-1)}$ es una delta de Kronecker:

$$\delta_{a_i(t), a_i(t-1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i(t) = a_i(t-1) \rightarrow \text{No cambio de estrategia} \\ 0 & \text{si } a_i(t) \neq a_i(t-1) \rightarrow \text{Cambio de estrategia} \end{cases}$$

es decir, que si $\zeta_i = 0$ el agente i está congelado, no cambio su estrategia activa. Si $0 < \zeta_i \leq 1$ el agente i no está congelado, cambio su estrategia activa. $D(\zeta)$ es la distribución de los N valores $\{\zeta_i\}$ de la comunidad de agentes:

$$D(\zeta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta[\zeta - \zeta_i]. \quad (3.9)$$

La fracción de agentes congelados en el estado estacionario la denotamos por Φ :

$$\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lim_{T \rightarrow \infty} \delta_{T, [\delta_{a_i(t), a_i(t-1)}]}. \quad (3.10)$$

Esta fracción de agentes es importante porque nos dice cuantos agentes no cambian de estrategia durante la evolución de la dinámica del sistema. Los resultados obtenidos para la fracción de agentes congelados Φ (ver 3.6) nos muestra que a medida que aumenta el número de agentes, esta fracción disminuye para valores de memoria muy pequeños, y que aumenta

para valores de memoria más grandes.

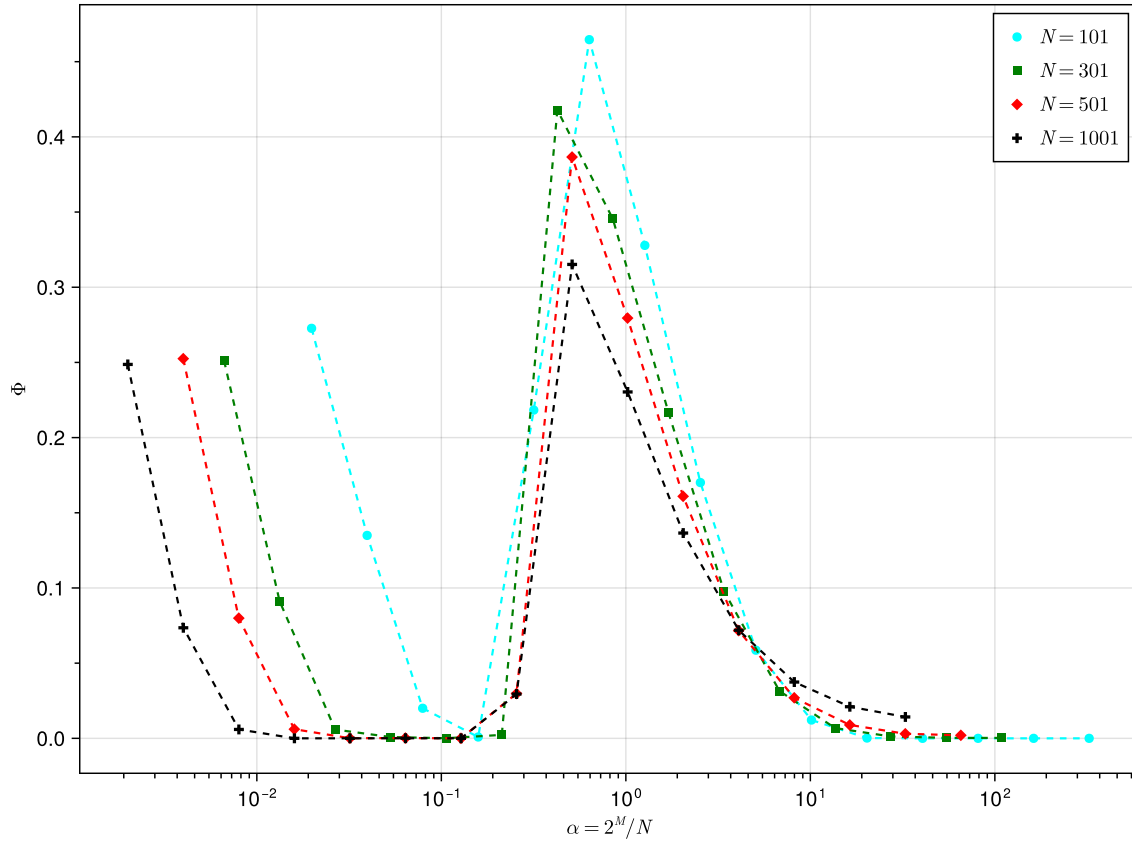


Figura 3.6: Fracción de agentes congelados Φ para $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria real $M = 1, \dots, 15$ y $S = 2$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

3.3.5. Memoria falsa (o historia falsa).

Para introducir memoria falsa (o historia de mercado falsa) en el sistema modificaremos las ecuaciones del JM básico (3.1) - (3.3). En lugar de la historia real del mercado $\{\text{sign}[A(t - M)], \dots, \text{sign}[A(t - 2)], \text{sign}[A(t - 1)]\}$, a los agentes se les dará en cada tiempo t del juego un resultado aleatorio de $A(t)$. Es decir, los agentes podrán obtener el $\text{sign}[A(t)] \in \{+1, -1\}$ cómo valores en los cuales basar su toma de decisión, esto implica un historial de mercado falso como cadena de números aleatorios⁸.

⁸También lo podemos interpretar como información exógena al mercado.

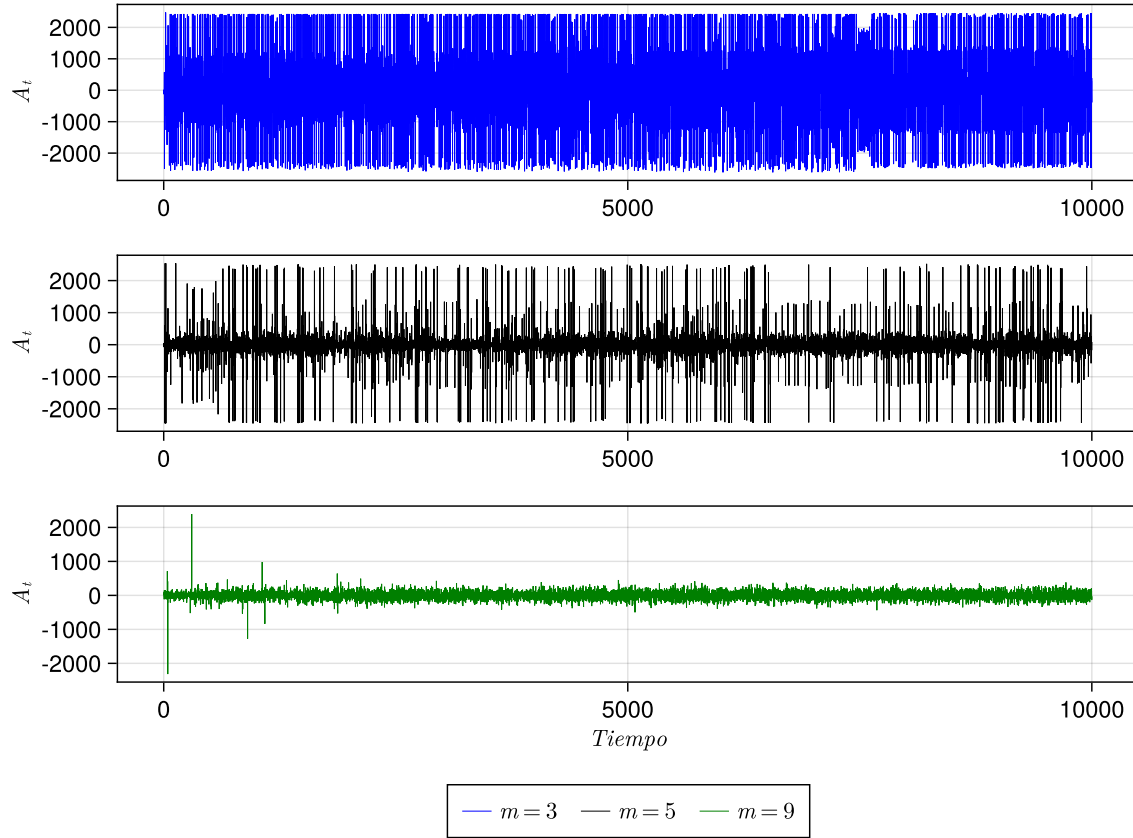


Figura 3.7: Valores de A_t para $N = 5001$ con memoria falsa $M = 3, 5, 9$ y $S = 2$ estrategias. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

Para esto supondremos un proceso estocástico markoviano⁹, donde la probabilidad de encontrar un estado en el paso $t + 1$ solo depende del estado inmediato anterior, en este caso el paso t . Definimos $p = 2^M$ con $p = \alpha N^{10}$ y $\mu(t)$ son números aleatorios extraídos de forma independiente con iguales probabilidades de $\{1, 2, \dots, p\}$. Esto define cuál de las $p = 2^M$ posibles cadenas binarias de “historia falsa” de longitud M se trazan en los diferentes tiempos t . Las tablas de búsqueda de las estrategias se redefinen como $\mathbf{R}^{ia} = (R_1^{ia}, R_2^{ia}, \dots, R_p^{ia}) \in \{-1, 1\}^p$. La valoración de las estrategias se reescribirían como

$$p_{ia}(t + 1) = p_{ia}(t) - A(t) \mathbf{R}_{\mu(t)}^{ia} \quad (3.11)$$

⁹Un proceso estocástico markoviano es más sencillo de analizar matemáticamente que utilizar el proceso de memoria real.

¹⁰Recordemos que $\alpha = 2^M/N$.

la oferta reescalada se redefiniría como

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_{\mu(t)}^{ia_i(t)} \quad (3.12)$$

y la valoración de las mejores estrategias

$$a_i(t) = \arg \max_{a \in \{1, 2, \dots, S\}} \{p_{ia}(t)\}. \quad (3.13)$$

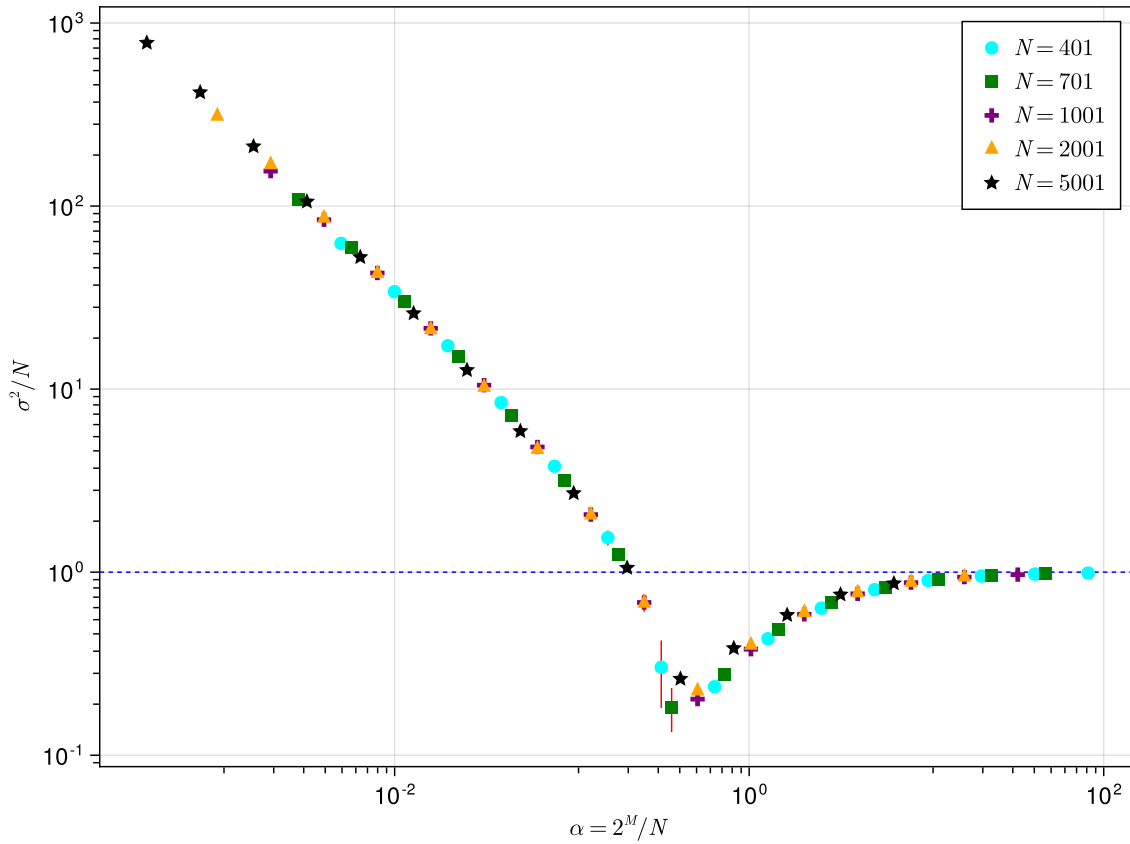


Figura 3.8: Curva teórica de la volatilidad para diferentes valores de memoria falsa $M = 1, \dots, 15$ y $S = 2$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 100000 pasos de tiempo para diferentes tamaños del sistema.

Al realizar experimentos y obtener los datos con memoria “falsa” (o “historia falsa”) del JM como mercado artificial se obtienen resultados de la oferta agregada, $A(t)$ (ver figuras 3.7, 3.9 y 3.10) con el mismo comportamiento que los resultados con memoria real. Esto es un indicio de que los agentes pueden utilizar la información del sistema para tomar una

decisión, incluso si esta no es real.

De igual forma, los resultados de la volatilidad (ver figura 3.8), la fracción de agentes congelados (ver figura 3.12) y la previsibilidad (ver la figura 3.11) son similares que los obtenidos con los experimentos de memoria real (o historia real). Hacemos énfasis en la previsibilidad y la fracción de agentes congelados H y Φ respectivamente, dado que los agentes encuentran información útil en la serie de tiempo y para valores pequeños de memoria como grandes, el comportamiento es como si estuvieran operando con el historial real de $A(t)$.

Esto a pesar de que los agentes que participan en el mercado están tomando decisiones con información histórica puramente aleatoria. Por lo tanto, el comportamiento agregado del sistema no es producto de experiencia acumulada en un contexto específico. Podemos concluir que esto es resultado de la formación de expectativas.

Los agentes, a pesar de que la historia es falsa, generan expectativas de acuerdo al contexto en el que están interactuando. Los agentes no pueden aprender a pronosticar los valores futuros de la oferta agregada reescalada (o el signo de ella), dado que esta es completamente aleatoria, ya que dependen de la memoria falsa que introdujimos. Es decir, los agentes generan expectativas de las posibles respuestas de sus competidores a la información externa, independientemente de la calidad de la información extraída del historial de mercado.

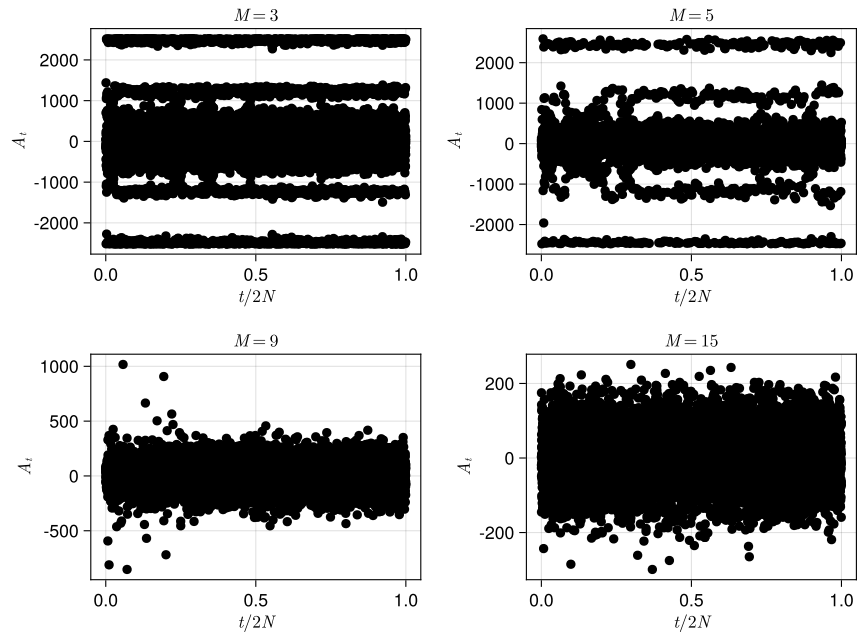


Figura 3.9: Valores de A_t para $N = 5001$ agentes con memoria falsa $M = 3, 5, 9, 15$ y $S = 2$ estrategias. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

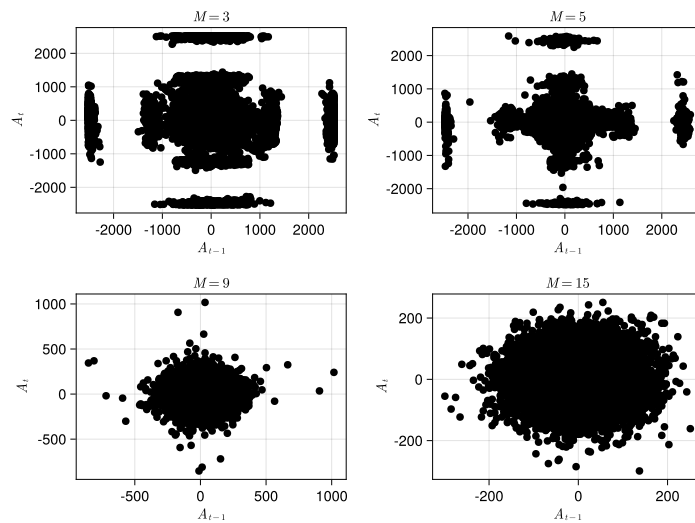


Figura 3.10: Valores de A_t versus A_{t-1} para $N = 5001$ agentes con memoria falsa $M = 3, 5, 9, 15$ y $S = 2$ estrategias. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

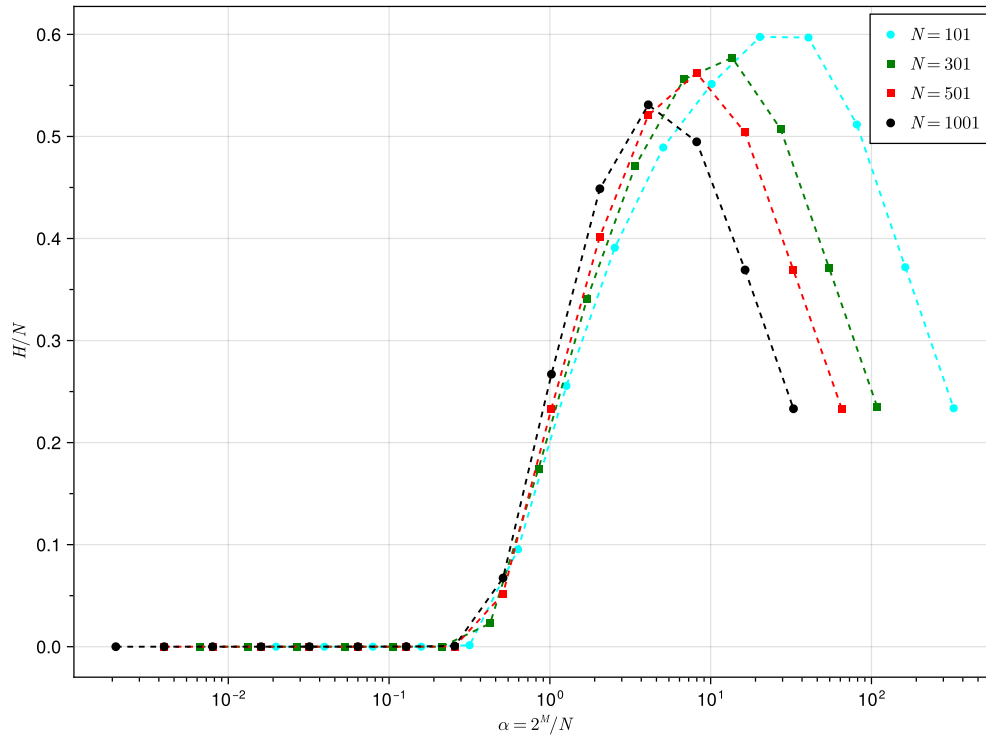


Figura 3.11: Valores del parámetro H para $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria falsa $M = 1, \dots, 15$ y $S = 2$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

Este es un resultado importante. Los agentes artificiales del JM son capaces de establecer interacciones de mercado, aunque la información otorgada en el sistema es ajena a los resultados reales del juego. El JM como modelo sencillo, es capaz de extraer la dinámica y la complejidad de mercados reales. Pero como cualquier modelo, tiene sus limitaciones. Como por ejemplo, no todos los mercados tienen como regla básica del comportamiento la regla minoritaria; los agentes en algunas situaciones deciden no participar en el mercado, cosa que no se tiene en cuenta en la versión básica del JM.

No obstante, los mercados artificiales como el JM nos pueden ayudar a estudiar la dinámica y comportamiento de los mercados reales. No tenemos que suponer inversores con inteligencia absoluta y racionalidad perfecta, sino que podemos capturar en reglas sencillas el cómo actuarían ante un evento o situación en particular. El algoritmo de las ECA se puede extrapolar a otros mercados, solo tenemos que definir las funciones objetivo que tiene que

cumplir nuestro agente en el mercado artificial.

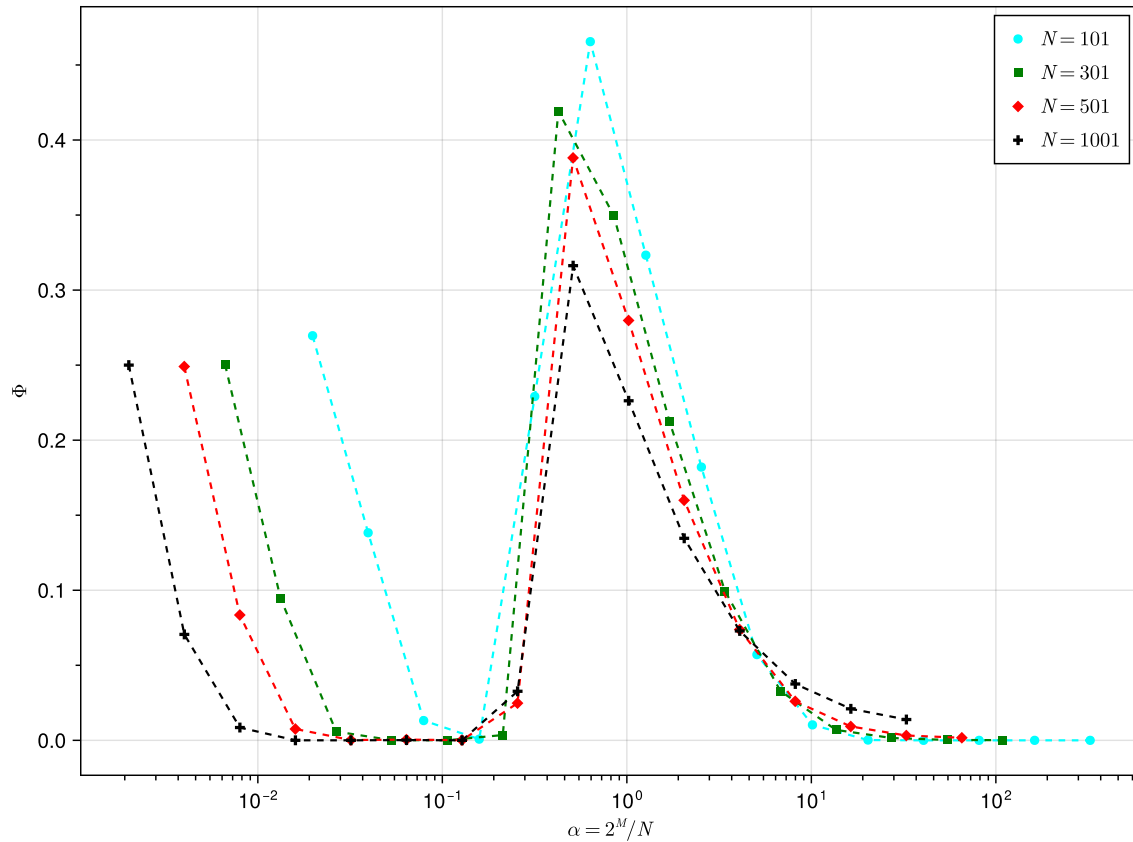


Figura 3.12: Fracción de agentes congelados Φ para $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria falsa $M = 1, \dots, 15$ y $S = 2$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

En el siguiente capítulo diseñaremos un mercado artificial construido a partir del JM. Trataremos de replicar la dinámica de un mercado real haciendo énfasis en la formación de las expectativas. Utilizaremos el algoritmo de las ECA que planteamos en el capítulo 2 y realizaremos simulaciones computacionales para obtener resultados que nos permitan analizar el comportamiento del mercado artificial.

Capítulo 4

Mercado artificial con ECAs.

En este capítulo proponemos un diseño de mercado artificial basado en una estructura similar al del Juego de la Minoría (JM). Introduciremos el algoritmo de las Expectativas Complejas Adaptativas (ECA) propuesto en el capítulo 2 en el mercado artificial relativamente “sofisticado”. Planteamos dos heterogeneidades para aproximar nuestro mercado artificial a la dinámica de comportamiento de uno real.

La primera heterogeneidad subyace en el tamaño de la profundidad de memoria de los agentes. En este mercado que los agentes tengan diferentes tamaños de memoria, es decir, que la cantidad de los últimos resultados más recientes que recuerdan varía según la capacidad cognitiva del agente. La segunda heterogeneidad es el algoritmo de las ECA en la actualización de las estrategias. Recordemos que en el JM las estrategias son fijas y lo único que cambia es la puntuación virtual entre una y otra estrategia en cada etapa temporal del mercado. Para esto, los agentes son capaces de cambiar sus estrategias si no les dan buenos resultados y mantienen las estrategias que hacen cumplir sus expectativas.

Además, agregamos cuatro parámetros. El primero se encargará de introducir ruido en las decisiones de los agentes. El segundo será una perturbación para la valoración de sus estrategias. El tercero es una medida de riqueza. Cada agente empezará el juego con una cantidad de riqueza cero, la cual incrementará o disminuirá según sus expectativas sean

acertadas. El cuarto es un parámetro de aprendizaje. También utilizamos un mecanismo de formación de precios para observar como se construye la serie temporal del precio a través de las expectativas de los agentes. Por último, realizamos simulaciones con memoria real y “falsa” (o historia de mercado falsa) para observar la dinámica del mercado artificial.

4.1. Diseño del mercado artificial.

Tratamos de replicar la dinámica de un mercado financiero especulativo para poner a prueba el algoritmo de las ECA en un mercado artificial. El objetivo es capturar la formación de expectativas y el comportamiento de los agentes. El mercado artificial estará compuesto por $i = 1, \dots, N$ agentes. Por conveniencia, la escala temporal es discreta con $t = 1, \dots, T$, pero en algunos casos utilizaremos como fracción de tiempo entre una etapa y otra el valor de $t = 1/2$ con el objetivo que quede claro que los resultados se obtienen después de una decisión, sabiendo que existen procesos intermedios $\{t < t + 1/2 < t + 1\}$, no de forma simultánea.

4.1.1. Los agentes.

Los agentes son chartistas. No se anclan en los valores fundamentales del resultado. Los agentes tienen razonamiento inductivo y sus decisiones se basan en la mejor elección que conocen. A diferencia del juego de la minoría, cada agente i no tiene el mismo tamaño de memoria. Proponemos como parámetro de “inteligencia” que cada agente cuente con su propia profundidad (o longitud) de memoria de los últimos m_i resultados recientes del juego. Es decir, $m_i \in \{1, 2, \dots, L\}$ donde L es el tamaño máximo de profundidad de memoria para los agentes¹.

¹Al inicio del mercado a todos los agentes se les asigna su tamaño de memoria de forma aleatoria con iguales probabilidades. Ver las densidades de probabilidad de memoria utilizadas en las simulaciones computacionales C.1 y C.5.

Acciones de los agentes.

Al igual que en el JM, en cada etapa t , cada agente i toma una decisión binaria $b_i(t) \in \{-1, 1\}$, la cual representa las acciones de los agentes comprar (+1) vs. vender (-1). La oferta agregada reescalada² en la etapa t se obtiene al agregar las decisiones de los agentes del mercado

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N b_i(t - 1/2).$$

4.1.2. Información.

Cada agente i toma su decisión basándose en la información que tienen disponible. La información es pública y corresponde al historial de resultados (la oferta) del mercado. Todos los agentes tienen acceso a la misma información, pero recordemos que la longitud de memoria m_i es diferente, dado que cada agente posee capacidades cognitivas diferentes, como explicamos en el capítulo 2.

Es decir, que la profundidad histórica que recuerden los agentes es diferente para cada uno de ellos en longitud de etapas anteriores, pero la información de la que está compuesta es la misma. En cada etapa t los agentes obtienen los signos de la oferta reescalada para saber si el grupo ganador (minoritario) fueron los compradores o vendedores $W(t+1/2) = -\text{sign}[A(t)]$

$$\mathcal{H}_i = \left(\text{sign}[A(t - m_i)], \dots, \text{sign}[A(t - 1)] \right) \in \{-1, 1\}^{m_i}.$$

²Para las simulaciones utilizaremos el factor de reescalamiento solo para la actualización de los puntos de las estrategias. Por lo general utilizamos la oferta agregada sin reescalamiento en las simulaciones para obtener la serie de tiempo de $A(t)$ para observar con más facilidad la volatilidad de la serie.

4.1.3. Estrategias.

En el JM una estrategia funciona como una tabla de búsqueda de posibles resultados. Cada agente i tiene S estrategias *fijas* que convierten la información en una decisión. En este sentido, las estrategias son una transformación de las expectativas de los agentes en una acción. Las estrategias se definen al principio del juego de forma aleatoria.

Recordemos que el algoritmo de las ECA es de carácter evolutivo. Solo las expectativas que obtienen buenos resultados sobreviven, mientras que las expectativas que no se cumplan se cambian o modifican por otras que sí. En este sentido, las expectativas de los agentes sufren un proceso de transformación para ser parte del proceso de toma de decisiones. En este modelo las estrategias juegan un papel fundamental al ser el mecanismo de validación de las expectativas de los agentes.

En otras palabras, cada agente i tiene S estrategias, las que denotamos como \mathcal{S}_i^a donde $a = 1, \dots, S$

$$\mathcal{S}_i^a : \{-1, 1\}^{m_i} \rightarrow \{-1, 1\}.$$

Al igual que en el JM, una estrategia \mathcal{S}_i^a funciona como una tabla de búsqueda con 2^{m_i} entradas. Pero se diferencian con respecto al mercado artificial propuesto. Las tablas de estrategias son diferentes dado que dependen de la memoria de los agentes, al tener diferentes profundidades de memoria la tabla de estrategias \mathcal{S}_i^a será de menor o mayor tamaño. Por ejemplo, si el agente i tiene una memoria, $m_i = 2$ la tabla \mathcal{S}_i^a tendrá 4 entradas; mientras que el agente j tiene una memoria, $m_j = 3$ la tabla \mathcal{S}_j^a tendrá 8 entradas.

Esta es una heterogeneidad importante que incluimos en el mercado artificial. Además, \mathcal{S}_i^a es dinámica, ya que en cada etapa de tiempo t los agentes que no obtengan operaciones rentables modificaran sus estrategias, como lo describimos en el algoritmo de las ECAs. Cada estrategia \mathcal{S}_i^a define un mapeo de la información histórica según su memoria m_i a una acción de compra o venta recomendada.

$$b_i(t - 1/2) = \mathcal{S}_i^a(\mathcal{H}_i)$$

Recordemos que una buena estrategia es aquella que ha prescrito muchas decisiones minoritarias, es decir, que haga cumplir las expectativas de los agentes de obtener ganancias siendo compradores o vendedores al estar en el grupo minoritario

$$\mathcal{S}_i^a(\mathcal{H}_i) = W(t)$$

donde $W(t) = -\text{sign}[A(t)]$.

4.1.4. Valoración de las estrategias.

Cada agente i otorga puntos virtuales ρ_{ia} a cada una de sus estrategias \mathcal{S}_i^a con el objetivo de realizar un seguimiento de las mismas³. Como en el JM los agentes al actualizar los puntos virtuales lo hacen para todas las estrategias sin importar si no hicieron uso de ella en la etapa t . La estrategia que obtenga mejores resultados en una operación recibirá una mejor puntuación que aquella que no esté funcionando.

$$\rho_{ia}(t + 1) = \rho_{ia}(t) - \eta A(t) \mathcal{S}_i^a(\mathcal{H}_i)$$

η es un factor de aprendizaje. Sí $\eta = 0$, entonces $\rho_{ia}(t + 1) = \rho_{ia}(t)$. Esto implica que los agentes no actualizan los puntajes de sus estrategias, ya que no existe aprendizaje alguno en la etapa anterior. Por simplicidad y para tener un mayor control en la dinámica del mercado, asumiremos que todos los agentes tienen la misma capacidad de aprendizaje, $\eta = 1$.

³La actualización de los puntos virtuales de las estrategias se hace en línea. Es decir, que la evaluación de los resultados de las estrategias se realizan después de cada paso de tiempo. También existe la actualización por lotes que hace referencia a una evaluación después de un número determinado de pasos temporales.

4.1.5. Selección y calibración de las estrategias.

En cada etapa t del mercado artificial, cada agente i seleccionará su mejor estrategia (la que tenga puntos virtuales más altos) $a_i(t)$

$$a_i(t) = \arg \max_{a \in \{1, \dots, S\}} \{\rho_{ia}(t)\}$$

Si la acción de la mejor estrategia $a(t)$ de cada agente i no obtuviera buenos resultados, tendrá que ser modificada o sustituida por una más verosímil. Una estrategia que los agentes consideran que en la siguiente etapa del juego puede dar buenos resultados, como por ejemplo

$$a_i(t + 1/2) = -\text{sign}[A(t)]$$

Es decir, que en una fracción de tiempo entre la etapa t y $t + 1$ los agentes no solo actualizan los puntos de sus estrategias, sino que también modifican la estrategia que usaron y no les dio buenos resultados en pro de una que sí les funcione en un futuro inmediato.

En otras palabras, las acciones de la estrategia activa k -ésima que de buenos resultados, es decir, que pronostique que el agente se encontrará en el grupo minoritario, como comprador (o vendedor) se mantiene. De no ser este el caso, esas acciones en específico se modificará con una que sí podría haber cumplido la expectativa, como se observa en la tabla 4.1.

Posible historia		$a^{(1)}(t)$	$a^{(2)}(t)$	$\mathbf{a}^{(3)}(\mathbf{t})$	$a^{(4)}(t)$	$\mathbf{a}^{(3)}(\mathbf{t} + \mathbf{1}/2)$
-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1
-1	+1	-1	-1	-1	+1	+1
+1	-1	-1	-1	+1	+1	-1
+1	+1	-1	+1	+1	+1	-1

Tabla 4.1: Acciones de las estrategias $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ y $a^{(4)}$ del agente i en la etapa t . Caso sencillo con $m_i = 2$, por lo que $S = 4$ suponiendo que el grupo minoritario fue $-\text{sign}[A(t)] = +1$ para la posible cadena histórica $\{-1, -1\}$.

4.1.6. Riqueza de los agentes.

Necesitamos un parámetro que nos permita realizar un seguimiento del rendimiento de las expectativas de los agentes dentro del mercado artificial. Los puntos virtuales nos ayudan en la dinámica de la selección y valoración de las estrategias, pero es un símil a un sistema de compensaciones como la dopamina o el cortisol en nuestro cerebro. Para esto proponemos una medida de riqueza. Si las expectativas de cada agente i se cumplen al lograr estar en el grupo minoritario, recibirá un pago (o una pérdida) en cada paso de tiempo t .

$$\omega_i(t+1) = \omega_i(t) - 2b_i(t) \frac{A(t)}{V(t) + b_i(t)A(t)}$$

donde $V(t) = \sum_{i=1}^N |b_i(t)|$ es el volumen de transacciones en cada paso de tiempo t . Dado que tratamos de replicar con reglas sencillas la dinámica de un mercado real, tenemos que tener en cuenta la disparidad de recursos que pueden llegar a tener los agentes. Consideramos que todos los agentes al iniciar las simulaciones tendrán como riqueza inicial $\omega_i(0) = 0$ unidades monetarias. Esto con el objetivo de observar como evoluciona el mercado y la riqueza de los agentes.

Tenemos los ingredientes básicos para nuestro mercado artificial. A partir de las reglas planteadas en las secciones (4.1.1)-(4.1.6) para el diseño del mercado artificial que proponemos, podemos obtener una aproximación de la dinámica de un mercado real con las siguientes ecuaciones no lineales:

$$\rho_{ia}(t+1) = \rho_{ia}(t) - \eta A(t) \mathcal{S}_i^a(\mathcal{H}_i) \quad (4.1)$$

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathcal{S}_i^{a_i(t)}(\mathcal{H}_i) \quad (4.2)$$

$$a_i(t) = \arg \max_{a \in \{1, \dots, S\}} \{\rho_{ia}(t)\} \quad (4.3)$$

$$a_i(t + 1/2) = \begin{cases} a_i(t) & \text{si } a_i(t) = -\text{sign}[A(t)] \\ -\text{sign}[A(t)]\mathcal{S}_i^{a_i(t)} & \text{si } a_i(t) \neq -\text{sign}[A(t)] \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\omega_i(t + 1) = \omega_i(t) - 2a_i(t)\frac{A(t)}{V(t) + a_i(t)A(t)}. \quad (4.5)$$

Recordemos que este tipo de modelos pueden ser sistemas grandes de dos formas: con un número muy grande de agentes o un número muy grande de estrategias. Preferimos que el número de agentes sea el determinante del tamaño del sistema, dado que no consideramos que los agentes sean capaces de tener un número exagerado de estrategias. Esto iría en contra de la racionalidad de nuestros agentes y lo alejaría de los mercados reales que queremos replicar. De la misma forma que en el JM, planteamos la estructura del mercado artificial con valores de N impar para el tamaño del sistema. Esto por dos motivos. Primero, para que el $\text{sign}[A(t)]$ siempre esté bien definido y así poder determinar el grupo minoritario; segundo, no tenemos que establecer criterios de desempate.

Además, el parámetro de control α se tiene modificar, ya que los agentes tienen diferentes tamaños de memoria en una misma etapa de tiempo t

$$\alpha_{ma} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{2^{m_k}}{N} \quad (4.6)$$

el subíndice $k = 1, 2, \dots, L$ va desde el tamaño de memoria más pequeño al más grande que exista en el mercado artificial.

Al igual que en el JM (ver (3.10)), la fracción de agentes congelados en el estado estacionario la denotamos por Φ :

$$\Phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lim_{T \rightarrow \infty} \delta_{T, [\delta_{a_i(t), a_i(t-1)}]}. \quad (4.7)$$

Por su parte, la previsibilidad obtenida mediante la probabilidad condicional $W(t +$

1) $|\mu(t)$ del JM (ver la ecuación (3.7)) también se ve modificada porque los agentes tienen diferentes tamaños de memoria

$$H_{ma} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{1}{2^{m_k}} \sum_{\nu=1}^{2^{m_k}} \langle W(t+1) | \mu(t) = \nu \rangle^2. \quad (4.8)$$

4.1.7. Dinámica de la formación de precios del mercado artificial.

Como cualquier mercado en economía, los precios son importantes. Existen mercados artificiales muy sofisticados, pero en nuestro caso nos interesa replicar la formación de los precios de forma sencilla. Para la dinámica de formación de precios utilizamos el propuesto por Marsili (2001, p. 95). En su trabajo propone que la demanda estará dada por

$$\mathcal{D}(t) = \frac{N + A(t)}{2}$$

mientras que la oferta

$$\mathcal{O}(t) = \frac{N - A(t)}{2p(t-1)}.$$

Esto nos lleva que el precio se determinará por

$$p(t) = \frac{\mathcal{D}(t)}{\mathcal{O}(t)} = \frac{N + A(t)}{N - A(t)} p(t-1). \quad (4.9)$$

Es fácil ver que si $\mathcal{D}(t) = \mathcal{O}(t)$ entonces

$$p(t-1) = \frac{N - A(t)}{N + A(t)}$$

Además, utilizaremos el rendimiento logarítmico del precio como en Giardina y Bouchaud (2003, p. 423)

$$r(t) = \log \left[\frac{p(t)}{p(t-1)} \right] = \log[p(t)] - \log[p(t-1)]. \quad (4.10)$$

A continuación procedemos a realizar las simulaciones computacionales de acuerdo con las reglas planteadas para el mercado artificial con memoria real.

4.1.8. Resultados obtenidos de las simulaciones computacionales del mercado artificial.

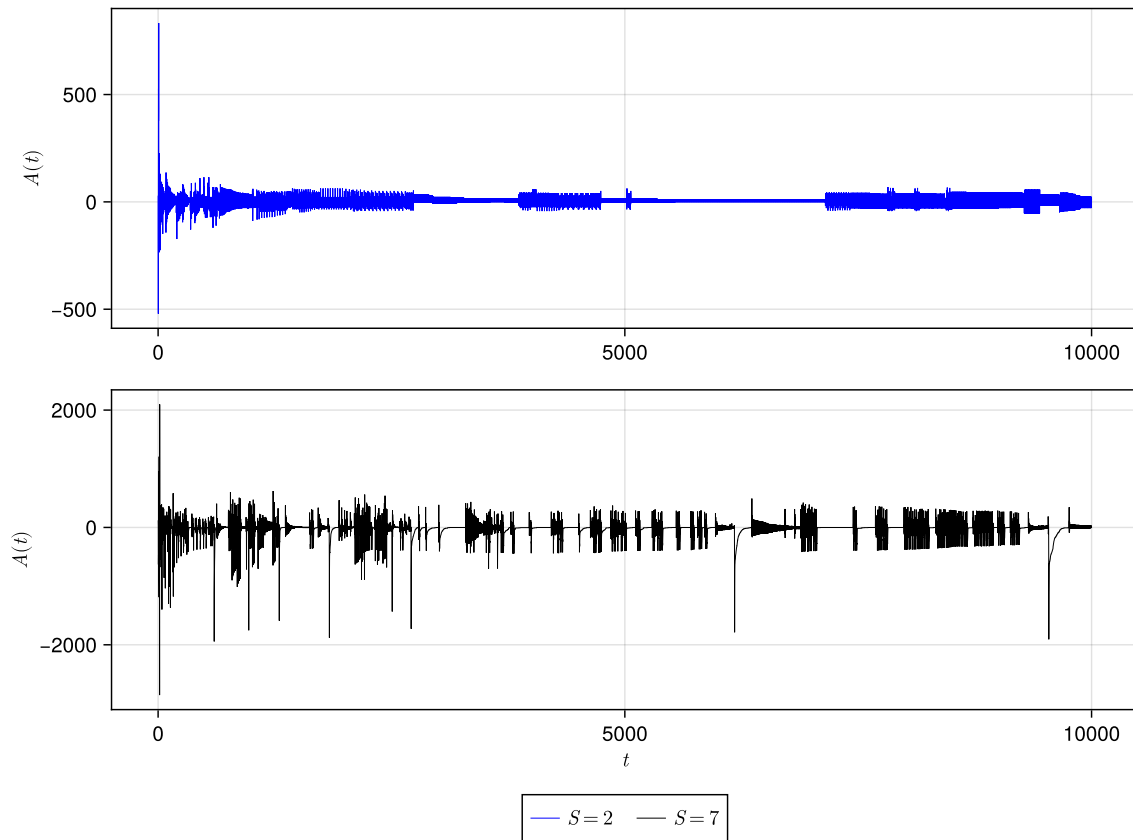


Figura 4.1: Valores de $A(t)$ (sin reescalar) para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

Lo primero que nos interesa mostrar son las series temporales de $A(t)$. En la figura 4.1 podemos observar que la oferta (o excedente de demanda) $A(t)$ del mercado artificial se vuelve más volátil al aumentar el número de estrategias de los agentes. A medida que los agentes adquieren más estrategias, tienen más opciones al momento de tomar una decisión.

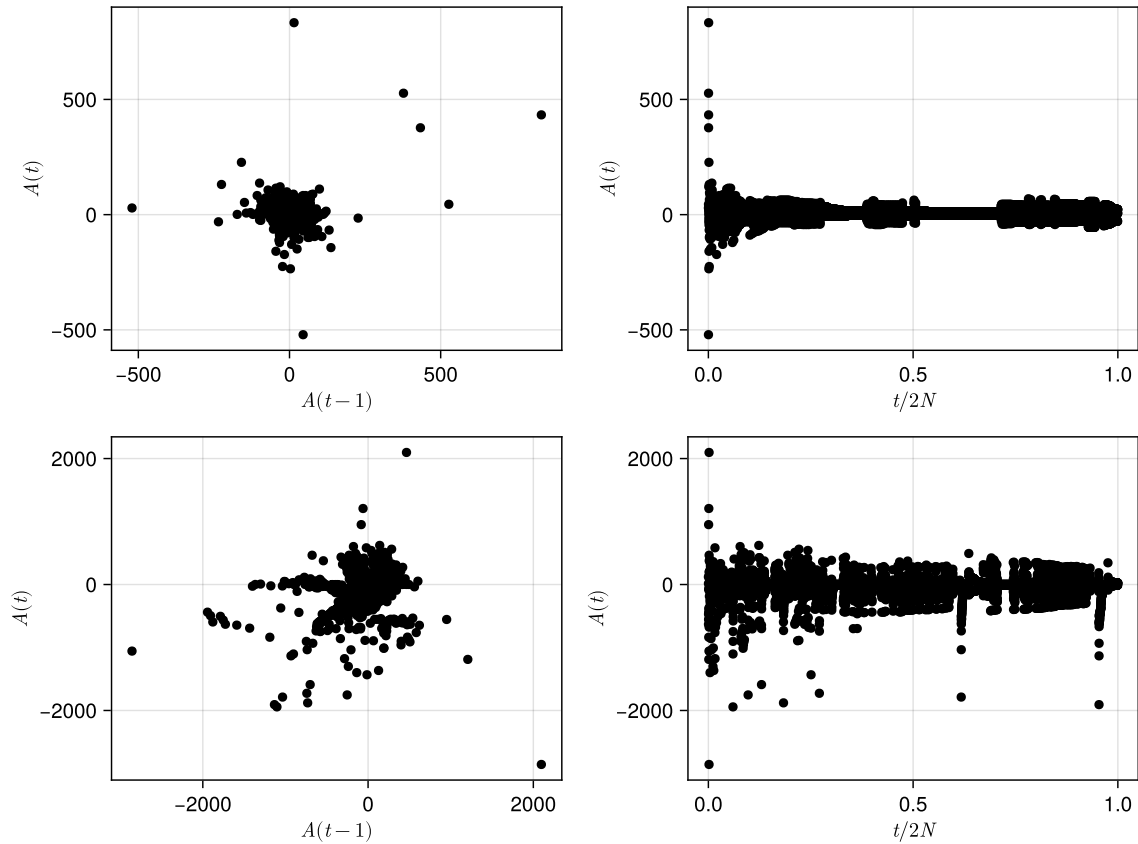


Figura 4.2: Valores de $A(t)$ (sin reescalar) para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

Los agentes, al tener la capacidad de crear más estrategias, produce que el mercado tenga una dinámica más rica en la formación de las expectativas. Recordemos que las estrategias dependen de forma directa de la memoria. Esto lo podemos observar en la figura 4.2. Para los valores de $A(t)$ vs. $A(t-1)$ observamos valores no tan dispersos para el mercado artificial con $S = 2$ estrategias, mientras que con $S = 7$ existe una concentración menor alrededor del cero, incluso alcanzando valores más altos.

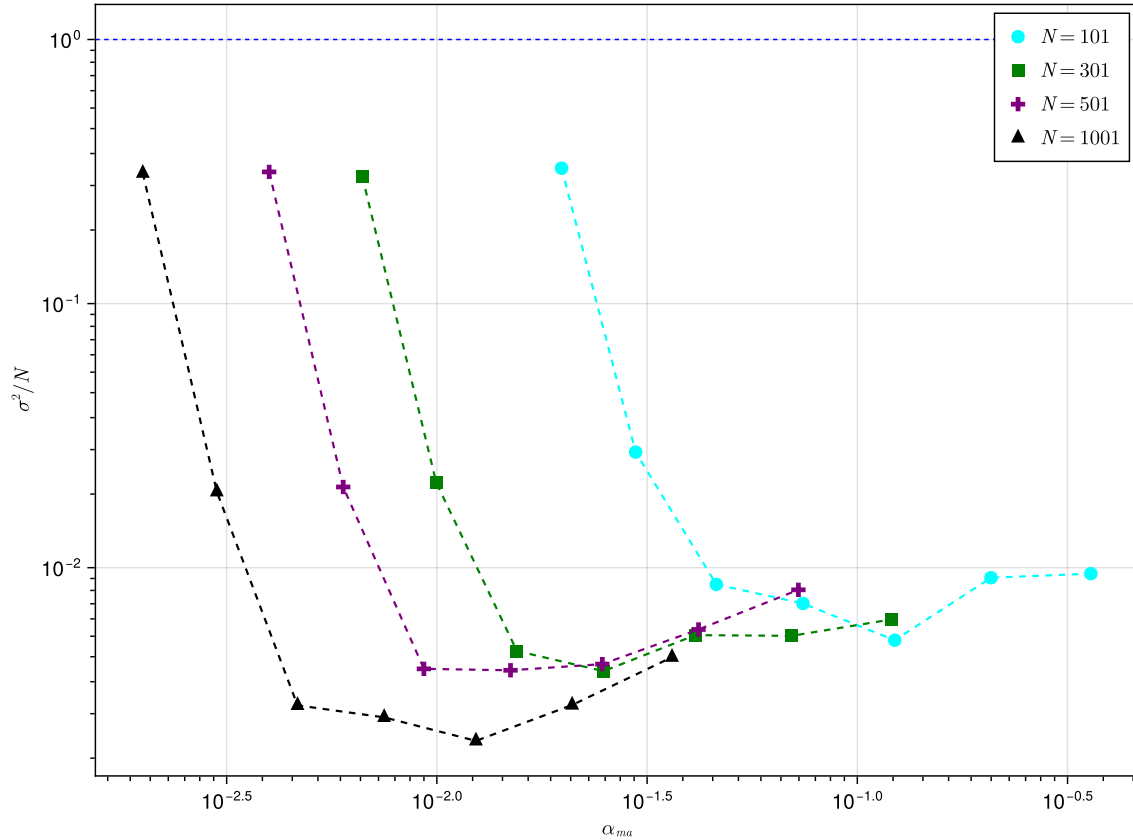


Figura 4.3: Volatilidad σ^2/N para un mercado artificial compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

A diferencia de las simulaciones de la volatilidad del JM (ver figura 3.4), para nuestro mercado artificial, toda la curva de volatilidad se encuentra en el régimen mejor que aleatorio (debajo de la línea azul) para diferentes tamaños del sistema. Para valores de memoria muy pequeños la volatilidad es alta, mientras que para valores de memoria más grandes la volatilidad disminuye como se observa en la figura 4.3. Además, debido a que los agentes tienen diferentes tamaños de memoria en una misma etapa de tiempo t y actualizan sus estrategias con el algoritmo de las ECA, las curvas no colapsan como en el JM, pero se desplazan a la izquierda a medida que el tamaño del sistema aumenta.

Recordemos que los agentes congelados son aquellos que no cambian su estrategia activa durante la dinámica del mercado. Demostramos que la fracción de agentes congelados Φ es

susceptible al cambio de heterogeneidad de los tamaños de memoria para diferentes tamaños del sistema. A diferencia del JM donde para valores pequeños de memoria no existen agentes congelados y con valores de memoria más grandes los agentes se comienzan a congelar (ver 3.6). La figura 4.4 nos exhibe que en nuestro mercado artificial, los agentes con valores pequeños de memoria se encuentran en su totalidad congelados, y se van descongelando a medida que aumenta la profundidad de memoria.

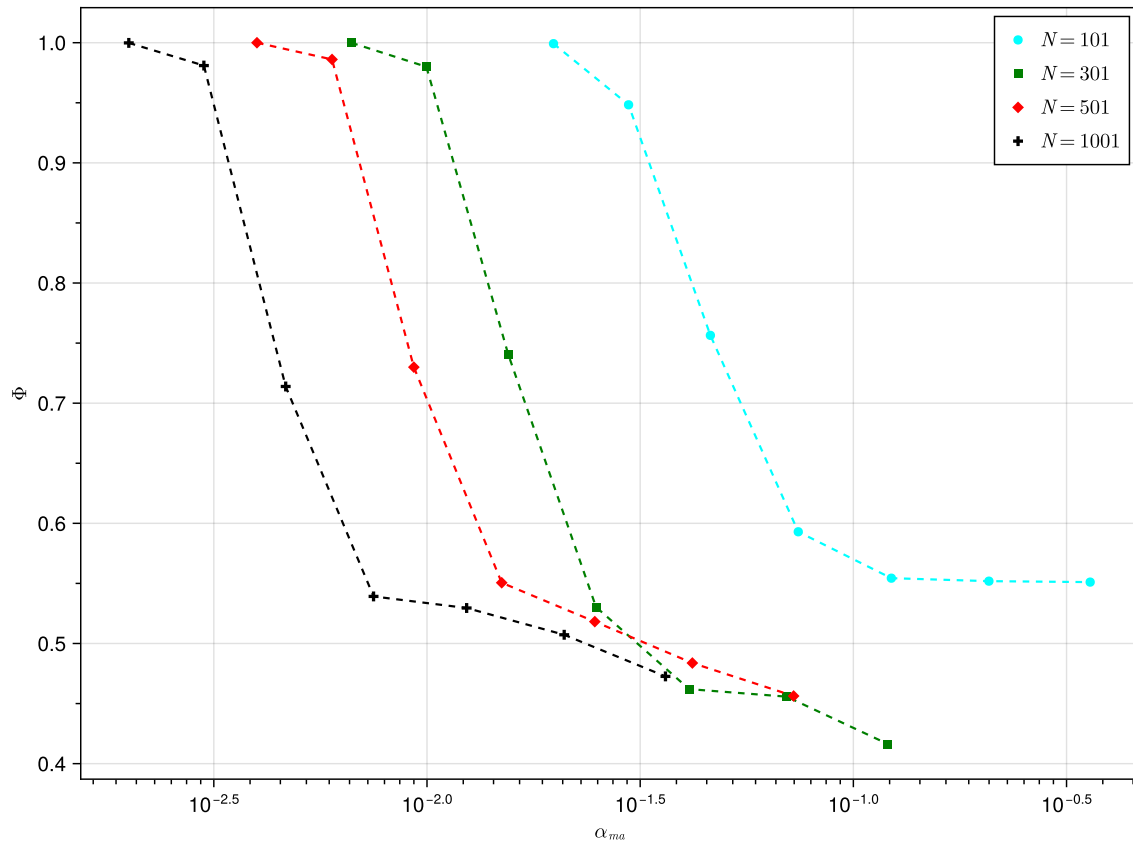


Figura 4.4: Fracción de agentes congelados Φ para un mercado artificial compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

Por su parte, el parámetro H_{ma} que nos mide la previsibilidad en el sistema para valores pequeños de memoria es $H_{ma} \neq 0$. Es lo contrario al comportamiento del JM (ver 3.5). Lo que implica que este parámetro también es sensible a la heterogeneidad del tamaño de memoria, como también a la actualización de las estrategias de los agentes. Este resultado

es interesante, porque es contra intuitivo, como podemos ver en la figura 4.5. Pensaríamos que a medida que el tamaño de memoria aumenta el mercado artificial se volviera más predecible para los agentes, pero sucede todo lo contrario. El mercado se vuelve más complejo e impredecible para los agentes. Esto tiene sentido como aproximación a un mercado real.

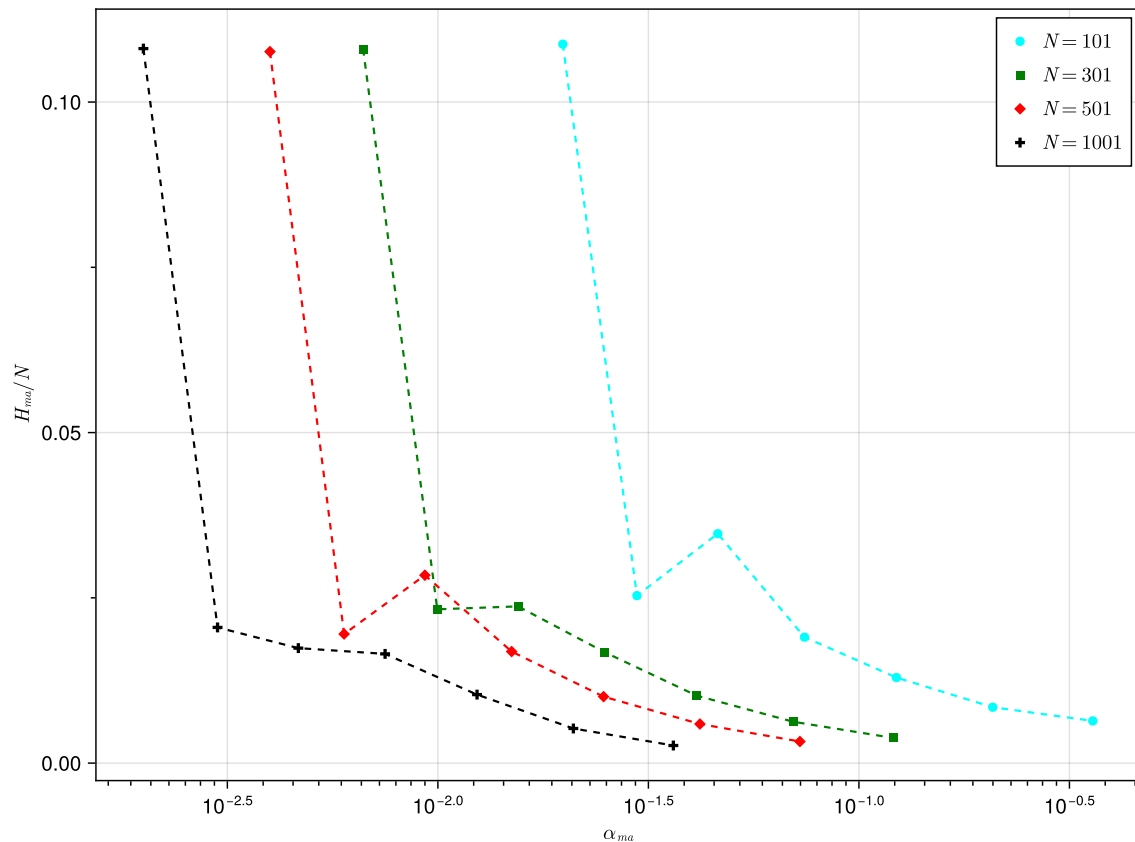


Figura 4.5: Previsibilidad H_{ma} para un mercado artificial compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

Otro punto importante es observar la riqueza de los agentes. La riqueza $\omega_i(t)$ como aproximación del cumplimiento de las expectativas tiene un comportamiento interesante. La figura 4.6 nos muestra como la densidad de probabilidad varía para diferentes tamaños de memoria. Es relevante hacer hincapié que a medida que aumenta la memoria, en los diferentes agentes, son capaces de obtener mayores ganancias. Además, si los agentes tienen más estrategias, son capaces de elevar aún más sus ganancias. A su vez, las pérdidas también

aumentan.

Esto nos sugiere que el mercado artificial es capaz de capturar la complejidad de un mercado real. Los agentes con mayor memoria y más estrategias son capaces de explotar mejor la información del mercado, produciendo expectativas de mejor calidad, lo que se traduce en estrategias cada vez mejores.

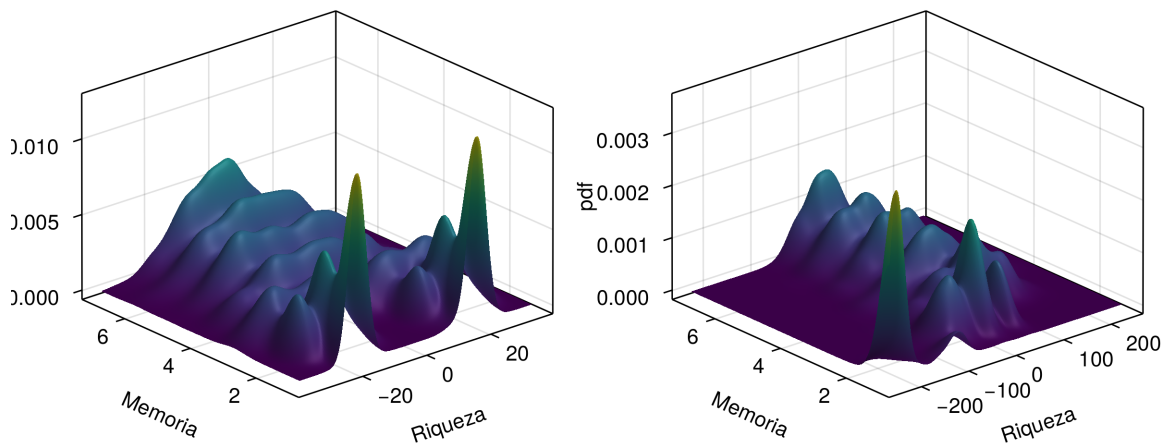


Figura 4.6: Densidad de la riqueza $\omega_i(t)$ para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel izquierdo y derecho respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

Por último, podemos ver que el mercado artificial nos permite replicar la dinámica de la formación de precios de un mercado real a partir de la formación de expectativas utilizando el algoritmo de las ECA. Cuando los agentes tienen más estrategias como margen de maniobra hacen que el precio sea más volátil, alcanzando valores muy altos (ver figura

4.28). Este comportamiento del precio es común en mercados especulativos muy volátiles como en el mercado de criptomonedas. Esto puede ser indicio de la formación de burbujas y una posterior crisis en el mercado. Los agentes con mayor profundidad de memoria y más estrategias son capaces de explotar la información al máximo para obtener mayores ganancias. Este es un comportamiento que podemos observar en los mercados reales cuando hablamos de asimetría de la información. En este caso los agentes no tienen información asimétrica, ya que todos tienen acceso a la misma información, pero tienen más memoria y por ende más estrategias. La heterogeneidad *per se* hace que el mercado artificial se comporte como lo esperaríamos al introducir la idea de información asimétrica como condición inicial.

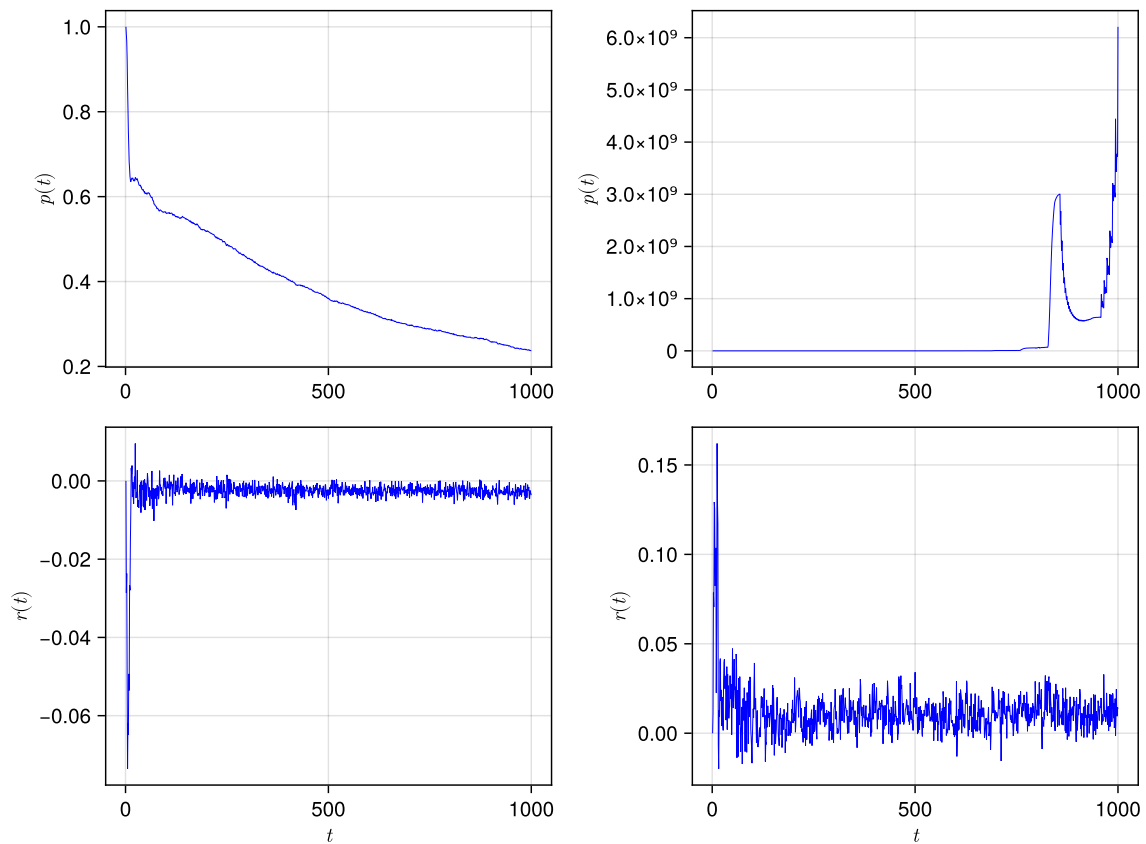


Figura 4.7: Determinación del precio $p(t)$ y del rendimiento $r(t)$ para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel izquierdo y derecho respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

4.2. Mercado Artificial de las ECA con ruido de decisión y perturbación en la valoración de estrategias.

Queremos que nuestro mercado artificial nos aproxime a la dinámica de un mercado real. Tenemos dos heterogeneidades (tamaño de memoria diferente y algoritmo de las ECA) que nos han permitido obtener una dinámica muy rica a diferencia del JM. Introducimos, como ruido de decisión, $A_r(t) \in \mathbb{R}$ el cual cumple la función de contener perturbaciones de externas del mercado. Esta puede interpretarse como noticias que puedan influir en la toma de decisiones de los agentes, comportamiento de otros mercados con activos similares, una nueva política económica o alguna información ajena al mercado en el que se está operando.

Recordemos que en el algoritmo de las ECA introducimos la idea de información endógena y exógena. La endógena se encuentra en la cadena histórica

$$\mathcal{H}_i = (\text{sign}[A(t - m_i)], \dots, \text{sign}[A(t - 1)])$$

que es la que se produce por la propia dinámica del sistema. Además, mencionamos que la información puede tener un grado de calidad.

Por otra parte, necesitamos incluir algo que refleje este ruido y perturbe como los agentes asignan los puntos virtuales de sus estrategias. Para este cometido introducimos el parámetro $\theta_i(t) \in \mathbb{R}$. Este es un parámetro que juega el papel de sobrevaloración o infravaloración de una estrategia, haciendo que las expectativas que forman con la información disponible tengan un grado de creencia y especulación.

Al introducir estos dos parámetros se modifican las ecuaciones (4.1) y (4.2), por lo que ahora tenemos

$$\rho_{ia}(t + 1) = \rho_{ia}(t) + \theta_i(t) - \eta A(t) \mathcal{S}_i^a(\mathcal{H}_i) \quad (4.11)$$

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathcal{S}_i^{a_i(t)}(\mathcal{H}_i) + A_r(t) \quad (4.12)$$

donde $A_r(t) = \frac{\beta(t)}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N a_i(t)$. Los parámetros $\beta \in (-1, 1)$ y $\theta_i \in (-1, 1)$ son números aleatorios. Las otras ecuaciones planteadas en la sección anterior se mantienen iguales, ya que estas forman parte de ellas y se verán afectadas de forma indirecta.

A continuación procedemos a realizar las simulaciones computacionales de acuerdo con las reglas planteadas para el mercado artificial con memoria real con ruido y perturbación.

4.2.1. Resultados obtenidos de las simulaciones computacionales del mercado artificial con ruido de decisión y perturbación en la valoración de estrategias.

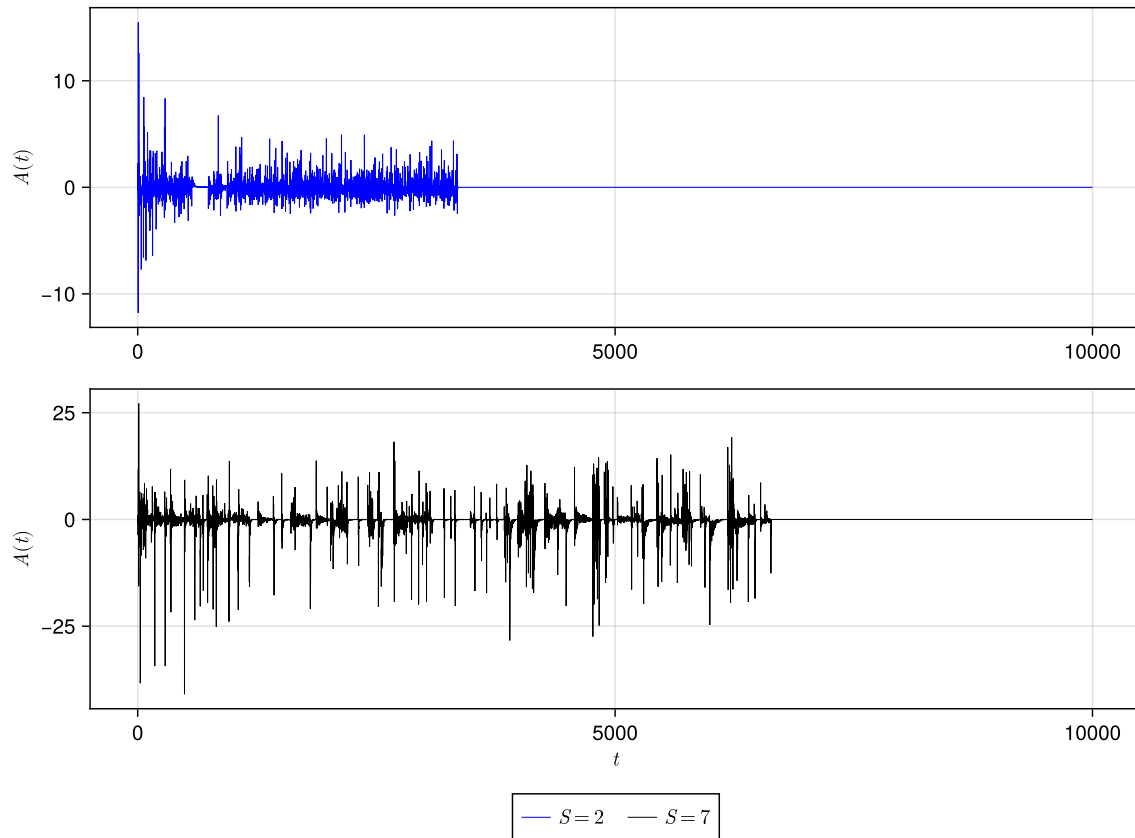


Figura 4.8: Valores de $A(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

Al introducir el ruido de decisión $A_r(t)$ y la perturbación de la valoración de las estrategias, $\theta_i(t)$ obtenemos que la serie de tiempo para la oferta (o excedente de demanda) $A(t)$ después de un número de pasos es cero (ver 4.9). Con un número de $S = 2$ estrategias se alcanza lo que consideramos un empate en el JM en menos pasos de tiempo que con $S = 7$ estrategias. Esto sucede por el ruido de decisión $A_r(t)$. En algún punto de la

dinámica del mercado artificial $A_r(t)$ hace que no haya un grupo minoritario, haciendo que el comportamiento de los agentes nos lleve a este resultado.

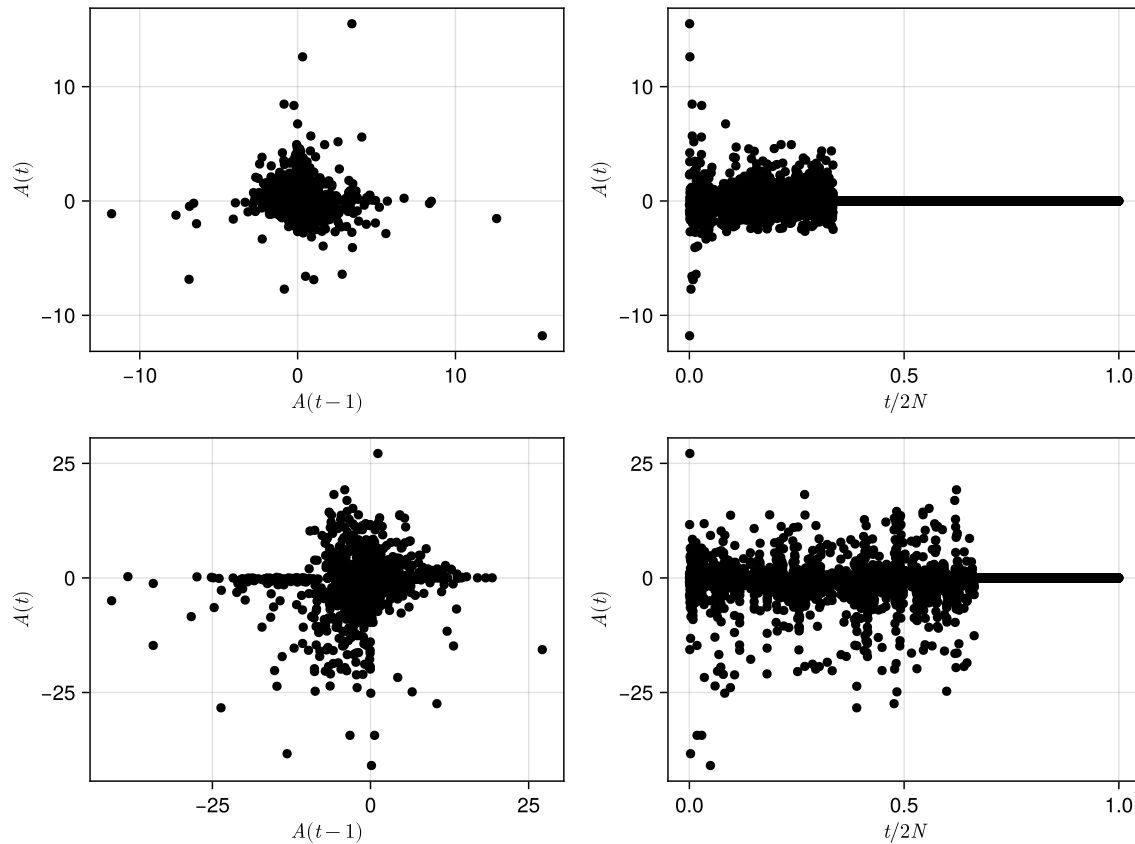


Figura 4.9: Valores de $A(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

Al igual que los resultados del mercado artificial sin ruido ni perturbación, se produce una dinámica más rica en la formación de las expectativas. Recordemos que las estrategias dependen de forma directa de la memoria. Esto lo podemos observar en la figura 4.9. Para los valores de $A(t)$ vs $A(t-1)$ observamos valores no tan dispersos para el mercado artificial con $S = 2$ estrategias, mientras que con $S = 7$ existe una concentración menor alrededor del cero, incluso alcanzando valores más altos. De igual forma, después de un número de pasos de tiempo, los valores de $A(t) = 0$.

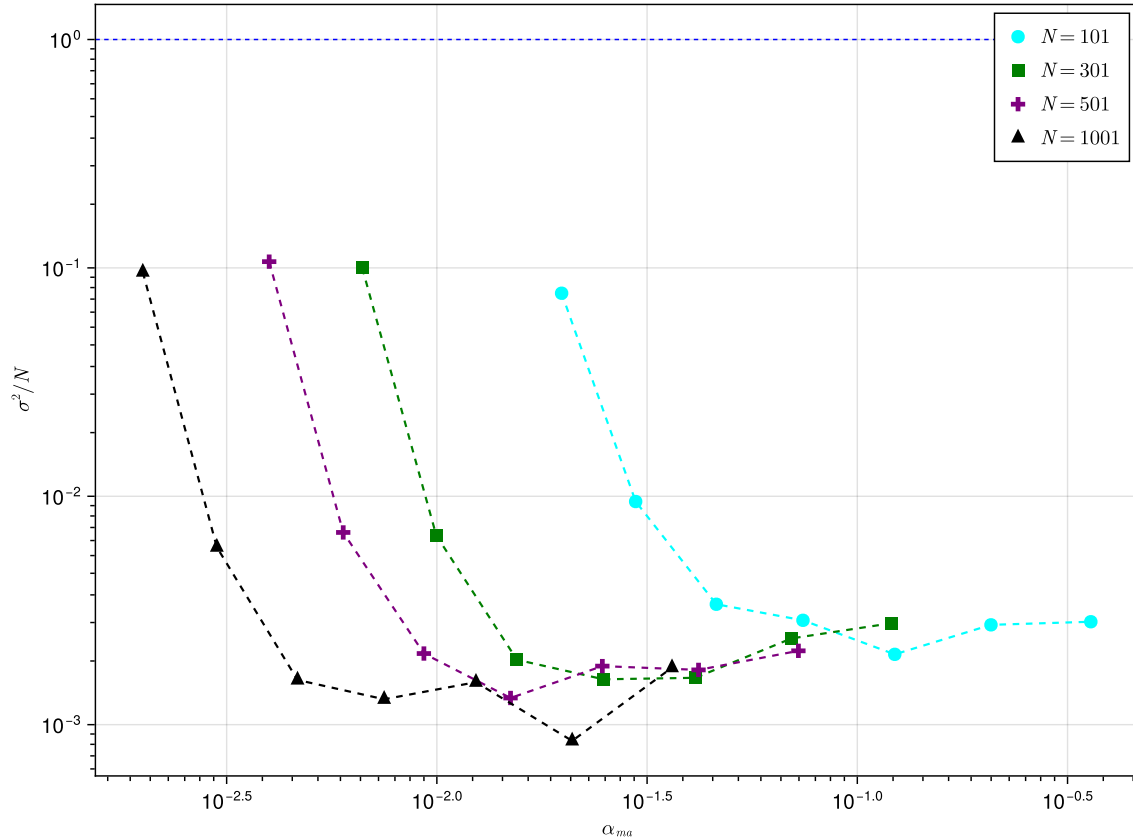


Figura 4.10: Volatilidad σ^2/N para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

De la misma forma que en las simulaciones de la volatilidad del el mercado artificial sin ruido ni perturbación (ver figura 4.3), para nuestro mercado artificial con ruido y perturbación, toda la curva de volatilidad se encuentra en el régimen mejor que aleatorio (debajo de la línea azul) para diferentes tamaños del sistema. Para valores de memoria muy pequeños la volatilidad es alta, mientras que para valores de memoria más grandes la volatilidad disminuye como se observa en la figura 4.10. Además, debido a que los agentes tienen diferentes tamaños de memoria en una misma etapa de tiempo t y actualizan sus estrategias con el algoritmo de las ECA, las curvas no colapsan como en el JM (ver figura 3.4), pero se desplazan a la izquierda a medida que el tamaño del sistema aumenta.

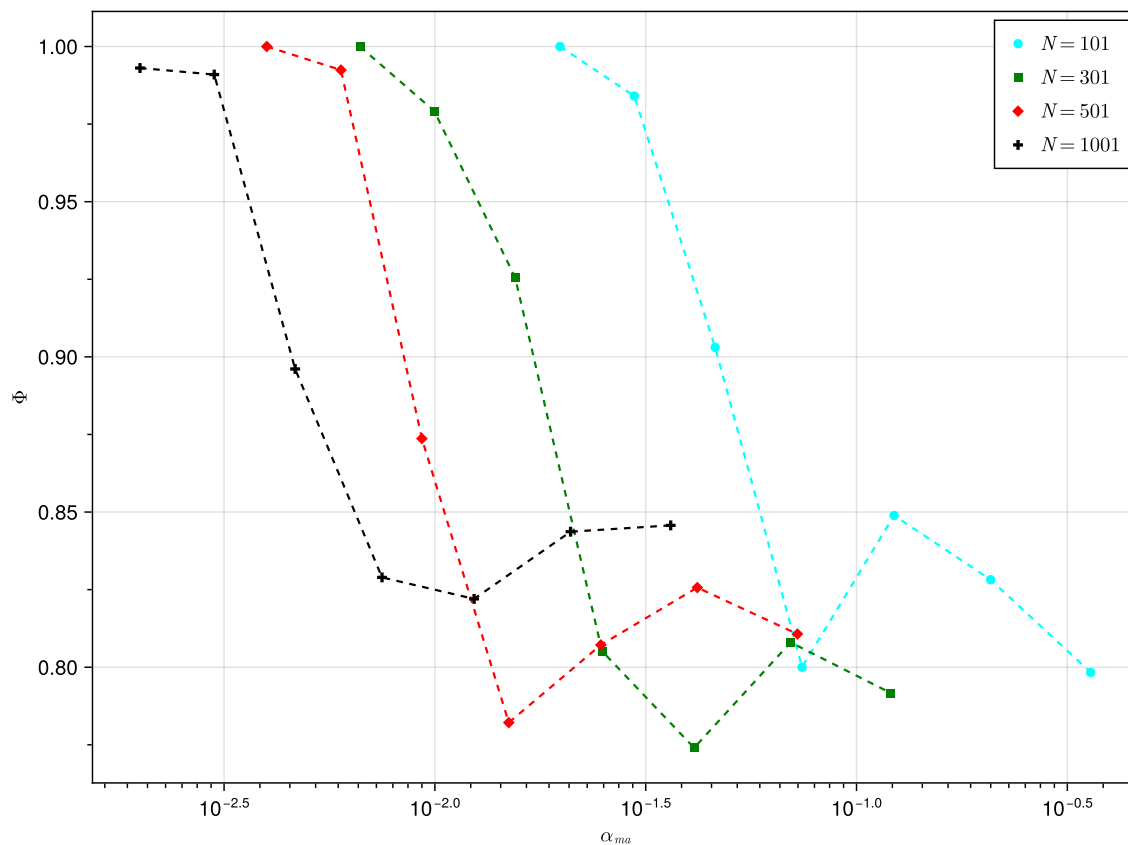


Figura 4.11: Fracción de agentes congelados Φ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

El comportamiento de la curva de agentes congelados es similar a la del mercado artificial sin ruido ni perturbación (ver figura 4.4). De igual forma, se demuestra que la fracción de agentes congelados Φ es susceptible al cambio de heterogeneidad de los tamaños de memoria para diferentes tamaños del sistema, incluso existiendo el ruido y la perturbación. A diferencia del JM donde para valores pequeños de memoria no existen agentes congelados y con valores de memoria más grandes los agentes se comienzan a congelar (ver 3.6). La figura 4.11 nos exhibe que en nuestro mercado artificial, a pesar del ruido de decisión y la perturbación de la valoración de estrategias, los agentes con valores pequeños de memoria se encuentran en su totalidad congelados, y se van descongelando a medida que aumenta la profundidad de memoria.

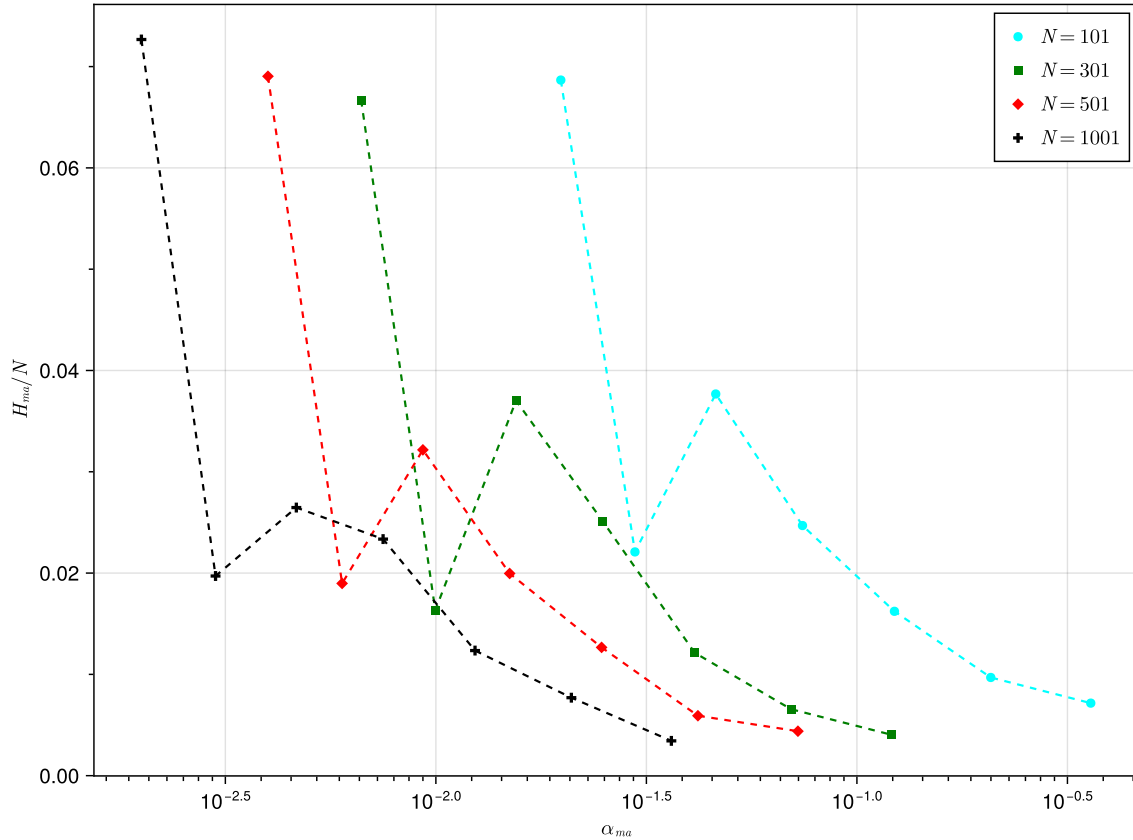


Figura 4.12: Previsibilidad H_{ma} para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

El parámetro H_{ma} que nos mide la previsibilidad en el sistema para valores pequeños de memoria es $H_{ma} \neq 0$. Es lo contrario al comportamiento del JM (ver 3.5). Es similar al comportamiento del mercado artificial sin ruido ni perturbación (ver figura 4.5). Es decir, que este parámetro es sensible a la heterogeneidad del tamaño de memoria, como también a la actualización de las estrategias de los agentes. De igual forma, este resultado es interesante, porque es contra intuitivo, como podemos ver en la figura 4.12. Pensaríamos que a medida que el tamaño de memoria aumenta el mercado artificial se volviera más predecible para los agentes, pero sucede todo lo contrario. El mercado se vuelve más complejo e impredecible para los agentes. Esto tiene sentido como aproximación a un mercado real.

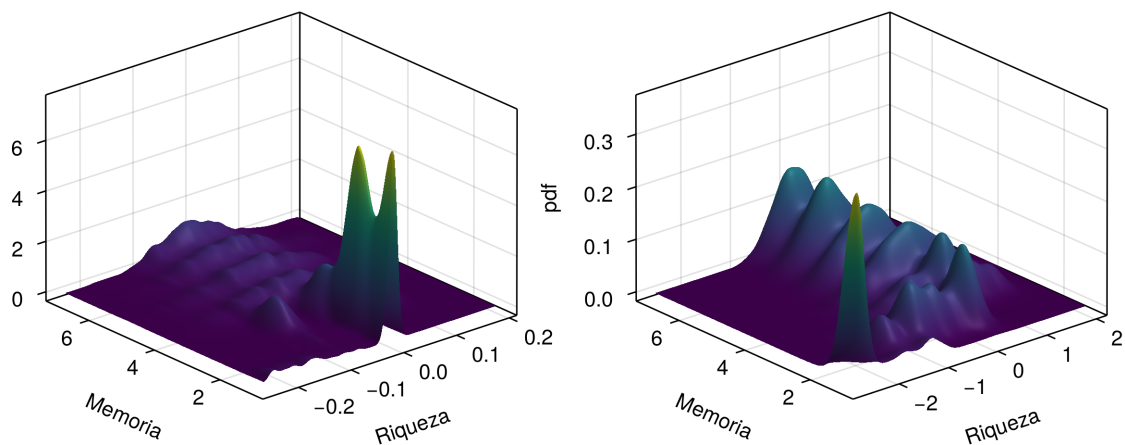


Figura 4.13: Densidad de la riqueza $\omega_i(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

La riqueza $\omega_i(t)$ como aproximación del cumplimiento de las expectativas tiene un comportamiento similar al del mercado sin ruido (ver figura 4.6). La figura 4.13 nos muestra como la densidad de probabilidad varía para diferentes tamaños de memoria. Es relevante hacer hincapié que a medida que aumenta la memoria, en los diferentes agentes, son capaces de obtener mayores ganancias. Además, si los agentes tienen más estrategias, son capaces de elevar aún más sus ganancias. A su vez, las pérdidas también aumentan.

Esto nos sugiere que el mercado artificial con ruido de decisión y perturbación de la valoración capturara la complejidad de un mercado real y nos aproxima a una dinámica de

comportamiento similar. De igual forma que en el mercado sin ruido ni perturbación, los agentes con mayor memoria y más estrategias son capaces de explotar mejor la información del mercado, produciendo expectativas de mejor calidad, lo que se traduce en estrategias cada vez mejores.

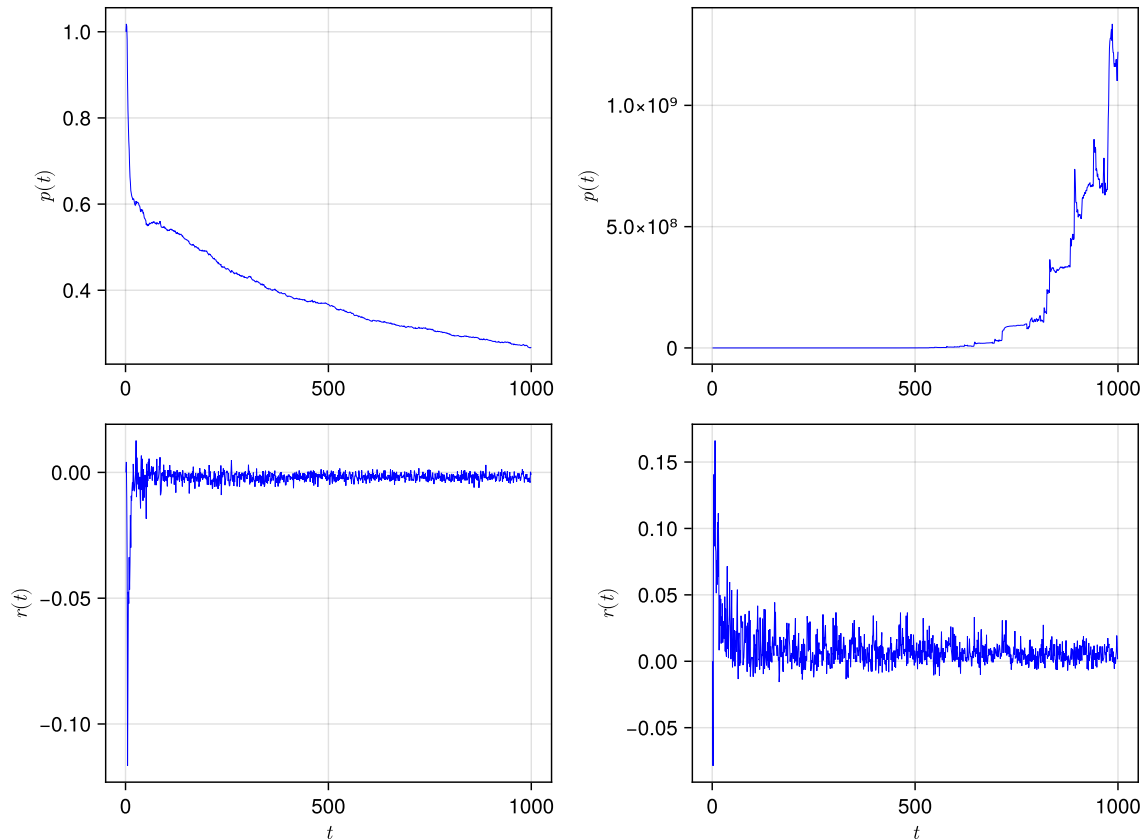


Figura 4.14: Determinación del precio $p(t)$ y del rendimiento $r(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel izquierdo y derecho respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

También podemos replicar la dinámica de la formación de precios de un mercado real a partir de la formación de expectativas utilizando el algoritmo de las ECA. De igual forma que el mercado artificial sin ruido ni perturbación, cuando los agentes tienen más estrategias como margen de maniobra hacen que el precio sea más volátil, alcanzando valores muy altos (ver figura 4.28). Como mencionamos anteriormente, este comportamiento es común

en mercados especulativos muy volátiles. Lo interesante es que el precio no alcanza valores tan altos como en el mercado sin ruido ni perturbación. Este resultado es interesante porque puede explicar desde la formación de expectativas como el precio se puede ver afectado por información exógena. Puede ser que el ruido de decisión y la perturbación de valoración de estrategias jueguen el papel de un mecanismo que desacelere el crecimiento del precio y el rendimiento del mismo.

4.3. Mercado Artificial con memoria “falsa”.

Para introducir la memoria falsa (o historia falsa)⁴ modificaremos las ecuaciones del diseño de nuestro mercado artificial (4.1) - (4.5). En lugar de utilizar los resultados históricos del mercado $\mathcal{H}_i = (\text{sign}[A(t-m_i)], \dots, \text{sign}[A(t-1)])$, le proporcionaremos a nuestros agentes en cada etapa t el $\text{sign}[A(t)] \in \{-1, 1\}$ de un resultado aleatorio $A(t)$ para que se conforme el historial de resultados como en el mercado artificial con memoria real. Recordemos que cada agente tiene una longitud de memoria diferente, por lo que la memoria m_i se definen al inicio del mercado de forma aleatoria. Además, tenemos que tener en cuenta que el valor de memoria más larga se utilizara para generar el historial de mercado falso.

Utilizaremos un proceso estocástico markoviano como en el JM para este apartado. Definimos $p = 2^M$ con $P = \alpha_{am}N$ y $\mu(t)$ son números aleatorios generados de forma independiente con probabilidades iguales. Las tablas de búsqueda se redefinen como $\mathcal{S}_i^a = (\varsigma_{i1}^a, \dots, \varsigma_{iP}^a) \in \{-1, +1\}^P$. De la misma forma que con memoria real el parámetro η nos dice si los agentes están aprendiendo y actualizando los puntos virtuales de sus estrategias. Asumimos un valor de $\eta = 1$ para el parámetro de aprendizaje de todos los agentes como en el mercado artificial de memoria real de la sección anterior.

Por lo tanto, podemos redefinir las ecuaciones del mercado artificial con memoria real planteado anteriormente. Al modificar las ecuaciones que tienen que utilizar la historia (4.1)

⁴Yeung y Zhang (2008, p. 3) también los llama juegos exógenos. Argumenta que son aquellos que utilizan señales de información aleatoria en la toma de decisiones de los agentes en la etapa siguiente.

y (4.2) tendríamos

$$\rho_{ia}(t+1) = \rho_{ia}(t) - \eta A(t) \mathcal{S}_i^{a_i(t)\mu(t)}(\mathcal{H}_i) \quad (4.13)$$

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathcal{S}_i^{a_i(t)\mu(t)}(\mathcal{H}_i) \quad (4.14)$$

$$a_i(t) = \arg \max_{a \in \{1, \dots, S\}} \{\rho_{ia}(t)\} \quad (4.15)$$

$$a_i(t+1/2) = \begin{cases} a_i(t) & \text{si } a_i(t) = -\text{sign}[A(t)] \\ -\text{sign}[A(t)] \mathcal{S}_i^{a_i(t)} & \text{si } a_i(t) \neq -\text{sign}[A(t)] \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\omega_i(t+1) = \omega_i(t) - 2a_i(t) \frac{A(t)}{V(t) + a_i(t)A(t)}. \quad (4.17)$$

A continuación procedemos a realizar las simulaciones computacionales de acuerdo con las reglas planteadas para el mercado artificial con memoria falsa.

4.3.1. Resultados obtenidos de las simulaciones computacionales del mercado artificial con memoria “falsa”.

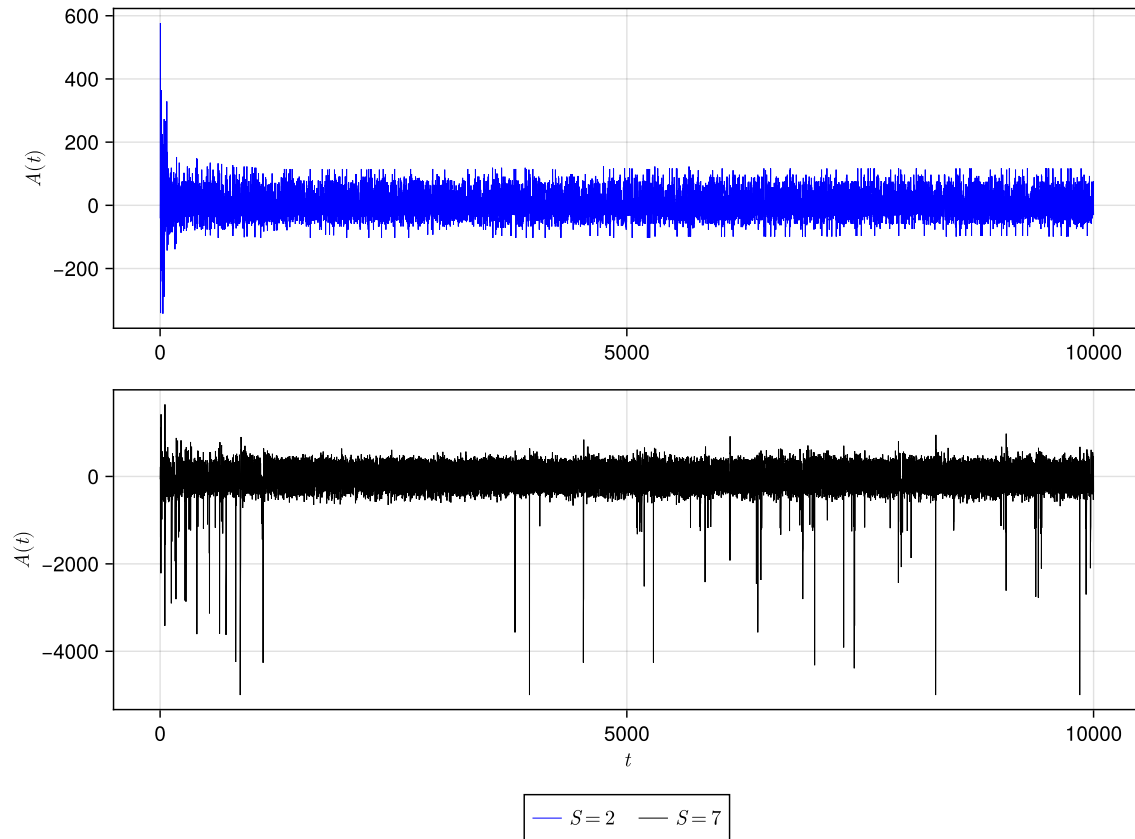


Figura 4.15: Valores de $A(t)$ (sin reescalar) para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

Al realizar las simulaciones del mercado artificial con memoria “falsa” lo primero que obtenemos son las series temporales de $A(t)$. En la figura 4.15 podemos observar que la oferta (o excedente de demanda) $A(t)$ del mercado artificial se vuelve más volátil al aumentar el número de estrategias de los agentes. A medida que los agentes adquieren más estrategias, tienen más opciones de incurrir en pérdidas mayores a diferencia que el mercado artificial con memoria real (ver figura 4.1).

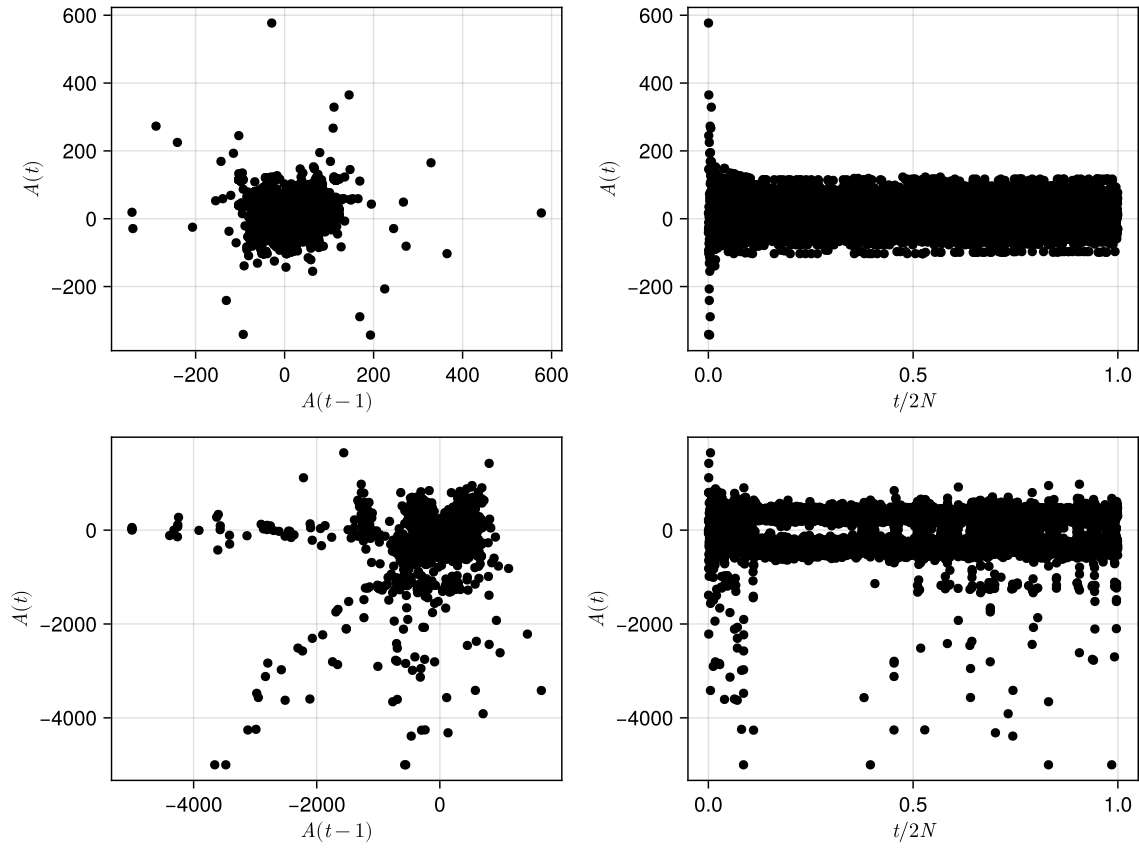


Figura 4.16: Valores de $A(t)$ (sin reescalar) para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

En este mercado artificial, los agentes, al tener la capacidad de crear más estrategias, incluso teniendo un historial falso de resultados, produce que el mercado tenga una dinámica rica en la formación de las expectativas. La memoria “falsa” (o historia falsa) no es un limitante para que los agentes actualicen sus estrategias a medida que el mercado evoluciona con el tiempo. No nos olvidemos que las estrategias dependen de forma directa del tamaño de memoria de nuestros agentes. Esto lo podemos observar en la figura 4.16. Para los valores de $A(t)$ vs $A(t - 1)$ observamos valores no tan dispersos para el mercado artificial con $S = 2$ estrategias, mientras que con $S = 7$ existe una concentración menor alrededor del cero, incluso alcanzando valores más altos para valores negativos de la oferta $A(t)$.

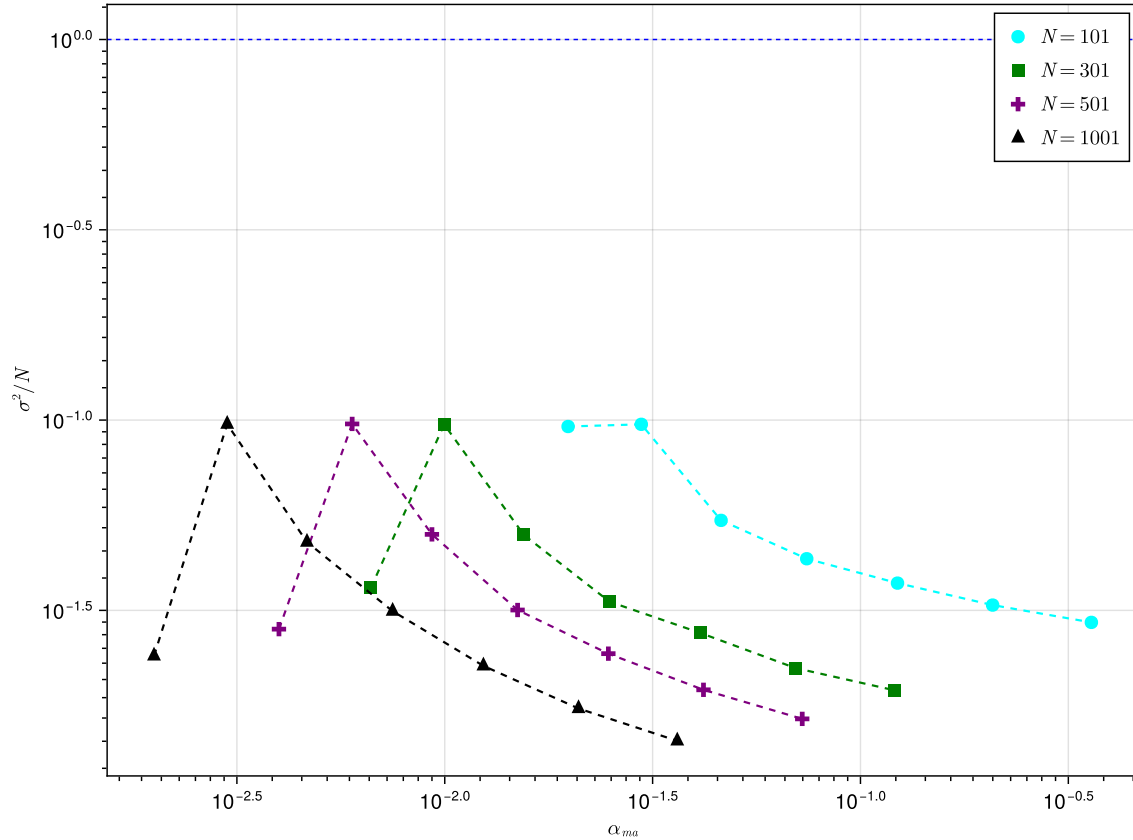


Figura 4.17: Volatilidad σ^2/N para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

A diferencia de las simulaciones de la volatilidad del JM con memoria falsa (ver figura 3.8) y al igual que para nuestro mercado artificial con memoria real 4.3, toda la curva de volatilidad se encuentra en el régimen mejor que aleatorio (debajo de la línea azul) para diferentes tamaños del sistema. Para valores de memoria muy pequeños, la volatilidad es alta, pero el primer valor es más bajo que en el mercado artificial de memoria real, mientras que para valores de memoria más grandes la volatilidad disminuye, como se observa en la figura 4.17. Además, debido a que los agentes tienen diferentes tamaños de memoria en una misma etapa de tiempo t y actualizan sus estrategias con el algoritmo de las ECAs, las curvas no colapsan como en el JM, pero se desplazan a la izquierda a medida que el tamaño del sistema aumenta.

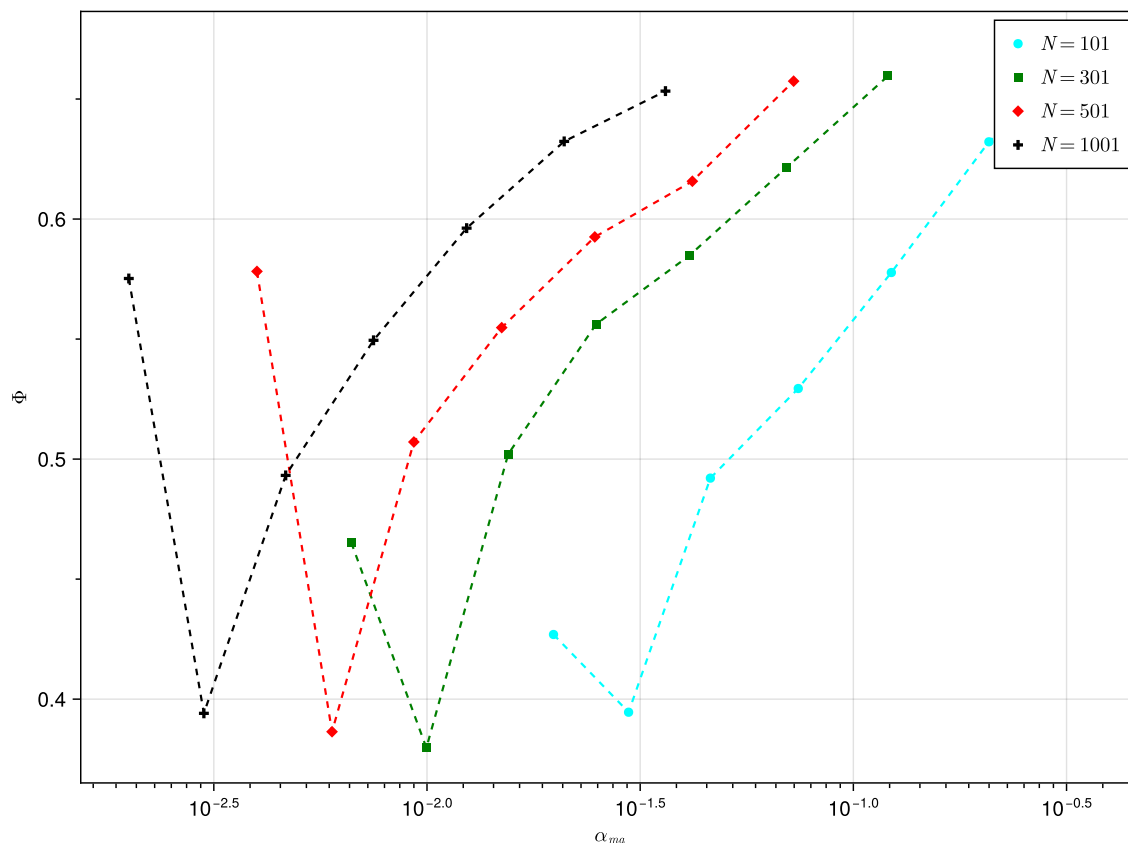


Figura 4.18: Fracción de agentes congelados Φ para un mercado artificial compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

Por su parte, la fracción de agentes congelados Φ es susceptible al cambio de heterogeneidad de los tamaños de memoria para diferentes tamaños del sistema. A diferencia del mercado artificial con memoria real donde para valores pequeños de memoria los agentes se encuentran congelados y con valores de memoria más grandes los agentes se comienzan a descongelar (ver 4.4). La figura 4.18 nos exhibe que en nuestro mercado artificial con memoria falsa, los agentes con valores pequeños de memoria, una fracción de ellos, se encuentran congelados, luego disminuye de forma precipitada esta fracción y se van congelando a medida que aumenta la profundidad de memoria. Esto puede ser producto de la información aleatoria $\mu(t)$. Los agentes se aferran a estrategias que les dieron resultados dada la aleatoriedad que existe en el sistema.

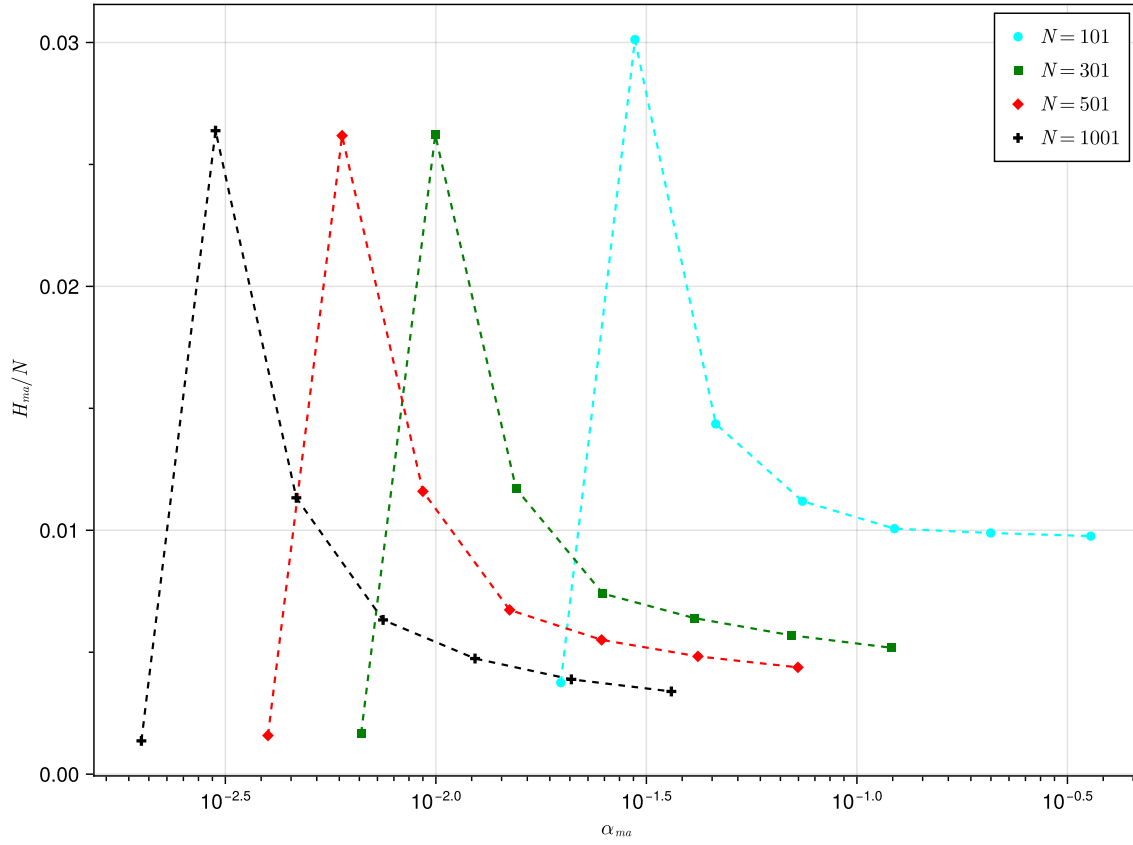


Figura 4.19: Previsibilidad H_{ma} para un mercado artificial compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

El comportamiento del parámetro H_{ma} que nos mide la previsibilidad en el sistema para valores pequeños de memoria es $H_{ma} \neq 0$. Es lo contrario al comportamiento del JM con memoria falsa (ver 3.11). Lo que implica que este parámetro también es sensible a la heterogeneidad del tamaño de memoria y al historial falso proporcionado a los agentes. Al igual que el mercado artificial con memoria real (ver figura 4.5), también a la actualización de las estrategias de los agentes. Este resultado es interesante, porque es contra intuitivo, como podemos ver en la figura 4.19. Pensaríamos que a medida que el tamaño de memoria aumenta el mercado artificial se volviera más predecible para los agentes, pero sucede todo lo contrario. El mercado se vuelve más complejo e impredecible para los agentes. Con memoria falsa, la previsibilidad alcanza valores inferiores (aunque tiene un pico) que en el mercado

artificial con memoria real.

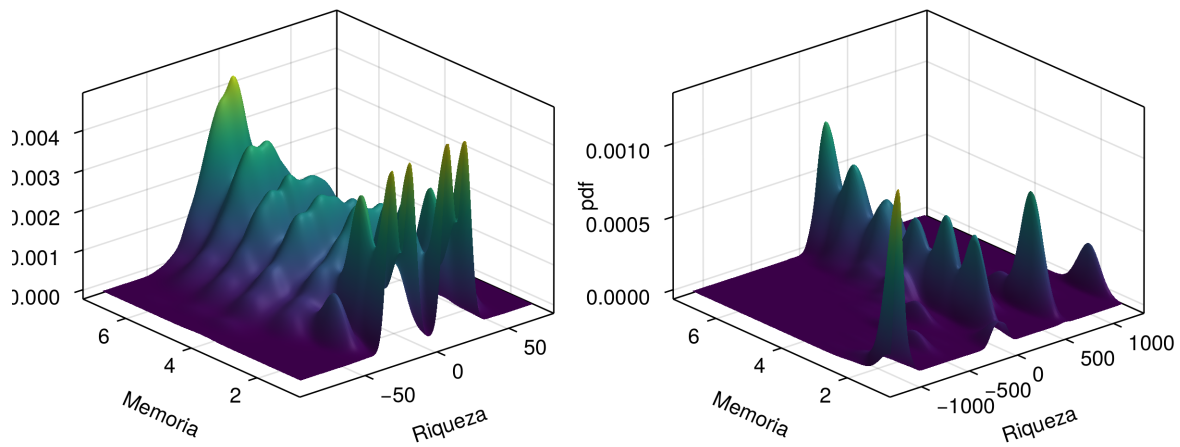


Figura 4.20:

La riqueza $\omega_i(t)$ con memoria falsa alcanza valores más altos con memoria falsa que con memoria real (ver figura 4.6). La figura 4.20 nos muestra como la densidad de probabilidad varía para diferentes tamaños de memoria en nuestro mercado artificial con memoria falsa. A medida que aumenta la memoria, como en los casos anteriores, los diferentes agentes son capaces de obtener mayores ganancias. Además, si los agentes tienen más estrategias, son capaces de elevar aún más sus ganancias. A su vez, los agentes que no lograron cumplir sus expectativas al estar en el grupo minoritario tienen mayores pérdidas.

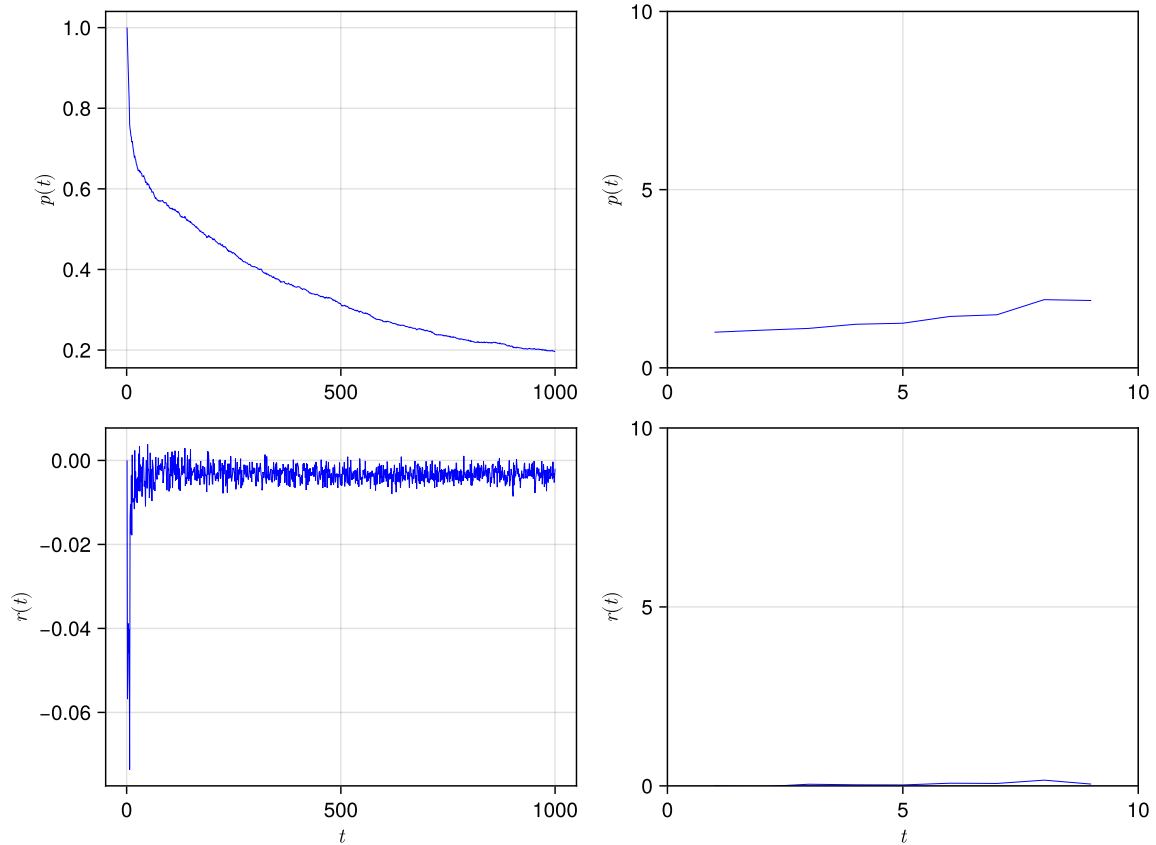


Figura 4.21: Determinación del precio $p(t)$ y del rendimiento $r(t)$ para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel izquierdo y derecho respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada una.

Al replicar la dinámica de la formación de precios de un mercado real a partir de la formación de expectativas utilizando el algoritmo de las ECA, sucede algo que no sucedió en el mercado artificial con memoria real (ver figura 4.7). Cuando los agentes tienen más estrategias hacen que el precio sea más volátil. Eso hace que se alcancen valores muy altos (ver figura 4.21), obteniendo resultados de las simulaciones como valores infinitos y ya no los grafica. Como mencionamos anteriormente, este comportamiento es común en mercados especulativos muy volátiles. Habría que revisar que está sucediendo dado que el mercado artificial se vuelve muy volátil con memoria falsa a diferencia del mercado con memoria real.

4.4. Mercado Artificial con memoria “falsa”, ruido de decisión y perturbaciones en la valoración de las estrategias.

De la misma forma que con la memoria real (o historia verdadera), introducimos el ruido de decisión $A_r(t) \in \mathbb{R}$ y la perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t) \in \mathbb{R}$. Solo que ahora con memoria falsa (o historia falsa) con el objetivo de comparar si los agentes del mercado artificial son capaces de aprender del comportamiento de los otros agentes del sistema y generar expectativas a pesar de que exista el ruido y la perturbación con un historial falso de resultados.

Como lo vimos en el mercado con memoria real, agregar el ruido y la perturbación modifica las ecuaciones (4.13) y (4.14) que planteamos en el diseño de mercado artificial con memoria falsa, por lo que ahora tenemos

$$\rho_{ia}(t+1) = \rho_{ia}(t) + \theta_i(t) - \eta A(t) \mathcal{S}_i^{a\mu(t)}(\mathcal{H}_i) \quad (4.18)$$

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \mathcal{S}_i^{a_i(t)\mu(t)}(\mathcal{H}_i) + A_r(t) \quad (4.19)$$

donde $A_r(t) = \frac{\beta(t)}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N a_i(t)$. Los parámetros $\beta \in (-1, 1)$ y $\theta_i \in (-1, 1)$ son números aleatorios. Las otras ecuaciones planteadas para el mercado artificial con memoria falsa (sección anterior) se mantienen iguales, ya que se verán afectadas de forma indirecta.

A continuación procedemos a realizar las simulaciones computacionales de acuerdo con las reglas planteadas para el mercado artificial con memoria falsa con ruido y perturbación.

4.4.1. Resultados obtenidos de las simulaciones computacionales del mercado artificial con memoria “falsa”, ruido de decisión y perturbación en la valoración de estrategias.

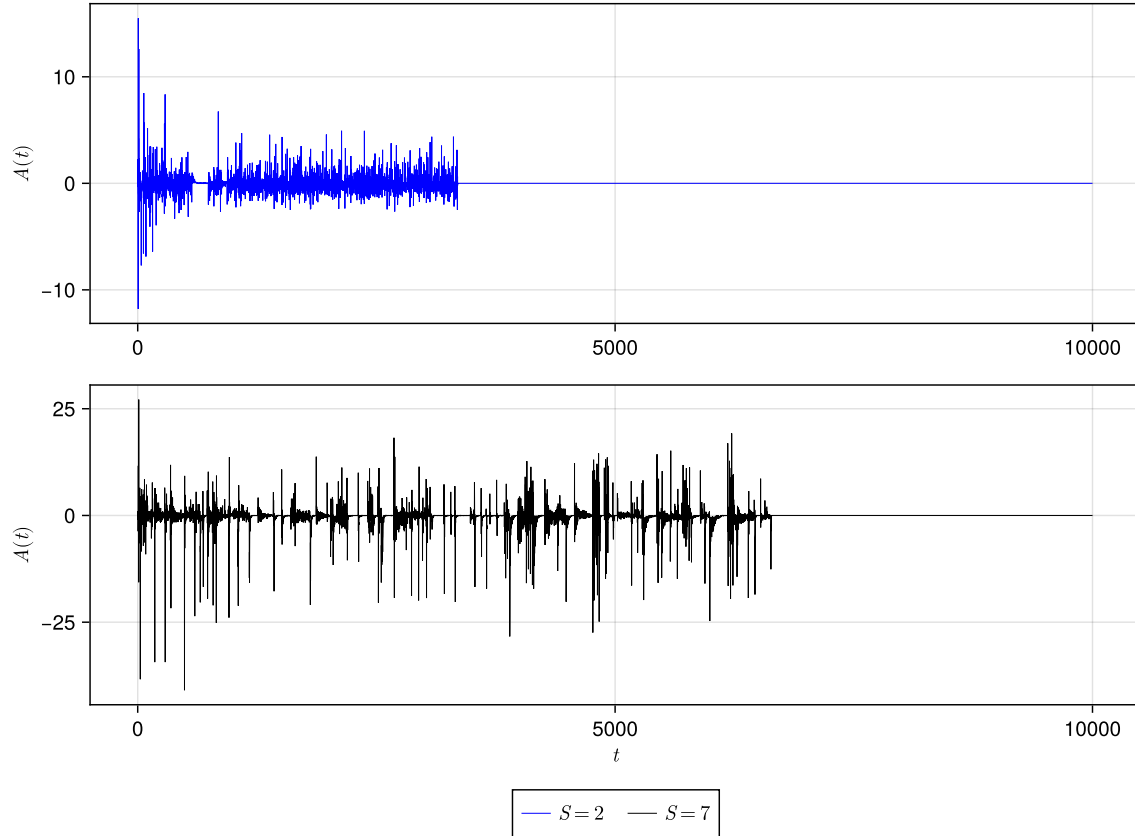


Figura 4.22: Valores de $A(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

El mercado artificial con memoria falsa con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias, $\theta_i(t)$ obtenemos que la serie de tiempo para la oferta (o excedente de demanda) $A(t)$ después de un número de pasos es cero, como se muestra en la figura 4.23. Resultado similar al que obtuvimos con el mercado de memoria real con ruido y perturbación (ver figura 4.9). Con un número de $S = 2$ estrategias se alcanza lo que

consideramos un empate en el JM en menos pasos de tiempo que con $S = 7$ estrategias. Esto sucede por el ruido de decisión $A_r(t)$. En algún punto de la dinámica del mercado artificial con memoria falsa, el ruido de decisión $A_r(t)$ hace que no haya un grupo minoritario, produciendo que el comportamiento de los agentes nos lleve a este resultado.

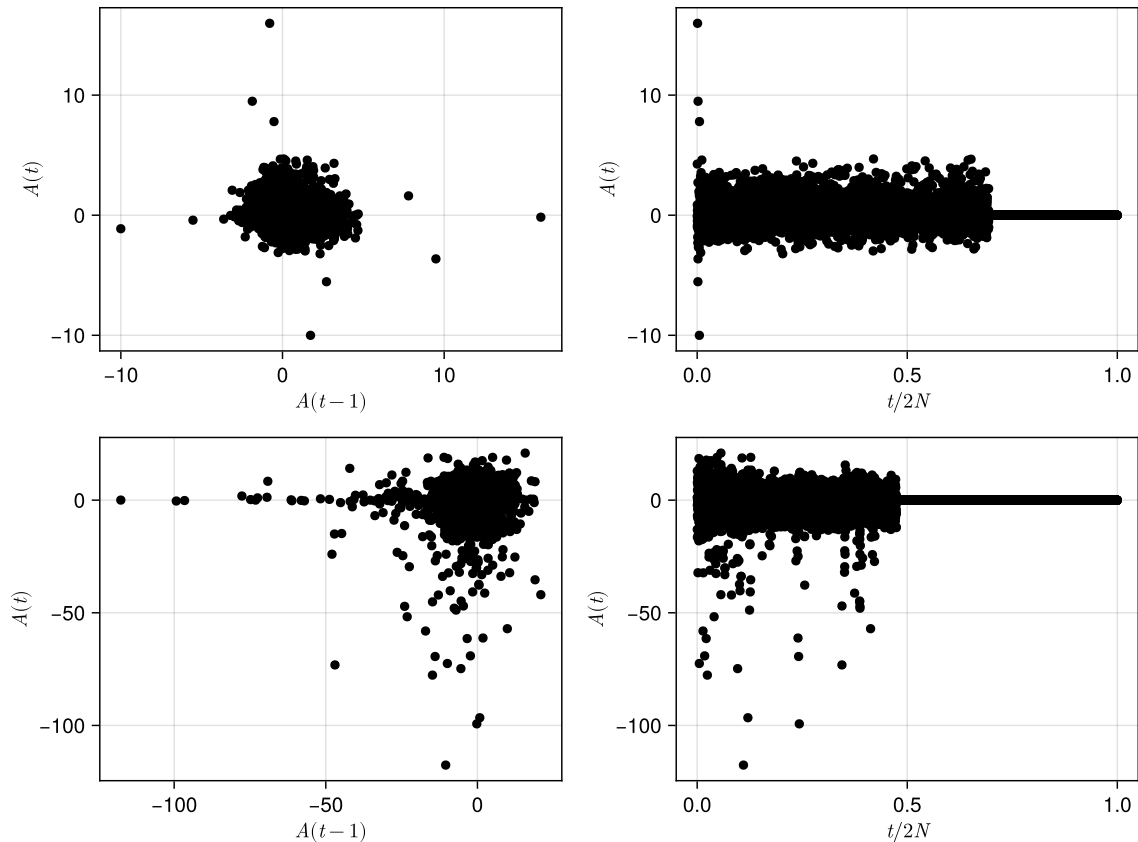


Figura 4.23: Valores de $A(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

Los resultados del mercado artificial con memoria falsa con ruido perturbación también produce una dinámica rica en la formación de las expectativas. Las estrategias, al depender de forma directa de la memoria, el proceso de formación de expectativas se vuelve más complejo. Podemos observar en la figura 4.23, para valores de $A(t)$ vs $A(t - 1)$ observamos que no hay tanta dispersión para el mercado artificial con memoria falsa con ruido y perturbación para

$S = 2$ estrategias, mientras que con $S = 7$ existe una concentración menor alrededor del cero, incluso alcanzando valores más altos. De igual forma, después de un número de pasos de tiempo, los valores de $A(t) = 0$ como lo vimos en el caso de memoria real con ruido y perturbación (ver figura 4.9).

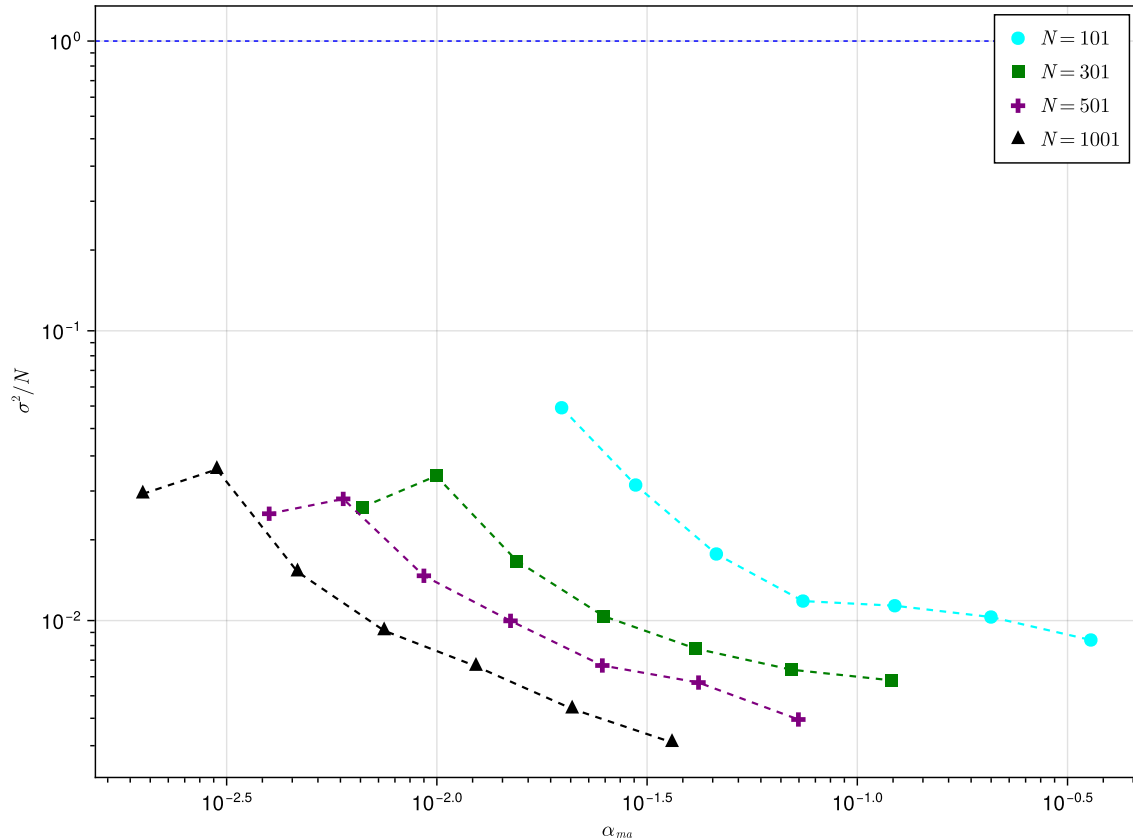


Figura 4.24: Volatilidad σ^2/N para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

Los resultados de las simulaciones de la volatilidad del mercado artificial con memoria falsa con ruido y perturbación son similares a su símil con memoria real (ver figura 4.10). Toda la curva de volatilidad se encuentra en el régimen mejor que aleatorio (debajo de la línea azul) para diferentes tamaños del sistema. Para valores de memoria muy pequeños la volatilidad es alta, mientras que para valores de memoria más grandes la volatilidad disminuye como se observa en la figura 4.24. Además, debido a que los agentes tienen diferentes tamaños de

memoria en una misma etapa de tiempo t y actualizan sus estrategias con el algoritmo de las ECAs, las curvas no colapsan como en el JM con memoria falsa (ver figura 3.8), pero se desplazan a la izquierda a medida que el tamaño del sistema aumenta.

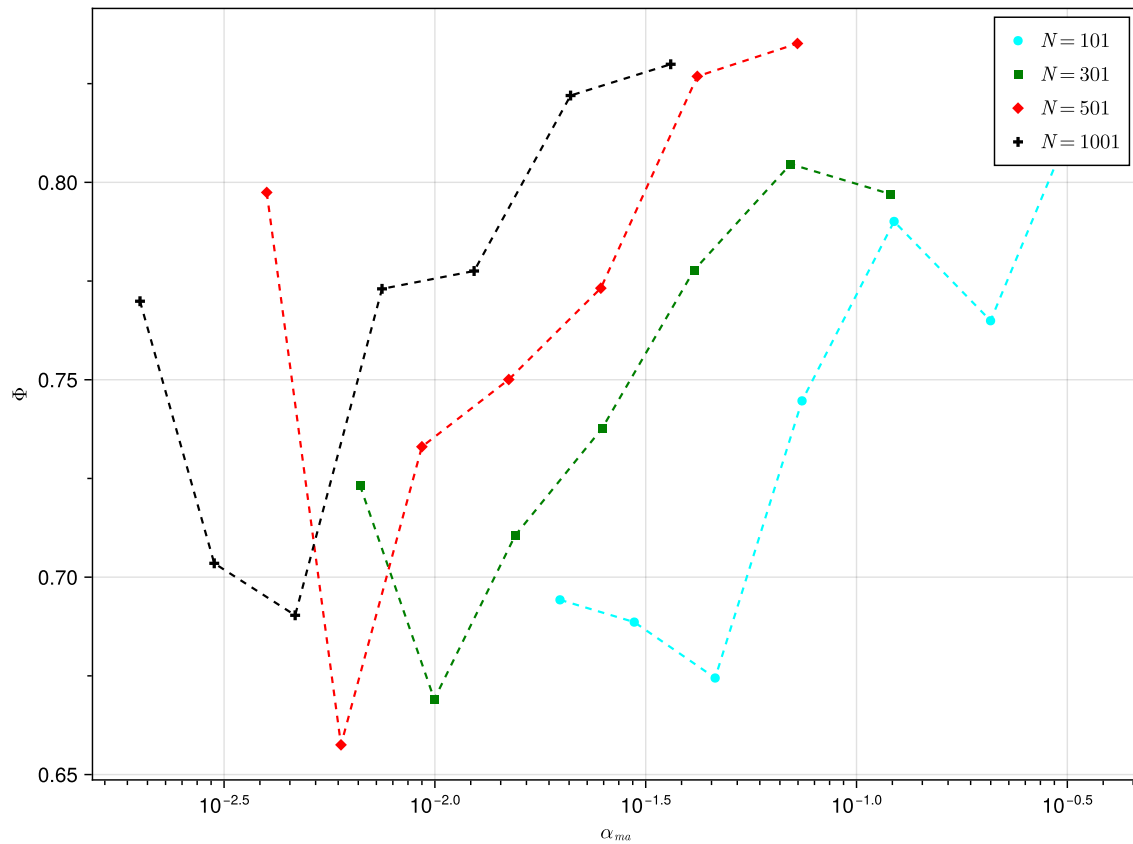


Figura 4.25: Fracción de agentes congelados Φ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

El comportamiento de la curva de agentes congelados es similar a la del mercado artificial sin ruido ni perturbación (ver figura 4.18) solo que con valores más altos. De igual forma, se demuestra que la fracción de agentes congelados Φ es susceptible al cambio de heterogeneidad de los tamaños de memoria para diferentes tamaños del sistema, incluso existiendo el ruido y la perturbación. A diferencia del JM con memoria falsa, donde para valores pequeños de memoria no existen agentes congelados y con valores de memoria más grandes los agentes se comienzan a congelar (ver 3.12). La figura 4.25 nos exhibe que en nuestro mercado artificial

con memoria falsa con ruido de decisión y perturbación de la valoración de estrategias, los agentes con valores pequeños de memoria se encuentran parcialmente congelados, y se van congelando a medida que aumenta la profundidad de memoria.

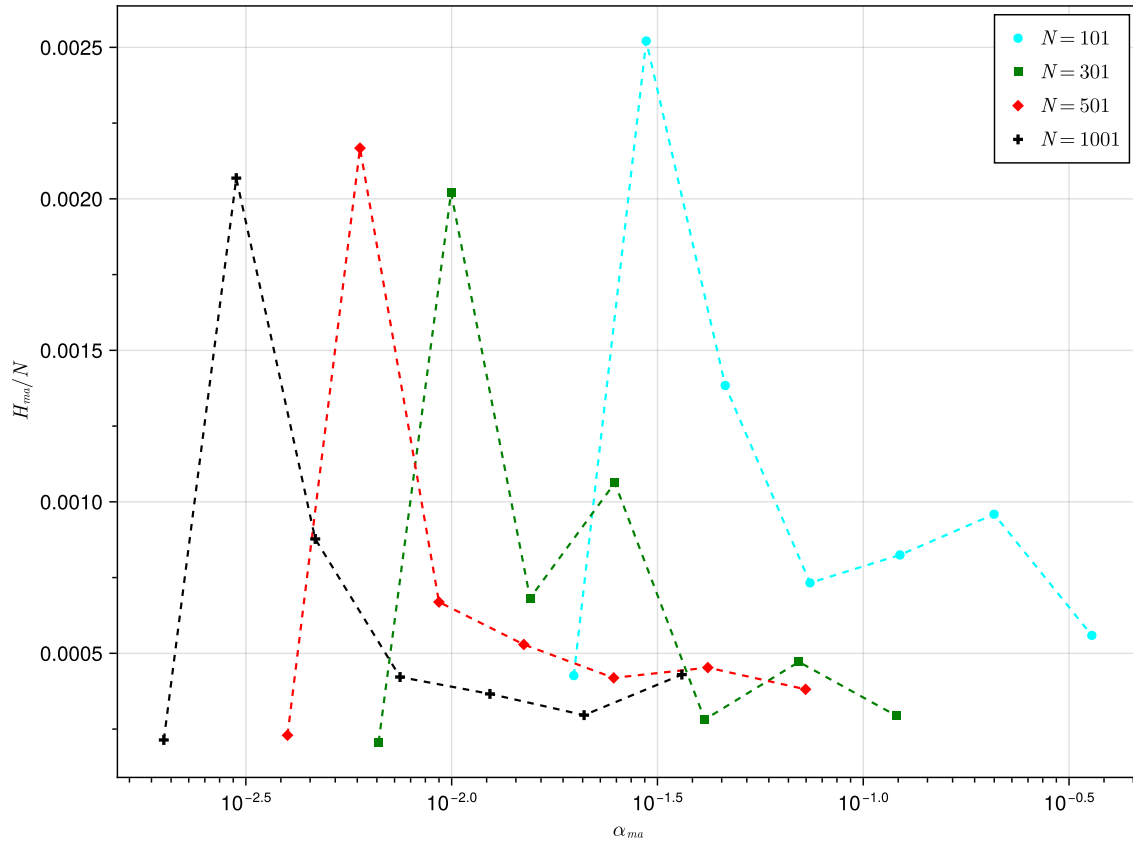


Figura 4.26: Previsibilidad H_{ma} para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 101, 301, 501, 1001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; y $S = 5$ estrategias. Se hicieron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

El parámetro H_{ma} que nos mide la previsibilidad en el sistema para valores pequeños de memoria es $H_{ma} \neq 0$. Es lo contrario al comportamiento del JM (ver 3.11). Es similar al comportamiento del mercado artificial con memoria falsa sin ruido ni perturbación (ver figura 4.19) pero alcanzando valores más pequeños aún. Este parámetro muestra sensibilidad a la heterogeneidad del tamaño de memoria, como también a la actualización de las estrategias de los agentes del algoritmo de las ECAs. Este sigue siendo un resultado interesante, porque,

como mencionamos en el caso de memoria real con ruido y perturbación, es contra intuitivo. Podemos observar en la figura 4.26 que a medida que el tamaño de memoria aumenta, el mercado artificial con memoria falsa con ruido y perturbación se vuelve menos predecible para los agentes. Como habíamos mencionado con anterioridad, el mercado se vuelve más complejo e impredecible para los agentes.

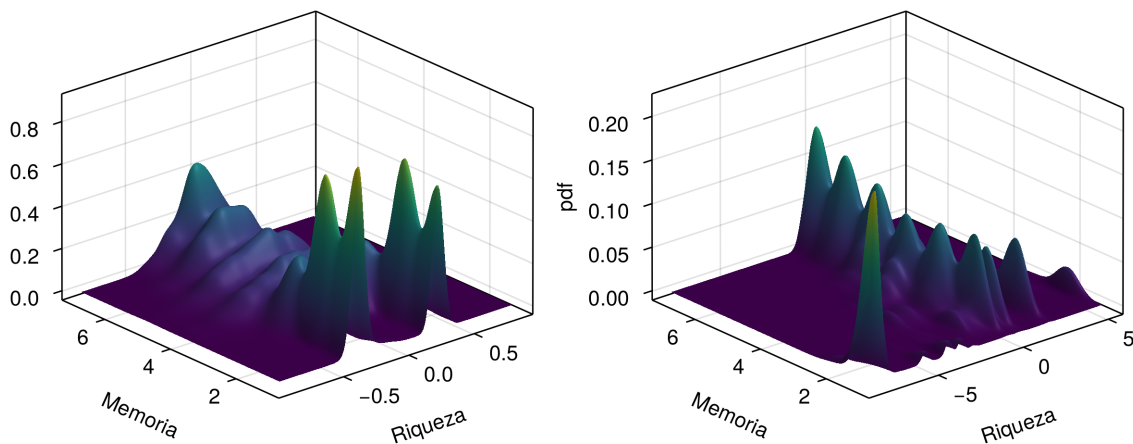


Figura 4.27: Densidad de la riqueza $\omega_i(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

La riqueza $\omega_i(t)$ como aproximación del cumplimiento de las expectativas tiene un comportamiento similar al del mercado artificial con memoria falsa sin ruido ni perturbación (ver figura 4.20). En la figura 4.27 podemos ver como la densidad de probabilidad varía para diferentes tamaños de memoria. A medida que aumenta la memoria, en los diferentes

agentes, pueden obtener mayores ganancias. Además, si los agentes tienen más estrategias, son capaces de elevar aún más sus ganancias. A su vez, las pérdidas también aumentan. Es interesante observar que la densidad de probabilidad de la riqueza es mayor que en el mercado artificial con memoria falsa sin ruido ni perturbación. Los agentes con mayor memoria y más estrategias son capaces de explotar mejor la información del mercado, produciendo expectativas de mejor calidad, lo que se traduce en estrategias cada vez mejores como ya lo habíamos anticipado en los casos anteriores.

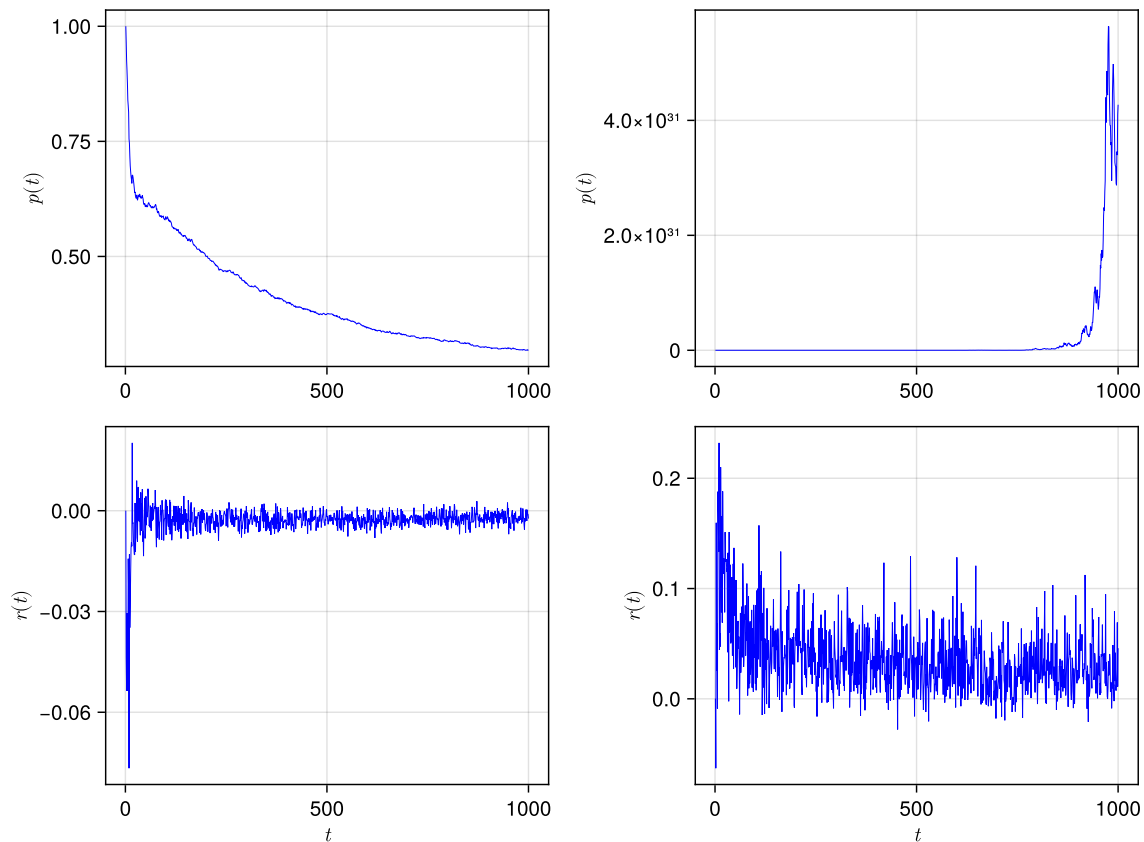


Figura 4.28: Determinación del precio $p(t)$ y del rendimiento $r(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel izquierdo y derecho respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

Por último, podemos replicar la dinámica de la formación de precios de un mercado real a partir de la formación de expectativas utilizando el algoritmo de las ECA. A diferencia

del mercado artificial con memoria falsa sin ruido ni perturbación, los precios sí se pueden obtener y ya no nos arroja resultados de valores infinitos. Cuando los agentes tienen más estrategias y memoria hacen que el precio sea más volátil, alcanzando valores muy altos (ver figura 4.28). Este comportamiento es común en mercados especulativos muy volátiles, como ya lo habíamos anticipado en las simulaciones anteriores de la formación de precios. Lo interesante es que el precio no alcanza valores tan altos como en el mercado sin ruido ni perturbación.

Este resultado es interesante porque puede explicar desde la formación de expectativas y como el precio se puede ver afectado por información exógena. Puede ser que el ruido de decisión y la perturbación de valoración de estrategias jueguen el papel de un mecanismo que desacelere el crecimiento del precio y el rendimiento del mismo. Esto a pesar de que los agentes están utilizando un historial falso de resultados para su formación de expectativas y posterior toma de decisiones.

Capítulo 5

Conclusiones

5.1. Resumen y conclusiones.

A lo largo de este trabajo de investigación se revisó literatura especializada que nos permitió revisar el estado actual de las expectativas como línea de investigación. Observamos que en la mayoría de vertientes teóricas verificadas en el capítulo 1, las expectativas son parte de las condiciones iniciales de los modelos teóricos y empíricos en economía y finanzas. No se estudiaba la formación de expectativas, sino que a través de la formación de precios y el cumplimiento de pronósticos se suponía que existía un proceso de toma de decisiones que incluía de alguna forma a las expectativas. Los mercados artificiales con la ayuda del diseño de mecanismos y la modelación basada en agentes son una herramienta poderosa que nos permite estudiar el proceso de formación de expectativas.

El algoritmo de las Expectativas Complejas Adaptativas (ECA) que se planteó en el capítulo 2, es un ejemplo sencillo que con reglas simples de comportamiento no tenemos que realizar suposiciones muy fuertes o elaboradas en nuestros modelos. No estamos en contra de los supuestos o hipótesis en los modelos económicos, pero si podemos ayudarnos al evitar el reduccionismo codicioso, es de vital importancia plantear más modelos algorítmicos. Las matemáticas y la computación como herramientas nos ayudan a este cometido. Al modelar

un mercado financiero como un sistema de retroalimentación de expectativas, entendemos que las decisiones económicas son producto de ficciones y/o conjeturas que los agentes tienen del sistema en el que participan. Las expectativas son el resultado de un proceso individual y social a la vez. Son ciclos anidados de adaptación que dependen de una estructura y respetan la jerarquía de los diferentes niveles de organización del sistema. Traducir esto a un algoritmo nos evita plantear supuestos como la competencia perfecta, asimetría de la información, racionalidad completa y agentes homogéneos.

Como en cualquier proceso de toma de decisiones, el futuro tiene un componente de aleatoriedad y aunque parezca contra intuitivo, los agentes elaboran sus expectativas y lo construyen basándose en referencias sociales, conocimiento, experiencia e información. Aceptar la incertidumbre como parte del proceso es importante para nuestra investigación. Es por esto que introducimos un modelo básico que nos permita capturarla.

Revisamos uno de los modelos basados en agentes más interesantes dentro de la literatura de la teoría de juegos evolutiva. El Juego de la Minoría con una regla muy simple: estar en minoría plantea una discusión complicada para los modelos económicos tradicionales al plantear una dinámica con agentes heterogéneos. Es un modelo multiagente sencillo donde la adaptación juega un rol fundamental, nos ayuda a replicar complejas dinámicas sociales con una regla simple como lo es la regla minoritaria. Revisamos su estructura elemental y su fenomenología como lo hace Coolen (2005). También verificamos su parte analítica, la cual se encuentra en el apéndice de este trabajo. Esto con el objetivo de poder plantear lo que denominamos un mercado artificial y poner a prueba el algoritmo de las ECA.

El mercado artificial planteado en el capítulo 4 demostró que podemos estudiar el proceso de formación de expectativas por medio de un modelo algorítmico. Diseñamos un mercado artificial un poco más sofisticado que el JM básico. Se incluyeron dos heterogeneidades significativas en el modelo. La primera hace referencia a las capacidades cognitivas de los agentes al otorgarles diferentes tamaños de memoria $\{m_i\}$. La segunda es la inclusión del algoritmo de las ECA en la actualización de las estrategias como parte del proceso de calibración de las expectativas de los agentes. Este planteamiento hace que sea diferente del Juego de la

Minoría, dado que los agentes tienen un mismo tamaño de memoria y las estrategias están fijas durante toda la dinámica del juego. Además, se introdujeron dos parámetros. El primero es un ruido de decisión $A_r(t)$ que contiene las perturbaciones ajenas al mercado como información exógena. El segundo es una perturbación en la valoración de las estrategias, $\theta_i(t)$ el cual cumple la función de infravalorar o sobrevalorar, de acuerdo a sus expectativas, la puntuación virtual que los agentes asignan en cada tiempo t a las estrategias para operar en el mercado artificial. Además, planteamos un parámetro de riqueza $\omega_i(t)$ para medir la efectividad de las expectativas de los agentes.

Al igual que en el Juego de la Minoría, se realizaron experimentos computacionales tanto con memoria real (o historia real de mercado) como con memoria “falsa” (historia falsa de mercado o aleatoria). Se demostró con las simulaciones computacionales que el mercado artificial es sensible a la heterogeneidad de profundidades de memoria como al algoritmo de las ECA. Todos los agentes, a pesar de que tenían diferentes profundidades de memoria que iban de 1 hasta 7 últimos resultados del mercado artificial, les otorgamos la misma tasa de aprendizaje $\eta = 1$. No consideramos profundidades de memoria más altas, porque tratamos que la dinámica del mercado artificial se asemeje lo más posible al comportamiento de agentes de un mercado real. Lo mismo para el número de estrategias, utilizamos para las simulaciones de una sola ejecución de 10000 pasos temporales $S = 2$ y $S = 7$ estrategias, y para los experimentos $S = 5$ estrategias. Recordemos que los agentes tienen racionalidad limitada e inductiva, lo que no tendría caso valores de memoria o estrategias exagerados.

A continuación exponemos algunos de los resultados obtenidos que consideramos importantes del diseño del mercado artificial propuesto y la aplicación del algoritmo de las ECA.

Obtuvimos las series temporales de la oferta agregada $A(t)$ las cuales muestran mayor volatilidad cuando a los agentes se les permite tener un mayor número de estrategias. Incluso en los mercados artificiales con ruido y perturbación, aunque en estos mercados los resultados demostraron que los agentes pueden llegar a empates. Asumimos que esto es gracias al ruido A_r que produce después de un número de pasos de tiempo que la oferta agregada sea $A(t) = 0$,

es decir, que el grupo minoritario como el mayoritario son iguales, dando como resultado que no haya excedente de demanda.

La volatilidad del mercado artificial σ^2 al analizarla con respecto al parámetro de control α_{ma} en todas las simulaciones resulto estar en la fase mejor que si los agentes estuvieran tomando decisiones de forma aleatoria, es decir, por debajo de $\sigma^2/N = 1$. Además, a menores profundidades de memoria la volatilidad es más alta, mientras que a mayores valores de profundidad de memoria la volatilidad del mercado artificial disminuye. Otro punto interesante es que las curvas de la volatilidad para diferentes tamaños del sistema no colapsan entre sí, como en el Juego de la Minoría. Esto puede ser gracias a que los agentes tienen diferentes tamaños de memoria en el mercado artificial y que además son capaces de modificar las estrategias que no les están dando buenos resultados en pro de posibles mejores estrategias. En otras palabras, las expectativas de los agentes que no se cumplan serán cambiadas por nuevas expectativas, y las expectativas que están cumpliéndose se mantienen.

La fracción de agentes congelados Φ que nos dice la fracción de agentes que se aferran a una estrategia en particular durante la dinámica del mercado artificial, tuvo dos tipos de comportamiento diferentes. Con memoria real, la fracción de agentes congelados para valores de profundidades de memoria pequeños fue casi el 100% y a medida que la profundidad de memoria aumentaba, los agentes se iban descongelando, es decir, iban cambiando su estrategia activa. Mientras que con memoria falsa sucedía casi lo contrario, con profundidades de memoria muy pequeñas, una gran fracción de agentes se encontraba congelados, luego esta fracción caía bruscamente para luego aumentar a medida que la profundidad de memoria aumentaba. Esto puede ser resultado que con memoria real los agentes aprendían del comportamiento de los otros agentes y a medida que tenían más memoria aumentaban las entradas de las estrategias, haciendo que tengan más opciones al enfrentarse a un proceso de decisión. Pero con memoria falsa, los agentes al recibir valores aleatorios como resultados del juego se aferraron a estrategias que consideraban que eran las mejores para ese tipo de información.

La previsibilidad H_{ma} nos da medidas de la información de la serie temporal $A(t)$ dispo-

nible para los agentes que participan en el mercado artificial. Las curvas son muy diferentes a las obtenidas con el Juego de la Minoría, en este para valores pequeños de memoria la previsibilidad es cero, y aumenta a medida que la memoria aumenta. Para nuestro mercado artificial sucedía lo contrario, para valores pequeños de profundidad de memoria la previsibilidad es más alta que para valores más grandes de profundidad de memoria. Esto puede ser resultado gracias a que la previsibilidad es sensible a los diferentes tamaños de memoria que existen en el mercado artificial. Además, recordemos que los agentes, como mencionamos con antelación, son capaces de actualizar sus estrategias.

Para identificar si los agentes eran capaces de sacar provecho de sus expectativas transformadas en estrategias para la toma de decisiones, decidimos incluir un parámetro de riqueza $\omega_i(t)$. Este se encargaría de decirnos si los agentes con mayores profundidades de memoria eran capaces de explotar al máximo la información disponible. Para llevar un mejor control, todos los agentes partieron con riqueza cero. El resultado fue positivo. Los agentes con mayor profundidad de memoria obtenían mayores niveles de riqueza. Incluso, si les otorgábamos más estrategias, obtenían aún más ganancias que con menos estrategias y la misma profundidad de memoria. Además, sus pérdidas aumentaban con profundidades de memoria menores. Este resultado es importante porque describimos un principio de desigualdad en el mercado artificial a partir de heterogeneidades cognitivas como la profundidad de memoria.

Decidimos utilizar el mecanismo de precio de Marsili (2001) y la propuesta de rendimiento del precio de Giardina y Bouchaud (2003) para determinar la formación del precio de nuestro mercado artificial. El objetivo era replicar la dinámica del precio de un mercado real. Estos dos ingredientes nos dieron resultados prometedores al analizar las series temporales del precio del mercado artificial. Cuando los agentes tenían solo dos estrategias, el precio a medida que avanzaba el tiempo el precio tendía a disminuir. Mientras que cuando tenían 7 estrategias, el precio alcanzaba valores muy altos con el pasar del tiempo. Con memoria falsa el precio fue mayor que con memoria real, podemos entender que los agentes fueron aún más especulativos dada la aleatoriedad de la información en la que se basaban sus decisiones. Cuando se introdujo el ruido y la perturbación, el precio no alcanzó valores tan altos con memoria real, pero con memoria falsa fue todo lo contrario, las simulaciones dieron

resultados infinitos para el precio. El mercado se volvía más volátil. Este comportamiento es común en los mercados muy especulativos como los mercados de criptomonedas. También lo observamos en mercados reales cuando existe una marcada asimetría de la información, pero este no es nuestro caso dado que todos los agentes tienen acceso a la misma información, pero algunos agentes tienen más memoria que otros y por ende más estrategias para operar en el mercado.

La heterogeneidad de nuestros agentes en el mercado artificial hace que se comporte como se esperaría al introducir el supuesto de asimetría de la información como condición inicial. Un resultado importante es que podemos tener indicios de la creación de una burbuja financiera y una posterior crisis en el mercado artificial gracias a la formación de expectativas. Estudiar este tipo de problemáticas en un mercado artificial abre un abanico de posibilidades para la regulación, seguimiento y creación de políticas o leyes para los mercados financieros, ya que podemos replicar su comportamiento al plantear diferentes escenarios.

Podemos concluir que las hipótesis de trabajo planteadas son aceptadas. Las expectativas se forman por medio de las relaciones e interacciones individuales de los agentes en un proceso de constante retroalimentación y recursividad, es decir que su funcionamiento sí lo podemos describir como un proceso complejo adaptativo y esto produce la dinámica en los mercados especulativos del sistema financiero. Además, el algoritmo de las Expectativas Complejas Adaptativas (ECA) explican el funcionamiento y formación de las expectativas, logrando así la reproducción del sistema financiero.

5.2. Agenda pendiente.

Como toda investigación, surgen temas interesantes para estudiar a medida que se avanza en la literatura especializada y en la construcción de un modelo. La nuestra no es la excepción. Planteamos como agenda pendiente algunos puntos interesantes para futuras investigaciones.

- Elaborar un mecanismo de precios más sofisticado que nos permita observar la evolución del mercado artificial con mayor detalle. Con esto identificaremos, por ejemplo, cuando se forman burbujas y crisis en el mercado. Además, de insertar una regla de comportamiento de no participación en el mercado si el agente no se encuentra convencido de las expectativas formadas con la información disponible.
- Consideramos importante elaborar un mercado artificial que nos permita estudiar la formación de la desigualdad dentro de los mercados económicos. Creemos que aplicar el algoritmo de formación expectativas no es exclusivo para la dinámica de un mercado financiero. Cualquier mercado que surja o funcione en un contexto de formación de expectativas hace que el algoritmo planteado sea útil y versátil.
- Hacer que los agentes en el mercado artificial sean aún más heterogéneos al establecer diferentes tasas de aprendizaje para cada uno de ellos (η_i).
- Plantear un mercado artificial haciendo relevante la posición geográfica. Es decir, plantear la dinámica de formación de expectativas en un modelo de tipo red. Al poner diferentes pesos en los enlaces para diferenciar un nodo de otro nos ayudaría a identificar mejor que agentes adquieren mayor importancia a medida que evoluciona la dinámica del mercado artificial.
- Otorgarle a los agentes del mercado artificial información de mercados reales como el historial de precios de una acción o algún índice importante como el S&P 500 o NASDAQ. Nos ayudaría comparar si la formación de precios del mercado artificial es congruente con la información brindada a los agentes.
- Desde el punto de vista analítico, estudiar si el algoritmo propuesto tiene solución analítica como el Juego de la Minoría.
- Desde el punto de vista computacional, realizar simulaciones con escala de tiempos más grandes. También sería interesante introducir reglas de comportamiento con fracciones de tiempo de relajación.

Apéndice A

Conceptos básicos.

A.1. La función generadora.

Para el proceso planteado en (B.9) - (B.10) podemos escribir la probabilidad de encontrar un camino dado $\vec{\sigma}(0) \rightarrow \vec{\sigma}(1) \rightarrow \dots \rightarrow \vec{\sigma}(T)$ a través del producto de las probabilidades de transición individuales:

$$\begin{aligned} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] &= W_t[\vec{\sigma}(t+1); \vec{\sigma}(t)] \cdots W_0[\vec{\sigma}(1); \vec{\sigma}(0)] p_0(\vec{\sigma}(0)) \\ &= \left[\prod_{t=1}^T W_t[\vec{\sigma}(t+1); \vec{\sigma}(t)] \right] p_0(\vec{\sigma}(0)) \end{aligned}$$

para cada $t = 0, 1, 2, 3, \dots, T$. La función generadora de momentos para el proceso estocástico descrito es

$$Z[\{\vec{\psi}\}] \equiv \left\langle e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma[q_i(t), z_i(t)]} \right\rangle_{\text{Paths}}. \quad (\text{A.1})$$

Por simplificación asumiremos que $\sigma_i(t) = \sigma[q_i(t), z_i(t)] \forall i = 1, 2, \dots, N$. Además, sabemos que el promedio de los caminos dinámicos de nuestro sistema toma la forma

$$\langle (\dots) \rangle = \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] (\dots)$$

$$Z[\{\vec{\psi}\}] = \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \left[\prod_{t=0}^T W_t[\vec{\sigma}(t+1); \vec{\sigma}(t)] \right] p_0(\vec{\sigma}(0)) e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \quad (\text{A.2})$$

tenemos un conjunto de vectores $\{\vec{\psi}\} = (\vec{\psi}(0), \vec{\psi}(1), \vec{\psi}(2), \dots, \vec{\psi}(t))$ a partir de un vector $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$. Los campos generadores que se introducen en la función generadora, son campos que generan cantidades de interés alrededor de su valor en 0^1 .

A.1.1. Primeros momentos.

A partir de la definición de la función generadora, (A.1), obtendremos momentos interesantes del proceso estocástico planteado al obtener las derivadas parciales y evaluarlas en cero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \psi_j(s)} &= \frac{\partial}{\partial \psi_j(s)} \left\langle e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right\rangle_{Paths} \\ &= \frac{\partial}{\partial \psi_j(s)} \left[\sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \\ &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \frac{\partial}{\partial \psi_j(s)} \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \end{aligned}$$

al aplicar la regla de la cadena obtendremos

¹Nos interesa cualquier momento que nos genere la función generadora. Si tenemos todos los momentos de la distribución es equivalente a tener la distribución de probabilidad.

$$= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \left[-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \frac{\partial \psi_i(t)}{\partial \psi_j(s)} \sigma_i(t) \right]$$

odemos reexpresar con deltas de Kronecker² la expresión anterior. Si se cumple $\frac{\partial \psi_i(t)}{\partial \psi_j(s)} = \delta_{ij} \delta_{st}$, para cada i y para cada t el campo generador ψ es independiente. Es decir, que si son independientes sus variaciones serán también independientes, ya que:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \delta_{st} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases}$$

por consecuencia

$$= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \left[-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \delta_{ij} \delta_{ts} \sigma_i(t) \right]$$

pero ya sabemos que $\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \delta_{ij} \delta_{ts} \sigma_i(t) = \sigma_j(s)$

$$\frac{\partial Z}{\partial \psi_j(s)} = \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] [-i \sigma_j(s)]$$

ahora procedemos a evaluar cuando $\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0$

²La delta de Kronecker es una función de dos variables, generalmente solo números enteros no negativos. La función vale 1 si las dos variables son iguales y 0 en caso contrario. Cumplen con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \sum_j \delta_{ij} a_j &= a_i, \\ \sum_i a_i \delta_{ij} &= a_j, \\ \sum_k \delta_{ik} \delta_{kj} &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \frac{\partial Z}{\partial \psi_j(s)} &= \lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \left[\sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] [-i\sigma_j(s)] \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \left[\left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] [-i\sigma_j(s)] \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [-i\sigma_j(s)] \lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right]
\end{aligned}$$

el $\lim_{\{x\} \rightarrow 0} e^{ax} = e^{a(0)} = e^0 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \frac{\partial Z}{\partial \psi_j(s)} &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [-i\sigma_j(s)] \lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [-i\sigma_j(s)] [1] \\
&= \langle -i\sigma_j(s) \rangle \\
&= -i \langle \sigma_j(s) \rangle
\end{aligned}$$

A.1.2. Segundos momentos.

Obtuvimos los primeros momentos de nuestra función generadora. Ahora procedamos a obtener los segundos momentos.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \psi_k(t') \partial \psi_j(s)} = \frac{\partial}{\partial \psi_k(t')} \left[\frac{\partial Z}{\partial \psi_j(s)} \right]$$

ya sabemos que el primer momento es:

$$\frac{\partial Z}{\partial \psi_j(s)} = \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] [-i\sigma_j(s)]$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi_k(t') \partial \psi_j(s)} &= \frac{\partial}{\partial \psi_k(t')} \left[\sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] [-i\sigma_j(s)] \right] \\ &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \frac{\partial}{\partial \psi_k(t')} \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] [-i\sigma_j(s)] \\ &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [-i\sigma_j(s)] \frac{\partial}{\partial \psi_k(t')} \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \\ &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [-i\sigma_j(s)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \left[-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \frac{\partial \psi_i(t)}{\partial \psi_k(t')} \sigma_i(t) \right] \end{aligned}$$

como $\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \delta_{ik} \delta_{tt'} \sigma_i(t) = \sigma_k(t')$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi_k(t') \partial \psi_j(s)} &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [-i\sigma_j(s)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] [-i\sigma_k(t')] \\ &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [-i\sigma_j(s)] [-i\sigma_k(t')] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \\ &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [i^2 \sigma_j(s) \sigma_k(t')] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right]. \end{aligned}$$

Ahora procedemos a evaluar cuando $\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi_k(t') \partial \psi_j(s)} &= \lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \left[\sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [i^2 \sigma_j(s) \sigma_k(t')] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [i^2 \sigma_j(s) \sigma_k(t')] \lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \left[\left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [i^2 \sigma_j(s) \sigma_k(t')] [e^0] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [i^2 \sigma_j(s) \sigma_k(t')] \\
&= i^2 \langle \sigma_j(s) \sigma_k(t') \rangle
\end{aligned}$$

$$\lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi_k(t') \partial \psi_j(s)} = -\langle \sigma_j(s) \sigma_k(t') \rangle$$

A.1.3. Generalización Momentos k -ésimos.

Para obtener los momentos k -ésimos de la función generadora, calculamos sus derivadas parciales k -ésimas y las evaluamos cuando $\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0$.

Para los momentos k

$$\frac{\partial^k Z}{\partial \psi_{l_1}(s_1) \cdots \partial \psi_{l_k}(s_k)} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial \psi_{l_1}(s_1) \cdots \partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \right)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} &= \frac{\partial}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \left[\sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \frac{\partial}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \left[-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \frac{\partial \psi_i(t)}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \sigma_i(t) \right]
\end{aligned}$$

sabemos que $\frac{\partial \psi_i(t)}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} = \delta_{il_k} \delta_{ts_k}$ y que $\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \delta_{il_k} \delta_{ts_k} \sigma_i(t) = \sigma_{l_k}(s_k)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \left[-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \delta_{il_k} \delta_{ts_k} \sigma_i(t) \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] [-i \sigma_{l_k}(s_k)]
\end{aligned}$$

si volvemos a derivar

$$\frac{\partial^k Z}{\partial \psi_{l_1}(s_1) \cdots \partial \psi_{l_k}(s_k)} = \frac{\partial^{k-2}}{\partial \psi_{l_1}(s_1) \cdots \partial \psi_{l_{k-2}}(s_{k-2})} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \right) \right)$$

como ya obtuvimos $\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)}$ podemos reemplazarla

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \right) &= \frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \left[\sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[[-i\sigma_{l_k}(s_k)] e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[[-i\sigma_{l_k}(s_k)] \frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[[-i\sigma_{l_k}(s_k)] e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \times \\
&\quad \left[-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \frac{\partial \psi_i(t)}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \sigma_i(t) \right].
\end{aligned}$$

al reexpresar con deltas de Kronecker $\frac{\partial \psi_i(t)}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} = \delta_{il_{k-1}} \delta_{ts_{k-1}}$, $\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \delta_{il_{k-1}} \delta_{ts_{k-1}} \sigma_i(t) = \sigma_{l_{k-1}}(s_{k-1})$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \right) &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[[-i\sigma_{l_k}(s_k)] e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \times \\
&\quad \left[-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \delta_{il_{k-1}} \delta_{ts_{k-1}} \sigma_i(t) \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[[-i\sigma_{l_k}(s_k)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \left[-i\sigma_{l_{k-1}}(s_{k-1}) \right] \right] \\
&= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] \left[i^2 \sigma_{l_{k-1}}(s_{k-1}) \sigma_{l_k}(s_k) \right] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right].
\end{aligned}$$

Si volvemos a derivar una vez más

$$\frac{\partial^k Z}{\partial \psi_{l_1}(s_1) \cdots \partial \psi_{l_k}(s_k)} = \frac{\partial^{k-3}}{\partial \psi_{l_1}(s_1) \cdots \partial \psi_{l_{k-3}}(s_{k-3})} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-2}}(s_{k-2})} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \right) \right) \right)$$

dado que acabamos de obtener $\frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \right)$, al calcular $\frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-2}}(s_{k-2})} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_{l_{k-1}}(s_{k-1})} \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi_{l_k}(s_k)} \right) \right)$ obtendremos:

$$= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [(-i)^3 \sigma_{l_{k-2}}(s_{k-2}) \sigma_{l_{k-1}}(s_{k-1}) \sigma_{l_k}(s_k)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right].$$

Por lo tanto, si calculamos las derivadas parciales k veces, es decir, al generalizar, obtendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k Z}{\partial \psi_{l_1}(s_1) \cdots \partial \psi_{l_k}(s_k)} &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [(-i)^k \sigma_{l_1}(s_1) \cdots \sigma_{l_{k-2}}(s_{k-2}) \sigma_{l_{k-1}}(s_{k-1}) \sigma_{l_k}(s_k)] \times \\ &\quad \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right] \\ &= \sum_{\vec{\sigma}(0)} \cdots \sum_{\vec{\sigma}(T)} \text{Prob}[\vec{\sigma}(0), \dots, \vec{\sigma}(T)] [(-i)^k \sigma_{l_1}(s_1) \cdots \sigma_{l_k}(s_k)] \left[e^{-i \sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^T \psi_i(t) \sigma_i(t)} \right]. \end{aligned}$$

Ahora podemos evaluar el límite cuando $\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\{\vec{\psi}\} \rightarrow 0} \frac{\partial^k Z}{\partial \psi_{l_1}(s_1) \cdots \partial \psi_{l_k}(s_k)} &= (-i)^k \langle \sigma_{l_1}(s_1) \cdots \sigma_{l_k}(s_k) \rangle \\ &= (-i)^k \left\langle \prod_{j=1}^k \sigma_{l_j}(s_j) \right\rangle \end{aligned}$$

Esto nos dice que por cada campo generador tendremos un nuevo término. Además, por cada derivada que realicemos obtenemos un momento de nuestra función generadora.

A.2. Método de punto silla.

Supongamos que tenemos la siguiente integral

$$I = \int dx e^{\alpha f(x)} \quad (\text{A.3})$$

Para valores de α muy grandes, es decir, $\alpha \rightarrow \infty$ nos interesa conocer el comportamiento asintótico de la integral I . Para esto procedemos a

1. Determinamos los puntos en los que $f'(x) = 0$, los cuales se conocen como puntos silla. Además, se supone que solo hay un punto silla, x_0 . Si existe más de un punto silla, el método se expande.

2. Si suponemos que $f(x)$ es analítica en una vecindad x_0 , podemos obtener el desarrollo de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots = f(x_0) - v^2$$

Apéndice B

Juego de la Minoría y Función Generadora.

En este apéndice se presenta la principal herramienta para analizar sistemas estocásticos desordenados compuestos por un gran número de agentes heterogéneos. El análisis de la función generadora permite calcular el promedio del desorden de observables macroscópicos dinámicos del sistema. En este caso particular, para el Juego de la Minoría (JM) tendríamos que calcular un promedio sobre todas las estrategias debido a que en estas se encuentra el desorden y luego evaluar cuando el número de agentes $N \rightarrow \infty$.

De acuerdo con Coolen (2005), los estudios dinámicos de sistemas desordenados basados en el análisis de la función generadora constan de dos partes:

1. La primera parte consiste en realizar la derivación cuando $N \rightarrow \infty$ de un conjunto de ecuaciones con parámetros de orden dinámico, que es una descripción dinámica de un solo «agente efectivo». Gracias al desorden del sistema, este agente efectivo evolucionará de acuerdo al proceso estocástico no markoviano no trivial.
2. La segunda parte es el análisis de este agente efectivo.

Nos centraremos en la primera parte. Partiremos de la dinámica propuesta en el modelo

básico del JM con información de mercado falsa (3.11) - (3.13).

B.1. Algunas definiciones importantes.

En el capítulo 3 se estableció el parámetro de control $\alpha = 2^M/N$ para el JM. Además, podemos obtener estadísticas para las ofertas agregadas reescaladas $A(t)$. Sabemos en qué centrarnos para hacer nuestro análisis: la volatilidad de la oferta y la fracción de agentes congelados ϕ .

Seguiremos el orden de modelado propuesto por Coolen (2005) como su simbología. Trataremos de aproximar el comportamiento de mercados financieros reales al permitir que los agentes actúen algunas veces de forma irracional, esto lo logramos haciendo que los agentes no seleccionen siempre su mejor estrategia. Por último, a la oferta general reescalada $A(t)$ le agregaremos un término de $A_e(t)$ que contenga las perturbaciones externas del mercado.

B.1.1. Juego de la Minoría sin ruido de decisión.

Mantenemos los componentes básicos del modelo. Suponemos que hay N agentes etiquetados con $i = 1, 2, \dots, N$ que interactúan en un proceso de tiempo discreto con $t = 1, 2, \dots, T$. Cada agente tomará una decisión binaria $b_i(t) \in \{-1, 1\}$, donde -1 representa comprar y 1 vender. La oferta general reescalada en el tiempo t es

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N b_i(t) + A_e(t) \quad (\text{B.1})$$

Los agentes obtienen ganancias si se encuentran en el grupo minoritario. Es decir, cuando $A(t) > 0$ por los agentes i que decidieron $b_i(t) < 0$, y cuando $A(t) < 0$ por los agentes i que decidieron $b_i(t) > 0$.

En el JM original con memoria de mercado falsa hay dos fuentes de fluctuaciones:

- la información externa extraída al azar, las variables $\mu(t)$,
- las inducidas por el ruido de decisión, los vectores gaussianos $\mathbf{z}(t)$.

Cada agente i tiene S estrategias comerciales, las cuales etiquetamos con $a = 1, 2, \dots, S$. Como sabemos, cada una de estas estrategias consta de una tabla de búsqueda completa R^{ia} de 2^M decisiones comerciales recomendadas. Al observar la cadena de valores μ en la etapa t , la estrategia activa del agente para esa etapa es $a_i(t)$. Nuestros agentes se guiarán de acuerdo a sus estrategias activas y tomarán la decisión $b_i(t) = R_{\mu(t)}^{ia}$.

Para determinar las estrategias activas, $a_i(t)$ todos los agentes hacen seguimiento de las valoraciones $p_{ia}(t)$ como lo vimos en (3.11) que miden la frecuencia y en qué medida cada estrategia habría llevado al agente i a una decisión minoritaria. Las valoraciones se actualizan de forma constante:

$$p_{ia}(t+1) = p_{ia}(t) - \frac{\eta}{\sqrt{N}} A(t) R_{\mu(t)}^{ia} \quad (\text{B.2})$$

el factor η representa una tasa de aprendizaje. Si $\eta = 0$, $p_{ia}(t+1) = p_{ia}(t)$, es decir, los agentes no actualizaron los puntajes de sus estrategias debido a que no hay aprendizaje. $R^{ia} \in \{-1, 1\}$, cubre todos los 2^M estados posibles del vector de información $\mu(t)$.

La tabla de estrategias $R_{\mu(t)}^{ia}$ se definirán en el inicio del juego de forma aleatoria e independiente con iguales probabilidades para los valores $\{-1, 1\}$.

Además, nuestros agentes son tomadores de precios, es decir, que no tienen en cuenta su impacto en la oferta agregada reescalada $A(t)$

B.1.2. Ruido de decisión y perturbaciones de valoración para $S = 2$.

Por simplicidad nos centraremos en el caso más sencillo del JM. Este es el caso para agentes con solo dos estrategias $S = 2$, lo que implica que la estrategia activa $a \in \{1, 2\}$.

Introduciremos nuevas variables para simplificar nuestras expresiones:

$$q_i(t) = \frac{1}{2} \left[p_{i1}(t) - p_{i2}(t) \right] \quad (\text{B.3})$$

$$\omega^i = \frac{1}{2} \left[R^{i1} + R^{i2} \right], \quad \xi^i = \frac{1}{2} \left[R^{i1} - R^{i2} \right] \quad (\text{B.4})$$

También definimos $\Omega = 1/\sqrt{N} \sum_{i=1}^N \omega^i$. Nuestra ecuación para seleccionar las mejores estrategias activas (3.13) dado que solo tenemos dos estrategias se simplifica a $a_i(t) = 1$ si $q_i(t) > 0$, y $a_i(t) = 2$ si $q_i(t) < 0$. Por lo tanto, la decisión $b_i(t)$ del agente i en el tiempo t la podemos re expresar como:

$$\begin{aligned} R^{ia_i(t)} &= \frac{1}{2} \left[R^{i1} + R^{i2} \right] + \frac{1}{2} \text{sign}[q_i(t)] \left[R^{i1} - R^{i2} \right] \\ &= \omega^i + \text{sign}[q_i(t)] \xi^i \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Esta propuesta para $S = 2$, podemos incluir el ruido de decisión reemplazando $\text{sign}[q_i(t)]$ por $\sigma [q_i(t), z_i(t)]$. Donde $z_i(t)$ son números aleatorios independientes descritos por una distribución simétrica y varianza unitaria.

Con la nueva valoración de estrategias (B.3) podemos definir la valoración de estrategias para cada agente i con $S = 2$. Ahora nuestras nuevas variables dinámicas del modelo del JM serán $q_i(t)$ y agregamos la perturbación de las valoraciones $\theta_i(t) \in \mathbb{R}$. Como menciona Coolen (2005, p. 68), el objetivo es resolver la dinámica y lidiar con el desorden del sistema, es por esto que reemplazaremos (B.3) por ecuaciones estocásticas donde los agentes actualizan sus valoraciones sobre la base promedio actual de sus estrategias sobre todas las elecciones posibles de información.

$$q_i(t+1) = q_i(t) + \theta_i(t) - \frac{\eta}{\sqrt{N}} \xi_i^{\mu(t)} A^\mu[\vec{q}(t), \vec{z}(t)] \quad (\text{B.6})$$

tambi3n definiremos la oferta agregada reescalada $A^\mu[\vec{q}, \vec{z}]$ con informaci3n de mercado falso

$$A^\mu[\vec{q}(t), \vec{z}(t)] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \omega_i^{\mu(t)} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \sigma[q_i(t), z_i(t)] \xi_i^{\mu(t)} \quad (\text{B.7})$$

donde $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))$ y $\vec{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))$ y $\mu(t) \in \{1, \dots, p\}$ con $p = \alpha N$.

Asumiremos por conveniencia que $\eta = 2$ y al reemplazar (B.7) en (B.6) tendremos la nueva valoraci3n de las estrategias

$$q_i(t+1) = q_i(t) + \theta_i(t) - \frac{2}{\sqrt{N}} \xi_i^{\mu(t)} \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \omega_j^{\mu(t)} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \sigma[q_j(t), z_j(t)] \xi_j^{\mu(t)} \right] \quad (\text{B.8})$$

con $t = 0, 1, 2, \dots, T$ y $\theta_i(t)$ que es una perturbaci3n externa del sistema que estamos describiendo.

B.1.3. La funci3n generadora o característica.

El proceso planteado en (B.8) es estocástico, por este motivo utilizaremos para nuestro análisis las densidades de probabilidad.

Si escribimos las distribuciones δ en la expresi3n, $W_t(\vec{q}|\vec{q}')$ su representaci3n integral es

$$p_{t+1}(\vec{q}) = \int d\vec{q}' W_t(\vec{q} | \vec{q}') \quad (\text{B.9})$$

$$W_t(\vec{q}|\vec{q}') = \int d\vec{z} P(\vec{z}) \prod_{i=1}^N \delta \left[q_i(t) - q'_i(t) - \theta_i(t) + \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu A^\mu[\vec{q}, \vec{z}] \right]$$

en su forma transformada de Fourier

$$= \int d\vec{z} P(\vec{z}) \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^N} \exp \left[i \sum_{i=1}^N \hat{q}_i \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) + \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu A^\mu[\vec{q}, \vec{z}] \right] \right] \quad (\text{B.10})$$

donde $P(\vec{z}) = \prod_{i=1}^N P(z_i)$.

El valor esperado promediado por el desorden en el tiempo t de cualquier $f(\vec{q}(t))$ observable se escribiría como $\langle \overline{f(\vec{q}(t))} \rangle = \int d\vec{q}(t) \overline{P_t(\vec{q}(t))} f(\vec{q}(t))$.

La función generadora de momentos para un proceso estocástico, como el mostrado anteriormente, es una generalización directa al caso de tiempos múltiples y componentes múltiples de la función generadora característica $Z[\psi] = \langle e^{i\psi x} \rangle$ de una variable aleatoria x .

Para un proceso estocástico con variables dinámicas $\vec{q}(t)$ definimos la función generadora como $Z[\vec{\psi}] = \langle e^{i \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^N \psi_i(t) q_i(t)} \rangle$. En el JM, las principales cantidades de interés dependen de las ofertas presentadas por los agentes, es decir, las variables $\sigma[q_i(t), z_i(t)]$, al incorporar esto a nuestra definición de función generadora

$$Z[\vec{\psi}] = \langle e^{i \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^N \psi_i(t) \sigma[q_i(t), z_i(t)]} \rangle \quad (\text{B.11})$$

El vector $\vec{\psi}$ denota la colección de variables $\{\psi_i(t)\}$ para todo $i = 1, 2, \dots, N$ y $t = 0, 1, 2, \dots, T$. Los paréntesis $\langle \dots \rangle$ indican un promedio sobre el proceso estocástico (B.9). La ecuación (B.11) es un promedio sobre todos los caminos posibles del vector de estado microscópico \vec{q} , donde cada camino $\{\vec{q}(0), \vec{q}(1), \dots, \vec{q}(T)\}$ tiene densidad de probabilidad

$$P(\vec{q}(0), \vec{q}(1), \dots, \vec{q}(T)) = P_0(\vec{q}(0)) \prod_{t=0}^{T-1} W_t(\vec{q}(t+1) | \vec{q}(t)).$$

Al momento de derivar parcialmente la función generadora (B.11) con respecto a las variables (ver el apéndice A.1.2 - A.1.3), $\{\psi_i(t)\}$ podemos obtener todos los momentos de

las variables aleatorias, $\{\sigma[q_i(t), z_i(t)]\}$ incluyendo sus derivadas parciales con respecto a las perturbaciones $\{\theta_i(t)\}$

$$\langle \sigma[q_i(t), z_i(t)] \rangle = -i \lim_{\vec{\psi} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \psi_i(t)} Z[\vec{\psi}] \quad (\text{B.12})$$

$$\langle \sigma[q_i(t), z_i(t)] \sigma[q_j(t'), z_j(t')] \rangle = -i \lim_{\vec{\psi} \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \psi_i(t) \partial \psi_j(t')} Z[\vec{\psi}] \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j(t')} \langle \sigma[q_i(t), z_i(t)] \rangle = -i \lim_{\vec{\psi} \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \psi_i(t) \partial \theta_j(t')} Z[\vec{\psi}]. \quad (\text{B.14})$$

La función $Z[\vec{\psi}]$ (B.11) contiene toda la información que nos interesa para nuestro análisis. Promediándola sobre el desorden, es decir, sobre el resultado a nivel macroscópico de las estrategias. Esto nos permite obtener las ecuaciones (B.12) - (B.14). En particular, encontramos en esta dinámica propuesta la correlación promediada por el desorden ($C_{tt'}$) y funciones de impulso respuesta ($G_{tt'}$)

$$\begin{aligned} C_{tt'} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overline{\langle \sigma[q_i(t), z_i(t)] \sigma[q_j(t'), z_j(t')] \rangle} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\vec{\psi} \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \psi_i(t) \partial \psi_j(t')} \overline{Z[\vec{\psi}]} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} G_{tt'} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta_j(t')} \overline{\langle \sigma[q_i(t), z_i(t)] \rangle} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\vec{\psi} \rightarrow 0} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \psi_i(t) \partial \theta_j(t')} \overline{Z[\vec{\psi}]} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

B.1.4. Análisis de la función generadora y el desorden.

Realizar análisis a partir de la función generadora (B.11) nos permite calcular el desorden promedio $\overline{Z[\vec{\psi}]}$. Para esto necesitamos definir ciertos auxiliares a través de distribuciones δ -Dirac que nos permitirá aislar las variables que contienen el desorden en exponenciales para facilitar su manipulación.

Primero insertaremos la ecuación (B.10) en (B.11) debido a que conocemos el promedio de caminos dinámicos del sistema que hemos propuesto

$$Z[\vec{\psi}] = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\vec{q}(0)) \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \frac{dq_i(t)d\hat{q}_i(t)}{2\pi} \exp \left[i\hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) + \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu A^\mu[\vec{q}, \vec{z}] \right] \right] \right] \times \exp \left[i \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^N \psi_i(t) \sigma[q_i(t), z_i(t)] \right] \right\rangle$$

$$Z[\vec{\psi}] = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\vec{q}(0)) \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \frac{dq_i(t)d\hat{q}_i(t)}{2\pi} \exp \left[i\hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) \right] + i\psi_i(t) s_i(t) \right] \right] \times \exp \left[i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) \xi_i^\mu \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \omega_j^{\mu(t)} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu s_j(t) \right) \right] \right\rangle. \quad (\text{B.17})$$

El último término exponencial en (B.17) contiene el desorden del sistema: las estrategias $\{\xi_j^\mu, \omega_j^\mu\}$. Por este motivo lo trabajaremos aparte.

Al aislar con deltas de Dirac los términos que contienen el desorden y expresarlos en su forma transformada de Fourier (ver el apéndice)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \frac{dw_t^\mu d\hat{w}_t^\mu dx_t^\mu d\hat{x}_t^\mu}{(2\pi)^2} \right] \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[iw_t^\mu \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \omega_j^\mu + x_t^\mu \right) \right] \right] \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[i\hat{w}_t^\mu \left(w_t^\mu - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) \xi_i^\mu \right) + i\hat{x}_t^\mu \left(x_t^\mu - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N s_i(t) \xi_i^\mu \right) \right] \right].$$

Una vez aislados los términos que contienen el desorden del sistema, procedemos a sustituirlo en (B.17)

$$Z[\vec{\psi}] = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\vec{q}(0)) \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \frac{dq_i(t) d\hat{q}_i(t)}{2\pi} \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \exp \left[i\hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) \right] + i\psi_i(t) s_i(t) \right] \right] \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \frac{dw_t^\mu d\hat{w}_t^\mu dx_t^\mu d\hat{x}_t^\mu}{(2\pi)^2} \right] \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[iw_t^\mu \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \omega_j^\mu + x_t^\mu \right) \right] \right] \\ \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[i\hat{w}_t^\mu \left(w_t^\mu - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) \xi_i^\mu \right) + i\hat{x}_t^\mu \left(x_t^\mu - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N s_i(t) \xi_i^\mu \right) \right] \right]$$

al reorganizar los términos obtendremos nuestra F.G. promediada por el desorden

$$Z[\vec{\psi}] = \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\vec{q}(0)) \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \frac{dq_i(t) d\hat{q}_i(t)}{2\pi} \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \exp \left[i\hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) \right] + i\psi_i(t) s_i(t) \right] \right] \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \frac{dw_t^\mu d\hat{w}_t^\mu dx_t^\mu d\hat{x}_t^\mu}{(2\pi)^2} \right] \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[iw_t^\mu x_t^\mu + i\hat{w}_t^\mu w_t^\mu + i\hat{x}_t^\mu x_t^\mu \right] \right] \\ \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} w_t^\mu \sum_{j=1}^N \omega_j^\mu - i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \left(\hat{w}_t^\mu \hat{q}_i(t) + \hat{x}_t^\mu s_i(t) \right) \right] \right] \quad (\text{B.18})$$

B.2. Función Generadora promediada por el desorden.

B.2.1. Evolución del desorden.

En este apartado encontraremos el desorden promedio del sistema que se encuentra en nuestra F. G. $Z[\vec{\psi}]$ en (B.18). Recordemos que el desorden del sistema descrito se encuentra en las estrategias de los agentes: $\xi_i^\mu = \frac{1}{2}[R_\mu^{i1} - R_\mu^{i2}]$ y $\omega_j^\mu = \frac{1}{2}[R_\mu^{j1} + R_\mu^{j2}]$ que obtuvimos a partir de (B.3). Dado que las variables aleatorias $\{\xi_i^\mu, \omega_i^\mu\}$ son estadísticamente independientes, con probabilidades de tomar valores $\{+1, -1\}$, su distribución conjunta factoriza en el producto de distribución conjunta de variables aleatorias $\rho(\xi_i^\mu, \omega_i^\mu) = \prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^p g(\xi_i^\mu, \omega_i^\mu)$.

Con esto podemos reescribir la tercera exponencial de (B.18) que contiene el desorden del sistema.

$$\begin{aligned} & \overline{\left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} w_t^\mu \sum_{i=1}^N \omega_i^\mu - i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \left(\hat{w}_t^\mu \hat{q}_i(t) + \hat{x}_t^\mu s_i(t) \right) \right] \right]} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^p d\xi_i^\mu d\omega_i^\mu \right] \\ & \rho(\xi_i^\mu, \omega_i^\mu) \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} w_t^\mu \sum_{i=1}^N \omega_i^\mu - i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \left(\hat{w}_t^\mu \hat{q}_i(t) + \hat{x}_t^\mu s_i(t) \right) \right] \right] \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^p d\xi_i^\mu d\omega_i^\mu \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^p g(\xi_i^\mu, \omega_i^\mu) \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^p \exp \left[i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^T w_t^\mu \omega_i^\mu \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^T \xi_i^\mu \left(\hat{w}_t^\mu \hat{q}_i(t) + \hat{x}_t^\mu s_i(t) \right) \right] \right] \end{aligned}$$

supondremos por conveniencia que la distribución $g(\xi_i^\mu, \omega_i^\mu)$ es gaussiana con media cero y varianza igual a 1. Es decir, $g(\xi_i^\mu, \omega_i^\mu) = f(\xi_i^\mu)h(\omega_i^\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\xi_i^\mu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\omega_i^\mu)^2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(\xi_i^\mu)^2 + (\omega_i^\mu)^2}{2}}$

$$= \prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_i^\mu d\xi_i^\mu \frac{1}{2\pi} \exp \left[\frac{-(\omega_i^{\mu 2} + \xi_i^{\mu 2})}{2} \right] \exp \left[i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^T w_t^\mu \omega_i^\mu - i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^T \xi_i^\mu \left(\hat{w}_t^\mu \hat{q}_i(t) + \hat{x}_t^\mu s_i(t) \right) \right]$$

al resolver la integral (ver el apéndice) obtendremos

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^p \exp \left[\left(\frac{i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^T w_t^\mu}{\sqrt{2}} \right)^2 - \left(\frac{i \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^T (\hat{w}_t^\mu \hat{q}_i(t) + \hat{x}_t^\mu s_i(t))}{\sqrt{2}} \right)^2 \right] \\ &= \prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^p \exp \left[\left(i \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^T w_t^\mu \right)^2 - \left(i \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^T (\hat{w}_t^\mu \hat{q}_i(t) + \hat{x}_t^\mu s_i(t)) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

al descomponer el cuadrado de los argumentos de la exponencial

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^N \prod_{\mu=1}^p \exp \left[- \frac{1}{N} \sum_{t,t'=0}^T w_t^\mu w_{t'}^\mu + \frac{1}{N} \sum_{t,t'=0}^T \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{N} \sum_{t,t'=0}^T \hat{w}_t^\mu \hat{q}_i(t) \hat{x}_{t'}^\mu s_i(t') \frac{1}{N} \sum_{t,t'=0}^T \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu s_i(t) s_i(t') \right]. \quad (\text{B.19}) \end{aligned}$$

En (B.19) realizamos un cambio de variable apropiado que nos permita agrupar los términos

$$C_{tt'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(t) s_i(t'), \quad Q_{tt'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t'), \quad K_{tt'} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) s_i(t') \quad (\text{B.20})$$

al reemplazar (B.20) en (B.19)

$$= \prod_{\mu=1}^p \exp \left[-\frac{1}{N} \sum_{t,t'=0}^T w_t^\mu w_{t'}^\mu + \sum_{t,t'=0}^T \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu Q_{tt'} + 2 \sum_{t,t'=0}^T \hat{w}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu K_{tt'} + \sum_{t,t'=0}^T \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu C_{tt'} \right] \quad (\text{B.21})$$

en este sentido, (B.21) contiene el desorden del sistema. Lo procedemos a aislar en δ -Dirac como lo hicimos con anterioridad

$$\begin{aligned} & \prod_{t,t'=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[-\frac{1}{N} w_t^\mu w_{t'}^\mu + \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu Q_{tt'} + 2 \hat{w}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu K_{tt'} + \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu C_{tt'} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t,t'=0}^T dQ_{tt'} dK_{tt'} dC_{tt'} \right] \\ & \left[\prod_{t,t'=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[-\frac{1}{N} w_t^\mu w_{t'}^\mu + \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu Q_{tt'} + 2 \hat{w}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu K_{tt'} + \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu C_{tt'} \right] \right] \\ & \left[\prod_{t,t'=0}^T \delta \left(Q_{tt'} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') \right) \delta \left(K_{tt'} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) s_i(t') \right) \delta \left(C_{tt'} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(t) s_i(t') \right) \right] \end{aligned}$$

y lo reescribimos en su forma de transformada de Fourier

$$\begin{aligned} & = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t,t'=0}^T \frac{dQ_{tt'} d\hat{Q}_{tt'} dK_{tt'} d\hat{K}_{tt'} dC_{tt'} d\hat{C}_{tt'}}{(2\pi)^3} \right] \left[\prod_{t,t'=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[-\frac{1}{N} w_t^\mu w_{t'}^\mu + \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu Q_{tt'} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \hat{w}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu K_{tt'} + \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu C_{tt'} \right] \right] \left[\prod_{t,t'=0}^T \exp \left[iN \hat{Q}_{tt'} Q_{tt'} + iN \hat{K}_{tt'} K_{tt'} + iN \hat{C}_{tt'} C_{tt'} \right] \right] \\ & \left[\prod_{t,t'=0}^T \exp \left[-i \hat{Q}_{tt'} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') - i \hat{K}_{tt'} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) s_i(t') - i \hat{C}_{tt'} \sum_{i=1}^N s_i(t) s_i(t') \right] \right]. \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

Ahora podemos tener nuestra F.G. (B.18) con el desorden aislado al sustituirla en el segundo exponencial de la segunda integral por (B.22)

$$\begin{aligned}
\overline{Z[\vec{\psi}]} &= \int_{-\infty}^{\infty} P_0(\vec{q}(0)) \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \frac{dq_i(t) d\hat{q}_i(t)}{2\pi} \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \exp \left[i\hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) \right] + i\psi_i(t) s_i(t) \right] \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \frac{dw_t^\mu d\hat{w}_t^\mu dx_t^\mu d\hat{x}_t^\mu}{(2\pi)^2} \right] \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[iw_t^\mu x_t^\mu + i\hat{w}_t^\mu w_t^\mu + i\hat{x}_t^\mu x_t^\mu \right] \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t,t'=0}^T \frac{dQ_{tt'} d\hat{Q}_{tt'} dK_{tt'} d\hat{K}_{tt'} dC_{tt'} d\hat{C}_{tt'}}{(2\pi)^3} \right] \left[\prod_{t,t'=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[-\frac{1}{N} w_t^\mu w_{t'}^\mu + \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu Q_{tt'} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\hat{w}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu K_{tt'} + \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu C_{tt'} \right] \right] \left[\prod_{t,t'=0}^T \exp \left[iN\hat{Q}_{tt'} Q_{tt'} + iN\hat{K}_{tt'} K_{tt'} + iN\hat{C}_{tt'} C_{tt'} \right] \right] \\
&\quad \left[\prod_{t,t'=0}^T \exp \left[-i\hat{Q}_{tt'} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') - i\hat{K}_{tt'} \sum_{i=1}^N \hat{q}_i(t) s_i(t') - i\hat{C}_{tt'} \sum_{i=1}^N s_i(t) s_i(t') \right] \right] \quad (\text{B.23})
\end{aligned}$$

tenemos que reorganizar los términos de (B.23) de tal forma que nos permita factorizar para los i agentes del sistema. Para esto también supondremos que $P_0(\vec{q}(0)) = \prod_{i=1}^N P_0(q_i(0))$

$$\begin{aligned}
\overline{Z[\vec{\psi}]} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N P_0(q_i(0)) \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \frac{dq_i(t) d\hat{q}_i(t)}{2\pi} \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \exp \left[i\hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i\psi_i(t) s_i(t) \right] \right] \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \frac{dw_t^\mu d\hat{w}_t^\mu dx_t^\mu d\hat{x}_t^\mu}{(2\pi)^2} \right] \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[iw_t^\mu x_t^\mu + i\hat{w}_t^\mu w_t^\mu + i\hat{x}_t^\mu x_t^\mu \right] \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t,t'=0}^T \frac{dQ_{tt'} d\hat{Q}_{tt'} dK_{tt'} d\hat{K}_{tt'} dC_{tt'} d\hat{C}_{tt'}}{(2\pi)^3} \right] \left[\prod_{t,t'=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[-\frac{1}{N} w_t^\mu w_{t'}^\mu + \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu Q_{tt'} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\hat{w}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu K_{tt'} + \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu C_{tt'} \right] \right] \left[\prod_{t,t'=0}^T \exp \left[iN\hat{Q}_{tt'} Q_{tt'} + iN\hat{K}_{tt'} K_{tt'} + iN\hat{C}_{tt'} C_{tt'} \right] \right] \\
&\quad \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t,t'=0}^T \exp \left[-i\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') - i\hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') - i\hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t') \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t,t'=0}^T \frac{dQ_{tt'} d\hat{Q}_{tt'} dK_{tt'} d\hat{K}_{tt'} dC_{tt'} d\hat{C}_{tt'}}{(2\pi)^3} \right] \left[\prod_{t,t'=0}^T \exp \left[iN\hat{Q}_{tt'}Q_{tt'} + iN\hat{K}_{tt'}K_{tt'} + iN\hat{C}_{tt'}C_{tt'} \right] \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \frac{dw_t^\mu d\hat{w}_t^\mu dx_t^\mu d\hat{x}_t^\mu}{(2\pi)^2} \right] \left[\prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[iw_t^\mu x_t^\mu + i\hat{w}_t^\mu w_t^\mu + i\hat{x}_t^\mu x_t^\mu \right] \right] \\
&\quad \left[\prod_{t,t'=0}^T \prod_{\mu=1}^p \exp \left[-\frac{1}{N} w_t^\mu w_{t'}^\mu + \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu Q_{tt'} + 2\hat{w}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu K_{tt'} + \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu C_{tt'} \right] \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N P_0(q_i(0)) \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \frac{dq_i(t) d\hat{q}_i(t)}{2\pi} \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \exp \left[i\hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i\psi_i(t) s_i(t) \right] \right] \left[\prod_{i=1}^N \prod_{t,t'=0}^T \exp \left[-i\hat{Q}_{tt'}\hat{q}_i(t)\hat{q}_i(t') - i\hat{K}_{tt'}\hat{q}_i(t)s_i(t') - i\hat{C}_{tt'}s_i(t)s_i(t') \right] \right] \quad (\text{B.24})
\end{aligned}$$

en (B.24) introduciremos los productorios en los exponenciales y haremos un cambio de variable que nos permite simplificar las integrales. En este sentido, $\mathcal{D}Q = \prod_{t,t'=0}^T \frac{dQ_{tt'}}{\sqrt{2\pi}}$ de igual forma para las variables $\hat{Q}_{tt'}, K_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, C_{tt'}, \hat{C}_{tt'}$; $\mathcal{D}w = \prod_{t=0}^T \prod_{\mu=1}^p \frac{dw_t^\mu}{\sqrt{2\pi}}$ para las variables $\hat{w}_t^\mu, x_t^\mu, \hat{x}_t^\mu$ y $\mathcal{D}q = \prod_{i=1}^N \prod_{t=0}^T \frac{dq_i(t)}{\sqrt{2\pi}}$ lo mismo para $\hat{q}_i(t)$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{D}Q\mathcal{D}\hat{Q}\mathcal{D}K\mathcal{D}\hat{K}\mathcal{D}C\mathcal{D}\hat{C} \right] \left[\exp \left[iN \sum_{t,t'=0}^T \left(\hat{Q}_{tt'}Q_{tt'} + \hat{K}_{tt'}K_{tt'} + \hat{C}_{tt'}C_{tt'} \right) \right] \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{D}w\mathcal{D}\hat{w}\mathcal{D}x\mathcal{D}\hat{x} \right] \left[\exp \left[i \sum_{t=0}^T \sum_{\mu=1}^p \left(w_t^\mu x_t^\mu + \hat{w}_t^\mu w_t^\mu + \hat{x}_t^\mu x_t^\mu \right) \right] \right] \\
&\quad \exp \left[\sum_{t,t'=0}^T \sum_{\mu=1}^p \left(-\frac{1}{N} w_t^\mu w_{t'}^\mu + \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu Q_{tt'} + 2\hat{w}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu K_{tt'} + \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu C_{tt'} \right) \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N P_0(q_i(0)) \right] \left[\mathcal{D}q\mathcal{D}\hat{q} \right] \left[\prod_{i=1}^N \exp \left[i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) \right] \right] \left[\prod_{i=1}^N \exp \left[-i \sum_{t,t'=0}^T \left(\hat{Q}_{tt'}\hat{q}_i(t)\hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'}\hat{q}_i(t)s_i(t') + \hat{C}_{tt'}s_i(t)s_i(t') \right) \right] \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{D}Q\mathcal{D}\hat{Q}\mathcal{D}K\mathcal{D}\hat{K}\mathcal{D}C\mathcal{D}\hat{C} \right] \left[\exp \left[iN \sum_{t,t'=0}^T \left(\hat{Q}_{tt'}Q_{tt'} + \hat{K}_{tt'}K_{tt'} + \hat{C}_{tt'}C_{tt'} \right) \right] \right] \\
&\quad \times \prod_{\mu=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{D}w\mathcal{D}\hat{w}\mathcal{D}x\mathcal{D}\hat{x} \right] \left[\exp \left[i \sum_{t=0}^T \left(w_t^\mu x_t^\mu + \hat{w}_t^\mu w_t^\mu + \hat{x}_t^\mu x_t^\mu \right) \right] \right] \\
&\quad \exp \left[\sum_{t,t'=0}^T \left(-\frac{1}{N} w_t^\mu w_{t'}^\mu + \hat{w}_t^\mu \hat{w}_{t'}^\mu Q_{tt'} + 2\hat{w}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu K_{tt'} + \hat{x}_t^\mu \hat{x}_{t'}^\mu C_{tt'} \right) \right] \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^N P_0(q_i(0)) \right] \left[\mathcal{D}q\mathcal{D}\hat{q} \right] \left[\prod_{i=1}^N \exp \left[i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) \right] \right] \left[\prod_{i=1}^N \exp \left[-i \sum_{t,t'=0}^T \left(\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t') \right) \right] \right].
\end{aligned}$$

Una vez factorizada la F. G. para los i agentes podemos reexpresar la segunda integral dado que al expandir el productorio $\int d\hat{x}_1 dx_1 e^{f(x_1, \hat{x}_1)} \int d\hat{x}_2 dx_2 e^{f(x_2, \hat{x}_2)} \dots \int d\hat{x}_p dx_p e^{f(x_p, \hat{x}_p)} = \left[\int d\hat{x} dx e^{f(x, \hat{x})} \right]^p$. Además, recordemos que $p = \alpha N$. Por su parte, la tercera integral, cumple la siguiente propiedad $\prod_{i=1}^N B a_i(t) = \exp[N(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(B a_i(t)))]$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{D}Q\mathcal{D}\hat{Q}\mathcal{D}K\mathcal{D}\hat{K}\mathcal{D}C\mathcal{D}\hat{C} \right] \left[\exp \left[iN \sum_{t,t'=0}^T \left(\hat{Q}_{tt'}Q_{tt'} + \hat{K}_{tt'}K_{tt'} + \hat{C}_{tt'}C_{tt'} \right) \right] \right] \\
&\quad \times \exp \left\{ \alpha N \log \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w\mathcal{D}\hat{w}\mathcal{D}x\mathcal{D}\hat{x} \exp \left[i \sum_{t=0}^T \left(w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t \right) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \exp \left[\sum_{t,t'=0}^T \left(-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'} \right) \right] \right] \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ N \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q\mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) \exp \left[i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) \left[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t) \right] \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) \right] \right) \exp \left[-i \sum_{t,t'=0}^T \left(\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t') \right) \right] \right] \right\}.
\end{aligned}$$

$$\overline{Z[\vec{\psi}]} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathcal{D}Q\mathcal{D}\hat{Q}\mathcal{D}K\mathcal{D}\hat{K}\mathcal{D}C\mathcal{D}\hat{C} \right] e^{N(\Psi(\hat{Q}_{tt'}, Q_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, K_{tt'}, \hat{C}_{tt'}, C_{tt'}) + \Phi(Q_{tt'}, K_{tt'}, C_{tt'}) + \Gamma(\vec{\theta}, \vec{\psi}, \vec{s}, \hat{Q}_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, \hat{C}_{tt'}))} \quad (\text{B.25})$$

donde

$$\Psi(\hat{Q}_{tt'}, Q_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, K_{tt'}, \hat{C}_{tt'}, C_{tt'}) = i \sum_{t,t'=0}^T \left(\hat{Q}_{tt'} Q_{tt'} + \hat{K}_{tt'} K_{tt'} + \hat{C}_{tt'} C_{tt'} \right) \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} \Phi(Q_{tt'}, K_{tt'}, C_{tt'}) = \alpha \log & \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w\mathcal{D}\hat{w}\mathcal{D}x\mathcal{D}\hat{x} e^{i \sum_{t=0}^T (w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t)} \right. \\ & \left. \times e^{\sum_{t,t'=0}^T \left(-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'} \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{\theta}, \vec{\psi}, \vec{s}, \hat{Q}_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, \hat{C}_{tt'}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log & \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q\mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) \right. \\ & \times e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t)} \\ & \left. \times e^{-i \sum_{t,t'=0}^T \left(\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t') \right)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

B.2.2. Ecuaciones de Punto Silla.

La función (B.25) podemos evaluarla mediante la integración descendente pronunciada (o método de punto silla)¹ a partir de los parámetros $\{\hat{Q}_{tt'}, Q_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, K_{tt'}, \hat{C}_{tt'}, C_{tt'}\}$, ya que queremos conocer el comportamiento asintótico cuando el número de agentes es muy grande, es decir, $N \rightarrow \infty$. Para esto realizaremos las primeras derivadas parciales de los parámetros mencionados $\{\hat{Q}_{\tau\tau'}, Q_{\tau\tau'}, \hat{K}_{\tau\tau'}, K_{\tau\tau'}, \hat{C}_{\tau\tau'}, C_{\tau\tau'}\}$ e igualaremos a 0. Por conveniencia definiremos $\{\mathcal{D}\} = \mathcal{D}Q\mathcal{D}\hat{Q}\mathcal{D}K\mathcal{D}\hat{K}\mathcal{D}C\mathcal{D}\hat{C}$.

¹Una vez obtenidos los puntos silla se puede realizar el análisis del agente efectivo, el cual no realizaremos. Solo queremos plantear que el modelo se puede resolver de forma analítica utilizando la función generadora.

Con respecto a $Q_{\tau\tau'}$:

$$\frac{\partial N(\Psi(\hat{Q}_{tt'}, Q_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, K_{tt'}, \hat{C}_{tt'}, C_{tt'})) + \Phi(Q_{tt'}, K_{tt'}, C_{tt'}) + \Gamma(\vec{\theta}, \vec{\psi}, \vec{s}, \hat{Q}_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, \hat{C}_{tt'})}{\partial Q_{\tau\tau'}} = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial Q_{\tau\tau'}} i \sum_{t,t'=0}^T Q_{tt'} \hat{Q}_{tt'} + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w \mathcal{D}\hat{w} \mathcal{D}x \mathcal{D}\hat{x} \frac{\partial}{\partial Q_{\tau\tau'}} e^{i \sum_{t=0}^T (w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t) + \sum_{t,t'=0}^T (-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'})}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w \mathcal{D}\hat{w} \mathcal{D}x \mathcal{D}\hat{x} e^{i \sum_{t=0}^T (w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t) + \sum_{t,t'=0}^T (-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'})}}$$

podemos utilizar deltas de Kronecker (ver el apéndice A.1.2). Si tenemos $i \sum_{t,t'=0}^T \frac{\partial}{\partial Q_{\tau\tau'}} Q_{tt'} \hat{Q}_{tt'}$ y sabemos que $\frac{\partial Q_{tt'}}{\partial Q_{\tau\tau'}} = \delta_{t\tau} \delta_{t'\tau'}$; por lo tanto, $i \sum_{t,t'=0}^T \delta_{t\tau} \delta_{t'\tau'} \hat{Q}_{tt'} = i \hat{Q}_{\tau\tau'}$. De igual forma para $\sum_{t,t'=0}^T \frac{\partial Q_{tt'}}{\partial Q_{\tau\tau'}} \hat{w}_t \hat{w}_{t'} = \sum_{t,t'=0}^T \delta_{t\tau} \delta_{t'\tau'} \hat{w}_t \hat{w}_{t'} = \hat{w}_\tau \hat{w}_{\tau'}$

$$i \hat{Q}_{\tau\tau'} = -\alpha \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w \mathcal{D}\hat{w} \mathcal{D}x \mathcal{D}\hat{x} e^{i \sum_{t=0}^T (w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t) + \sum_{t,t'=0}^T (-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'})} \hat{w}_\tau \hat{w}_{\tau'}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w \mathcal{D}\hat{w} \mathcal{D}x \mathcal{D}\hat{x} e^{i \sum_{t=0}^T (w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t) + \sum_{t,t'=0}^T (-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'})}}$$

De esta forma se aplica el mismo procedimiento con respecto a $K_{\tau\tau'}$ y $C_{\tau\tau'}$:

$$i \hat{K}_{\tau\tau'} = -\alpha \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w \mathcal{D}\hat{w} \mathcal{D}x \mathcal{D}\hat{x} e^{i \sum_{t=0}^T (w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t) + \sum_{t,t'=0}^T (-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'})} 2\hat{w}_\tau \hat{x}_{\tau'}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w \mathcal{D}\hat{w} \mathcal{D}x \mathcal{D}\hat{x} e^{i \sum_{t=0}^T (w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t) + \sum_{t,t'=0}^T (-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'})}}$$

$$i\hat{C}_{\tau\tau'} =$$

$$- \alpha \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w \mathcal{D}\hat{w} \mathcal{D}x \mathcal{D}\hat{x} e^{i \sum_{t=0}^T (w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t) + \sum_{t,t'=0}^T \left(-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'} \right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}w \mathcal{D}\hat{w} \mathcal{D}x \mathcal{D}\hat{x} e^{i \sum_{t=0}^T (w_t x_t + \hat{w}_t w_t + \hat{x}_t x_t) + \sum_{t,t'=0}^T \left(-\frac{1}{N} w_t w_{t'} + \hat{w}_t \hat{w}_{t'} Q_{tt'} + 2\hat{w}_t \hat{x}_{t'} K_{tt'} + \hat{x}_t \hat{x}_{t'} C_{tt'} \right)}} \hat{x}_\tau \hat{x}_{\tau'}$$

Ahora procederemos a calcular la derivada con respecto a $\hat{Q}_{\tau\tau'}$

$$\frac{\partial N(\Psi(\hat{Q}, Q, \hat{K}, K, \hat{C}, C) + \Phi(Q, K, C) + \Gamma(\vec{\theta}, \vec{\psi}, \vec{s}, \hat{Q}, \hat{K}, \hat{C}))}{\partial \hat{Q}_{\tau\tau'}} = 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \hat{Q}_{\tau\tau'}} i \sum_{t,t'=0}^T Q_{tt'} \hat{Q}_{tt'} +$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) \frac{\partial}{\partial \hat{Q}_{\tau\tau'}} e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}}$$

$$iQ_{\tau\tau'} =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}}$$

Aplicamos el mismo procedimiento que utilizamos con $Q_{\tau\tau'}$, $K_{\tau\tau'}$, $C_{\tau\tau'}$. Si tenemos $i \sum_{t,t'=0}^T \frac{\partial \hat{Q}_{tt'}}{\partial \hat{Q}_{\tau\tau'}} Q_{tt'}$ y sabemos que $\frac{\partial \hat{Q}_{tt'}}{\partial \hat{Q}_{\tau\tau'}} = \hat{\delta}_{t\tau} \hat{\delta}_{t'\tau'}$; por lo tanto, $i \sum_{t,t'=0}^T \hat{\delta}_{t\tau} \hat{\delta}_{t'\tau'} Q_{tt'} = iQ_{\tau\tau'}$. De igual forma para $\sum_{t,t'=0}^T \frac{\partial Q_{tt'}}{\partial \hat{Q}_{\tau\tau'}} \hat{w}_t \hat{w}_{t'} = \sum_{t,t'=0}^T \delta_{t\tau} \delta_{t'\tau'} \hat{w}_t \hat{w}_{t'} = \hat{w}_\tau \hat{w}_{\tau'}$

Con respecto a \hat{K}

$$\frac{\partial N(\Psi(\hat{Q}, Q, \hat{K}, K, \hat{C}, C) + \Phi(\hat{w}, w, \hat{x}, x, Q, K, C) + \Gamma(\vec{\hat{q}}, \vec{q}, \vec{\theta}, \vec{\psi}, \vec{s}, \hat{Q}, \hat{K}, \hat{C}))}{\partial \hat{K}} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= i \sum_{t,t'=0}^T K_{tt'} + \\ &\frac{1}{\bar{N}} \sum_{i=1}^N \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) \frac{\partial}{\partial \hat{K}} e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}} \\ i \sum_{t,t'=0}^T K_{tt'} &= \\ \frac{1}{\bar{N}} \sum_{i=1}^N \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}} \end{aligned}$$

Con respecto a \hat{C}

$$\frac{\partial N(\Psi(\hat{Q}, Q, \hat{K}, K, \hat{C}, C) + \Phi(\hat{w}, w, \hat{x}, x, Q, K, C) + \Gamma(\vec{\hat{q}}, \vec{q}, \vec{\theta}, \vec{\psi}, \vec{s}, \hat{Q}, \hat{K}, \hat{C}))}{\partial \hat{C}} = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= i \sum_{t,t'=0}^T C_{tt'} + \\ &\frac{1}{\bar{N}} \sum_{i=1}^N \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) \frac{\partial}{\partial \hat{C}} e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}} \\ i \sum_{t,t'=0}^T C_{tt'} &= \\ \frac{1}{\bar{N}} \sum_{i=1}^N \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}\hat{q} P_0(q_i(0)) e^{i \sum_{t=0}^T \hat{q}_i(t) [q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + i \sum_{t=0}^T \psi_i(t) s_i(t) - i \sum_{t,t'=0}^T (\hat{Q}_{tt'} \hat{q}_i(t) \hat{q}_i(t') + \hat{K}_{tt'} \hat{q}_i(t) s_i(t') + \hat{C}_{tt'} s_i(t) s_i(t'))}} \end{aligned}$$

Apéndice C

Programación.

C.1. Recursos.

El lenguaje de programación utilizado para las simulaciones computacionales del Juego de la Minoría y del Mercado Artificial con ECA es `Julia 1.10`. Cómo IDE se utilizó `Visual Studio Code`. El código para replicar los resultados obtenidos se pueden consultar en el siguiente repositorio de `GitHub`:

`https://github.com/ernesxavier/Tesis-ECA.git`

C.2. Resultados Adicionales.

En este apéndice se presentan algunos resultados adicionales obtenidos de las simulaciones del mercado artificial propuesto en el capítulo 4.

C.2.1. Resultados con memoria real.

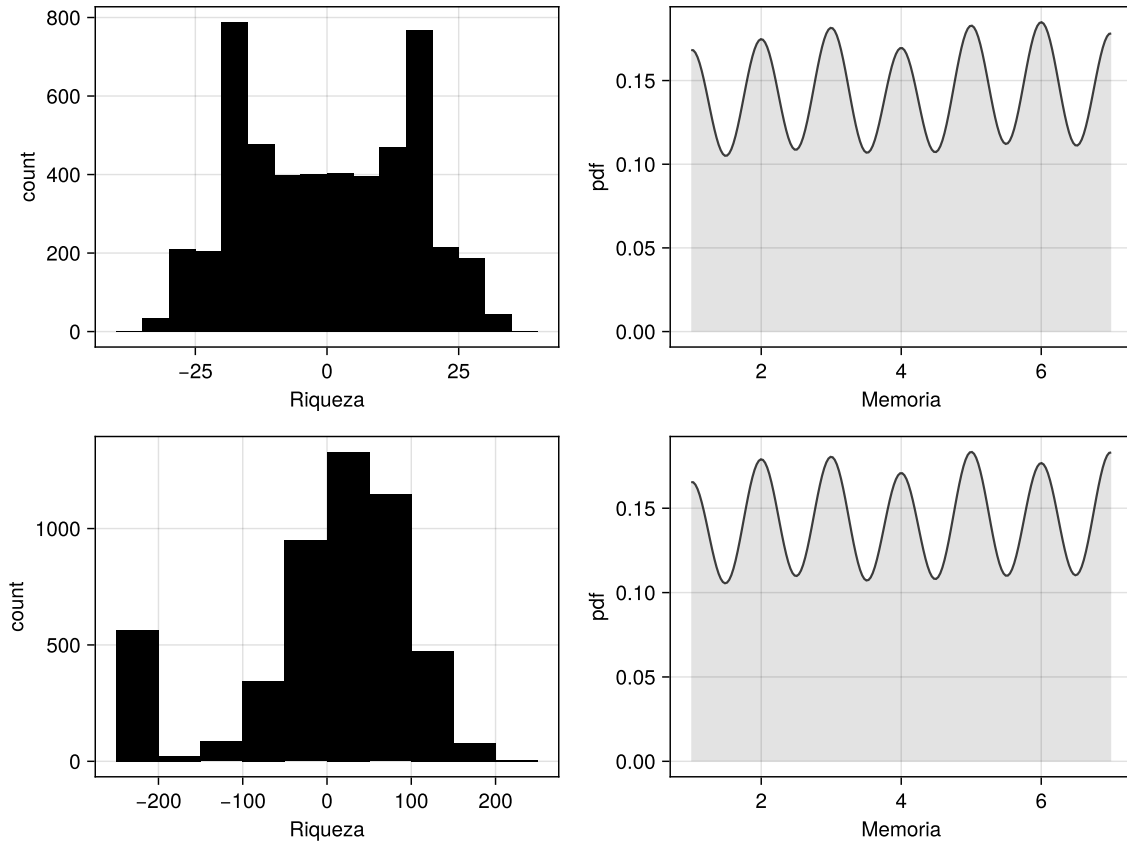


Figura C.1: Histograma de la riqueza $\omega_i(t)$ para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria L diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

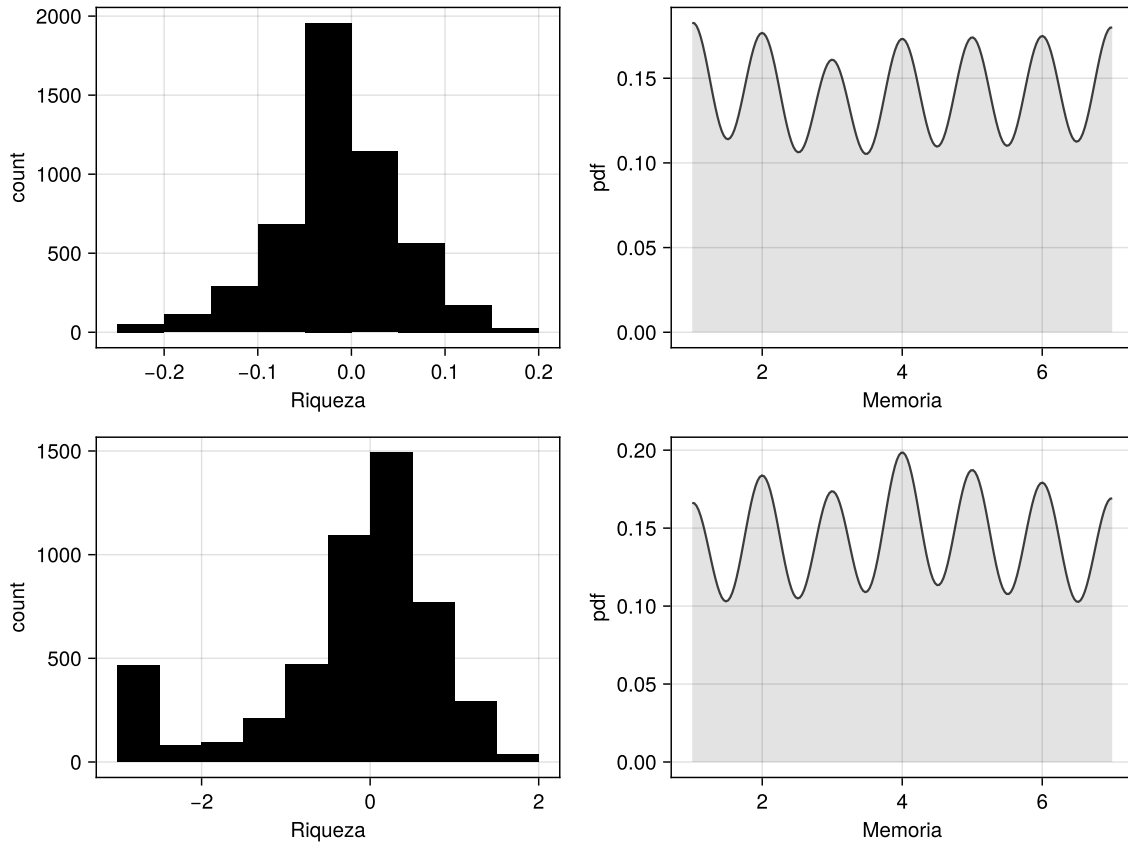


Figura C.2: Histograma de la riqueza $\omega_i(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria L diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

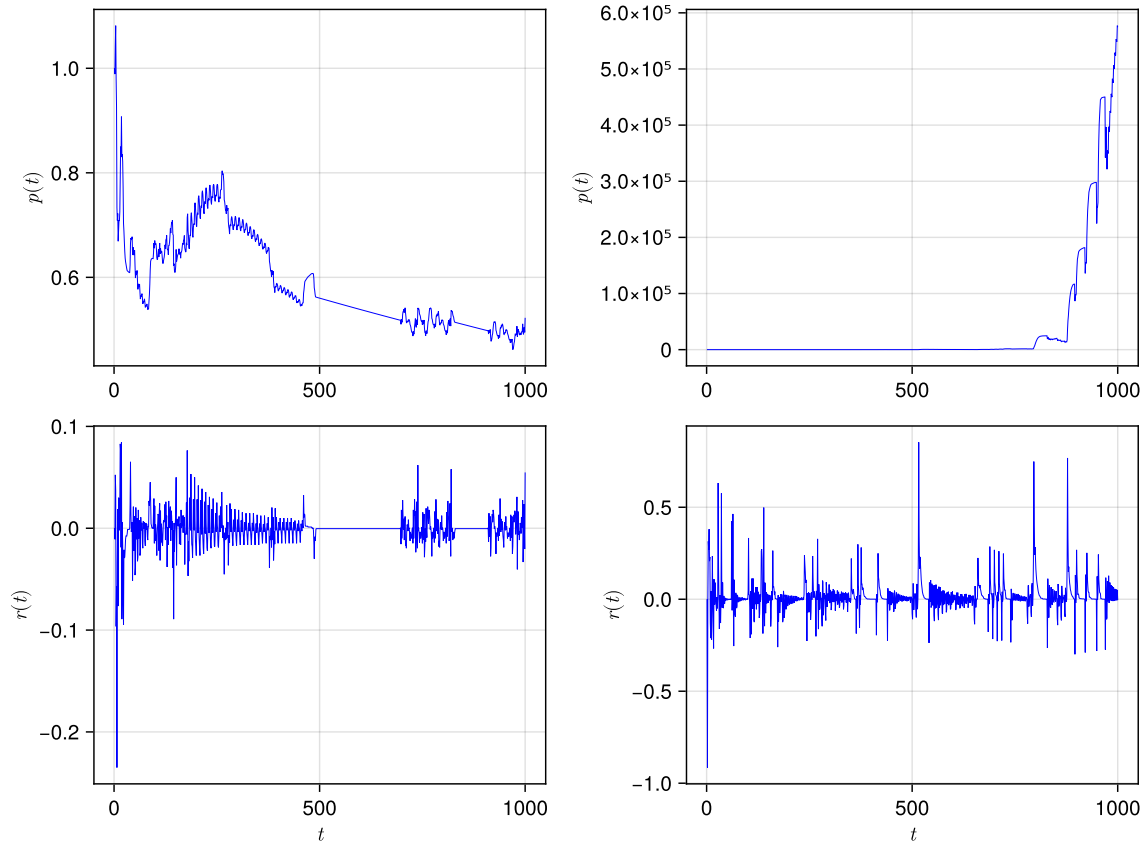


Figura C.3: Determinación del precio $p(t)$ y del rendimiento $r(t)$ para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel izquierdo y derecho respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

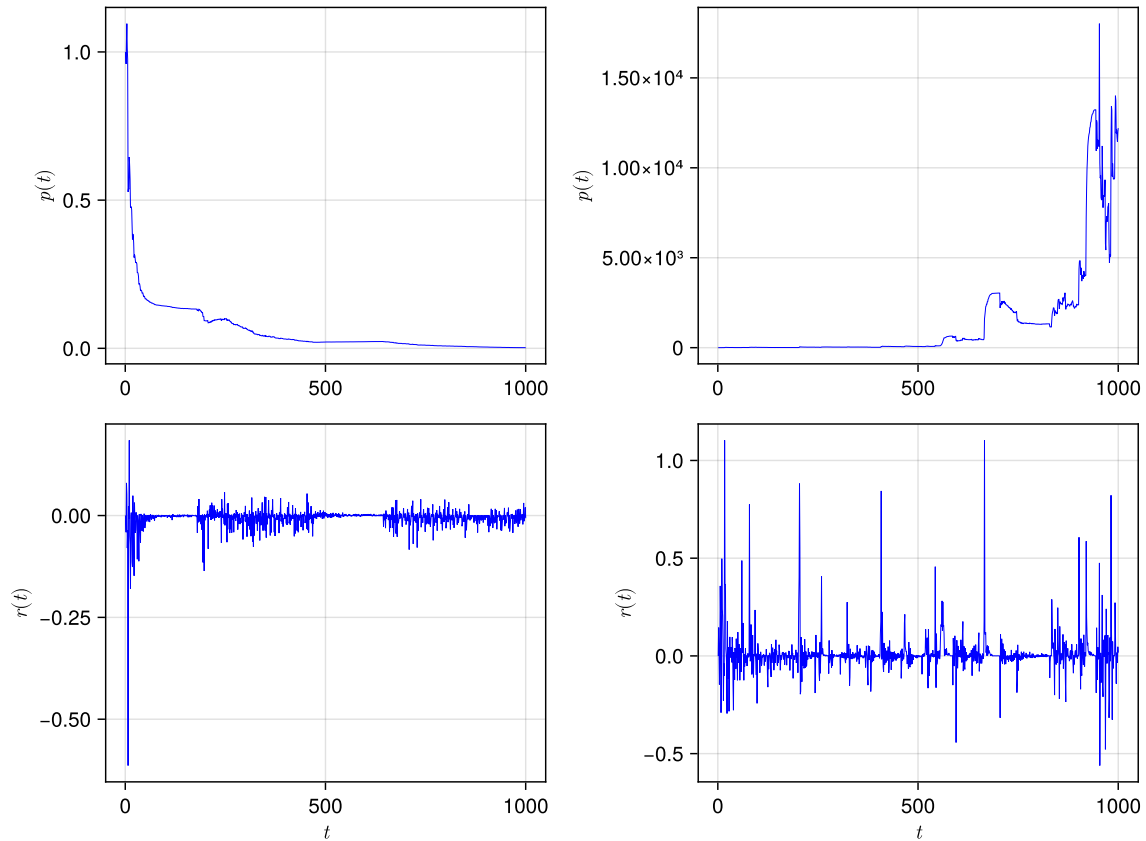


Figura C.4: Determinación del precio $p(t)$ y del rendimiento $r(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel izquierdo y derecho respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

C.2.2. Resultados con memoria “falsa” (o historia “falsa”).

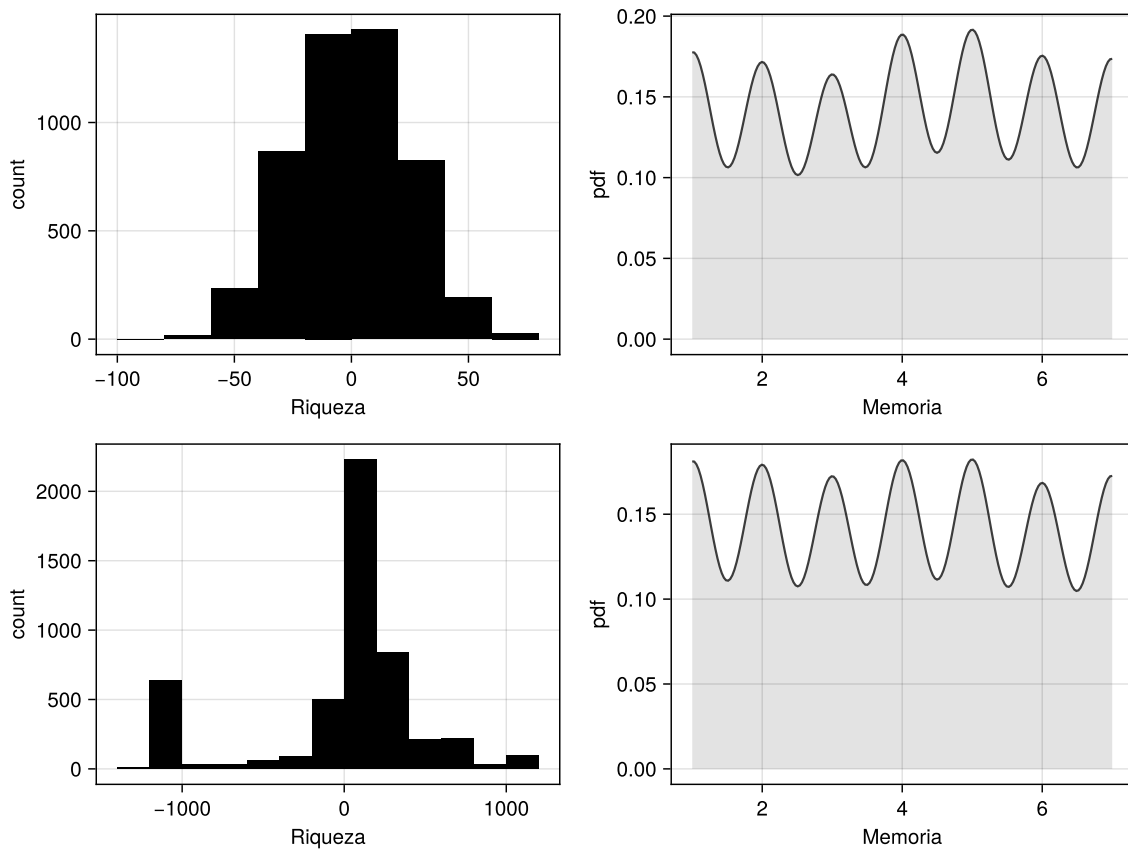


Figura C.5: Histograma de la riqueza $\omega_i(t)$ para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria L diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

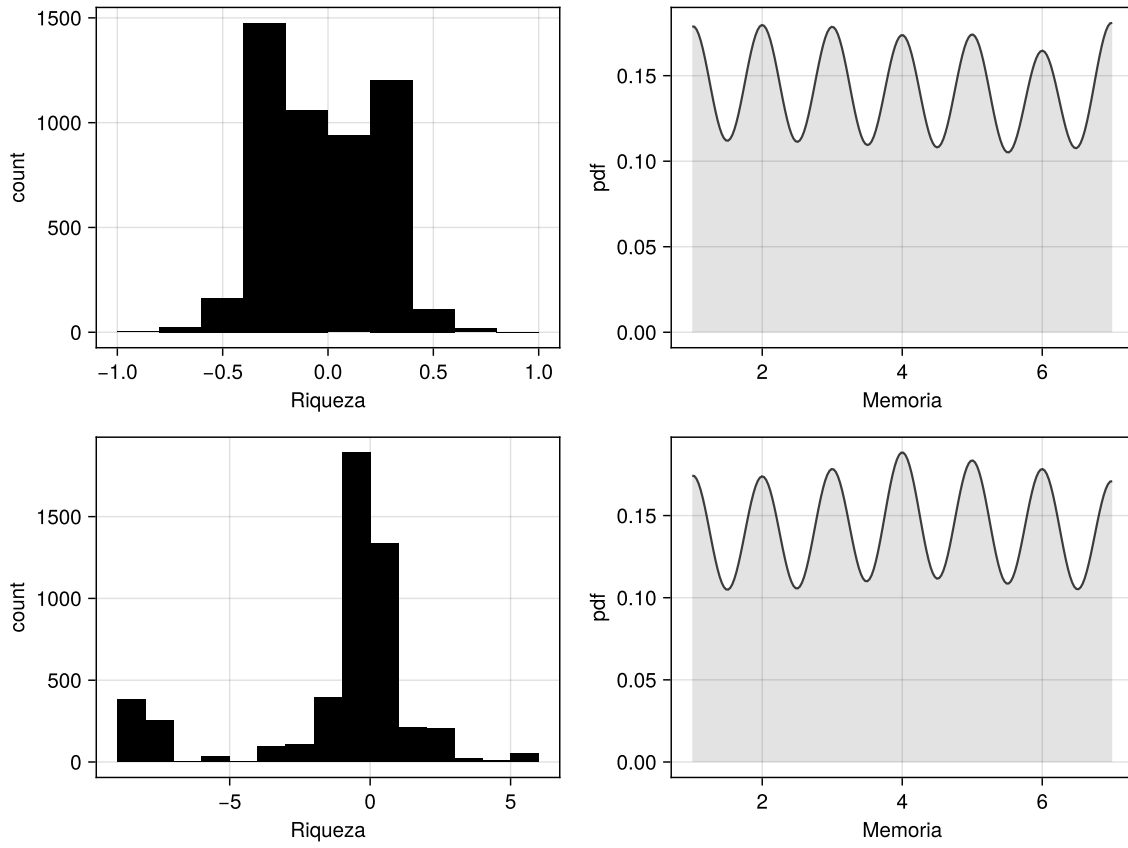


Figura C.6: Histograma de la riqueza $\omega_i(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria real. Cada agente tiene una longitud de memoria L diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel superior e inferior respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

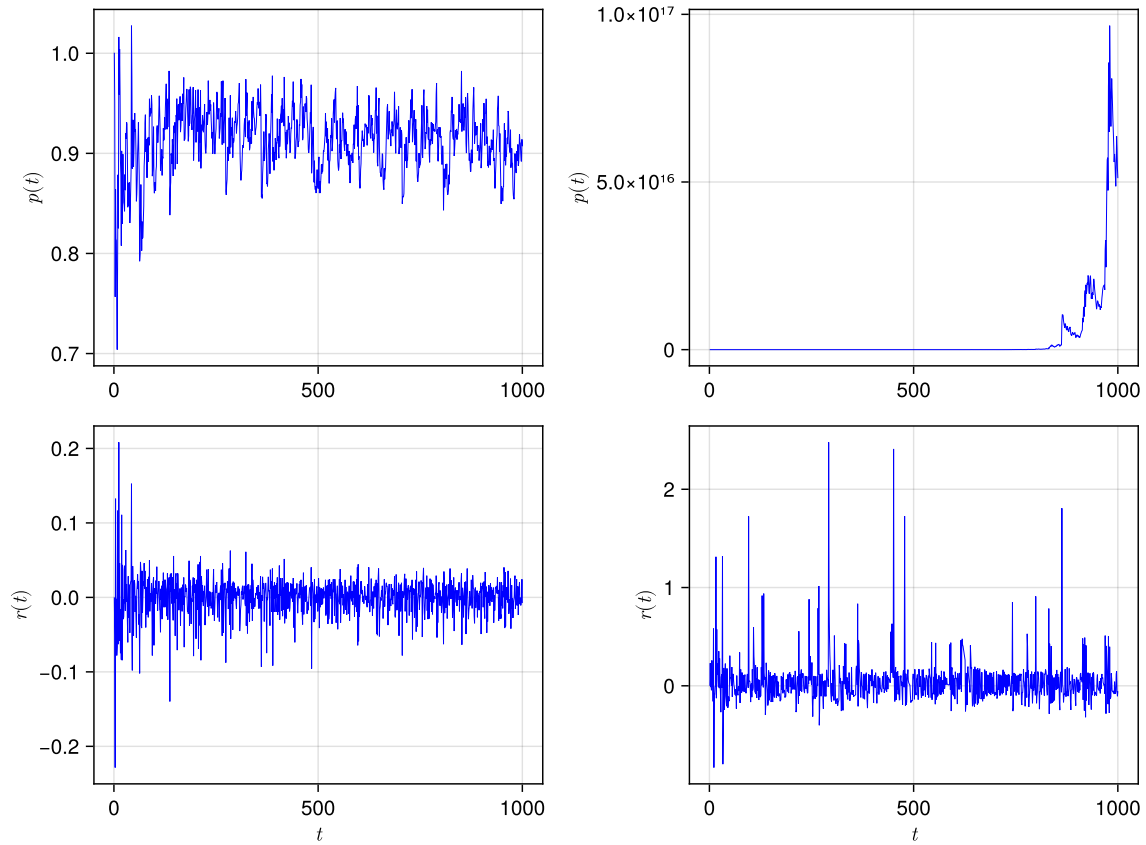


Figura C.7: Determinación del precio $p(t)$ y del rendimiento $r(t)$ para un mercado artificial compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel izquierdo y derecho respectivamente. Las simulaciones se corrieron 10000 pasos de tiempo.

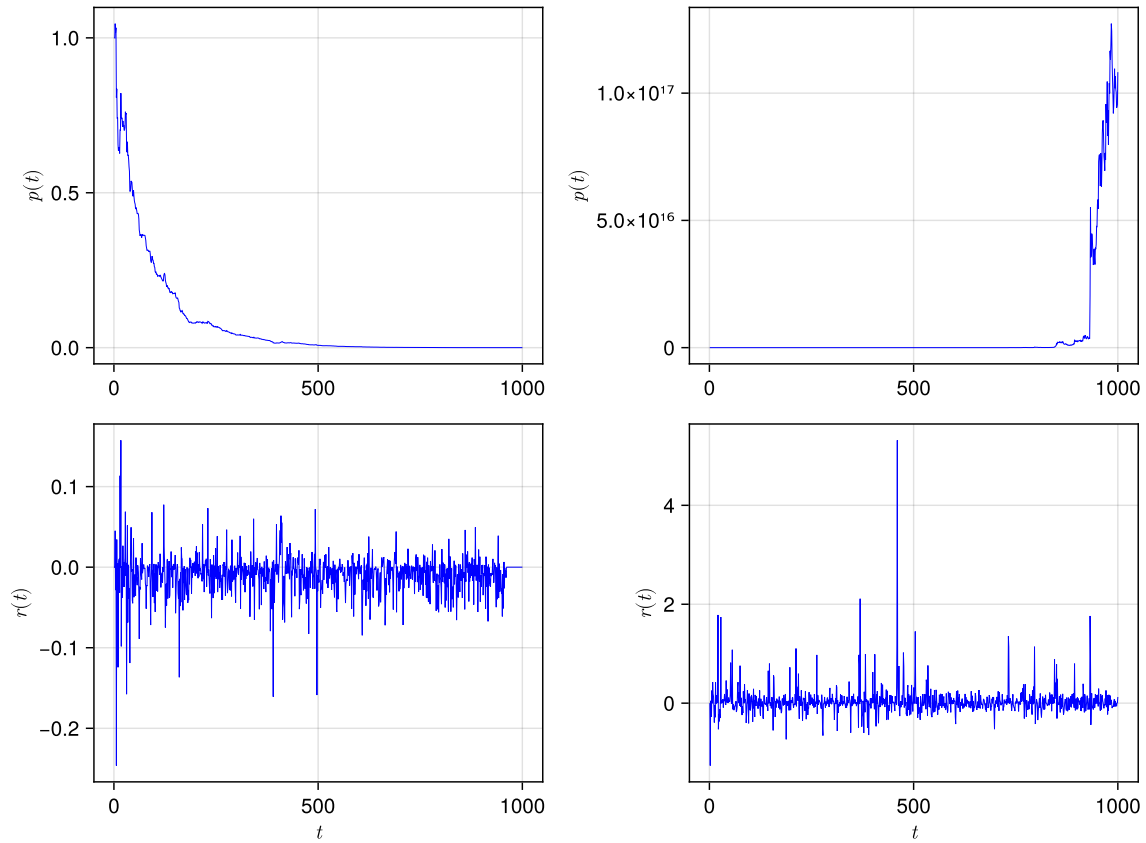


Figura C.8: Determinación del precio $p(t)$ y del rendimiento $r(t)$ para un mercado artificial con ruido de decisión $A_r(t)$ y perturbación de la valoración de las estrategias $\theta_i(t)$ compuesto de $N = 5001$ agentes con memoria falsa. Cada agente tiene una longitud de memoria diferente con $L = 1, \dots, 7$; $S = 2$ y $S = 7$ estrategias para el panel izquierdo y derecho respectivamente. Se realizaron 100 experimentos de 10000 pasos de tiempo cada uno.

Bibliografía

Arthur, W. B. (1994). Inductive reasoning and bounded rationality. *The American economic review*, 84(2), 406–411.

Arthur, W. B. (2014). *Complexity and the economy*. Oxford University Press.

Arthur, W. B., Holland, J. H., LeBaron, B., Palmer, R., y Tayler, P. (1996). Asset pricing under endogenous expectations in an artificial stock market. *The economy as an evolving complex system II*, 27.

Basili, M., y Zappia, C. (2009). Shackle and modern decision theory. *Metroeconomica*, 60(2), 245–282.

Beinhocker, E. D. (2006). *The origin of wealth: Evolution, complexity, and the radical remaking of economics*. Harvard Business Press.

Butos, W. N., y Koppl, R. G. (1993). Hayekian expectations: theory and empirical applications. *Constitutional Political Economy*, 4(3), 303–329.

Campbell, D. T. (1974). *Evolutionary epistemology* (Vol. 1). na.

Carvalho, J. L. (1972). *Production, investment and expectations: A study of the united states cattle industry* (Tesis Doctoral no publicada). University of Chicago.

Challet, D., y Zhang, Y.-C. (1997). Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 246(3-4), 407–418.

- Coolen, A. (2005). *The mathematical theory of minority games*. Oxford University Press.
- Cowen, T. (2002). *Risk and business cycles: New and old austrian perspectives*. Routledge.
- Dosi, G., Marengo, L., y Fagiolo, G. (2005). Learning in evolutionary environments. En *The evolutionary foundations of economics*.
- Ellsberg, D. (2015). *Risk, ambiguity and decision*. Routledge.
- Farmer, R. E. (1999). *The macroeconomics of self-fulfilling prophecies*. MIT Press.
- Farmer, R. E., y Woodford, M. (1997). Self-fulfilling prophecies and the business cycle. *Macroeconomic Dynamics*, 1(4), 740–769.
- Gârleanu, N., y Panageas, S. (2021). What to expect when everyone is expecting: Self-fulfilling expectations and asset-pricing puzzles. *Journal of Financial Economics*, 140(1), 54–73.
- Giardina, I., y Bouchaud, J.-P. (2003). Bubbles, crashes and intermittency in agent based market models. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 31, 421–437.
- Gilboa, I. (2004). Introduction. En *Uncertainty in economic theory: Essays in honor of david schmeidler's 65th birthday* (pp. 3–19). Routledge.
- Goodwin, R. M. (1947). Dynamical coupling with especial reference to markets having production lags. *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, 181–204.
- Grise, C. (2009). Are expectations about economic activity self-fulfilling? an empirical test. *Federal Reserve Bank of New York*.
- Hamilton, J. D., y Whiteman, C. H. (1985). The observable implications of self-fulfilling expectations. *Journal of Monetary Economics*, 16(3), 353–373.
- Hayek, F. A. (1931). *Prices and production*. Routledge and Sons.
- Hayek, F. A. (1945). The use of knowledge in society. *The American economic review*, 35(4), 519–530.

- Hayek, F. A. (2018). *New studies in philosophy, politics, economics, and the history of ideas*. University of Chicago Press.
- Hicks, J. R. (1946). Value and capital, 1939. *Mathematical Appendix*, 311312.
- Hill, G. (2004). From hayek to keynes: Gls shackle and ignorance of the future. *Critical Review*, 16(1), 53–79.
- Hodgson, G. M. (2007). Meanings of methodological individualism. *Journal of Economic Methodology*, 14(2), 211–226.
- Holling, C. S. (2001). Understanding the complexity of economic, ecological, and social systems. *Ecosystems*, 4(5), 390–405.
- Kahneman, D., y Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2), 263–292.
- Keynes, J. M. (1936). *The general theory of interest, employment and money*. london: MacMillan.
- Kirzner, I. M. (2000). *The driving force of the market: Essays in austrian economics*. Psychology Press.
- Koppl, R. (2002). *Big players and the economic theory of expectations*. Springer.
- Krugman, P. (1991). History versus expectations. *The Quarterly Journal of Economics*, 106(2), 651–667.
- Leduc, S., Sill, K., y Stark, T. (2007). Self-fulfilling expectations and the inflation of the 1970s: Evidence from the livingston survey. *Journal of Monetary economics*, 54(2), 433–459.
- Lucas, R. E. (1980). Expectations and the neutrality of money (1972). *Rules, Discretion, and the Role of the Economic Advisor*.
- Luhmann, N. (1998). *Sistemas sociales: lineamientos para una teoría general* (Vol. 15). Anthropos.

- Mandelbrot, B. (1972). Statistical methodology for nonperiodic cycles: from the covariance to r/s analysis. En *Annals of economic and social measurement, volume 1, number 3* (pp. 259–290). NBER.
- Marsili, M. (2001). Market mechanism and expectations in minority and majority games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299(1-2), 93–103.
- Maturana, H., y Varela, F. (2004). *De máquinas y seres vivos: Autopoiésis: la organización de lo vivo*. Lumen-Editorial Universitaria.
- Mills, E. (1959). Expectations, inventories, and the stability of competitive markets. En *meeting of the econometric society* (Vol. 30).
- Moro, E. (2004). The minority game: an introductory guide. *arXiv preprint cond-mat/0402651*.
- Muth, J. F. (1961). Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 315–335.
- Nerlove, M. (1956a). *Estimates of the elasticities of supply of corn, cotton, and wheat* (Tesis Doctoral no publicada). Johns Hopkins University.
- Nerlove, M. (1956b). Estimates of the elasticities of supply of selected agricultural commodities. *Journal of farm Economics*, 38(2), 496–509.
- Nerlove, M. (1967). *Distributed lags and unobserved components in economic time series*. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University.
- Nerlove, M., y Bessler, D. A. (2001). Expectations, information and dynamics. *Handbook of agricultural economics*, 1, 155–206.
- Rogers, C. (1996). Self-fulfilling expectations and the general theory. *History of Economics Review*, 25(1), 172–183.
- Savage, L. J. (1972). *The foundations of statistics*. Courier Corporation.

- Savit, R., Manuca, R., y Riolo, R. (1999). Adaptive competition, market efficiency, and phase transitions. *Physical Review Letters*, 82(10), 2203.
- Senge, P. M. (2006). *The fifth discipline: The art and practice of the learning organization*. Currency.
- Shackle, G. (1974). Decision: The human predicament. *The Annals of the American Academy of Political and Social Science*, 412(1), 1–10.
- Shackle, G. (1976). *Epistemica y economíacrítica de las doctrinas económicas*. Fondo de Cultura Económica.
- Sweezy, P. M. (1938). Expectations and the scope of economics. *The Review of Economic Studies*, 5(3), 234–237.
- Vitting Andersen, J., y Sornette, D. (2003). The \$-game. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 31, 141–145.
- Yeung, C. H., y Zhang, Y.-C. (2008). Minority games. *arXiv preprint arXiv:0811.1479*.