

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS

**ESTUDIO DE UN PUNTO DE EQUILIBRIO  
NO HIPERBOLICO EN EL PROBLEMA COLINEAL  
CARGADO DE TRES CUERPOS**

PRESENTADA POR

**ALBERTO CASTRO ORTEGA**

ASESOR

**Dr. ERNESTO A. LACOMBA ZAMORA**



# Resumen

Consideremos un modelo consistente de tres partículas enumeradas de izquierda a derecha como  $(1, 2, 3)$ , con masas  $m_i \geq 0$ , cargas  $q_i \in \mathbb{R}$  y posiciones  $x_i \in \mathbb{R}$  con respecto al centro de masa de los tres cuerpos. Las fuerzas que actúan en el sistema son de tipo atractivo o repulsivo dependiendo de los valores de masas y cargas, relacionados por el parámetro  $\lambda_{ij} = m_i m_j - q_i q_j$ ; obtenido a partir de la Ley de Gravitación de Newton y de la Ley de Coulomb para cada par de partículas  $i$  y  $j$ . Este modelo se conoce como el problema colineal cargado de tres cuerpos.

En esta tesis doctoral se trabaja con el problema colineal cargado de tres cuerpos para los casos particulares donde los parámetros  $\lambda_{12}, \lambda_{23}$  son cantidades positivas, mientras que el parámetro  $\lambda_{13}$  es negativo, es decir, cuando hay fuerza de repulsión entre las partículas de los extremos 1 – 3 y fuerzas de atracción entre los pares de partículas 1 – 2 y 2 – 3 respectivamente. Se estudian dos casos dentro de este contexto.

1. Masas unitarias  $m_i = 1$ . Escogiendo masas unitarias es posible simplificar aquellas cantidades que dependen de ellas; lo cual resulta muy útil al estudiar el comportamiento de las soluciones cercanas a la colisión triple en coordenadas de McGehee. La magnitud de la fuerza de repulsión entre las partículas de los extremos se escribe como  $\lambda_{13} = 1 - \alpha^2$ , donde  $\alpha > 1$ . Para el valor del parámetro  $\alpha = \sqrt{5}$  se obtiene una variedad de colisión  $\Lambda(\sqrt{5})$  con un punto de equilibrio no hiperbólico correspondiente al origen.
2. Masas distintas. Al considerar una elección particular de masas en función de un parámetro  $\mu \approx 0$ , es posible construir una familia de soluciones con simetrías dependientes del parámetro  $\mu$ , mediante la prolongación analítica de soluciones de Poincaré.

Para el caso de masas unitarias, al aplicar las teorías de las formas normales y de la variedad central, se obtiene que las variedades centrales  $W^c(\mathbf{0})$  existen para valores positivos de la energía y corresponden a soluciones que inician (terminan) en colisión triple. En estas soluciones las distancias entre la pareja de partículas 1 – 2 y la pareja de partículas 2 – 3 son iguales durante el tiempo. Para las soluciones con condiciones iniciales cercanas al origen y energía positiva se tiene que en tiempo negativo la solución viene de infinito realizando colisiones binarias de un tipo (1 – 2 o 2 – 3); al aproximarse al origen y a la variedad central las tres partículas se acercan a la colisión triple aproximándose a la configuración central de Euler para después escapar a infinito intercambiando el tipo de colisión binaria.



# Agradecimientos

A mi familia por el esfuerzo de apoyarme en todo momento de manera incondicional.

Al CONACYT y COMECYT por el apoyo económico para realizar mis estudios de posgrado.

A mi asesor Dr. Ernesto A. Lacomba Zamora por su paciencia y comprensión durante los años que vivimos este proyecto y por abrirme las puertas a muchas experiencias tanto académicas como personales.

A las personas que amablemente colaboraron en llevar a término este trabajo Dr. Seppo Mikkola; Dr. Kiyotaka Tanikawa; Dr. Masayoshi Sekiguchi; Dr. Jaume Llibre.

A mis compañeros Janeth Magaña, Pedro Reyes, Héctor López.



# Introducción

El problema de los  $N$ -cuerpos es uno de los temas que permanece abierto a la investigación en la actualidad y que ha generado una gran cantidad de aportaciones para distintas áreas de conocimiento. Consiste en el estudio de la dinámica de  $N$  partículas de masas  $m_i \geq 0$ , cuyos movimientos están generados por sus atracciones gravitacionales. El movimiento de la  $i$ -ésima partícula es modelado por la segunda Ley de Newton y la Ley de la Gravitación Universal

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^N G m_i m_j \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3}, \quad \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \in \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

donde  $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$  es la constante de gravitación. El lado derecho de la ecuación (1) es la fuerza resultante sobre la  $i$ -ésima partícula ejercida por cada una de las partículas restantes. La magnitud de la fuerza entre la pareja de partículas  $i$  y  $j$  es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La naturaleza de las fuerzas en el problema de  $N$ -cuerpos es atractiva.

Dada la complejidad del modelo de los  $N$ -cuerpos, se han estudiado casos particulares donde se consideran un número finito de partículas colocadas en configuraciones geométricas con condiciones iniciales de posición y velocidad tales que se mantienen dichas disposiciones durante el tiempo.

El caso más sencillo es el estudio del movimiento de dos cuerpos. Para este modelo, a partir de las ecuaciones diferenciales (1) se deducen las Leyes de Kepler. Las soluciones están contenidas en un plano perpendicular al vector momento angular y son cónicas; estos resultados son una primera aproximación al estudio de los movimientos del sistema solar [Karttunen 2006, Pollard 1976].

Para el caso  $N \geq 3$ , el problema sigue estudiándose y se han obtenido resultados para casos particulares como el problema colineal de tres cuerpos.

En el problema colineal de tres cuerpos se estudian los movimientos restringidos a una dimensión de tres partículas bajo las atracciones gravitacionales entre ellas. El sistema de ecuaciones diferenciales de este modelo colineal presenta singularidades debidas a las colisiones binarias y a la colisión triple entre las partículas. Las colisiones binarias pueden ser regularizadas analíticamente mediante las técnicas de Sundman [Sundman 1913] y pueden interpretarse como rebotes elásticos entre las partículas. La colisión triple fue estudiada por R. McGehee [McGehee 1974] y se ha demostrado que no es regularizable más que para ciertos valores de las masas [Simó 1980].

Un estudio muy interesante sobre el problema colineal de tres cuerpos se puede consultar en [Martynova 2008]. Mediante el uso de la integración numérica se clasifica sobre una sección de Poincaré adecuada a las condiciones iniciales dependiendo de su comportamiento para tiempos positivos. Se obtienen distintas regiones donde las condiciones iniciales dan lugar a varios tipos de soluciones; por ejemplo, las soluciones de Shubart [Shubart 1956]. El problema ha sido atacado desde el enfoque de la dinámica simbólica [Hietarinta 1990, Saito 2007] como topológico [Moeckel 1983].

Una variante en el problema de los  $N$ -cuerpos es la introducción de fuerzas de repulsión al considerar partículas con cargas electrostáticas  $q_i \in \mathbb{R}$ . La fuerza electrostática total  $\mathbf{F}_e$  sobre la  $i$ -ésima partícula cargada en un sistema de  $N$ -partículas se obtiene a partir de la ley de Coulomb

$$\mathbf{F}_e = \sum_{j=1, i \neq j} K_0 q_i q_j \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3}, \quad \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \in \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

donde  $K_0 = 9 \times 10^{-9} \frac{Nm^2}{C^2}$ . La magnitud de la fuerza electrostática entre las partículas  $i$  y  $j$  es directamente proporcional al producto de cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, esta última característica la comparte con el caso gravitacional. Al introducir cargas en el problema de los  $N$ -cuerpos tenemos la presencia de fuerzas de repulsión; este hecho enriquece las posibilidades de nuevas dinámicas.

Para cada partícula con masa  $m_i$  y carga  $q_i$ , la fuerza total ejercida sobre ella resulta de la suma vectorial de la fuerza gravitacional y de la fuerza electrostática; en esta forma obtenemos la ecuación de movimiento para la  $i$ -ésima partícula

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j=1, i \neq j}^N (G m_i m_j - K_0 q_i q_j) \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3}, \quad \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \in \mathbb{R}^3, \quad (3)$$

La naturaleza de la fuerza se obtiene de los valores de  $(G m_i m_j - K_0 q_i q_j)$ ; si esta cantidad es positiva la fuerza es atractiva, si es negativa, es repulsiva, y si es cero no hay interacción entre las partículas [Antonacopoulos 1981]. En el capítulo 1 introducimos el parámetro  $\lambda_{ij} = m_i m_j - q_i q_j$  el cual es la base del estudio de la dinámica en este trabajo.

Este tipo de modelos se han estudiado en [Atela 1994, Pérez-Chavela-Saari 1996, Llibre-Pasca 2007, Corbera-Llibre-Pérez-Chavela 2006] para distintas configuraciones de las partículas.

En esta tesis doctoral se estudia el problema colineal cargado de tres cuerpos, consistente en tres partículas con masas y cargas  $m_i$  y  $q_1$  respectivamente, cuyo movimiento está restringido a  $\mathbb{R}$ . Este modelo hereda varias de las características del problema sin carga, en particular se demuestra en el capítulo 3 que para una elección de masas y cargas apropiadas, la dinámica cercana a la colisión triple para el caso donde las partículas de los extremos se repelen mientras cada una de ellas se atrae con la partícula situada entre ellas es similar a la del caso sin carga.

También se demuestra que al aumentar la repulsión entre los cuerpos de los extremos hay una bifurcación en la dinámica cercana al origen; esta información se obtiene al realizar la explosión de coordenadas y al estudiar las variedades de colisión  $\Lambda(\alpha)$  obtenidas en función del valor de la repulsión  $\lambda_{13} = 1 - \alpha^2$



([McGehee 1974, Llibre-Pasca 2007]). Cuando la fuerza de repulsión es el negativo de la cuarta parte de la fuerza de atracción, aparece un punto de equilibrio no hiperbólico en el flujo sobre la variedad de colisión; la dinámica cercana a este punto se estudia aplicando la teoría de variedades centrales [Carr 1981, Wiggins 1990].

Las aportaciones de este trabajo de investigación son las siguientes:

1. Clasificación de las variedades de colisión  $\Lambda_k$  para distintos valores de masas y cargas con base a los resultados sobre configuraciones centrales colineales [Pérez-Chavela-Saari 1996].
2. Clasificación de las variedades de colisión  $\Lambda_k$  para el caso de los potenciales simétricos  $U(s)$ , obtenidos al considerar masas unitarias y cargas de distinto signo. Obtención de un diagrama de bifurcación donde se muestran los potenciales en función de los parámetros  $\lambda_{ij}$ .
3. La aplicación de la teoría de formas normales para simplificar un campo vectorial con un punto de equilibrio no hiperbólico. Estudio de la dinámica cercana a este punto mediante la introducción de los conceptos de la teoría de la variedad central. Estudio de los escapes en el caso no hiperbólico.
4. Construcción de familias de soluciones periódicas simétricas dependientes de un parámetro  $\mu$  para el caso en el cual hay la presencia de fuerzas de repulsión entre las partículas de los extremos.

El trabajo se estructura de manera general como sigue:

En el capítulo 1, se introducen los conceptos básicos del problema cargado de los  $N$ -cuerpos. Se presenta la teoría de formas normales necesaria en el estudio del punto no hiperbólico en una vecindad del origen junto con los resultados relevantes sobre la teoría de variedades centrales para el estudio de puntos de equilibrio no hiperbólicos. Finalmente se da una breve descripción de la continuación de soluciones periódicas de Poincaré.

En el capítulo 2 se inicia el estudio de las ecuaciones de movimiento para el problema colineal cargado de tres cuerpos en las coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  respecto al centro de masa. Se introducen las coordenadas  $(r, v, s, u)$  para el estudio de la colisión triple generalizando al caso cargado los resultados obtenidos por [McGehee 1974]. Se grafican los potenciales y las variedades de colisión en las coordenadas  $(r, v, s, u)$ , con base a los signos de los parámetros  $\lambda_{ij}$  y al número de configuraciones centrales [Pérez-Chavela-Saari 1996]. Se clasifican las variedades de colisión y se muestra el diagrama de bifurcación correspondiente para el caso simétrico.

En el capítulo 3 se aplica la teoría de formas normales para simplificar el campo vectorial obtenido al considerar el tipo de potencial simétrico estudiado en el capítulo 2, donde el mínimo de la función potencial coincide con el origen. Se obtiene la variedad central y se da una descripción del flujo en una vecindad del mismo. Para este caso particular, se describe la dinámica del sistema para  $h = 0$  aprovechando la proyectabilidad del flujo sobre la variedad de colisión. Posteriormente, se estudian los escapes para  $h > 0$  y los escapes parabólicos. Finalmente se integran numéricamente las ecuaciones de movimiento y se muestran las gráficas de las soluciones para distintos valores de las condiciones iniciales.

En el capítulo 4 se introduce un nuevo enfoque del problema colineal cargado de tres cuerpos donde se introduce un parámetro  $\mu$ . Para  $\mu = 0$  se obtiene una solución explícita del sistema la cual puede ser

continuada analíticamente a una familia de soluciones periódicas simétricas dependientes del parametro  $\mu \approx 0$ .

En el capítulo 5 se muestran las conclusiones y los alcances de la investigación. Asimismo, se plantean líneas de investigación a realizar por el autor en el futuro aplicando los resultados alcanzados.

# Índice general

<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>2</b>
1.1. El parámetro $\lambda_{ij}$	2
1.2. Problema cargado de los N-cuerpos	3
1.2.1. Formulación variacional del modelo	4
1.2.2. Identidad de Lagrange-Jacobi	5
1.3. Formas normales	5
1.4. Teoría de la variedad central	8
1.5. Continuación de soluciones periódicas	11
<b>2. PROBLEMA COLINEAL CARGADO DE TRES CUERPOS</b>	<b>13</b>
2.1. Ecuaciones de movimiento	13
2.1.1. Coordenadas $(z_1, z_2)$	14
2.2. Configuraciones centrales en el problema cargado de tres cuerpos	15
2.3. Explosión de coordenadas y variedades de colisión $\Lambda$	18
2.3.1. Coordenadas de McGehee	18
2.3.2. Reducción de coordenadas	20
2.3.3. Variedades de colisión $\Lambda$	22
2.3.4. Órbitas homotéticas	23
2.3.5. Regularización de colisiones binarias	24
2.4. Clasificación de las variedades de colisión $\Lambda$	25
2.4.1. Resultados sobre variedades de colisión	26
2.5. Clasificación de las variedades $\Lambda$ para potenciales simétricos	28
2.5.1. Configuraciones centrales colineales en el caso simétrico	30
2.5.2. Clasificación de los potenciales simétricos	34

<b>3. CASO NO HIPERBÓLICO</b>	<b>36</b>
3.1. Variedad de colisión $\Lambda(\alpha)$	36
3.2. Caso no hiperbólico para $\alpha = \sqrt{5}$	40
3.2.1. Regularización de colisiones binarias para $\alpha = \sqrt{5}$	40
3.2.2. Forma normal del campo vectorial sobre $\Lambda(\sqrt{5})$ .	41
3.2.3. Variedad central $W^c(\mathbf{0})$ .	44
3.2.4. Dinámica cerca del origen	47
3.2.5. Dinámica para $h = 0$	47
3.2.6. Dinámica en $h > 0$	49
3.3. Órbitas parabólicas	52
3.4. Resultados numéricos	56
<b>4. SOLUCIONES PERIÓDICAS SIMÉTRICAS</b>	<b>60</b>
4.1. Planteamiento	60
4.2. Simetrías	62
4.3. Soluciones periódicas simétricas para $\mu = 0$	64
4.4. Continuación de soluciones periódicas simétricas	70
4.4.1. Soluciones periódicas $S_{12}$ -simétricas	70
4.4.2. Soluciones periódicas $S_{23}$ -simétricas	74
4.4.3. Soluciones periódicas $S_{13}$ -simétricas	78
<b>5. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS</b>	<b>83</b>
5.1. Conclusiones	83
5.2. Nuevas posibilidades de investigación.	84

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

### 1.1. El parámetro $\lambda_{ij}$

Las fuerzas ejercidas sobre una pareja de partículas cargadas  $(m_i, q_i)$  y  $(m_j, q_j)$  en un problema cargado resultan de la suma vectorial de la fuerza gravitacional  $\mathbf{F}_g$  y de la fuerza electrostática  $\mathbf{F}_e$ , obtenidas respectivamente de la Ley de Gravitación de Newton y de la Ley de Coulomb

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e = (Gm_i m_j - K_0 q_i q_j) \frac{\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j}{\|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\|^3} \quad \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j \in \mathbb{R}^3. \quad (1.1)$$

Dependiendo del valor de las masas y las cargas se tiene lo siguiente:

1. La fuerza resultante entre las partículas será *atractiva* si  $Gm_i m_j - K_0 q_i q_j > 0$ , esto es, si el producto de masas  $Gm_i m_j$  es mayor que el producto de cargas  $K_0 q_i q_j$ , o si las cargas son de signo contrario.
2. La fuerza resultante entre las partículas será *repulsiva* si  $Gm_i m_j - K_0 q_i q_j < 0$ .
3. Si  $Gm_i m_j - K_0 q_i q_j = 0$  las fuerzas gravitacionales y electrostáticas se anulan, no hay interacción entre las partículas y este hecho es independiente de la distancia entre ellas.

La cantidad  $Gm_i m_j - K_0 q_i q_j$  es consistente en las unidades, pues los productos  $Gm_i m_j$  y  $K_0 q_i q_j$  tienen unidades  $Nm^2$  en el Sistema Internacional. Introducimos  $\bar{m}_i = \frac{m_i}{\sqrt{G}}$ ,  $\bar{m}_j = \frac{m_j}{\sqrt{G}}$ ,  $\bar{q}_i = \frac{q_i}{\sqrt{K_0}}$  y  $\bar{q}_j = \frac{q_j}{\sqrt{K_0}}$ , entonces

$$Gm_i m_j - K_0 q_i q_j = \bar{m}_i \bar{m}_j - \bar{q}_i \bar{q}_j,$$

denotaremos  $\lambda_{ij} = \bar{m}_i \bar{m}_j - \bar{q}_i \bar{q}_j$  [Antonacopoulos 1981]. A lo largo de esta tesis utilizaremos los valores de masas y cargas divididos entre los valores de las constantes  $\sqrt{G}$  y  $\sqrt{K_0}$  con la finalidad de simplificar las ecuaciones de movimiento.

## 1.2. Problema cargado de los N-cuerpos

El problema cargado de los  $N$ -cuerpos es el estudio de los movimientos de  $N$  partículas puntuales en  $\mathbb{R}^3$  bajo las influencias de las fuerzas gravitacionales y electrostáticas entre ellas.

Una partícula puntual está caracterizada por su posición  $\mathbf{q} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ ; su masa  $m \in \mathbb{R}^+$  y su carga  $q \in \mathbb{R}$ . Un movimiento de la partícula es una curva suave  $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^3$ , donde  $t \in \mathbb{R}$  es el tiempo. Los vectores velocidad  $\mathbf{v}$  y momento  $\mathbf{p}$  se definen como  $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \in \mathbb{R}^3$ ;  $\mathbf{p}(t) = m\mathbf{v}(t) = m(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \in \mathbb{R}^3$  respectivamente. La ecuación diferencial que modela el movimiento de la partícula es

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}), \quad (1.2)$$

donde  $\mathbf{F}(\mathbf{q})$  es la fuerza ejercida sobre la partícula en función de su posición. La ecuación diferencial (1.2) es equivalente a la ecuación diferencial de segundo orden

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}(\mathbf{q}). \quad (1.3)$$

Consideremos ahora  $N$  partículas con posiciones  $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \in \mathbb{R}^3$ ; masas  $m_i \geq 0$  y cargas  $q_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Introducimos el vector  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)^T \in \mathbb{R}^{3N}$ , el vector momento se define como  $\mathbf{p} = \mathcal{M}\mathbf{v}$ , donde  $\mathcal{M} = \text{diag}\{m_1, m_1, m_1, \dots, m_N, m_N, m_N\}$ . Al vector  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3N}$  lo llamaremos una *configuración* del sistema de partículas.

De acuerdo a la ley de la gravitación de Newton y a la ley de Coulomb, la fuerza que actúa sobre la partícula  $i$  debida a la presencia de la partícula  $j$  es

$$\mathbf{F}_{ij} = \lambda_{ij} \frac{(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|^3}, \quad (1.4)$$

donde  $\lambda_{ij} = m_i m_j - q_i q_j$ . Si  $\lambda_{ij} > 0$  la fuerza entre las partículas es atractiva; si  $\lambda_{ij} < 0$  la fuerza es repulsiva y para  $\lambda_{ij} = 0$  no hay interacción entre ellas.

La fuerza total sobre la partícula  $i$  ejercida por las restantes  $N - 1$  partículas es

$$\mathbf{F}_i = \sum_{i \neq j} \mathbf{F}_{ij}. \quad (1.5)$$

La fuerza (1.5) puede reescribirse como  $\mathbf{F}_i = \nabla_i U(\mathbf{q})$ , donde

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{i < j} \frac{\lambda_{ij}}{\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\|}, \quad (1.6)$$

es la *función potencial del problema cargado de N cuerpos* y  $\nabla_i = \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right)$ .

Las ecuaciones de movimiento del problema cargado de  $N$ -cuerpos están dadas por el sistema

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathcal{M}\ddot{\mathbf{q}} = \nabla U(\mathbf{q}), \quad (1.7)$$

donde  $\nabla$  es el gradiente en  $\mathbb{R}^{3N}$ . El sistema (1.7) está conformado por ecuaciones diferenciales de segundo orden definidas en el espacio de configuración  $X = \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta$ , donde  $\Delta = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j, i \neq j\}$  es el conjunto de las colisiones entre las partículas.

Reescribimos el sistema (1.7) como un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathcal{M}^{-1}\nabla U(\mathbf{q}),\end{aligned}\tag{1.8}$$

definido en el *espacio fase*  $TX = \{(\mathbf{q}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{q} \in X, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{3N}\} \subset \mathbb{R}^6$ , donde  $TX$  es el haz tangente de  $X$ .

### 1.2.1. Formulación variacional del modelo

Introducimos la función Lagrangiana  $L : TX \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M}\dot{\mathbf{q}} + U(\mathbf{q}).\tag{1.9}$$

Si  $\gamma(t) = \mathbf{q}(t)$  es una curva suave definimos el funcional  $\Phi(\gamma)$  en el intervalo cerrado  $[t_1, t_2]$  como

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) dt.$$

**Teorema 1.** *La curva  $\gamma = \mathbf{q}(t)$  es un extremal del funcional  $\Phi(\gamma)$  en el espacio de curvas que pasan por los puntos  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$  y  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$ , si y sólo si,*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0,$$

a lo largo de la curva  $\mathbf{q}(t)$ .

**Definición 1.** *Las ecuaciones*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0,\tag{1.10}$$

*son llamadas las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional  $\Phi(\gamma)$ .*

**Teorema 2.** *Los movimientos del problema cargado de los  $N$  cuerpos (1.8) coinciden con los extremales del funcional  $\Phi(\gamma)$ .*

**Teorema 3.** *El sistema de ecuaciones de Lagrange es equivalente a un sistema de  $2n$  ecuaciones de primer orden (ecuaciones de Hamilton)*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \\ \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},\end{aligned}\tag{1.11}$$

donde el Hamiltoniano

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\tag{1.12}$$

es la transformación de Legendre de la función Lagrangiana (1.9). El Hamiltoniano del problema cargado de  $N$  cuerpos está dado por (1.12).

El Hamiltoniano (1.12) folia al espacio fase en variedades invariantes de codimensión 1 llamadas *niveles de energía*  $E_h = H^{-1}(h)$ . Las variables  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{p}$  son llamadas *variables conjugadas*, mientras que  $N$  es el número de grados de libertad del sistema. Introducimos la siguiente notación

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad J = J_n \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\mathbf{z}}H = \nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial z_1} \end{pmatrix},$$

donde  $I_n$  y  $0_n$  son la matriz identidad y cero de  $n \times n$  respectivamente. En este contexto el sistema (1.11) se reescribe

$$\dot{\mathbf{z}} = J\nabla H(\mathbf{z}). \quad (1.13)$$

De la teoría de ecuaciones diferenciales se tiene la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (1.13); para cada condición inicial  $\mathbf{z}_0$  existe una única solución maximal  $\mathbf{z}(t)$  de (1.13) que satisface  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0$ .

La energía cinética es una forma cuadrática definida positiva, se tiene que  $U(\mathbf{q}) \leq h$ . El conjunto de configuraciones  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta$  que satisfacen la desigualdad anterior es llamado la *región de Hill* para el nivel de energía  $h$ . Las proyecciones de las soluciones  $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))^T$  de (1.11) en  $E_h$  están contenidas en la región de Hill, cuya frontera correspondiente a  $U(\mathbf{q}) = h$  es llamada el *conjunto de velocidad cero*.

### 1.2.2. Identidad de Lagrange-Jacobi

El *momento de inercia*  $I : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , es una función que proporciona una medida del tamaño del sistema y está definida como

$$I = \mathbf{q}^T \mathcal{M} \mathbf{q}. \quad (1.14)$$

El valor  $I = 0$  representa la configuración donde las partículas se encuentran en colisión total; a medida que  $I$  aumenta, el sistema de partículas se expande y escapa a infinito cuando  $I \rightarrow \infty$ .

Derivando el momento de inercia (1.14) dos veces y sustituyendo las ecuaciones de movimiento (1.7), se obtiene

$$\ddot{I} = \ddot{\mathbf{q}} \mathcal{M} \mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^T \nabla U(\mathbf{q}) + \mathbf{p}^T \mathcal{M}^{-1} \mathbf{p}.$$

El potencial es una función homogénea de grado  $-1$ , aplicando el Teorema de Euler se tiene que

$$\mathbf{q}^T \nabla U = -U(\mathbf{q}).$$

De esta forma, se obtiene la *identidad de Lagrange-Jacobi*

$$\ddot{I} = 2T - U = T + h = U + 2h.$$

## 1.3. Formas normales

La teoría de formas normales es un técnica consistente en transformar el campo vectorial original en otro de forma más simple mediante un cambio apropiado de coordenadas, de tal forma que el campo vectorial



contenga el menor número de términos no lineales. De este modo, la información sobre la dinámica del sistema alrededor del punto crítico se hace más evidente.

La técnica utilizada en este trabajo se basa en definir un operador lineal  $L_A^k$  en el espacio de polinomios homogéneos  $H_n^k$  sobre  $\mathbb{R}^n$ . Para los términos no lineales donde el núcleo del operador  $L_A^k$  no se anula, llamados "términos no resonantes", es posible realizar un cambio de variables cercano a la identidad de tal forma que dichos términos se pueden eliminar. La expresión del campo vectorial resultante es llamada la forma normal de Birkhoff del campo vectorial. La forma normal sólo contendrá términos no lineales resonantes que no pueden ser eliminados por algún cambio de variables lineal polinomial. A continuación introducimos algunos resultados relevantes de la teoría de formas normales, los cuales pueden ser consultados a detalle en las siguientes referencias [Ashkenazi 1988, Chen 1999, Samovol 2004, Wiggins 1990].

Consideraremos el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.15)$$

donde  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial  $C^r$  ( $r > 2$ ) con un punto crítico en el origen  $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Sea  $A = D\mathbf{X}(\mathbf{0})$ , expandiendo en serie de Taylor el campo vectorial  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$  obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (1.16)$$

donde  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = O(\|\mathbf{x}\|^2)$  de clase  $C^r$ . El objetivo es encontrar un cambio de coordenadas  $C^r$

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (1.17)$$

para  $\mathbf{y} \in \Omega$  vecindad del origen en  $\mathbb{R}^n$ , que transforme a (1.16) en un sistema de ecuaciones diferenciales que contenga la información esencial del flujo alrededor de la singularidad con un número menor de términos no lineales. Sustituyendo (1.17) en (1.16) obtenemos

$$\dot{\mathbf{y}} = \left(\mathbf{h}_y(\mathbf{y})\right)^{-1} A\mathbf{h}(\mathbf{y}) + \left(\mathbf{h}_y(\mathbf{y})\right)^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{h}(\mathbf{y})), \quad (1.18)$$

donde  $\mathbf{h}_y(\mathbf{y}) = \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y})\right)$  es la matriz jacobiana de la transformación.

Consideraremos solamente los cambios de coordenadas cercanos a la identidad, de la forma

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{h}^k(\mathbf{y}), \quad (1.19)$$

donde  $\mathbf{h}^k(\mathbf{y})$  es un vector cuyas entradas son polinomios homogéneos de orden  $k \geq 2$ .

Calculando la matriz jacobiana de (1.19), obtenemos

$$\mathbf{h}_y(\mathbf{y}) = I + \mathbf{h}_y^k, \quad (1.20)$$

donde  $\mathbf{h}_y^k(\mathbf{y}) = \left(\frac{\partial \mathbf{h}^k}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y})\right)$ . Obtenemos de (1.20)

$$\left(\mathbf{h}_y(\mathbf{y})\right)^{-1} = I - \mathbf{h}_y^k(\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}\|^{2k-2}), \quad (1.21)$$

el sistema (1.18) se transforma en

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad (1.22)$$

donde  $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = O(\|\mathbf{y}\|^2)$  es de clase  $C^r$ .

Para simplificar  $\mathbf{g}(\mathbf{y})$  desarrollamos a la función  $\mathbf{h}$  en serie de Taylor

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^2(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^3(\mathbf{x}) + \cdots, \quad \mathbf{h}^k \in H_n^k, \quad (1.23)$$

donde  $H_n^k$  es el espacio lineal de vectores en  $\mathbb{R}^n$  cuyas entradas son polinomios homogéneos de grado  $k \geq 2$  en  $n$ -variables con rango en  $\mathbb{R}^n$ .

Sustituyendo (1.19), (1.20), (1.21) y (1.23) en (1.18) obtenemos

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{F}^2(\mathbf{y}) + \cdots + \mathbf{F}^{k-1}(\mathbf{y}) + \left[ \mathbf{F}^k(\mathbf{y}) - \left( \mathbf{h}_y^k(\mathbf{y})A\mathbf{y} - A\mathbf{h}^k(\mathbf{y}) \right) \right] + O(\|\mathbf{y}\|^{k+1}). \quad (1.24)$$

Introducimos el operador  $L_A^k : H_n^k \rightarrow H_n^k$  para cada  $k \geq 2$  definido por

$$(L_A^k \mathbf{h}^k)(\mathbf{y}) = \mathbf{h}_y^k(\mathbf{y})A\mathbf{y} - A\mathbf{h}^k(\mathbf{y}).$$

Sea  $R^k$  el rango de  $L_A^k$  y  $C^k$  un espacio complementario a  $R^k$  en  $H_n^k$ ; tenemos la descomposición

$$H_n^k = R^k \oplus C^k.$$

El siguiente teorema nos permite simplificar el sistema de ecuaciones diferenciales (1.15).

**Teorema 4.** *Sea  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial  $C^r$  con  $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Sea  $D\mathbf{X}(\mathbf{0}) = A$ . Consideremos la descomposición  $H_n^k = R^k \oplus C^k$ . Entonces existen transformaciones de coordenadas cercanas a la identidad  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{h}^k(\mathbf{y})$ , donde  $\mathbf{y} \in \Omega$ ;  $k = 2, \dots, r$  y  $\mathbf{h}^k \in H_n^k$ , tal que (1.15) es transformado en*

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{g}^2(\mathbf{y}) + \cdots + \mathbf{g}^r(\mathbf{y}) + O(\|\mathbf{y}\|^{r+1}) \quad (1.25)$$

donde  $\mathbf{g}^k \in C^k$  para  $k = 2, \dots, r$ .

**Definición 2.** *Supongamos que tenemos la descomposición  $H^k = R^k \oplus C^k$  para  $k = 2, 3, \dots, r$ . La ecuación truncada*

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{g}^2(\mathbf{y}) + \cdots + \mathbf{g}^r(\mathbf{y}),$$

donde  $\mathbf{g}^k \in C^k$ , es la forma normal de orden  $r \geq 2$  de la ecuación (1.15) asociada a la matriz  $A$ , o la  $A$ -forma normal de (1.15) de orden  $r$ .

**Observación 1.** *La forma  $A$ -normal no es única, depende de la elección de los subespacios complementarios  $C^k$ .*

Es posible encontrar espacios complementarios al conjunto  $R^k$  en  $H_n^k$  a partir del cálculo del núcleo del operador  $L_A^k$  para una matriz  $A$  dada.

**Proposición 1.** *El conjunto  $\text{Ker}(L_A^k)$  es un subespacio ortogonal complementario a  $R^k$  en  $H_n^k$ , es decir,*

$$H_n^k = R^k \oplus \text{Ker}(L_A^k).$$

Si la matriz  $A$  es diagonal, los cálculos para obtener una base del núcleo del operador  $L_A^k$  se simplifican.

**Teorema 5.** *Sea  $A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Entonces para el monomio  $x^\alpha \mathbf{e}_j$  con  $|\alpha| = k \geq 2$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  se tiene que*

$$L_A^k(x^\alpha \mathbf{e}_j) = (\alpha \cdot \lambda - \lambda_j)x^\alpha \mathbf{e}_j,$$

donde  $\alpha \cdot \lambda = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i$ , para  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  y  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Los vectores  $\mathbf{e}_j$  son los vectores canónicos de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} L_A^k(x^\alpha \mathbf{e}_j) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^\alpha \mathbf{e}_j)Ax - Ax^\alpha \mathbf{e}_j = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{x^\alpha}{x_i} \lambda_i x_i \right) \mathbf{e}_j - \lambda_j x^\alpha \mathbf{e}_j \\ &= (\alpha \cdot \lambda - \lambda_j)x^\alpha \mathbf{e}_j. \end{aligned}$$

□

**Corolario 1.** *El monomio  $x^\alpha \mathbf{e}_j \in \text{Ker}(L_A^k)$  si y sólo si  $\alpha \cdot \lambda - \lambda_j = 0$ .*

**Definición 3.** *Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los valores propios de la matriz  $A$ . El monomio  $x^\alpha \mathbf{e}_j$  se dice resonante si*

$$\alpha \cdot \lambda - \lambda_j = 0, \tag{1.26}$$

en caso contrario, se dice que es un monomio no resonante.

Se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 6.** *Sea  $A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Entonces es posible elegir una forma  $A$ -normal de orden  $r$  que contenga sólo términos resonantes.*

## 1.4. Teoría de la variedad central

Considere el sistema no lineal

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{X}(\mathbf{v}), \tag{1.27}$$

donde  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{X}$  es un campo vectorial suave.

**Definición 4.** *Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es una Variedad Invariante Local para (1.27), si para  $\mathbf{v}_0 \in S$ , la solución  $\mathbf{v}(t)$  de (1.27) con  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$  permanece en  $S$  para  $|t| < T$  donde  $T > 0$ . Si podemos elegir  $T = \infty$ , entonces decimos que  $S$  es una Variedad Invariante.*

Supóngase que  $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y que  $D\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , donde  $A$  es una matriz  $k \times k$  con valores propios con parte real cero y  $B$  una matriz  $(n - k) \times (n - k)$  con valores propios con parte real negativa.

Sea  $\mathbf{v} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})^T$ , con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n-k}$ , obtenemos la siguiente representación para el sistema (1.15),

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= B\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\end{aligned}\tag{1.28}$$

donde  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{g}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y  $D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = D\mathbf{g}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , y  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^r$ , con  $r \geq 2$  [Wiggins 1990].

**Definición 5.** Una variedad invariante  $W^c(\mathbf{0})$  será llamada variedad central para el sistema (1.28) si puede ser representada de manera local como

$$W^c(\mathbf{0}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \mid \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \|\mathbf{x}\| < \delta, \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, D\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\},$$

para  $\delta$  suficientemente pequeña.

**Observación 2.** El hecho de que  $\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y  $D\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  nos garantiza que la variedad central  $W^c(\mathbf{0})$  es tangente al espacio propio central  $E^c$  en el origen.

Los siguientes tres teoremas que enunciaremos se demuestran en [Carr 1981]. El primero de ellos nos garantiza la existencia de la variedad central.

**Teorema 7.** Existe una  $C^r$  variedad central  $W^c(\mathbf{0})$  para el sistema (1.28). La dinámica del sistema (1.28) restringida a la variedad central  $W^c(\mathbf{0})$ , está dada para  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$  con  $\|\mathbf{u}\| \ll \delta$  por el siguiente sistema  $k$ -dimensional

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{h}(\mathbf{u})).\tag{1.29}$$

El siguiente resultado establece que la dinámica del sistema de ecuaciones diferenciales (1.29) cerca de  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  determina la dinámica del sistema global (1.28) en una vecindad de  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ .

**Teorema 8.** *i) Supongamos que  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.29), entonces  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  es un equilibrio estable (asintóticamente estable) (inestable) del sistema (1.28).*

*ii) Supongamos que el equilibrio  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  del sistema (1.28) es estable. Entonces, si  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$  es una solución de (1.28) con  $\|(\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0))\|$  lo suficientemente pequeña, entonces existe una solución  $\mathbf{u}(t)$  de (1.29) tal que*

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{u}(t) + O(e^{-\gamma t}), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{u}(t)) + O(e^{-\gamma t}),\end{aligned}$$

donde  $\gamma > 0$  es una constante.

**Observación 3.** El teorema 8 afirma que la solución  $\mathbf{u}(t)$  del sistema (1.29), representa, de manera aproximada, la proyección de la solución  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$  del sistema (1.28), sobre el eigenspacio  $E^c \cong \mathbb{R}^k$ .

A continuación formularemos las ecuaciones cuya incógnita es la función  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ . Sea  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \in W^c(\mathbf{0})$ ; se cumple que  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t))$ , derivando con respecto al tiempo obtenemos

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{h}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}.\tag{1.30}$$

Todos los puntos sobre la variedad central  $W^c(\mathbf{0})$  satisfacen las ecuaciones diferenciales (1.28), la ecuación (1.30) es equivalente a la ecuación

$$B\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) = D\mathbf{h}(\mathbf{x})(A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))) - B\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}.$$

Sea

$$N(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = D\mathbf{h}(\mathbf{x})(A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}))) - B\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})). \quad (1.31)$$

El objetivo es encontrar  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  tal que satisfaga la ecuación (1.31), de tal forma que su gráfica sea una variedad invariante. La ecuación (1.31) se le conoce como la *ecuación homológica* [Wiggins 1990]; encontrar la solución de esta ecuación es en general más difícil que resolver el sistema (1.29), sin embargo, el siguiente teorema permite aproximar la solución de (1.29) con el grado de precisión que se desee.

**Teorema 9.** *Sea  $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  de clase  $C^1$  con  $\phi(\mathbf{0}) = D\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  tal que  $N(\phi(\mathbf{x})) = O(\|\mathbf{x}\|^q)$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ , para algún  $q > 1$ . Entonces  $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})\| = O(\|\mathbf{x}\|^q)$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ .*

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= B\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \\ \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= C\mathbf{z} + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \end{aligned} \quad (1.32)$$

donde  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$ , coordenadas correspondientes a los espacios lineales central, estable e inestable respectivamente;  $A$  es una matriz  $c \times c$  con valores propios con parte real 0,  $B$  es una matriz  $s \times s$  con valores propios con parte real negativa y  $C$  es una matriz  $u \times u$  con valores propios con parte real positiva. Las funciones  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in C^r$  satisfacen las condiciones

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{g}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad D\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = D\mathbf{g}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = D\mathbf{h}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

en una vecindad del origen.

En este caso,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$  es un punto inestable pues existe una variedad inestable de dimensión  $u$ . La teoría de la variedad central es válida en este caso. Por el teorema 7 existe una variedad central  $W^c(\mathbf{0})$  dada por el conjunto

$$W^c(\mathbf{0}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u \mid \mathbf{y} = \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{z} = \mathbf{h}_2(\mathbf{x}), \mathbf{h}_i(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, D\mathbf{h}_i(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\},$$

donde  $i = 1, 2$ . para  $\|\mathbf{x}\|$  suficientemente pequeña. El campo vectorial restringido a  $W^c(\mathbf{0})$  está dado por el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^c. \quad (1.33)$$

La variedad central  $W^c(\mathbf{0})$  es invariante bajo la dinámica generada por (1.33). Obtenemos las ecuaciones homológicas

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x})), \\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} &= D\mathbf{h}_1(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = B\mathbf{h}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x})), \\ \frac{d\mathbf{z}}{dt} &= D\mathbf{h}_2(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = C\mathbf{h}_2(\mathbf{x}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (1.34)$$

del sistema anterior obtenemos las ecuaciones homológicas para  $\mathbf{h}_1(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{h}_2(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} D\mathbf{h}_1(\mathbf{x})[A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x}))] - B\mathbf{h}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x})) &= \mathbf{0}, \\ D\mathbf{h}_2(\mathbf{x})[A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x}))] - C\mathbf{h}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{h}_1(\mathbf{x}), \mathbf{h}_2(\mathbf{x})) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

El teorema 9 es válido también en este caso tridimensional, las soluciones de las ecuaciones (1.35) pueden ser aproximadas mediante series de potencias de  $\mathbf{x}$ .

## 1.5. Continuación de soluciones periódicas

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mu), \quad (1.36)$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$  es un parámetro escalar y  $\mathbf{X} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La solución que satisface las condiciones iniciales  $\mathbf{x}(0, \mathbf{y}, \mu) = \mathbf{y}$  para  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  la denotaremos como  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{y}, \mu)$ .

Consideremos condiciones iniciales  $\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu}$  tales que la solución  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu})$  es periódica de periodo  $\bar{\tau}$

$$\mathbf{x}(t, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu}) = \mathbf{x}(t + \bar{\tau}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu}).$$

Del teorema de existencia y unicidad de soluciones, es necesario y suficiente que

$$\mathbf{x}(0, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu}) = \mathbf{x}(\bar{\tau}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu}) = \bar{\mathbf{y}}. \quad (1.37)$$

En el sistema (1.36) buscamos soluciones periódicas cercanas a la solución periódica  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu})$  con periodo  $\bar{\tau}$ , para valores  $\mu \approx \bar{\mu}$ ,  $\mathbf{y} \approx \bar{\mathbf{y}}$  y  $\tau \approx \bar{\tau}$ .

Algunos cambios de condiciones iniciales pueden resultar en soluciones que no son periódicas, para evitar esta situación fijamos una componente del vector  $\mathbf{y}$ . Sea  $y_m = \bar{y}_m$  y  $y_k \neq \bar{y}_k$  para  $k = 1, \dots, m-1$ . La solución periódica (1.37) satisface

$$\mathbf{x}(\bar{\tau}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu}) - \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

las soluciones periódicas buscadas deben satisfacer de igual manera la ecuación vectorial

$$\varphi(\tau, \mathbf{y}, \mu) \equiv \mathbf{x}(\tau, \mathbf{y}, \mu) - \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (1.38)$$

consistente en  $m$  ecuaciones escalares con  $m+1$  incógnitas correspondientes a las  $m$  componentes de  $\mathbf{y}$  y al nuevo periodo  $\tau$  para cada  $\mu$ . La última ecuación necesaria para completar el sistema es  $y_m = \bar{y}_m$ . Explícitamente

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau, y_1, \dots, \bar{y}_m, \mu) &= 0, \\ &\vdots \\ \varphi_{m-1}(\tau, y_1, \dots, \bar{y}_m, \mu) &= 0, \\ y_m &= \bar{y}_m. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Los valores  $\mu = \bar{\mu}$ ,  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$  y  $\tau = \bar{\tau}$  satisfacen el sistema de ecuaciones (1.39).

El determinante del sistema (1.39) es

$$D = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial \tau} \end{pmatrix},$$

evaluado en  $\tau = \bar{\tau}$ ,  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$  y  $\mu = \bar{\mu}$ . El vector ubicado en la última columna del determinante se transforma en

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \dot{\mathbf{x}}(\tau, \mathbf{y}, \mu) = \mathbf{X}(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{y}, \mu), \mu),$$

dado que la condición inicial  $\bar{\mathbf{y}}$  no depende del tiempo. Para los valores  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\mathbf{y}}$ ,  $\bar{\mu}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu}).$$

El resto de los elementos se obtiene a partir de las ecuaciones

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial X_i}{\partial y_k} - \delta_{ik},$$

evaluadas en  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{\mathbf{y}}$ ,  $\bar{\mu}$ .

Al diferenciar las ecuaciones de movimiento (1.36) en ambos miembros respecto a la condición inicial obtenemos

$$\frac{\partial \dot{X}_i}{\partial y_k} = \frac{\partial X_i}{\partial y_j} \frac{\partial \dot{X}_j}{\partial y_k},$$

donde la suma es con respecto a la variable  $j$ . Dado que las condiciones iniciales y el tiempo son variables independientes, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \frac{dX_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial y_k}.$$

Los elementos en las primeras  $m-1$  columnas del determinante pueden obtenerse al integrar las ecuaciones variacionales

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X_i}{\partial y_k} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \frac{\partial \dot{X}_j}{\partial y_k}, \quad (1.40)$$

donde  $\frac{\partial X_i}{\partial X_j} = Y_{ij}(\mathbf{x}(t, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mu}), \bar{\mu})$  es evaluado a lo largo de la solución generada.

Si  $D \neq 0$ , es posible resolver el sistema de  $m$  ecuaciones con  $m$  incógnitas, cuya solución es de la forma

$$\begin{aligned} y_i - \bar{y}_i &= A_i(\mu - \bar{\mu}) + B_i(\mu - \bar{\mu})^2 + \cdots, & i = 1, 2, \dots, m-1, \\ y_m - \bar{y}_m &= 0, \\ \tau - \bar{\tau} &= A(\mu - \bar{\mu}) + B(\mu - \bar{\mu})^2 + \cdots, \end{aligned} \quad (1.41)$$

donde  $A_i, B_i, A, B \in \mathbb{R}$  [Szebehely 1967].

## Capítulo 2

# PROBLEMA COLINEAL CARGADO DE TRES CUERPOS

En este capítulo se estudia la dinámica cercana a la colisión triple del problema colineal cargado de tres cuerpos en el contexto de las coordenadas de McGehee  $(r, v, s, u)$  y de las configuraciones centrales colineales. Se clasifican las variedades de colisión para distintos valores de  $\lambda_{ij}$  y en particular se estudian las variedades de colisión para el caso donde la función potencial  $U(s)$  es una función simétrica respecto a la recta  $s = 0$  en las coordenadas de McGehee.

### 2.1. Ecuaciones de movimiento

Consideremos tres partículas puntuales con masas  $m_i > 0$  y cargas  $q_i \in \mathbb{R}$ , cuyos movimientos están restringidos a  $\mathbb{R}$ . La posición de cada partícula se denotará por  $x_i \in \mathbb{R}$ . Una configuración de este sistema es un vector  $\mathbf{q} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ , mientras  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T \in \mathbb{R}^3$  es el vector de los momentos. Supondremos que las configuraciones de las partículas satisfacen  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ .

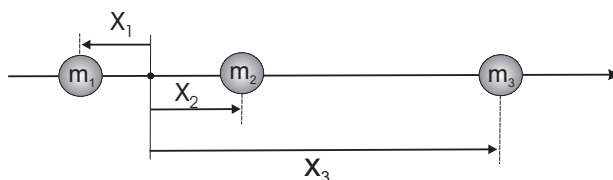


Figura 2.1: Problema colineal cargado de tres cuerpos en coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$ .



Los movimientos de las partículas están modelados por el sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= \frac{\lambda_{12}}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{\lambda_{13}}{(x_1 - x_3)^2}, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -\frac{\lambda_{12}}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{\lambda_{23}}{(x_3 - x_2)^2}, \\ m_3 \ddot{x}_3 &= -\frac{\lambda_{13}}{(x_3 - x_1)^2} - \frac{\lambda_{23}}{(x_3 - x_2)^2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

obtenido a partir del sistema (1.7), donde  $\lambda_{ij} = m_i m_j - q_i q_j$ . La energía potencial del problema colineal cargado de tres cuerpos está dada por la función  $U : (\mathbb{R}^3 \setminus \Delta) \rightarrow \mathbb{R}$

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{\lambda_{12}}{|x_1 - x_2|} + \frac{\lambda_{13}}{|x_1 - x_3|} + \frac{\lambda_{23}}{|x_2 - x_3|}, \quad (2.2)$$

donde  $|\cdot|$  es el valor absoluto de  $\mathbb{R}$  y  $\Delta$  es el conjunto de las configuraciones que representan a las colisiones.

El sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) tiene la estructura Hamiltoniana con función Hamiltoniana  $H : (\mathbb{R}^3 \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathcal{M}^{-1} \mathbf{p} - U(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{p_i^2}{m_i} - \frac{\lambda_{12}}{|x_1 - x_2|} - \frac{\lambda_{13}}{|x_1 - x_3|} - \frac{\lambda_{23}}{|x_2 - x_3|} = h. \quad (2.3)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de las ecuaciones de Hamilton (1.11). La dimensión del sistema se reduce fijando el centro de masa en el origen. Las configuraciones se restringen al subespacio lineal  $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q} \in (\mathbb{R}^3 \setminus \Delta) \mid m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}$ ; los momentos se restringen al subespacio lineal  $\mathbf{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \mid p_1 + p_2 + p_3 = 0\}$ . El espacio fase  $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$  es de dimensión cuatro; los niveles de energía  $E_h$  son de dimensión tres.

### 2.1.1. Coordenadas $(z_1, z_2)$

Consideremos con las configuraciones que satisfacen la desigualdad  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ .

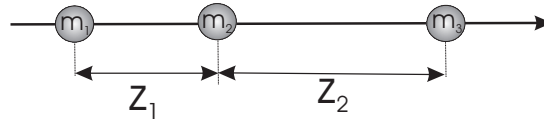


Figura 2.2: Coordenadas  $(z_1, z_2)$ .

Introducimos el sistema de coordenadas  $(z_1, z_2)$  [Broucke 1980] definido por  $z_1 = x_2 - x_1$ ,  $z_2 = x_3 - x_2$ , donde  $z_1 \geq 0$  es la distancia entre las partículas  $m_1$  y  $m_2$ , mientras que  $z_2 \geq 0$  es la distancia entre las partículas  $m_2$  y  $m_3$  (figura 2.2). Sea  $M = \sum_{i=1}^3 m_i$  la masa total del sistema de partículas. El movimiento tiene lugar en el semiplano de  $\mathbb{R}^2$  determinado por las condiciones  $z_1 \geq 0$  y  $z_2 \geq 0$ .

La función potencial (1.5) se escribe

$$U(z_1, z_2) = \frac{\lambda_{12}}{z_1} + \frac{\lambda_{23}}{z_2} + \frac{\lambda_{13}}{z_1 + z_2}.$$

Obtenemos el Hamiltoniano en las nuevas coordenadas a partir de (2.3)

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} p_1^2 - \frac{2}{m_2} p_1 p_2 + \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} p_2^2 \right\} - U(z_1, z_2), \quad (2.4)$$

donde los momentos  $(p_1, p_2)^T$  están relacionados con las componentes de la velocidad en la forma

$$p_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3)}{M} \dot{z}_1 + \frac{m_1 m_3}{M} \dot{z}_2, \quad p_2 = \frac{m_1 m_3}{M} \dot{z}_1 + \frac{m_3(m_1 + m_2)}{M} \dot{z}_2.$$

Las colisiones binarias  $z_1 = 0$  y  $z_2 = 0$  se regularizan mediante la aplicación de la técnica de Levi-Civita [Levi-Civita 1920] mediante la siguiente transformación en las posiciones y el reescalamiento

$$z_1 = \xi_1^2, \quad z_2 = \xi_2^2, \quad dt = 4z_1 z_2 ds = 4\xi_1^2 \xi_2^2 ds. \quad (2.5)$$

Introducimos la función generadora  $W = p_1 \xi_1^2 + p_2 \xi_2^2$  para extender la transformación de Levi-Civita a una transformación canónica. Para los momentos obtenemos la transformación  $\eta_i = 2\xi_i p_i$ .

El Hamiltoniano (2.4) en coordenadas de Levi-Civita se escribe como

$$H = \frac{1}{8} \left\{ \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} - \frac{2}{m_2} \frac{\eta_1 \eta_2}{\xi_1 \xi_2} + \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} \frac{\eta_2^2}{\xi_2^2} \right\} - U(\xi_1, \xi_2). \quad (2.6)$$

Introducimos el Hamiltoniano  $K = 4(H - h)\xi_1^2 \xi_2^2$  para el valor fijo de la energía  $h$ , explícitamente

$$K = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \xi_2^2 \eta_1^2 - \frac{2}{m_2} \xi_1 \xi_2 \eta_2 \eta_1 + \frac{m_2 + m_3}{m_2 m_3} \xi_1^2 \eta_2^2 \right\} - \widehat{U}(\xi_1, \xi_2), \quad (2.7)$$

donde la función potencial es

$$\widehat{U}(\xi_1, \xi_2) = 4 \left( \lambda_{12} \xi_2^2 + \lambda_{23} \xi_1^2 + \lambda_{13} \frac{\xi_1^2 \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} + h \xi_1^2 \xi_2^2 \right),$$

Las ecuaciones diferenciales en coordenadas de Levi-Civita asociadas al Hamiltoniano (2.7) se obtienen a partir de las ecuaciones de Hamilton (1.11).

## 2.2. Configuraciones centrales en el problema cargado de tres cuerpos

Para iniciar con el estudio de las soluciones cercanas a la colisión triple es necesario conocer las configuraciones centrales del problema colineal cargado de tres cuerpos. Intuitivamente una configuración central colineal (*CCC*) es una configuración del sistema en la cual el cociente de las distancias  $\frac{z_2}{z_1}$  es una constante para todo tiempo. Las (*CCC*) son soluciones particulares que inician y terminan en colisión triple dando lugar a las soluciones homotéticas (sección 2.3.4). El número de configuraciones centrales en el problema cargado de los tres cuerpos se ha estudiado en [Pérez-Chavela-Saari 1996]; en este trabajo en

particular se utiliza el conteo de las configuraciones centrales para el caso colineal cargado. A continuación introducimos brevemente el planteamiento para el cálculo de las (CCC).

Consideremos tres partículas de masas  $m_i \geq 0$  y cargas  $q_i \in \mathbb{R}$ . Sea  $\mathbf{q}_i$  el vector de posición de la partícula  $i$  respecto al centro de masa en el origen  $\mathbf{0}$ . El potencial  $U$  y el momento de inercia  $I$  están definidos en las secciones 2.1 y 1.2.2 respectivamente.

**Definición 6.** Una configuración  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^9 \setminus \Delta$  es una configuración central (CC), si y sólo si satisface

$$\nabla(IU^2) = 0. \quad (2.8)$$

Equivalentemente, una configuración  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^9 \setminus \Delta$  es una configuración central, si existe una constante  $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  tal que  $M\nabla U(\mathbf{q}) - \lambda\mathbf{q} = 0$ .

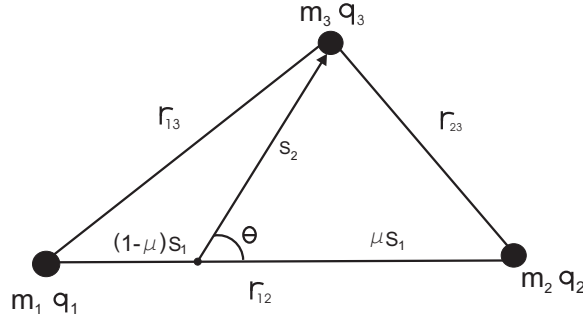


Figura 2.3: Coordenadas de Jacobi  $J_{12}$

Fijemos el centro de masa en el origen, introducimos las coordenadas de Jacobi  $J_{12}$  (figura 2.3)

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{s}_2 = \mathbf{q}_3 - \frac{m_1\mathbf{q}_1 + m_2\mathbf{q}_2}{m_1 + m_2}.$$

Denotaremos a las tres distintas formas de escoger coordenadas de Jacobi como  $J_{ik}$ , donde el subíndice  $ik$  se toma de la diferencia de los vectores  $\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_i$ . Despejando  $\mathbf{q}_i$  obtenemos

$$\mathbf{q}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{s}_1 - \frac{m_3}{M}\mathbf{s}_2, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{s}_1 - \frac{m_3}{M}\mathbf{s}_2, \quad \mathbf{q}_3 = \frac{m_1 + m_2}{M}\mathbf{s}_2.$$

La función potencial (1.6) en términos de  $|\mathbf{s}_1| = s_1$  y  $|\mathbf{s}_2| = s_2$  es

$$U(s_1, s_2) = \frac{\lambda_{12}}{s_1} + \frac{\lambda_{23}}{\sqrt{s_2^2 + \mu^2 s_1^2 - 2\mu s_1 s_2 \cos \theta}} + \frac{\lambda_{13}}{\sqrt{s_2^2 + (1-\mu)^2 s_1^2 - 2(1-\mu)s_1 s_2 \cos \theta}},$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{s}_1$  y  $\mathbf{s}_2$ ;  $\mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ ,  $g_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $g_2 = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{M}$ . El momento de inercia (1.14) se reescribe como  $I = g_1 s_1^2 + g_2 s_2^2$ . Obtenemos

$$\frac{1}{g_2} IU^2 = (\beta + \rho^2) \left( \lambda_{12} + \frac{\lambda_{23}}{\sqrt{\rho^2 + \mu^2 - 2\mu\rho \cos \theta}} + \frac{\lambda_{13}}{\sqrt{\rho^2 + (1-\mu)^2 + 2(1-\mu)\rho \cos \theta}} \right)^2, \quad (2.9)$$

donde  $\beta = \frac{g_1}{g_2}$  y  $\rho = \frac{s_2}{s_1}$ .

Las ecuaciones para encontrar las  $(CC)$  en el problema cargado de tres cuerpos son

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{g_2} IU^2 \right) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{g_2} IU^2 \right) = 0. \quad (2.11)$$

Sea  $R_{ij}$  la distancia relativa entre  $q_i$  y  $q_j$  respecto a  $s_1 = r_{12}$ , i.e.,  $R_{13} = \frac{r_{13}}{s_1}$ ,  $R_{23} = \frac{r_{23}}{s_1}$ ,  $R_{12} = \frac{r_{12}}{s_1} = 1$ . La ecuación (2.9) se reescribe como

$$\frac{1}{g_2} IU^2 = (\beta + \rho^2) \left( \lambda_{12} + \frac{\lambda_{23}}{R_{23}} + \frac{\lambda_{13}}{R_{13}} \right)^2. \quad (2.12)$$

Las  $(CC)$  satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\rho \left( \lambda_{12} + \frac{\lambda_{23}}{R_{23}} + \frac{\lambda_{13}}{R_{13}} \right) + (\rho^2 + \beta) \left( -\frac{\lambda_{23}(\rho - \mu \cos \theta)}{R_{23}^3} - \frac{\lambda_{13}(\rho + (1 - \mu) \cos \theta)}{R_{13}^3} \right) = 0, \quad (2.13)$$

$$-\frac{\lambda_{23}\rho\mu \sin \theta}{R_{23}^3} + \frac{\lambda_{13}(\rho(1 - \mu) \sin \theta)}{R_{13}^3} = 0 \quad (2.14)$$

Estamos interesados en las configuraciones centrales colineales  $(CCC)$ , las configuraciones centrales no colineales se estudian en [Pérez-Chavela-Saari 1996]. Para las configuraciones centrales colineales  $(CCC)$  se tienen los casos siguientes

1.  $\rho = 0$ . La solución para todo  $\theta$  de la ecuación (2.13) está dada por

$$\frac{\lambda_{23}}{\mu^2} = \frac{\lambda_{13}}{(1 - \mu^2)}. \quad (2.15)$$

Cuando los parámetros satisfacen (2.15), tenemos una  $(CCC)$  donde la partícula  $m_3$  se encuentra en el centro de masa de las partículas  $m_1$  y  $m_2$ .

2.  $\sin \theta = 0$ . Se tienen dos posibilidades  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$ . Trabajaremos con  $\theta = 0$  y consideraremos  $\rho > \mu$ , la partícula  $m_3$  se encuentra a la derecha de la partícula  $m_2$ . Sea  $r_{23} = s_2 - \mu s_1$ , entonces  $R_{23} = \rho - \mu$  y  $R_{13} = 1 - \mu + \rho$ , la ecuación (2.13) se reescribe

$$F(\rho) = \lambda_{12} - \frac{\lambda_{23}\mu \left( \rho + \frac{\beta}{\mu} \right)}{(\rho - \mu)^2} + \frac{\lambda_{13}(1 - \mu) \left( \rho + \frac{\beta}{1 - \mu} \right)}{(+1 - \mu + \rho)^2} = 0. \quad (2.16)$$

Denotaremos a la distancia normalizada  $R_{23}$  como  $x = \rho - \mu > 0$ . De (2.16) obtenemos la ecuación

$$\beta_3 x^3 (x + 1)^2 + \beta_3 \mu x^2 (x + 1)^2 - \beta_1 \left( x + 1 + \frac{m_2}{m_3} \right) (x + 1)^2 + \left( x - \frac{m_1}{m_3} \right) x^2 = 0. \quad (2.17)$$

Las soluciones positivas distintas de (2.17) nos proporcionan el número de  $(CCC)$  y cada una de estas soluciones determina una clase particular de  $(CCC)$ .

Introducimos  $\alpha_1 = m_1 \lambda_{23}$ ,  $\alpha_2 = m_2 \lambda_{13}$ ,  $\alpha_3 = (m_1 + m_2) \lambda_{12}$  y los parámetros  $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ,  $\beta_3 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$ . La ecuación (2.17) puede reescribirse como

$$p(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad (2.18)$$

donde

$$\begin{aligned}
a_5 &= \beta_3, \\
a_4 &= (\mu + 2)\beta_3, \\
a_3 &= (2\mu + 1)\beta_3 - \beta_1 + 1, \\
a_2 &= \mu\beta_3 - \left(3 + \frac{m_2}{m_3}\right)\beta_1 - \frac{m_1}{m_3}, \\
a_1 &= -\left(3 + 2\frac{m_2}{m_3}\right)\beta_1, \\
a_0 &= -\left(1 + \frac{m_2}{m_3}\right)\beta_1.
\end{aligned}$$

Las  $(CCC)$  serán las soluciones positivas de la ecuación (2.18). Para verificar el número de soluciones se utiliza la regla de los signos de Descartes.

Para el conteo de las  $(CCC)$  se consideran las diferentes ordenaciones posibles de las tres partículas:  $1-2-3$ ,  $1-3-2$  y  $2-1-3$ . En el conteo de las  $(CCC)$  para la ordenación  $1-2-3$  se consideran todos los valores posibles de masas y cargas, denotados como  $m_i$  y  $q_i$ . Para las dos ordenaciones restantes sólo se necesita etiquetar en la siguiente forma a los parámetros y aplicar los resultados correspondientes.

1. Para la ordenación  $2-1-3$  definimos  $m_i = \bar{m}_i$  y  $q_i = \bar{q}_i$ . Entonces  $\lambda_{ij} = \bar{\lambda}_{ij}$ .
2. Para la ordenación  $1-3-2$  definimos  $m_i = \hat{m}_i$  y  $q_i = \hat{q}_i$ . Entonces  $\lambda_{ij} = \hat{\lambda}_{ij}$ .

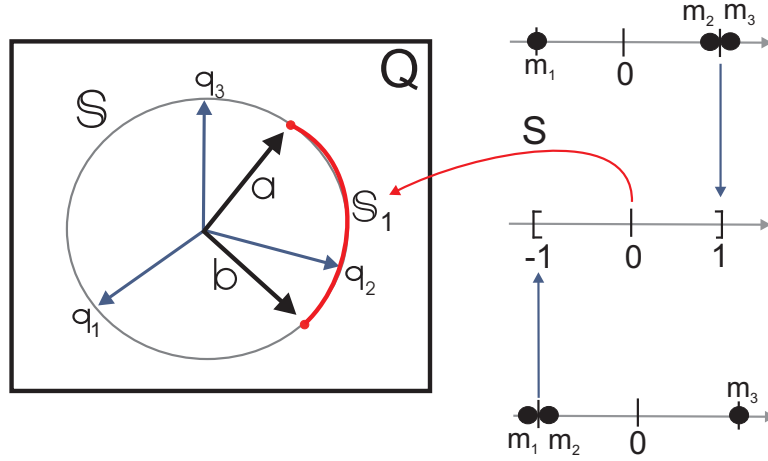
## 2.3. Explosión de coordenadas y variedades de colisión $\Lambda$

Utilizamos los resultados obtenidos por R. McGehee [McGehee 1974] para estudiar el comportamiento de las soluciones en una vecindad de la singularidad debida a la colisión triple. Para este fin, se realizan varios cambios de coordenadas y un reescalamiento del tiempo con los cuales se obtiene un campo vectorial sobre una superficie llamada la variedad de colisión  $\Lambda$  correspondiente a la colisión total. La dinámica sobre  $\Lambda$  proporciona información sobre las soluciones cercanas a ella. El procedimiento se detalla a continuación.

### 2.3.1. Coordenadas de McGehee

Definimos  $r = (m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + m_3x_3^2)^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{q}^T \mathcal{M} \mathbf{q})^{\frac{1}{2}} = I^{\frac{1}{2}}$  donde  $I$  es el momento de inercia (sección 1.2.2). Sea  $\mathbb{S} = \{\mathbf{q} \in \mathbf{Q} \mid r^2 = 1\}$  el círculo unitario en  $\mathbf{Q}$  en la norma definida por el momento de inercia. Las coordenadas  $(r, \mathbf{q}) \in (0, \infty) \times \mathbb{S}$  se pueden identificar como coordenadas polares en  $\mathbf{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}$ , mediante el mapeo  $(r, \mathbf{q}) \rightarrow r\mathbf{q}$ .

Definimos las variables  $\mathbf{s} = r^{-1}\mathbf{q}$ ,  $y = \mathbf{p}^T \mathbf{s}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{p} - y\mathcal{M}\mathbf{s}$ . Para  $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$  se satisface  $\mathbf{x}^T \mathbf{s} = 0$ . El vector momento  $\mathbf{p}$  se descompone en sus componentes radial  $y$  y tangencial  $\mathbf{x}$ . Sea  $\mathbb{T} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{P} \mid \mathbf{q} \in \mathbb{S}, \mathbf{p}^T \mathbf{q} = 0\}$  el haz tangente de  $\mathbb{S}$ . Se tiene que  $r \in (0, \infty)$ ,  $y \in \mathbb{R}$  y  $(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \in \mathbb{T}$ .

Figura 2.4: Espacio de configuraciones  $Q$ .

Obtenemos que  $\mathbf{q} = r\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{x} + y\mathcal{M}\mathbf{s}$ , hemos definido un difeomorfismo  $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow (Q \setminus \{\mathbf{0}\}) \times P$  dado por  $(r, y, (\mathbf{s}, \mathbf{x})) \rightarrow (r\mathbf{s}, \mathbf{x} + y\mathcal{M}\mathbf{s})$ . La relación de energía (2.3) para  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h$  en las coordenadas  $(r, y, \mathbf{s}, \mathbf{x})$  es

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}^T \mathcal{M}^{-1} \mathbf{x} + y^2) - \frac{1}{r}U(\mathbf{s}) = h, \quad (2.19)$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \dot{r} &= y, \\ \dot{y} &= \frac{1}{r}\mathbf{x}^t \mathcal{M}^{-1} \mathbf{x} - \frac{1}{r^2}U(\mathbf{s}), \\ \dot{\mathbf{s}} &= \frac{1}{r}\mathcal{M}^{-1} \mathbf{x}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= -\frac{1}{r}y\mathbf{x} - \frac{1}{r}(\mathbf{x}^t \mathcal{M} \mathbf{x})\mathcal{M}\mathbf{s} + \frac{1}{r^2}U(\mathbf{s})\mathcal{M}\mathbf{s} + \frac{1}{r^2}\nabla U(\mathbf{s}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ahora introducimos los reescalamientos de las velocidades tangencial y radial  $\mathbf{u} = r^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}$ ,  $v = r^{\frac{1}{2}}y$ , definimos el difeomorfismo  $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \rightarrow (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$  dado por  $(r, y, (\mathbf{s}, \mathbf{u})) \rightarrow (r, r^{\frac{1}{2}}v, (\mathbf{s}, r^{-\frac{1}{2}}\mathbf{u}))$ . La relación de energía (2.19) se reescribe como

$$\frac{1}{2}(\mathbf{u}^T \mathcal{M}^{-1} \mathbf{u} + v^2) - U(\mathbf{s}) = rh, \quad (2.21)$$

con ecuaciones de movimiento obtenidas de (2.20)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^{-\frac{1}{2}}v, \\ \dot{y} &= r^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}v^2 + \mathbf{u}^t \mathcal{M}^{-1} \mathbf{u} - U(\mathbf{s})\right), \\ \dot{\mathbf{s}} &= r^{-\frac{3}{2}}\mathcal{M}^{-1} \mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= r^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}v\mathbf{u} - (\mathbf{u}^t \mathcal{M} \mathbf{u})\mathcal{M}\mathbf{s} + U(\mathbf{s})\mathcal{M}\mathbf{s} + \nabla U(\mathbf{s})\right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Las ecuaciones (2.22) definen un campo vectorial en  $[0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}$  con singularidades debidas a las colisiones dobles y a la colisión triple.

Removemos la singularidad  $r = 0$  mediante el reescalamiento  $dt = r^{\frac{3}{2}}d\tau$ . Las ecuaciones (2.22) se transforman en

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= \frac{1}{2}v^2 + \mathbf{u}^t \mathcal{M}^{-1} \mathbf{u} - U(\mathbf{s}), \\ \frac{d\mathbf{s}}{d\tau} &= \mathcal{M}^{-1} \mathbf{u}, \\ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= -\frac{1}{2}v\mathbf{u} - (\mathbf{u}^t \mathcal{M} \mathbf{u}) \mathcal{M} \mathbf{s} + U(\mathbf{s}) \mathcal{M} \mathbf{s} + \nabla U(\mathbf{s}).\end{aligned}\tag{2.23}$$

En el sistema de ecuaciones diferenciales (2.23) se ha eliminado la singularidad  $r = 0$ . Las ecuaciones de movimiento se han extendido a la colisión triple. En la nueva escala de tiempo las soluciones que terminan en colisión triple toman un tiempo infinito en alcanzarla. La dinámica en el conjunto invariante  $r = 0$  se utilizará para describir la dinámica de las soluciones cercanas a la colisión triple. Con el objetivo de eliminar las singularidades debidas a las colisiones dobles, introducimos un nuevo sistema coordenado en el cual el campo vectorial (2.23) se transforma en un campo vectorial en  $\mathbb{R}^4$ .

### 2.3.2. Reducción de coordenadas

Definimos  $\mathbb{S}_1 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{S} \mid s_1 \leq s_2 \leq s_3\}$ ,  $\mathbb{T}_1 = \{(\mathbf{s}, \mathbf{u}) \in \mathbb{T} \mid \mathbf{s} \in \mathbb{S}_1\}$ . Sean  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  y  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$  los puntos en  $\mathbb{S}$  que satisfacen  $a_1 = a_2 \leq a_3$  y  $b_1 \leq b_2 = b_3$ . Los puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son los extremos del arco  $\mathbb{S}_1$  correspondientes a las colisiones binarias (figura 2.4). Explícitamente las coordenadas  $a_i$  y  $b_i$  son

$$\begin{aligned}a_1 &= -K, & a_3 &= \frac{m_1 + m_2}{m_3} K \\ b_1 &= -\frac{m_2 + m_3}{m_1} K, & b_2 &= K,\end{aligned}\tag{2.24}$$

donde  $K = \left( \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_3} + m_1 + m_2 \right)^{-\frac{1}{2}}$ .

El conjunto  $\mathbb{T}_1$  es homeomorfo al conjunto  $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ . Definimos el siguiente difeomorfismo entre  $[-1, 1] \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{T}_1$ . Sean

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

definimos

$$A = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3} A_1 \mathcal{M} + \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}} \mathcal{M}^{-1} A_2.$$

La matriz  $A$  satisface las siguientes propiedades:

- 1)  $A : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ .
- 2)  $A^T \mathcal{M} A = \mathcal{M}$ .
- 3)  $\mathbf{q}^T \mathcal{M} A \mathbf{q} = 0$ , si  $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ .

$$4) A^2 \mathbf{q} = -\mathbf{q}.$$

$$5) \mathbf{a}^T A^T \mathcal{M} \mathbf{b} > 0.$$

El conjunto  $\mathcal{Q}$  está dotado del producto escalar inducido por  $\mathcal{M}$ . La matriz  $A$  define una rotación por  $\frac{\pi}{2}$  en el plano  $\mathcal{Q}$ . Los vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son unitarios y  $\{\mathbf{a}, A\mathbf{a}\}$  es una base ortonormal de  $\mathcal{Q}$ . Entonces

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a}^T \mathcal{M} \mathbf{b}) \mathbf{a} + (\mathbf{a}^T \mathcal{M} \mathbf{b}) A \mathbf{a}, \quad (2.25)$$

donde  $0 < \mathbf{a}^T \mathcal{M} \mathbf{b} < 1$ . Sea  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  el menor número tal que  $\cos 2\lambda = \mathbf{a}^T \mathcal{M} \mathbf{b}$ . El ángulo  $\lambda$  depende solamente de las masas. De la ecuación (2.25) obtenemos

$$\mathbf{b} = (\cos 2\lambda) \mathbf{a} + (\sin 2\lambda) A \mathbf{a}.$$

Para cada  $s \in \mathbb{R}$  definimos

$$S(s) = \frac{1}{\sin 2\lambda} \left( (\sin \lambda(1-s)) \mathbf{a} + (\sin \lambda(1+s)) \mathbf{b} \right). \quad (2.26)$$

Mediante la función  $S$  introducimos las variables  $s \in [-1, 1]$  y  $u \in \mathbb{R}$  ( $\mathbf{s}, \mathbf{u}$ )  $\in \mathbb{T}_1$  definidas como  $s = S^{-1}(\mathbf{s})$  y  $u = \mathbf{s}^T A^T \mathbf{u}$ .

Definimos el difeomorfismo  $[0, \infty) \times \mathbb{R} \times [-1, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}_1$  dado por

$$(r, v, s, u) \rightarrow (r, v, (S(s), u M A S(s)))$$

Sea  $U : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $s \rightarrow U(S(s))$

$$U(s) = \sin 2\lambda \left[ \frac{\lambda_{12}}{(b_2 - b_1) \sin \lambda(1+s)} + \frac{\lambda_{23}}{(a_3 - a_2) \sin \lambda(1-s)} \right. \\ \left. + \frac{\lambda_{13}}{(b_2 - b_1) \sin \lambda(1+s) + (a_3 - a_2) \sin \lambda(1-s)} \right]. \quad (2.27)$$

El campo vectorial en coordenadas  $(r, v, s, u)$  está dado por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= u^2 + \frac{1}{2}v^2 - U(s), \\ \frac{ds}{d\tau} &= \frac{1}{\lambda}u, \\ \frac{du}{d\tau} &= -\frac{1}{2}uv + \frac{1}{\lambda} \frac{dU}{ds}(s), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde  $\lambda \in (0, \frac{\pi}{4})$ . La relación de energía (2.21) es

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(s) = rh. \quad (2.29)$$

Las ecuaciones (2.28) tienen singularidades cuando  $s = \pm 1$  correspondientes a las colisiones binarias.



### 2.3.3. Variedades de colisión $\Lambda$

La variedad de colisión triple  $\Lambda$  es el conjunto

$$\Lambda = \left\{ (r, v, s, u) \mid r = 0, \quad u^2 + v^2 = 2U(s), \quad s \in (-1, 1) \right\}. \quad (2.30)$$

La variedad  $\Lambda$  se puede pensar como un sólido de revolución que se genera para valores de  $s \in (-1, 1)$  tales que  $U(s) > 0$ .  $\Lambda$  es independiente del valor de la energía  $h$ , cada nivel de energía tiene la misma variedad de colisión por frontera.

El sistema (2.28) es invariante bajo la simetría  $(r, v, s, u, t) \rightarrow (r, -v, s, -u, -t)$ . El campo vectorial en  $\Lambda$  es *casi-gradiente* con respecto a la coordenada  $v$ , es decir, la coordenada  $v$  es una función creciente en todas las soluciones del sistema (2.28) que no son puntos de equilibrio, por lo tanto, el flujo sobre  $\Lambda$  no tiene órbitas periódicas [Devaney 1981].

Las coordenadas de los puntos de equilibrio  $(r_0, v_0, s_0, u_0)$  del campo vectorial (2.28) que satisfacen la relación de energía (2.29) son

$$r_0 = 0, \quad u_0 = 0, \quad \frac{dU}{ds}(s_0) = 0, \quad v_0 = \pm \sqrt{2U(s_0)}.$$

Los puntos de equilibrio se localizan en  $\Lambda$ ; satisfacen que  $v_0 \geq 0$ , pues para  $U(s_0) < 0$  no se genera un punto de equilibrio sobre  $\Lambda$ . De la condición  $\frac{dU}{ds}(s_0) = 0$ , existe una correspondencia de los puntos críticos del potencial  $U(s)$  con los puntos de equilibrio del campo vectorial (2.28). Si  $v_0 > 0$ , para cada punto crítico del potencial obtenemos dos puntos de equilibrio en  $\Lambda$ . En el capítulo 3 estudiamos el caso  $v_0 = 0$  donde se genera una variedad con un punto de equilibrio.

Las últimas tres ecuaciones del sistema (2.28) no dependen de la variable  $r$ , esta coordenada puede ser obtenida a partir de la relación de energía tomando un valor fijo de la misma. Para describir la dinámica sobre  $\Lambda$  son suficientes las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= u^2 + \frac{1}{2}v^2 - U(s), \\ \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{\lambda}u, \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{2}uv + \frac{1}{\lambda} \frac{dU}{ds}(s). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Linealizando el campo vectorial (2.31) obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} v & \frac{dU}{ds}(s) & 2u \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{2}u & \frac{1}{\lambda} \frac{d^2U}{ds^2}(s) & -\frac{1}{2}v \end{pmatrix},$$

evaluando en alguno de los puntos de equilibrio  $(r_0, v_0, s_0, u_0) = (0, v_0, s_0, 0)$  obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} v_0 & \frac{dU}{ds}(s_0) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \frac{d^2U}{ds^2}(s_0) & -\frac{1}{2}v_0 \end{pmatrix},$$

con valores propios asociados

$$\mu_1 = v_0 \quad \mu_{2,3} = -\frac{1}{2}v_0 \pm \sqrt{\frac{1}{2}U(s_0) + \frac{4}{\lambda^2} \frac{d^2U}{ds^2}(s_0)},$$

y los vectores propios  $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 0)^T$

$$\mathbf{w}_{2,3} = \left( 0, \frac{\lambda}{2 \frac{d^2U}{ds^2}(s_0)} \left( -\frac{1}{2}v_0 \pm \sqrt{\frac{1}{2}U(s_0) + \frac{4}{\lambda^2} \frac{d^2U}{ds^2}(s_0)} \right), 1 \right)^T.$$

Los vectores  $\mathbf{w}_2$  y  $\mathbf{w}_3$  son tangentes a la variedad de colisión total  $\Lambda$ .

### 2.3.4. Órbitas homotéticas

Existen soluciones particulares que inician y terminan en colisión triple llamadas *soluciones homotéticas* [Devaney 1981]. Fijando  $s = s^*$  y  $u = 0$  en el sistema (2.28) obtenemos que  $\frac{ds}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} = 0$ . El plano  $r - v$  es un conjunto invariante con ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= \left( \frac{1}{2}v^2 - U_\alpha(0) \right), \\ s &= 0, \\ u &= 0. \end{aligned} \tag{2.32}$$

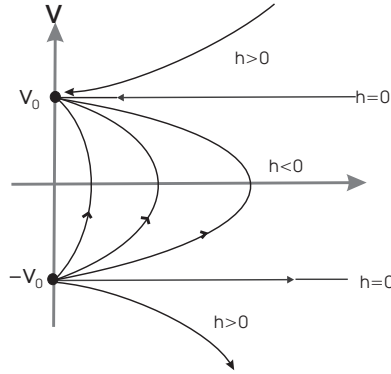


Figura 2.5: Plano fase  $r - v$

El retrato fase determinado por (2.32) se muestra en la figura 2.5. Para cada nivel de energía negativo existe una única solución fuera de  $\Lambda$  que inicia y termina en la variedad de colisión  $r = 0$ ; uniendo puntos de equilibrio  $(0, \pm\sqrt{2U(s_0^*)}, s_0^*, 0)$ , y satisfaciendo que  $s = s^*$  y  $u = 0$  para todo tiempo, dicha solución la llamaremos *órbita homotética*.

### 2.3.5. Regularización de colisiones binarias

Regularizamos las colisiones binarias de manera global mediante el método de Sundman [Sundman 1913]. Físicamente la regularización de colisiones binarias se puede interpretar como un rebote elástico entre dos partículas.

Definimos la nueva función potencial  $W(s) = 2(1 - s^2)U(s)$  sin singularidades en el intervalo  $s \in (-1, 1)$ , obtenida a partir de la función potencial (2.27)

$$W(s) = \frac{2 \operatorname{sen} \lambda}{\lambda} (W_1(s) + W_2(s) + W_3(s)), \quad (2.33)$$

donde

$$W_1(s) = \frac{\lambda_{12}(1-s)}{(b_2 - b_1)\gamma(\lambda(1+s))}, \quad W_2(s) = \frac{\lambda_{23}(1-s)}{(a_3 - a_2)\gamma(\lambda(1-s))},$$

$$W_3(s) = \frac{\lambda \lambda_{13}(1-s^2)}{(b_2 - b_1)\gamma(\lambda(1+s)) + (a_3 - a_2)\gamma(\lambda(1-s))}.$$

Introducimos una nueva velocidad angular  $w = \frac{1-s^2}{\sqrt{W(s)}}u$ . Definimos el difeomorfismo entre los conjuntos  $[0, \infty) \times \mathbb{R} \times (-1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \times \mathbb{R} \times (-1, 1) \times \mathbb{R}$  dado por

$$(r, v, s, u) \rightarrow \left( r, v, s, \frac{1-s^2}{\sqrt{W(s)}}u \right).$$

Obtenemos una nueva relación de energía

$$w^2 + s^2 + \frac{(1-s^2)^2}{W(s)}(v^2 - 2rh) = 1 \quad (2.34)$$

con ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{W(s)}{2(1-s^2)}, \\ \frac{ds}{d\tau} &= \frac{\sqrt{W(s)}}{\lambda(1-s^2)}w, \\ \frac{dw}{d\tau} &= -\frac{1}{2}vw + \frac{\sqrt{W(s)}}{\lambda(1-s^2)} \left( \left( s - \frac{2sw^2}{1-s^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{W'(s)}{W(s)}(1-s^2-w^2) \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Removemos las singularidades  $s = \pm 1$  mediante el reescalamiento  $\frac{d\tau}{d\chi} = \frac{\lambda(1-s^2)}{\sqrt{W(s)}}$ , obteniendo de las ecuaciones (2.35) el nuevo sistema

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\chi} &= \frac{\lambda(1-s^2)}{\sqrt{W(s)}}rv, \\ \frac{dv}{d\chi} &= \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{(1-s^2)}{\sqrt{W(s)}}v^2 - \sqrt{W(s)} \left( 1 - \frac{2w^2}{1-s^2} \right) \right], \\ \frac{dr}{d\chi} &= w, \\ \frac{dw}{d\chi} &= s \left( 1 - \frac{2w^2}{1-s^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{W'(s)}{W(s)}(1-s^2-w^2) - \frac{\lambda(1-s^2)}{2\sqrt{W(s)}}vw. \end{aligned} \quad (2.36)$$

sin singularidades. La relación de energía (2.29) es ahora

$$1 - \frac{2w^2}{1-s^2} = \frac{2(1-s^2)}{W(s)}(v^2 - 2rh) - 1. \quad (2.37)$$

La variedad de colisión triple  $\Lambda$  se obtiene de la relación de energía (2.37) para  $r = 0$

$$w^2 + s^2 + \frac{(1-s^2)^2}{W(s)}v^2 = 1. \quad (2.38)$$

Los puntos de equilibrio se mantienen sin alteración después de la regularización. A continuación se enuncia un resultado utilizado en este capítulo; la demostración se puede consultar en [McGehee 1974].

**Proposición 2.** *El vector  $\mathbf{s}_0 = S(s_0)$  es una configuración central, si y sólo si,  $\frac{dU}{ds}(s_0) = 0$ .*

## 2.4. Clasificación de las variedades de colisión $\Lambda$

Clasificamos las variedades de colisión del problema colineal cargado de tres cuerpos con base al valor de sus parámetros  $\lambda_{ij}$  [Llibre-Pasca 2007]. Utilizamos la continuidad del potencial  $U(s)$  en el intervalo  $(-1, 1)$  y la correspondencia entre los puntos críticos del potencial con las configuraciones centrales del problema colineal cargado de tres cuerpos (proposición 2). Por definición; la forma de la variedad de colisión  $\Lambda$  está determinada por la gráfica del potencial  $U(s)$ .

**Proposición 3.** *El potencial  $U(s)$  satisface:*

- 1)  $U(s)$  es una función continua en el intervalo  $(-1, 1)$ .
- 2) Si  $\lambda_{12} > 0$ , entonces  $\lim_{s \rightarrow -1^+} U(s) = \infty$ ; si  $\lambda_{12} < 0$ , entonces  $\lim_{s \rightarrow -1^+} U(s) = -\infty$ .
- 3) Si  $\lambda_{23} > 0$ , entonces  $\lim_{s \rightarrow 1^-} U(s) = \infty$ ; si  $\lambda_{23} < 0$ , entonces  $\lim_{s \rightarrow 1^-} U(s) = -\infty$ .

Nos interesan las configuraciones centrales colineales del problema cargado de tres cuerpos para bosquejar las posibles gráficas de  $U(s)$ . En la sección 2.2 se introdujo el procedimiento para encontrar configuraciones centrales colineales (*CCC*). Aprovechamos los resultados obtenidos en [Pérez-Chavela-Saari 1996] para clasificar a las variedades de colisión  $\Lambda_k$ .

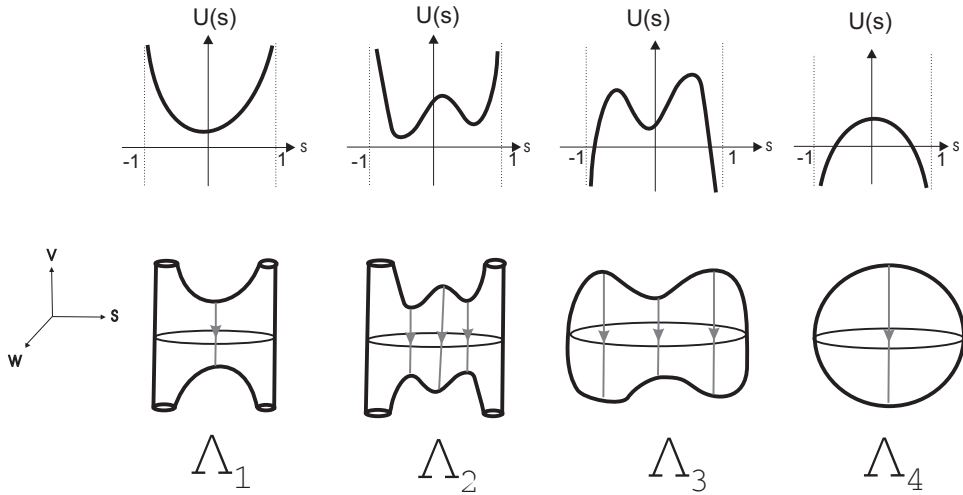
En la sección 2.2 el conteo de las (*CCC*) se realiza con la ordenación de las partículas en la configuración  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ , la cual se denota 1-2-3. Para los casos donde las partículas están ordenadas como 2-1-3 y 1-3-2 se repite el análisis del caso 1-2-3, etiquetando los valores de los parámetros dependiendo la ordenación.

Los potenciales y las variedades de colisión  $\Lambda_k$  para el caso donde todos los parámetros  $\lambda_{ij} \neq 0$  se bosquejan con base a la continuidad de la función potencial  $U(s)$  en el intervalo  $(-1, 1)$  y al número de puntos críticos proporcionado por el número de *CCC*. Las variedades de colisión regularizadas se muestran en las figuras 2.6 y 2.7.

En la tabla 2.1 se muestran el número de *CCC* por cada ordenación de las partículas y la variedad de colisión  $\Lambda_k$  que se genera.

PARÁMETROS $\lambda_{ij}$	NÚMERO DE CCC	NÚMERO DE CCC	NÚMERO DE CCC	VARIEDAD DE COLISIÓN $\Lambda_k$
	ORDENACION 1-2-3	ORDENACION 2-1-3	ORDENACION 1-3-2	
$\lambda_{12} > 0 \quad \lambda_{23} > 0 \quad \lambda_{13} > 0$ $\lambda_{12} < 0 \quad \lambda_{23} < 0 \quad \lambda_{13} < 0$	1	1	1	$\Lambda_1$ $\Lambda_4$
$\lambda_{12} > 0 \quad \lambda_{23} < 0 \quad \lambda_{13} < 0$ $\lambda_{12} < 0 \quad \lambda_{23} > 0 \quad \lambda_{13} > 0$	0,1,2	0,1,2	1,2,3	$\Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_9$ $\Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_9$
$\lambda_{12} < 0 \quad \lambda_{23} > 0 \quad \lambda_{13} < 0$ $\lambda_{12} > 0 \quad \lambda_{23} < 0 \quad \lambda_{13} > 0$	0,1,2	1,2,3	0,1,2	$\Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_9$ $\Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_9$
$\lambda_{12} > 0 \quad \lambda_{23} > 0 \quad \lambda_{13} < 0$ $\lambda_{12} < 0 \quad \lambda_{23} < 0 \quad \lambda_{13} > 0$	1,2,3	0,1,2	0,1,2	$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_8$ $\Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_{10}$

Cuadro 2.1: Número de configuraciones centrales para el problema colineal cargado de tres cuerpos

Figura 2.6: Potenciales  $U(s)$  y variedades de colisión regularizadas  $\Lambda_k$  para  $\lambda_{12}\lambda_{23} > 0$ .

**Observación 4.** *El flujo sobre las variedades  $\Lambda_6, \Lambda_8, \Lambda_9$  y  $\Lambda_{10}$  tiene puntos de equilibrio degenerados, pues  $\frac{d^2U}{ds^2}(s_0^*) = 0$  para algún  $s_0^* \in (-1, 1)$ , ver figura 2.8.*

Los valores propios  $\mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$  dependen de los valores de  $U(s_0)$  y de  $\frac{d^2U}{ds^2}(s_0)$ , donde  $s_0 \in (-1, 1)$ . La dinámica asociada a cada punto de equilibrio hiperbólico se obtiene a partir de la linealización del campo vectorial (2.31) y se puede consultar en la sección 2.3.3.

### 2.4.1. Resultados sobre variedades de colisión

Las dinámicas asociadas a algunas de las variedades  $\Lambda_k$  han sido estudiadas en varios trabajos anteriores. A continuación se enuncian algunas de las referencias relacionadas con esta tesis.

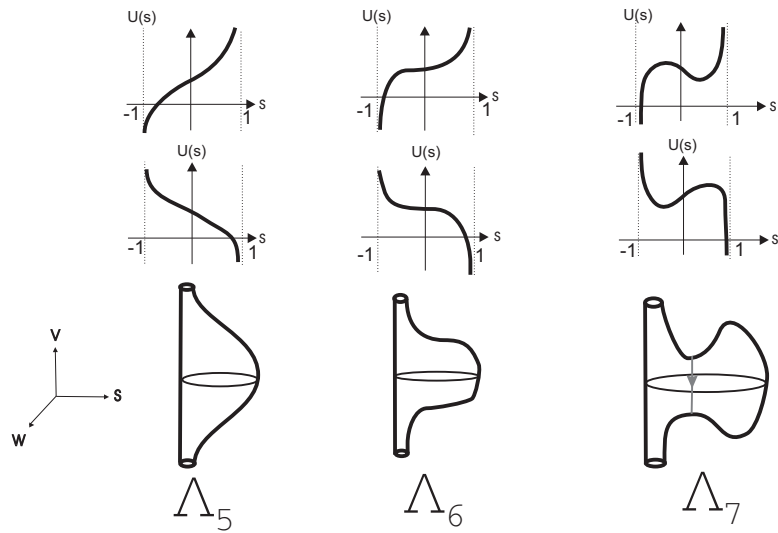


Figura 2.7: Potenciales  $U(s)$  y variedades de colisión regularizadas para  $\lambda_{12}\lambda_{23} < 0$ .

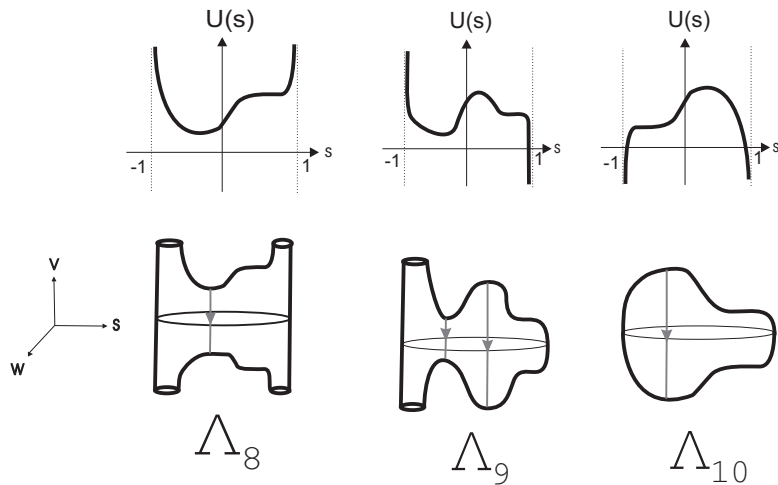


Figura 2.8: Potenciales  $U(s)$  y variedades de colisión regularizadas con puntos de equilibrio degenerados.

- 1) El flujo sobre la variedad  $\Lambda_1$  tiene dos puntos de equilibrio hiperbólicos, la dinámica fue estudiada inicialmente en [McGehee 1974] y es el punto de partida de esta tesis.
- 2) El flujo sobre la variedad  $\Lambda_2$  tiene tres puntos de equilibrio hiperbólicos, la dinámica sobre  $\Lambda_2$  es difeomorfa al flujo del problema isosceles de tres cuerpos [Devaney 1980].
- 3) El flujo sobre  $\Lambda_3$  tiene seis puntos de equilibrio hiperbólicos, la dinámica cercana a la colisión triple se ha estudiado en [Llibre-Pasca 2007] para el problema colineal cargado de tres cuerpos.
- 4) La variedad de colisión  $\Lambda_4$  es homomorfa a  $S^2$ , el flujo sobre  $\Lambda_4$  tiene dos puntos de equilibrio hiperbólicos, la dinámica asociada es difeomorfa a la dinámica del problema isosceles cargado de

tres cuerpos [Atela 1994]. Resultados sobre órbitas periódicas simétricas se pueden consultar en [Llibre-Pasca 2007] y [Corbera-Llibre-Pérez-Chavela 2006]

- 5) La variedad  $\Lambda_7$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^2$  menos dos puntos, el flujo sobre  $\Lambda_7$  tiene 4 puntos de equilibrio y se ha estudiado la dinámica cercana a colisión triple en [Llibre-Pasca 2007].

## 2.5. Clasificación de las variedades $\Lambda$ para potenciales simétricos

En esta sección estudiaremos casos particulares en los cuales tomando ciertos valores de las masas y las cargas es posible trabajar con un número menor de parámetros. Primero nos concentraremos en las cantidades  $a_3 - a_2$  y  $b_2 - b_1$  que dependen exclusivamente de las masas.

Las cantidades

$$a_3 - a_2 = \frac{M}{m_3} \left( \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_3} + m_1 + m_2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad b_2 - b_1 = \frac{M}{m_1} \left( \frac{(m_2 + m_3)^2}{m_1} + m_2 + m_3 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

son iguales si  $m_1 = m_3 = m$ . Entonces

$$b_2 - b_1 = a_3 - a_2 = \frac{M}{m} \left( \frac{(m + m_2)^2}{m} + m + m_2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

donde  $M = 2m + m_2$  es la masa total.

Sean  $k = a_3 - a_2 = b_2 - b_1$  y  $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \gamma$ . La función potencial (2.27) es una función par simétrica con respecto a la recta  $s = 0$ , explícitamente

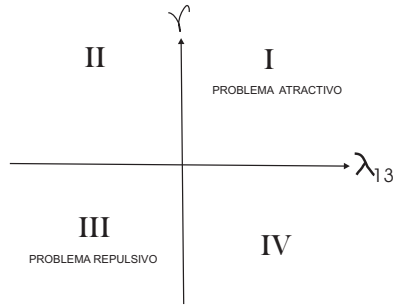
$$U(s) = \frac{\text{sen } 2\lambda}{k} \left\{ \frac{\gamma}{\text{sen } \lambda(1+s)} + \frac{\gamma}{\text{sen } \lambda(1-s)} + \frac{\lambda_{13}}{2 \text{sen } \lambda \cos \lambda s} \right\}. \quad (2.39)$$

La condición  $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \gamma$  implica que las cargas  $q_1$  y  $q_3$  son iguales. Trabajaremos el caso donde  $m_1 = m_3 = m$  y  $q_1 = q_3 = q$ ; de esta manera  $\gamma = mm_2 - qq_2$  y  $\lambda_{13} = m^2 - q^2$ . En particular, serán de mayor interés los problemas en los cuales el signo del parámetro  $\lambda_{13}$  es contrario al signo de  $\gamma$ .

Introducimos el plano formado por las parejas  $(\lambda_{13}, \gamma)$ . En cada cuadrante de este plano se modela un aspecto del problema colineal cargado de tres cuerpos para el contexto de los potenciales simétricos (figura 2.9).

En el primer cuadrante, los parámetros  $\gamma$  y  $\lambda_{13}$  modelan el caso gravitacional donde se tiene un único punto crítico correspondiente a un mínimo del potencial con  $U(0) > 0$  [McGehee 1974]. En el tercer cuadrante se tiene el problema colineal repulsivo [Ramírez 1992].

En el cuadrante II se modela el caso en el cual hay repulsión entre las partículas  $m_1$  y  $m_3$  mientras hay atracción entre los pares de partículas  $m_1, m_2$  y  $m_2, m_3$ ; mientras en el cuadrante IV, se modela el caso en el cual hay atracción entre las partículas  $m_1$  y  $m_3$  y repulsión entre los pares de partículas  $m_1, m_2$  y  $m_2, m_3$ .

Figura 2.9: Plano  $\lambda_{13}, \gamma$ .

En los cuadrantes II y IV se tiene que  $\gamma\lambda_{13} < 0$ , la diferencia de signos entre los parámetros nos permite modelar bifurcaciones tomando al parámetro  $\lambda_{13}$  como referencia.

Iniciamos el bosquejo de las gráficas de las funciones potenciales simétricas estudiando al punto  $(0, U(0))$ . El valor del potencial (2.39) para  $s = 0$  es

$$U(0) = \frac{2}{k} \left( 2\gamma + \frac{\lambda_{13}}{2} \right) \cos \lambda.$$

Con base a los parámetros  $\gamma, \lambda_{13}$  se tiene

1.  $U(0) > 0$ , si  $\gamma > -\frac{\lambda_{13}}{4}$ .
2.  $U(0) = 0$ , si  $\gamma = -\frac{\lambda_{13}}{4}$ .
3.  $U(0) < 0$ , si  $\gamma < -\frac{\lambda_{13}}{4}$ .

La primera derivada de (2.39) es

$$\frac{dU}{ds}(s) = \frac{\lambda \operatorname{sen} 2\lambda}{k} \left[ -\frac{\gamma \cos \lambda(1+s)}{\operatorname{sen}^2 \lambda(1+s)} + \frac{\gamma \cos \lambda(1-s)}{\operatorname{sen}^2 \lambda(1-s)} + \frac{\lambda_{13} \operatorname{sen} \lambda s}{2 \operatorname{sen} \lambda \cos^2 \lambda s} \right].$$

Al evaluar la primera derivada en  $s = 0$  se verifica que  $\frac{dU}{ds}(0) = 0$ , calculamos la segunda derivada del potencial (2.39) y evaluamos en  $s = 0$

$$\frac{d^2U}{ds^2}(0) = \frac{2\lambda^2 \cos \lambda}{k} \left[ 4\gamma \cot^2 \lambda + 2\gamma + \frac{1}{2}\lambda_{13} \right].$$

Para  $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \gamma \neq 0$ , si

$$\gamma > -\frac{\lambda_{13}}{4(2 \cot^2 \lambda + 1)},$$

se tiene que  $\frac{d^2U}{ds^2}(0) > 0$ , el punto  $(0, U(0))$  es un mínimo del potencial. En caso contrario, si

$$\gamma < -\frac{\lambda_{13}}{4(2 \cot^2 \lambda + 1)},$$

el punto  $(0, U(0))$  es un máximo del potencial.



Denotamos como  $l_1$  a la recta  $\gamma = -\frac{1}{4}\lambda_{13}$  y  $l_2$  a la recta  $\gamma = -\frac{1}{4(2\cot^2\lambda+1)}\lambda_{13}$ . La constante  $\lambda \in (0, \frac{\pi}{4})$  depende de las masas, para  $m_1 = m_3 = m$  obtenemos  $\cos 2\lambda = \mathbf{a}^T \mathcal{M} \mathbf{b} = \frac{m}{M}$ .

Explícitamente la pendiente de la recta  $l_2$  es  $m_{l_2} = -\frac{m+m_2}{28m+12m_2}$ . Al comparar  $m_{l_2}$  con la pendiente  $m_{l_1}$  se observa que  $m_{l_1}$  es menor que la pendiente  $m_{l_2}$ . Con base a lo anterior, los puntos  $(0, U(0))$  que son máximos del potencial satisfacen que  $U(0) < 0$  (Figura 2.12).

Resta calcular el número de configuraciones centrales colineales, para conocer el número de puntos críticos adicionales de la función potencial (2.39).

### 2.5.1. Configuraciones centrales colineales en el caso simétrico

La ecuación que calcula el número de configuraciones centrales colineales es una ecuación polinomial de grado 5

$$a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (2.40)$$

donde los coeficientes están en función de los valores de las masas y de los parámetros  $\gamma$  y  $\lambda_{13}$ . La variable  $x$  representa la distancia normalizada entre las partículas  $m_2$  y  $m_3$  introducida en la sección 2.2. En el caso simétrico  $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \gamma$ ,  $m_1 = m_3 = m$ , los coeficientes de (2.40) son

$$\begin{aligned} a_5 &= \beta_3, \\ a_4 &= (\mu + 2)\beta_3, \\ a_3 &= (2\mu + 1)\beta_3 - \beta_1 + 1, \\ a_2 &= \mu\beta_3 - \left(3 + \frac{m_2}{m}\right)\beta_1 - 1, \\ a_1 &= -\left(3 + 2\frac{m_2}{m}\right)\beta_1, \\ a_0 &= -\left(1 + \frac{m_2}{m}\right)\beta_1, \end{aligned}$$

donde

$$\beta_1 = \left(\frac{m}{m_2}\right) \frac{\gamma}{\lambda_{13}}, \quad \beta_3 = \left(\frac{m+m_2}{m_2}\right) \frac{\gamma}{\lambda_{13}}.$$

Para  $\gamma \neq 0$  la pareja de coeficientes  $a_5$  y  $a_4$  tienen el mismo signo, mientras la pareja de coeficientes  $a_1$  y  $a_0$  tienen el mismo signo pero contrario a la primera pareja de coeficientes. Los cambios de signo para aplicar la regla de los signos de Descartes tienen lugar al considerar los signos de los coeficientes  $a_2$  y  $a_3$ .

**Proposición 4** (Regla de los signos de Descartes). *Sea  $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-l_1} + \dots + a_r x^{r-l_r}$  un polinomio con coeficientes  $a_i \in \mathbb{R}$  distintos de cero, donde  $0 < l_1 < \dots < l_r$ . El número de cambios de signo en la sucesión creciente de coeficientes  $\{a_0, a_1, \dots, a_r\}$  coincide con el número de raíces positivas de  $p(x)$  ó es menor en un número par.*

Para el caso simétrico los parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_3$  tienen el mismo signo; el estudio de los signos de los parámetros  $a_2$  y  $a_3$  se restringe a los cuadrantes *I* y *III* del plano  $(\beta_1, \beta_2)$ . En estos cuadrantes estudiamos

las regiones formadas al considerar las rectas  $a_2 = 0$  y  $a_3 = 0$ . En la figura 2.10 resumimos los resultados. El punto de intersección de las rectas  $a_2 = 0$  y  $a_3 = 0$  tiene coordenadas

$$\left( -\frac{4m + m_2}{\mu(5m + 2m_2) + 3m + m_2}, -\frac{(3\mu + 1)m}{\mu(5m + 2m_2) + 3m + m_2} \right)$$

y se ubica en el cuadrante *III* del plano  $(\beta_1, \beta_3)$ .

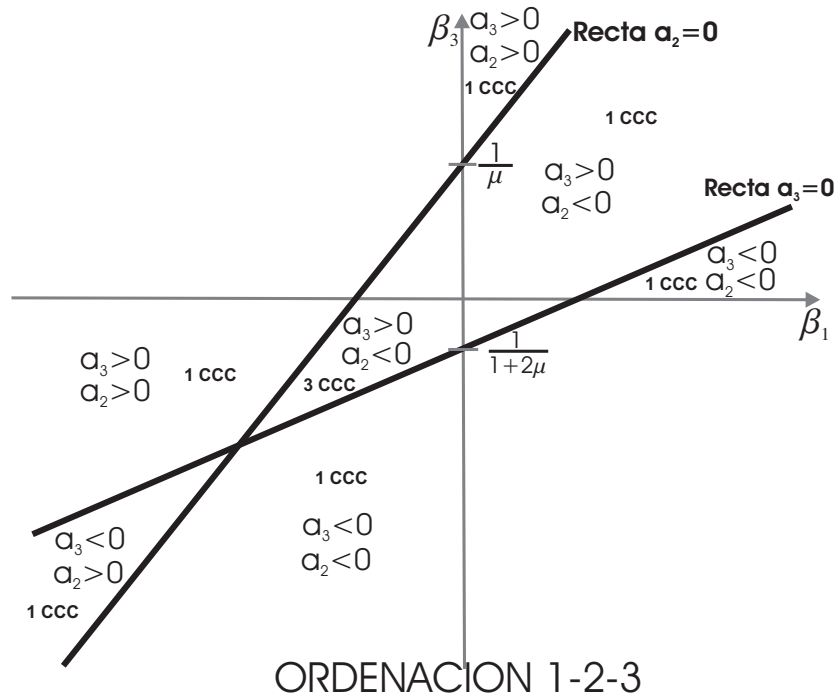


Figura 2.10: Número de configuraciones centrales (CCC) en el plano  $(\beta_1, \beta_3)$

En cuadrante *I* los parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_3$  son positivos, entonces  $a_5 > 0$  y  $a_4 > 0$  mientras que  $a_1 < 0$  y  $a_0 < 0$ , tenemos lo siguiente para las tres regiones formadas:

1.  $a_5 > 0$ ,  $a_4 > 0$ ,  $a_3 < 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_1 < 0$  y  $a_0 < 0$ ; hay un cambio de signo, por lo tanto, una (CCC) solamente.
2.  $a_5 > 0$ ,  $a_4 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_1 < 0$  y  $a_0 < 0$ ; hay un cambio de signo, por lo tanto, una (CCC) solamente.
3.  $a_5 > 0$ ,  $a_4 > 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_1 < 0$  y  $a_0 < 0$ ; hay un cambio de signo, por lo tanto, una (CCC) solamente.

Para el cuadrante *II* los parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_3$  son negativos, entonces  $a_5 < 0$  y  $a_4 < 0$  mientras que  $a_1 > 0$  y  $a_0 > 0$ , tenemos lo siguiente para las tres regiones formadas

1.  $a_5 < 0$ ,  $a_4 < 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_1 > 0$  y  $a_0 > 0$ ; hay un cambio de signo, por lo tanto, una (CCC) solamente.

2.  $a_5 < 0$ ,  $a_4 < 0$ ,  $a_3 < 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_1 > 0$  y  $a_0 > 0$ ; hay un cambio de signo, por lo tanto, una  $(CCC)$  solamente.
3.  $a_5 < 0$ ,  $a_4 < 0$ ,  $a_3 < 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_1 > 0$  y  $a_0 > 0$ ; hay un cambio de signo, por lo tanto, una  $(CCC)$  solamente.
4.  $a_5 < 0$ ,  $a_4 < 0$ ,  $a_3 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_1 > 0$  y  $a_0 > 0$ ; hay tres cambios de signo, por lo tanto, tres  $(CCC)$ .

**Proposición 5.** *La configuración central de Euler, donde las partículas de los extremos equidistan de la partícula entre ellas, es una solución de la ecuación (2.40).*

*Demostración.* Para la configuración central de Euler se tiene que  $x = 1$ . Al evaluar la ecuación (2.40) en  $x = 1$  obtenemos

$$\sum_{i=0}^5 a_i = 4(1 + \mu)\beta_3 - 4\left(2 + \frac{m_2}{m_3}\right)\beta_1 - \frac{m_1}{m_3} + 1,$$

para el caso simétrico la suma anterior es cero. □

Dado que  $\beta_1$  y  $\beta_3$  tienen el mismo signo, en el cuadrante  $I$  tenemos solamente a la configuración central de Euler, mientras que en el cuadrante  $III$  hay la posibilidad de tres  $(CCC)$ , una de las cuales corresponde a la configuración central de Euler por la simetría del modelo. Sobre las rectas  $a_3 = 0$  y  $a_2 = 0$ , se tiene un cambio de signo en cada caso, por lo tanto hay una  $(CCC)$ .

**Proposición 6.** *Para el caso simétrico donde  $\lambda_{12} = \lambda_{23} = \gamma \in \mathbb{R}$  y  $\lambda_{13} \in \mathbb{R}$  con la ordenación  $1 - 2 - 3$ , se tiene solamente la configuración central de Euler cuando  $\gamma, \lambda_{13} > 0$ . Para  $\gamma, \lambda_{13} < 0$  se obtiene nuevamente la configuración central de Euler y dependiendo de los valores de  $(\beta_1, \beta_3)$  se tienen dos configuraciones centrales colineales adicionales.*

Realizamos el conteo de las  $(CCC)$  para las ordenaciones  $2 - 1 - 3$  y  $1 - 3 - 2$ . Renombramos los valores de los parámetros en la siguiente forma:

1. **Ordenación  $2 - 1 - 3$ .** Etiquetamos los valores de masas y cargas como  $\bar{m}_1 = m_2$ ,  $\bar{m}_2 = m_1 = m$ ,  $\bar{m}_3 = m_3 = m$ ;  $\bar{q}_1 = q_2$ ,  $\bar{q}_2 = q_1 = q$ ,  $\bar{q}_3 = q_3 = q$ ; respectivamente; ahora calculamos los valores de los parámetros

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_1 + \bar{m}_2} = \frac{m_2}{m + m_2}, \quad \bar{\beta}_1 = \frac{\bar{m}_1 \bar{\lambda}_{23}}{\bar{m}_2 \bar{\lambda}_{13}} = \frac{m_2 \lambda_{13}}{m \gamma}, \quad \bar{\beta}_3 = \left(\frac{\bar{m}_1 + \bar{m}_2}{\bar{m}_2}\right) \frac{\bar{\lambda}_{12}}{\bar{\lambda}_{13}} = \left(\frac{m + m_2}{m}\right).$$

2. **Ordenación  $1 - 3 - 2$ .** Etiquetamos nuevamente los valores de masas y cargas como  $\hat{m}_1 = m_1 = m$ ,  $\hat{m}_2 = m_3 = m$ ,  $\hat{m}_3 = m_2$ ;  $\hat{q}_1 = q_1 = q$ ,  $\hat{q}_2 = q_3 = q$ ,  $\hat{q}_3 = q_2$ , entonces

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{m}_1}{\hat{m}_1 + \hat{m}_2} = \frac{1}{2}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{m}_1 \hat{\lambda}_{23}}{\hat{m}_2 \hat{\lambda}_{13}} = 1, \quad \hat{\beta}_3 = \left(\frac{\hat{m}_1 + \hat{m}_2}{\hat{m}_2}\right) \frac{\hat{\lambda}_{12}}{\hat{\lambda}_{13}} = 2 \left(\frac{\lambda_{13}}{\gamma}\right).$$

Con base al conteo de  $(CCC)$  para la ordenación  $1 - 2 - 3$ , el número de  $(CCC)$  se muestra en la figura 2.11.

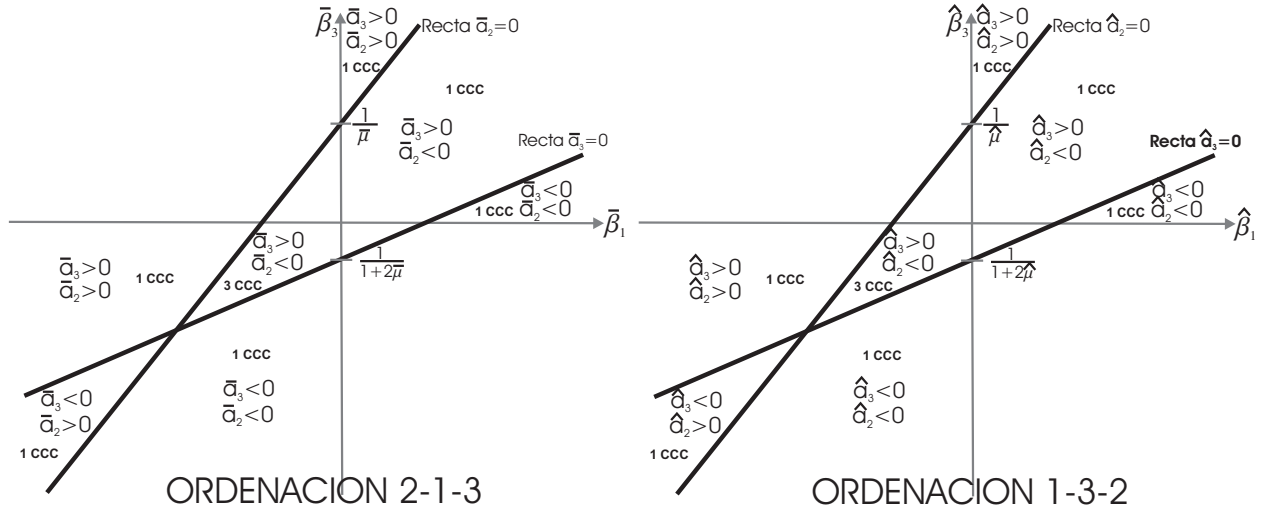


Figura 2.11: Número de (CCC) en los planos  $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_3)$  y  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3)$

**Proposición 7.** *Para el caso simétrico no se tienen 9 configuraciones centrales colineales.*

*Demostración.* Supongamos que existen 9 (CCC), sean  $(\beta_1, \beta_3)$ ,  $(\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_3)$  y  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_3)$ , tales que  $\beta_i, \bar{\beta}_i, \hat{\beta}_i < 0$  y pertenecen a la región donde se tienen tres (CCC). Entonces  $a_2, \bar{a}_2, \hat{a}_2 < 0$  y  $a_3, \bar{a}_3, \hat{a}_3 > 0$ .

Los coeficientes  $a_5, \bar{a}_5, \hat{a}_5$  y  $a_4, \bar{a}_4, \hat{a}_4$  son negativos, mientras los coeficientes  $a_1, \bar{a}_1, \hat{a}_1$  y  $a_0, \bar{a}_0, \hat{a}_0$  son positivos. Es suficiente estudiar los coeficientes  $\bar{a}_2$  y  $\hat{a}_3$ .

Al escribir  $\bar{a}_2$  en términos de los coeficientes de la ordenación 1 – 2 – 3 se obtiene  $\bar{a}_2 = -\frac{4}{\beta_1} > 0$ , lo cual es una contradicción. El coeficiente  $\bar{a}_2$  es positivo y tenemos un cambio de signo solamente.

Para el coeficiente  $\hat{a}_3$  se obtiene  $\hat{a}_3 = \frac{4m}{m_2} \frac{1}{\beta_1} < 0$ , lo cual es una contradicción. Entonces, el coeficiente  $\hat{a}_3$  es negativo y se tiene un cambio de signo solamente.

Por lo tanto, tenemos dos (CCC) en el caso simétrico; una por la ordenación 2 – 1 – 3 y otra por la ordenación 1 – 3 – 2. □

En las ordenaciones 2 – 1 – 3 y 1 – 3 – 2 la magnitud de las fuerzas entre las partículas de los extremos con respecto a la partícula intermedia no son iguales, por lo tanto no existe simetría. Las (CCC) obtenidas para estas dos ordenaciones son distintas a la configuración de Euler.

**Proposición 8.** *Para el problema colineal cargado de tres cuerpos si consideramos dos partículas con masas y cargas iguales distintas a la restante, se tienen 5 configuraciones centrales colineales, donde una de ellas es la configuración central de Euler.*

### 2.5.2. Clasificación de los potenciales simétricos

En la figura 2.12 se muestra la clasificación de las funciones potenciales simétricas  $U(s)$  con base a los siguientes criterios: la continuidad del potencial en el intervalo  $(-1, 1)$ ; la naturaleza del punto  $(0, U(0))$  (máximo/mínimo) y el número de configuraciones centrales colineales, en el contexto de la proposición 6.

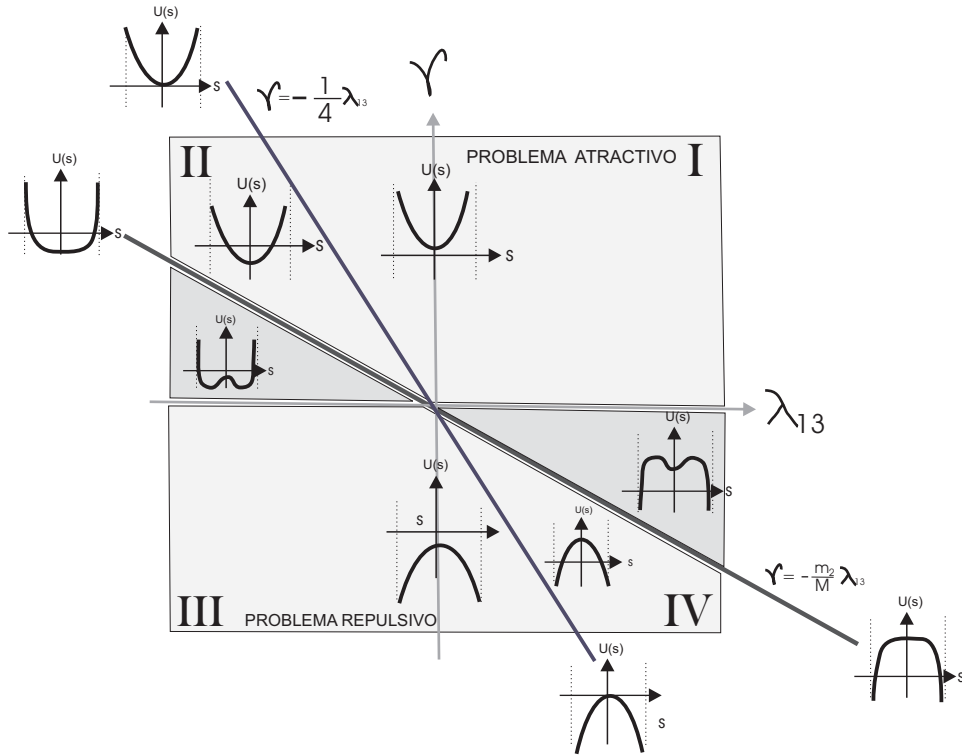


Figura 2.12: Clasificación de funciones potenciales simétricas.

En los potenciales simétricos la condición  $U(0) < 0$  introduce un casos adicionales en la clasificación de las variedades  $\Lambda_k$  descritas en la tabla 2.1.

1. Si  $\gamma > 0$  y  $U(0) < 0$  se obtienen dos componentes homeomorfas a  $\Lambda_5$ .
2. Si  $\gamma < 0$  y  $U(0) < 0$  obtenemos que  $\Lambda = \emptyset$ .

Fuera de los casos anteriores las variedades de colisión se clasifican a continuación.

1. Para  $\gamma > 0$  y  $\alpha > -\frac{1}{4}\lambda_{13}$  las variedades son homeomorfas a  $\Lambda_1$ . La variedad de colisión obtenida cuando  $\gamma = -\frac{1}{4}\lambda_{13}$  es un caso especial que se estudiará en el siguiente capítulo.
2. Para  $\gamma < 0$  con  $(\lambda_{13}, \gamma)$  en la región entre las rectas  $\gamma = -\frac{1}{4}\lambda_{13}$  y  $\gamma = -\frac{m_2}{M}$ , la variedad  $\Lambda$  es homeomorfa a  $\Lambda_4$ . Para  $\gamma < 0$  con  $(\lambda_{13}, \gamma)$  en la región entre las rectas  $\gamma = -\frac{m_2}{M}\lambda_{13}$  y  $\gamma = 0$  es homeomorfa a  $\Lambda_3$ .

En la región comprendida entre las rectas  $\lambda_{13} = 0$  y  $\gamma = -\frac{1}{4}\lambda_{13}$ , la dinámica de un caso parecido ha sido estudiada mediante técnicas computacionales y dinámica simbólica por Sano [Sano 2004].

Los resultados obtenidos en esta sección se aplicarán en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3

# CASO NO HIPERBÓLICO

En este capítulo se estudian las dinámicas generadas al considerar las bifurcaciones en las formas de las variedades de colisión  $\Lambda$  en la sección 2.5.2 para los potenciales simétricos  $U(s)$  del cuadrante II, obtenidos al tomar el valor del parámetro  $\gamma \neq 0$  positivo y el parámetro  $\lambda_{13} < 0$ , de tal manera que la posición del punto  $(0, U(0))$  de la gráfica de la función potencial  $U(s)$  depende del valor del parámetro  $\lambda_{13}$ . Para  $U(0) > 0$  se obtienen potenciales cuyas variedades de colisión  $\Lambda(\alpha)$  son homeomorfas a una esfera menos cuatro puntos con dinámicas cualitativamente parecidas a la dinámica del caso no cargado estudiado en [McGehee 1974]. Para  $U(0) = 0$  se obtiene un potencial cuyo mínimo coincide con el origen, el cual genera una variedad de colisión con un único punto de equilibrio no hiperbólico que se denotará como  $\Lambda(\sqrt{5})$ , el interés se centra en la dinámica cercana a la colisión triple para este caso.

### 3.1. Variedad de colisión $\Lambda(\alpha)$

Sean  $m_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $q_1 = q_3 = \alpha$  y  $q_2 = -\alpha^{-1}$ ; los valores de los parámetros  $\lambda_{ij}$  son  $\lambda_{12} = \lambda_{23} = 2$ ,  $\lambda_{13} = 1 - \alpha^2$  respectivamente; se tiene fuerza de atracción entre los pares de las partículas  $m_1$  y  $m_2$ ,  $m_2$  y  $m_3$  y fuerza de repulsión entre el par de partículas  $m_1$  y  $m_3$  (este caso se ubica en el cuadrante II de la figura 2.12).

Obtenemos una familia de funciones potenciales en función del parámetro  $\alpha$

$$U_\alpha(s) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left( \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}(1+s)} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}(1-s)} + \frac{(1-\alpha^2)}{\cos \frac{\pi}{6}s} \right), \quad (3.1)$$

que satisface:

1. Para  $s \in (-1, 1)$  los potenciales  $U_\alpha(s)$  son funciones continuas y simétricas respecto a la recta  $s = 0$ .
2.  $\lim_{s \rightarrow -1^+} U_\alpha(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} U_\alpha(s) = \infty$ .
3.  $U_\alpha(0) = \frac{4\sqrt{3}}{3}(5 - \alpha^2)$

Las ecuaciones de movimiento (2.1) en coordenadas de McGehee para este caso se escriben como

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - U_\alpha(s), \\ \frac{ds}{d\tau} &= \frac{6}{\pi}u, \\ \frac{du}{d\tau} &= -\frac{1}{2}uv + \frac{6}{\pi} \frac{dU_\alpha}{ds}(s),\end{aligned}\tag{3.2}$$

con relación de energía,

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U_\alpha(s) = rh.\tag{3.3}$$

Si denotamos como  $\Lambda(\alpha)$  a la variedad de colisión asociada a cada valor de  $\alpha$ , entonces

$$\Lambda(\alpha) = \left\{ (r, v, s, u) \mid r = 0, \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U_\alpha(s) = 0, s \in (-1, 1) \right\}.$$

El flujo sobre la  $\Lambda(\alpha)$  está modelado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, obtenido de (3.2) al tomar  $r = 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\tau} &= \frac{1}{2}v^2 + u^2 - U_\alpha(s), \\ \frac{ds}{d\tau} &= \frac{6}{\pi}u, \\ \frac{du}{d\tau} &= -\frac{1}{2}uv + \frac{6}{\pi} \frac{dU_\alpha}{ds}(s),\end{aligned}\tag{3.4}$$

Para valores de  $\alpha > 0$  se obtiene lo siguiente:

1. Para  $0 < \alpha \leq 1$  se tiene que  $U(0) > 0$  y corresponde al caso colineal sin carga. La variedad de colisión  $\Lambda(\alpha)$  es homeomorfa a  $\Lambda_1$  y la dinámica asociada se describe en [McGehee 1974] (figura 2.6).
2. Para  $1 < \alpha < \sqrt{5}$ , se tiene que  $U(0) > 0$ , la fuerza entre el par de partículas de los extremos es repulsiva, pues  $\lambda_{13} < 0$ . La variedad de colisión  $\Lambda(\alpha)$  es homeomorfa a  $\Lambda_1$  y la dinámica asociada es cualitativamente la misma del caso no cargado, la fuerza de repulsión para  $\alpha$  en este intervalo no influye en el comportamiento del modelo en una vecindad del origen (Figura 2.6).
3. Para  $\alpha = \sqrt{5}$ , se tiene que  $U(0) = 0$ . La variedad de colisión  $\Lambda(\sqrt{5})$  (figura 3.1) tiene un mínimo en origen generando una variedad de colisión cuyo campo vectorial (3.4) tiene un único punto de equilibrio no hiperbólico, se estudiará la dinámica de este caso en las siguientes secciones.
4. Para  $\alpha > \sqrt{5}$ , se tiene que  $U(0) < 0$ , la variedad de colisión es homeomorfa a dos copias de la variedad  $\Lambda_5$ , el campo vectorial (3.4) no tiene puntos de equilibrio (figura 2.7).

**Proposición 9.** *Para  $1 < \alpha < \sqrt{5}$  la topología de la variedad de colisión  $\Lambda(\alpha)$  y la dinámica sobre ella es cualitativamente parecida a la dinámica del caso no cargado.*



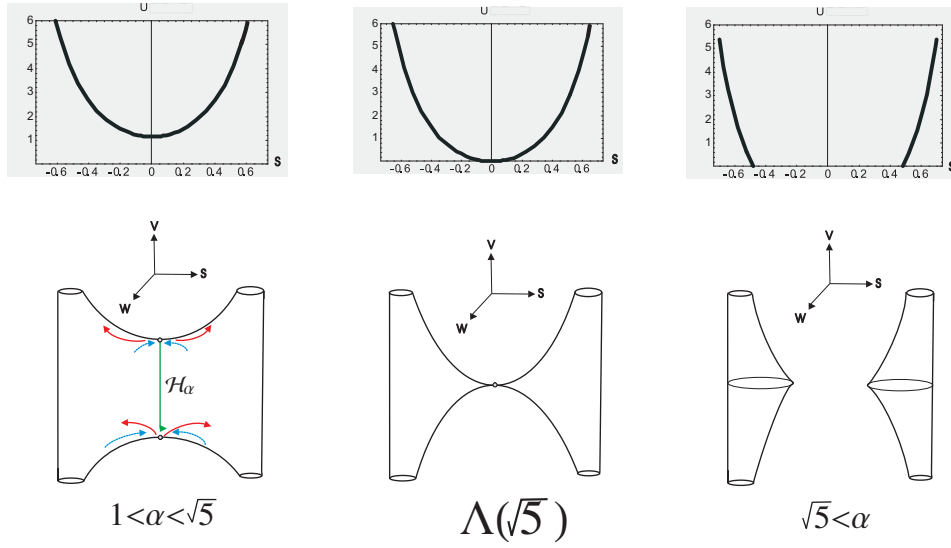


Figura 3.1: Variedades de colisión regularizadas  $\Lambda(\alpha)$ .

*Demostración.* Los potenciales  $U_\alpha(s)$  para  $1 < \alpha < \sqrt{5}$  tienen un único punto crítico; dada la correspondencia de 1 a 2 entre los puntos críticos del potencial y los puntos de equilibrio en la variedad de colisión generada  $\Lambda(\alpha)$ , tenemos dos puntos de equilibrio  $C(v_0, 0, 0)$  y  $D(-v_0, 0, 0)$ , donde  $v_0 = \sqrt{2U(0)}$  y  $U(0) > 0$ . Al calcular los valores propios asociados a la linealización del campo vectorial en una vecindad de los puntos de equilibrio obtenemos

$$\mu_1^C = v_0, \quad \mu_{2,3}^C = -\frac{1}{2}v_0 \pm \sqrt{\frac{1}{2}U_\alpha(0) + \frac{144}{\pi}\mu_0},$$

donde  $\mu_0 = \frac{d^2U_\alpha}{ds^2}(0) > 0$ , pues  $(0, U_\alpha(0))$  es un mínimo del potencial  $U_\alpha(s)$ .

Así, se tiene que

$$\frac{1}{2}v_0^2 < \sqrt{\frac{v_0^2}{4} + \frac{144}{\pi}\mu_0} = \sqrt{\frac{1}{2}U_\alpha(0) + \frac{144}{\pi}\mu_0}.$$

Entonces la dimensión de la variedad estable  $W^s(C)$  es uno, mientras la dimensión de la variedad inestable  $W^u(C)$  es dos y el punto  $C$  es un punto silla.

Los valores propios asociados a la linealización del campo vectorial en una vecindad del punto  $D$  son

$$\mu_1^D = v_0, \quad \mu_{2,3}^D = \frac{1}{2}v_0 \pm \sqrt{\frac{1}{2}U_\alpha(0) + \frac{144}{\pi}\mu_0}.$$

La dimensión de la variedad estable  $W^s(D)$  es dos, mientras la dimensión de la variedad inestable  $W^u(D)$  es uno y el punto  $D$  es un punto silla.

Del sistema de ecuaciones (3.4) y de la relación de energía (3.3) para  $r = 0$  se obtiene que el flujo en la dirección de la coordenada  $v$  es casi gradiente, pues

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{2}u^2 \geq 0.$$

Estas características de la variedad de colisión y del campo vectorial sobre ella se tienen en el caso no cargado estudiado por McGehee [McGehee 1974].  $\square$

**Proposición 10.** *La órbita homotética colapsa a un punto cuando  $\alpha \rightarrow \sqrt{5}$*

*Demostración.* De la sección 2.3.4 para  $1 \leq \alpha \leq \sqrt{5}$  y  $h < 0$ , existe una solución homotética  $H_\alpha$  que inicia y termina en colisión, correspondiente a homotecias de la configuración central de Euler

$$H_\alpha = \{(r, v, s, u) \mid s = 0\}.$$

Tomando  $s = 0$  y  $u = 0$  en el sistema (3.4) se obtiene que  $\frac{ds}{d\tau} = 0$  y  $\frac{du}{d\tau} = 0$ ; además  $\frac{dU_{\sqrt{5}}}{ds}(0) = 0$  del hecho que  $s = 0$  corresponde a una configuración central del problema.. El plano definido por las condiciones  $s = 0$  y  $u = 0$  es un conjunto invariante, la dinámica restringida a este plano se obtiene de las ecuaciones de movimiento (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= \left( \frac{1}{2}v^2 - U_\alpha(0) \right), \\ \frac{ds}{d\tau} &= 0, \\ \frac{du}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Integrando las dos primeras ecuaciones del sistema (3.5) obtenemos

$$r(\tau) = -\frac{U_\alpha(0)}{h \cosh^2\left(\frac{v_0}{2}\tau\right)}, \quad v(\tau) = -v_0 \tanh\left(\frac{v_0}{2}\tau\right). \tag{3.6}$$

Si  $\alpha \rightarrow \sqrt{5}^-$ ,  $U_\alpha(0) \rightarrow 0$  y  $v_0 \rightarrow 0$ , entonces  $\cosh\left(\frac{v_0}{2}\tau\right) \rightarrow 1$  y  $\tanh\left(\frac{v_0}{2}\tau\right) \rightarrow 0$ , por lo tanto,  $r(\tau) \rightarrow 0$  y  $v(\tau) \rightarrow 0$  en (3.6).  $\square$

Para  $\alpha = \sqrt{5}$  y para cada valor de energía positivo podemos encontrar una solución de colisión (escape) que es una homotecia de la configuración central de Euler con velocidad tangencial  $u = 0$ .

El plano  $\{(r, v, s, u) \mid s = 0, u = 0\}$  es invariante para el flujo, las ecuaciones de movimiento restringidas a este plano son

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= rv, \\ \frac{dv}{d\tau} &= -\frac{1}{2}v^2 + U_{\sqrt{5}}(s) = rh. \end{aligned} \tag{3.7}$$

El retrato fase de este sistema se muestra en la figura 3.2. En cada nivel positivo de energía, existe una única solución que inicia en colisión y escapa a infinito con  $s = 0$  y  $u = 0$  en tiempo positivo. En tiempo negativo la solución inicia en colisión y escapa a infinito, esta solución se proyecta en el espacio de configuración como la recta  $y = x$ . Las gráficas de estas soluciones son las curvas de nivel de la restricción de la relación de energía al plano definido por las condiciones  $s = u = 0$ , explícitamente  $\frac{1}{2}v^2 - rh = 0$  para cada valor  $h > 0$ .

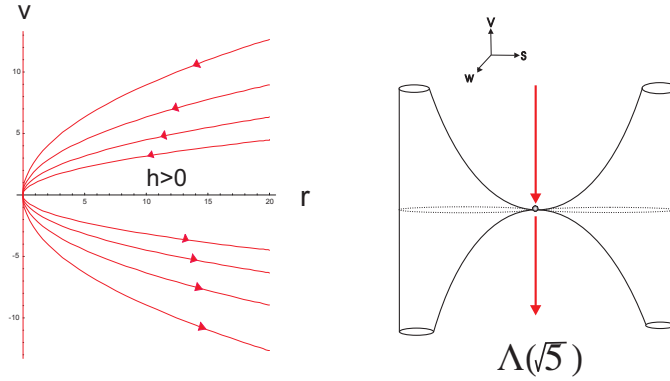


Figura 3.2: Retrato fase en el plano invariante  $r, v$  definido por las condiciones  $s = u = 0$  y la variedad de colisión regularizada  $\Lambda(\sqrt{5})$

### 3.2. Caso no hiperbólico para $\alpha = \sqrt{5}$

Para  $\alpha = \sqrt{5}$  el potencial asociado es simétrico con respecto a la recta  $s = 0$  y tiene un mínimo en el origen.

**Proposición 11.** *Para  $\alpha = \sqrt{5}$  el flujo sobre la variedad de colisión  $\Lambda(\sqrt{5})$  tiene un punto de equilibrio no hiperbólico.*

*Demostración.* Para  $\alpha = \sqrt{5}$ , se tiene que  $U(0) = 0$ , por lo tanto el primer valor propio asociado a la matriz jacobiana del campo vectorial (3.4) evaluada en el origen es  $\mu_1 = v_0 = \sqrt{2U(0)} = 0$ . El origen es un punto de equilibrio no hiperbólico. Los valores propios restantes son  $\mu_2 = \frac{6}{\pi}\sqrt{\nu_0}$  y  $\mu_3 = -\frac{6}{\pi}\sqrt{\nu_0}$ , donde  $\nu_0 = \frac{d^2U_{\sqrt{5}}}{ds^2}(0) > 0$ . El valor propio cero corresponde a la dirección de la coordenada  $v$  correspondiente a la velocidad radial.  $\square$

#### 3.2.1. Regularización de colisiones binarias para $\alpha = \sqrt{5}$

Regularizaremos las colisiones binarias introduciendo una nueva velocidad angular y un reescalamiento del tiempo

$$w = (1 - s^2)u, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\pi}{6} (1 - s^2).$$

Al sustituir en (3.4) obtenemos un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales sin singularidades

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\sigma} &= -\frac{\pi}{12}(1 - s^2)v^2 + \frac{\pi}{6}W(s), \\ \frac{ds}{d\sigma} &= w, \\ \frac{dw}{d\sigma} &= 2s(1 - s^2)v^2 - 4sW(s) - \frac{\pi}{12}vw(1 - s^2) + \frac{dU_{\sqrt{5}}}{ds}(s)(1 - s^2)^2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde  $W(s)$  es el potencial regularizado

$$W(s) = \frac{4}{3}\sqrt{3} \left( \frac{6}{\pi} \frac{1-s}{\gamma(\frac{\pi}{6}(1+s))} + \frac{6}{\pi} \frac{1+s}{\gamma(\frac{\pi}{6}(1-s))} - \frac{4(1-s^2)}{\cos\frac{\pi}{6}s} \right) = (1-s^2)U_{\sqrt{5}}(s),$$

y  $\gamma(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ . La variedad  $\Lambda(\sqrt{5})$  regularizada está definida como

$$\Lambda(\sqrt{5}) = \left\{ (v, s, w) \mid \frac{1}{2}(w^2 + (1-s^2)^2v^2) - (1-s^2)W(s) = 0 \right\}.$$

Sea  $\mathbf{v} = (v, s, w)^T$ ; desarrollamos el campo vectorial (3.8) en serie de Taylor hasta  $O(\|\mathbf{v}\|^5)$  obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales polinomial

$$\begin{pmatrix} \frac{dv}{d\sigma} \\ \frac{ds}{d\sigma} \\ \frac{dw}{d\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \\ \nu_0 s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{12}v^2 + \frac{\pi}{12}v^2s^2 + \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}}s^2 + \frac{25\pi^4}{162\sqrt{3}}s^4 \\ 0 \\ -\frac{\pi}{12}vw + \frac{50}{81\sqrt{3}}s^3 + \frac{5551}{58320}s^5 \end{pmatrix} + O(\|\mathbf{v}\|^5). \quad (3.9)$$

Para (3.9) introducimos la siguiente notación

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathbf{X}(\mathbf{v}). \quad (3.10)$$

El campo vectorial (3.10) satisface

1.  $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .
2. La matriz jacobiana  $D\mathbf{X}(\mathbf{0})$  del campo (3.10) evaluada en el origen tiene la forma

$$D\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \nu_0 & 0 \end{pmatrix},$$

la matriz  $D\mathbf{X}(\mathbf{0})$  tiene un valor propio cero y dos valores propios reales de signo contrario.

Introduciremos la teoría de formas normales de la sección 1.3 para estudiar el campo vectorial (3.10) cerca del origen.

### 3.2.2. Forma normal del campo vectorial sobre $\Lambda(\sqrt{5})$ .

Escribimos las ecuaciones diferenciales (3.10) en la forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\sigma} = D\mathbf{X}(\mathbf{0})\mathbf{v} + \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{v}), \quad (3.11)$$

donde  $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{v}) = \mathbf{X}(\mathbf{v}) - D\mathbf{X}(\mathbf{0})\mathbf{v}$ . Sea  $T$  la matriz que transforma a  $D\mathbf{X}(\mathbf{0})$  en la forma canónica de Jordan.

Bajo la transformación

$$\mathbf{v} = T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\nu_0} & -\frac{1}{2}\sqrt{\nu_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ x_u \\ x_s \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

el sistema (3.11) se escribe como

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = T^{-1}D\mathbf{X}(\mathbf{0})T\mathbf{x} + T^{-1}\bar{\mathbf{X}}(T\mathbf{x}). \quad (3.13)$$

Denotemos a la forma canónica de Jordan de la matriz  $D\mathbf{X}(\mathbf{0})$  por  $J = T^{-1}D\mathbf{X}(\mathbf{0})T$  y definamos  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = T^{-1}\bar{\mathbf{X}}(T\mathbf{x})$ , entonces (3.13) se escribe como

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = J\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.14)$$

La transformación anterior ha simplificado la parte lineal de (3.11). La matriz  $D\mathbf{X}(\mathbf{0})$  fue transformada a la forma canónica de Jordan  $J$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\nu_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\nu_0} \end{pmatrix},$$

los términos no lineales están dados por el vector  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(x_c, x_u, x_s), F_2(x_c, x_u, x_s), F_3(x_c, x_u, x_s))^T$ ; donde  $F_2$  y  $F_3$  satisfacen  $F_2(x_c, x_u, x_s) + F_3(x_c, x_u, x_s) = 0$ . Las entradas de  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  están conformadas por polinomios homogéneos en las variables  $x_c, x_u, x_s$ ; por conveniencia, escribiremos  $v$  en lugar de  $x_c$ .

Para simplificar lo más posible la parte no lineal  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  introducimos la teoría de formas normales siguiendo el procedimiento sugerido en [Ashkenazi 1988, Chen 1999, Wiggins 1990], descrito en la sección 1.3.

**Observación 5.** *El cambio de variables  $(v, s, w) \rightarrow (v, x_u, x_s)$  rota el espacio de tal manera que los ejes coordenados coinciden en una vecindad del origen con los subespacios lineales invariantes: central  $E^c$ , inestable  $E^u$  y estable  $E^s$ .*

Aplicaremos el siguiente resultado al sistema de ecuaciones (3.14).

**Teorema 10.** *Considere el sistema no lineal*

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{w}), \quad (3.15)$$

con  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{X}$  un campo vectorial  $C^1$ . Existe una transformación polinomial  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{h}(\mathbf{u})$ , tal que transforma el sistema (3.15) en

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = J\mathbf{u} + \sum_{r=2}^l \mathbf{F}_r(\mathbf{u}) + O(\|\mathbf{u}\|^{l+1}), \quad (3.16)$$

donde  $J$  es la matriz Jacobiana del campo (3.15) en la forma canónica de Jordan y donde todos los monomios en  $\mathbf{F}_r(\mathbf{u})$  son resonantes (definición 3).

La forma normal (3.16) obtenida del teorema 10 es la forma normal de Poincaré-Dulac, llamada también la forma normal preliminar, pues admite más simplificaciones.

**Teorema 11.** *La forma normal de Poincaré-Dulac (3.16) de orden  $O(\|\mathbf{x}\|^4)$  del sistema (3.14) está dada por*

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} = J\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{12}v^2 + \frac{4\pi^3}{3\sqrt{3}}x_u x_s \\ -\frac{\pi}{24}vx_u - \frac{25}{108}\sqrt{3}x_u^2 x_s \\ \frac{\pi}{24}vx_u + \frac{25}{108}\sqrt{3}x_u^2 x_s \end{pmatrix} + O(\|\mathbf{x}\|^4). \quad (3.17)$$

*Demostración.* Para aplicar la teoría de formas normales sustituimos el cambio de variables (3.12) en (3.9) y realizamos los desarrollos; obtenemos para cada término del campo vectorial los correspondientes términos monomiales  $x^\alpha = v^{\alpha_1} x_u^{\alpha_2} x_s^{\alpha_3}$ . Los valores de los coeficientes no son relevantes. La componente  $F_1$  del campo vectorial (3.14) tiene los siguientes términos:

$$\begin{aligned} v^2 &\rightarrow x_c^2. \\ s^2 &\rightarrow x_u^2, x_u x_s, x_s^2. \\ v^2 s^2 &\rightarrow v^2 x_u^2, v^2 x_u x_s, v^2 x_s^2. \\ s^4 &\rightarrow x_u^4, x_u^3 x_s, x_u x_s^3, x_s^4. \end{aligned}$$

Para las componentes  $F_2$  y  $F_3$  se tienen los siguientes términos

$$\begin{aligned} vw &\rightarrow vx_u, vx_s. \\ s^3 &\rightarrow x_u^3, x_u^2 x_s, x_u x_s^2, x_s^3. \\ s^5 &\rightarrow x_u^5, x_u^4 x_s, x_u^3 x_s^2, x_u^2 x_s^3, x_u x_s^4, x_s^5, \end{aligned}$$

La matriz  $J$  es una matriz diagonal; del teorema 6 es posible elegir una forma  $J$ -normal de orden  $r$  que contenga sólo términos resonantes.

Aplicando el teorema 5 introducimos el corchete de Lie  $L_j^k(x^\alpha \mathbf{e}_j) = (\alpha \cdot \lambda - \lambda_j)x^\alpha \mathbf{e}_j$ , para  $j = 1, 2, 3$ , donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  y  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, \sqrt{\nu_0}, -\sqrt{\nu_0})$ , obteniendo

$$L_j^k(x^\alpha \mathbf{e}_j) = \left( (\alpha_2 - \alpha_3)\sqrt{\nu_0} - \lambda_j \right) x^\alpha \mathbf{e}_j. \quad (3.18)$$

Estamos interesados en los términos resonantes (definición 3), es decir, los monomios que satisfacen  $\alpha \cdot \lambda - \lambda_j = 0$ .

Para  $j = 1$  se tiene que  $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$ , si y sólo si  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  y  $\alpha_2 = \alpha_3$ . Los monomios resonantes  $F_1$  son  $v^2$  y  $x_u x_s$  al orden  $O(\|\mathbf{x}\|^4)$ .

Ahora, para  $j = 2$ ,  $\alpha_2 - \alpha_3 - 1 = 0$ , si y sólo si  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  y  $\alpha_2 - \alpha_3 = 1$ . Los monomios resonantes  $F_2$  para orden  $O(\|\mathbf{x}\|^4)$  son  $vx_u$  y  $x_u^2 x_s$ . La tercera componente es  $F_3 = -F_2$ , de esta propiedad se obtiene la forma normal de Poincaré-Dulac (3.17).  $\square$

**Corolario 2.** *El sistema de ecuaciones diferenciales (3.16) tiene una forma normal adicional donde los términos resonantes de  $F_3$  son  $x_u x_s$ ,  $x_u x_s^2$ , y  $x_u^2 x_s^3$*

*Demostración.* Las formas normales para un sistema de ecuaciones diferenciales no son únicas. En (3.18) para  $j = 3$  se obtiene

$$L_J^k(x^\alpha \mathbf{e}_3) = \left( (\alpha_2 - \alpha_3 + 1) \sqrt{\nu_0} \right) x^\alpha \mathbf{e}_3.$$

Los monomios resonantes satisfacen  $\alpha_2 - \alpha_3 + 1 = 0$  y  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ . Los monomios resonantes de  $F_3$  son:  $x_u x_s$ ,  $x_u x_s^2$ , y  $x_u^2 x_s^3$ .  $\square$

Aplicamos ahora la teoría de la variedad central de la sección 1.4 al sistema (3.17).

### 3.2.3. Variedad central $W^c(\mathbf{0})$ .

El campo vectorial (3.17) tiene la forma

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\sigma} &= f_1(v, x_u, x_s), \\ \frac{dx_u}{d\sigma} &= \sqrt{\nu_0} x_u + f_2(v, x_u, x_s), \\ \frac{dx_s}{d\sigma} &= -\sqrt{\nu_0} x_s + f_3(v, x_u, x_s), \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde  $f_1, f_2, f_3$  son funciones  $C^r$  para  $r \geq 2$  dadas en (3.17).

**Definición 7.** Una variedad invariante es una variedad central para (3.19) si localmente puede ser representada como

$$W^c(\mathbf{0}) = \left\{ (v, x_u, x_s) \in \Omega \mid x_u = h_1(v), x_s = h_2(v), |v| < \delta, h_i(0) = 0, Dh_i(0) = 0 \right\},$$

para  $\delta$  suficientemente pequeño, donde  $\Omega = \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s = \mathbb{R}^3$ .

El primer resultado de esta sección es sobre la existencia de la variedad central  $W^u(\mathbf{0})$  (teorema 7).

**Proposición 12.** Existe una  $C^r$  variedad central para (3.19). La dinámica restringida a la variedad central para  $|v|$  suficientemente pequeño está descrita por el siguiente campo vectorial de dimensión uno,

$$\frac{dv}{d\tau} = f_1(v, h_1(v), h_2(v)), \quad v \in \mathbb{R}. \tag{3.20}$$

La siguiente proposición describe la dinámica del sistema (3.19) en una vecindad del origen.

**Proposición 13.** El sistema no lineal de ecuaciones diferenciales (3.19) en una vecindad del origen es topológicamente equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\sigma} &= f_1(v, h_1(v), h_2(v)), \\ \frac{dx_u}{d\sigma} &= \sqrt{\nu_0} x_u, \quad x_u \in E^u, \\ \frac{dx_s}{d\sigma} &= -\sqrt{\nu_0} x_s, \quad x_s \in E^s, \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde la primera ecuación de (3.21) es la restricción de la dinámica a  $W^c(\mathbf{0})$ , mientras que las dos últimas ecuaciones describen la dinámica de un punto silla en el plano  $x_u$  y  $x_s$ .

**Teorema 12.** *Las variedades centrales  $W^c(\mathbf{0})$  asociadas a la dinámica del punto de equilibrio no hiperbólico para  $\alpha = \sqrt{5}$  en el problema colineal cargado de tres cuerpos corresponden a soluciones de colisión (escape) para  $h > 0$  contenidas en el plano invariante  $r - v$ .*

Para demostrar el teorema anterior, procedemos a probar los siguientes resultados previos.

**Proposición 14.** *El sistema de ecuaciones homológicas para la variedad central  $W^u(\mathbf{0})$  está dado por el sistema de ecuaciones*

$$Dh_1(v)f(v, h_1, h_2) - \sqrt{\nu_0}h_1 - f_2(v, h_1, h_2) = 0, \quad (3.22)$$

$$Dh_2(v)f(v, h_1, h_2) + \sqrt{\nu_0}h_2 - f_3(v, h_1, h_2) = 0. \quad (3.23)$$

*Demostración.* Los puntos  $(v, x_u, x_s) \in W^c(\mathbf{0})$  deben satisfacer que

$$x_u = h_1(v), \quad x_s = h_2(v). \quad (3.24)$$

Derivando a las ecuaciones (3.24) respecto al tiempo  $\sigma$ , se tiene que los puntos  $(\frac{dv}{d\sigma}, \frac{dx_u}{d\sigma}, \frac{dx_s}{d\sigma}) \in W^c(\mathbf{0})$  satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\sigma} &= f(v, h_1(v), h_2(v)), \\ \frac{dx_u}{d\sigma} &= Dh_1(v) \frac{dv}{d\sigma} = \sqrt{\nu_0}h_1(v) + f_2(v, h_1(v), h_2(v)), \\ \frac{dx_s}{d\sigma} &= Dh_2(v) \frac{dv}{d\sigma} = -\sqrt{\nu_0}h_2(v) + f_3(v, h_1(v), h_2(v)). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda y tercera ecuaciones del sistema (3.25) se obtienen las ecuaciones homológicas (3.22) y (3.23).  $\square$

**Proposición 15.** *El flujo restringido a la variedad central  $W^c(\mathbf{0})$  está dado por la ecuación diferencial*

$$\frac{dv}{d\sigma} = -\frac{\pi}{12}v^2. \quad (3.26)$$

*al aproximar mediante polinomios de cualquier grado en la variable  $v$ .*

*Demostración.* Sean

$$\phi_1(v) = \sum_{i=2}^n a_i v^i \quad (3.27)$$

$$\phi_2(v) = \sum_{j=2}^m b_j v^j \quad (3.28)$$

polinomios homogéneos en la variable  $v$  tales que  $\phi_1(v) = O(|v|^n)$  and  $\phi_2(v) = O(|v|^m)$ . Supongamos que  $m > n$ . Sustituyendo (3.27) y (3.28) en (3.22) obtenemos la primera ecuación homológica para este caso

$$D\phi_1(v)f(v, \phi_1, \phi_2) - \sqrt{\nu_0}\phi_1 - f_2(v, \phi_1, \phi_2) = 0,$$

donde

$$D\phi_1(v)f(v, \phi_1, \phi_2) = -\frac{\pi}{12} \sum_{i=2}^n a_i v^{i+1} + \left( \sum_{i=2}^n i a_i v^i \right) \left( \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^m a_i b_j v^{i+j} \right).$$



Definimos

$$\Gamma_1^k(v) = -\frac{\pi}{12} \sum_{i=k}^n a_i v^{i+1} + \left( \sum_{i=k}^n i a_i v^i \right) \left( \sum_{i=k}^n \sum_{j=k}^m a_i b_j v^{i+j} \right),$$

$$\Gamma_2^k(v) = -\sqrt{\nu_0} \sum_{i=k}^n a_i v^i.$$

Denotamos al exponente de menor grado del polinomio  $p(v)$  como  $l(p(v))$ . Para  $k \geq 2$ , los exponentes de menor grado son para  $l(\Gamma_1^k(v)) = k + 1$ ,  $l(\Gamma_2^k(v)) = k$ , y  $l(f_2(v, \phi_1, \phi_2)) = k + 1$ , entonces

$$l(\Gamma_2^k(v)) < l(f_2(v, \phi_1, \phi_2)) < l(\Gamma_1^k(v)).$$

Procediendo inductivamente sobre el índice  $i$  e igualando los coeficientes de cada potencia de  $v$  a cero procedemos a calcular los coeficientes  $a_i$  [Wiggins 1990].

Para  $k = 2$  hay un sólo término de grado 2, el cual se encuentra en el polinomio  $\Gamma_2^k$ ; igualando el coeficiente de este término a cero se obtiene la ecuación  $\sqrt{\nu_0} a_2 = 0$ , entonces  $a_2 = 0$ . Los términos con el coeficiente  $a_2$  en la ecuación homológica son cancelados.

En el siguiente paso, el único coeficiente cuyo término es de grado 3 es  $\sqrt{\nu_0} a_3$ , como en el paso anterior  $a_3 = 0$ . En general, dado que  $\Gamma_2^k(v)$  contiene el menor grado entre los polinomios  $\Gamma_1^k(v)$ , y  $f_2(v, \phi_1, \phi_2)$ , concluimos que en cada paso el coeficiente  $a_i = 0$ , entonces  $a_i = 0$ , para  $2 \leq i \leq n$ .

Supondremos; que  $m < n$ , tenemos

$$\sum_{i=m+1}^n \left( \frac{\pi}{12} + \sqrt{\nu_0} \right) a_i v = 0,$$

igualando los coeficientes de cada potencia de  $x_c$  a cero tenemos que el coeficiente  $a_i = 0$ . Finalmente obtenemos que  $h_1(v) \equiv 0$ .

Los polinomios  $f_2$  y  $f_3$  satisfacen que  $f_2(v, \phi_1, \phi_2) = -f_3(v, \phi_1, \phi_2)$ . Tenemos que  $f_2(v, 0, \phi_2) \equiv 0$ , entonces  $f_3(v, 0, \phi_2) \equiv 0$ .

Reemplazando  $h_1(v) \equiv 0$  en (3.23) obtenemos la segunda ecuación homológica

$$Dh_2(v)f(v, 0, h_2(v)) + \sqrt{\nu_0} h_2(v) = 0,$$

sustituyendo (3.28) en (3.23)

$$-\frac{\pi}{12} \sum_{j=2}^m j b_j v^{j+1} + \sqrt{\nu_0} \sum_{j=2}^m b_j v^j = 0,$$

basándonos en el procedimiento anterior los coeficientes  $b_j = 0$  para todo  $2 \leq j \leq m$ .

Entonces  $h_2(v) \equiv 0$ . Concluimos que  $h_1(v) \equiv h_2(v) \equiv 0$  son las únicas soluciones polinomiales de las ecuaciones homológicas (3.22), (3.23). Por el teorema 12 la dinámica restringida a la variedad central está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{d\sigma} = -\frac{\pi}{12} v^2,$$

obtenida de sustituir  $h_i(v) \equiv 0$  en la primera ecuación del sistema (3.19). □

*Demostración.* (Teorema 12). De la proposición 15 se obtuvo que los coeficientes  $a_i \equiv b_i \equiv 0$  para toda  $i, j$ , entonces  $x_u(0) = x_s(0) \equiv 0$ , sustituyendo en el cambio de coordenadas (3.12) obtenemos que  $s \equiv 0$  y  $w \equiv 0$ . Las variedades centrales se encuentran contenidas en el plano invariante  $r - v$ . De la relación de energía (3.3)

$$W^c(0) = \left\{ (r, v, 0, 0) \mid \frac{1}{2}v^2 - rh = 0 \right\}.$$

Para cada valor de la energía  $h > 0$  obtenemos una variedad central  $W^c(\mathbf{0})$  que se proyecta sobre el eje  $v$  en las coordenadas  $(v, s, w)$ . La variedad central  $W^c(\mathbf{0})$  se encuentra fuera de la variedad de colisión triple  $\Lambda(\sqrt{5})$ .

Por la existencia y unicidad de soluciones, las variedades centrales  $W^c(\mathbf{0})$  corresponden a las soluciones de colisión y escape obtenidas en la sección 3.1.  $\square$

### 3.2.4. Dinámica cerca del origen

Remarcamos que un tipo de colisión binaria (partículas  $m_2 - m_3$ ) en  $\Lambda(\sqrt{5})$  corresponde al valor  $s = 1$ , mientras que el otro tipo corresponde a  $s = -1$  (partículas  $m_1 - m_2$ ). Por otro lado, las soluciones vienen y escapan a infinito realizando un número contable de colisiones binarias cuando se aproximan o se alejan de la variedad central  $v = 0$ .

Para  $h < 0$  las soluciones vienen de infinito realizando colisiones binarias del tipo  $s = 1$  o del tipo  $s = -1$ , mantienen el mismo tipo de colisión binaria después de aproximarse a la colisión triple y a la variedad central, y escapan a infinito siguiendo este comportamiento.

Para  $h > 0$  las soluciones vienen de infinito realizando alguno de los dos tipos de colisiones binarias del problema, al aproximarse a la colisión triple se intercambia el tipo de colisión binaria, y el sistema escapa a infinito realizando este tipo de colisión binaria (figura 3.3).

### 3.2.5. Dinámica para $h = 0$

Si  $(r(\sigma), v(\sigma), s(\sigma), w(\sigma))$  es una solución de (3.2) en el nivel de energía cero  $E_0$ , entonces  $(0, v(\sigma), s(\sigma), w(\sigma))$  es una solución de (3.4) en la variedad de colisión  $\Lambda(\sqrt{5})$ . El flujo en  $E_0$  es *proyectable* sobre  $\Lambda(\sqrt{5})$ . La proyección de la solución  $(r(\sigma), v(\sigma), s(\sigma), w(\sigma)) \in E_0$  en  $\Lambda(\sqrt{5})$  es  $(0, v(\sigma), s(\sigma), w(\sigma))$ .

Al estudiar el flujo sobre  $\Lambda(\sqrt{5})$  para  $h = 0$  tenemos dos soluciones que terminan asintóticamente en colisión triple. Estas soluciones, dependiendo de la rama de la variedad de colisión  $\Lambda(\sqrt{5})$  en la que se encuentran, presentan un sólo tipo de colisión binaria. De la colisión triple escapan dos soluciones a infinito realizando un sólo tipo de colisión binaria dependiendo de la rama de  $\Lambda(\sqrt{5})$  en la cual se encuentran (figura 3.4).

Estudiaremos los escapes para  $h = 0$ . El momento de inercia es  $r^2 = (q^T q)$  pues  $\mathcal{M} = I$ , sea  $\rho = r^{-1} = (q^T q)^{-\frac{1}{2}}$ . En la misma manera que se estudia la dinámica para la colisión triple, la variable  $\rho$  ayuda a

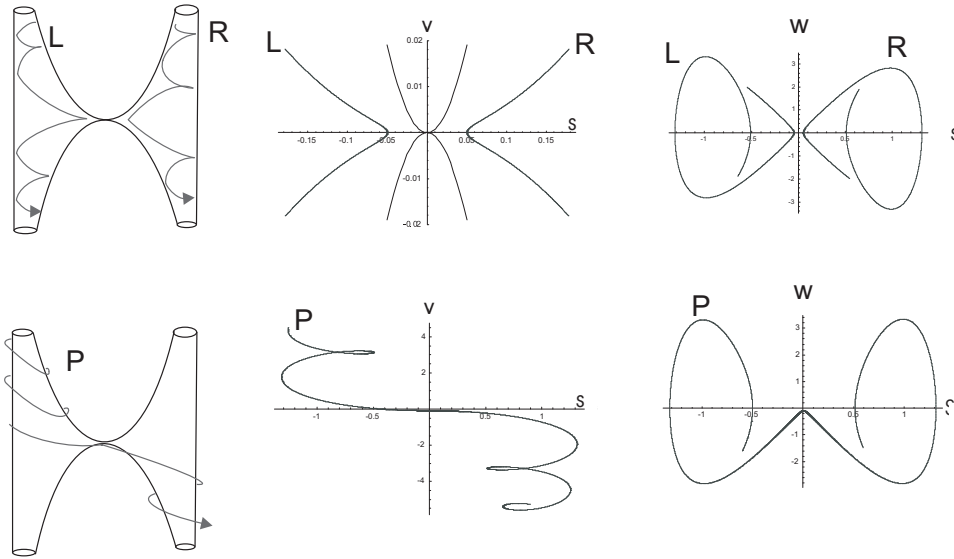


Figura 3.3:  $L$  y  $R$  son soluciones para  $h = -1$  con condiciones iniciales  $(r, v, s, w) = (0.001, 0, \pm 0.005, 0)$ ,  $P$  es una solución para  $h = 1$  con condiciones iniciales  $(r, v, s, w) = (0.01, -0.1, 0.1, -0.4)$ .

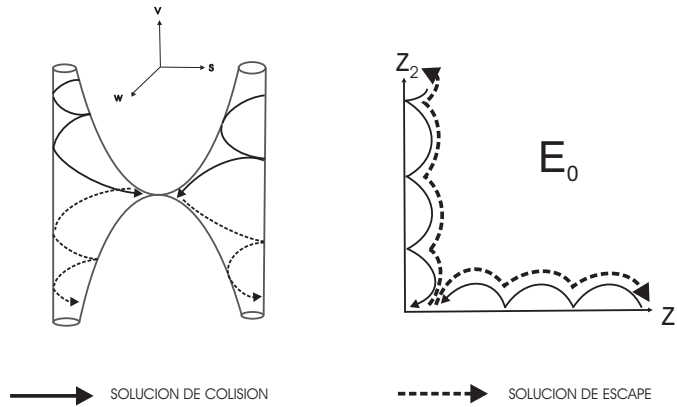


Figura 3.4: Soluciones de colisión y escape para  $h = 0$

estudiar las soluciones cercanas al infinito cuando  $\rho = 0$ . Las variables  $v, s, u, U(s)$  se definen en la misma forma que en [McGehee 1974]. Las colisiones dobles se regularizan como en la sección 3.2.

Sustituyendo  $r = \rho^{-1}$  en (3.3), la relación de energía regularizada está dada por

$$\rho \left( \frac{1}{2} w^2 + (1 - s^2)^2 v^2 - (1 - s^2) W(s) \right) = (1 - s^2)^2 h, \tag{3.29}$$

y las ecuaciones de movimiento (3.2) en coordenadas  $(\rho, v, s, w)$  están dadas por

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{d\sigma} &= -\frac{\pi}{6}\rho v(1-s^2), \\ \frac{dv}{d\sigma} &= -\frac{\pi}{12}(1-s^2)v^2 + \frac{\pi}{6}W(s), \\ \frac{ds}{d\sigma} &= w, \\ \frac{dw}{d\sigma} &= 2s(1-s^2)v^2 - 4sW(s) - \frac{\pi}{12}vw(1-s^2) + \frac{dU_{\sqrt{5}}}{ds}(s)(1-s^2)^2.\end{aligned}\tag{3.30}$$

Para  $h = 0$ , el nivel de energía  $E_0 = \{(\rho, v, s, w) \mid \rho > 0, \frac{1}{2}w^2 + (1-s^2)^2v^2 = (1-s^2)W(s)\}$  se extiende analíticamente a una frontera de dimensión dos llamada *variedad del infinito*  $N_0$ , donde

$$N_0 = \left\{(\rho, v, s, w) \mid \rho = 0, \frac{1}{2}w^2 + (1-s^2)^2v^2 = (1-s^2)W(s)\right\}.$$

**Proposición 16.** *Para  $h = 0$ ,  $N_0$  tiene la misma forma que  $\Lambda(\sqrt{5})$  y el flujo sobre  $N_0$  es el mismo que el flujo sobre  $\Lambda(\sqrt{5})$ , los puntos de equilibrio y la dinámica en una vecindad no se altera.*

El flujo sobre  $N_0$  no depende de  $\rho$ , por lo tanto, conociendo la dinámica sobre  $N_0$ , se conoce el flujo sobre  $E_0 \cup N_0$ .

### 3.2.6. Dinámica en $h > 0$

Para  $h > 0$  la energía cinética predomina en la relación de energía (3.3) permitiendo el escape de partículas. En [Hietarinta 1990] se proponen los posibles comportamientos que pueden tener las soluciones para energía positiva cuando el tiempo tiende a infinito:

1. Escape total. Las distancias entre las partículas se incrementan conforme aumenta el tiempo.
2. Formación de una binaria. Dos partículas se mantienen realizando colisiones binarias mientras la tercera escapa a infinito.
3. Soluciones cuasi-periódicas.

Para el modelo gravitacional hay condiciones iniciales que dan lugar a soluciones con escape total y soluciones donde se forma una binaria. No se han encontrado condiciones iniciales que generen soluciones cuasiperiódicas. En la sección 3.4, integrando numéricamente las ecuaciones diferenciales obtenidas del Hamiltoniano (2.7) para  $\alpha = \sqrt{5}$  se muestra la existencia de soluciones cuasi-periódicas para el modelo colineal cargado. A continuación se desarrollan los resultados para el caso colineal cargado.

Con una inversión de la coordenada radial, los escapes se estudian de forma análoga a la colisión triple. Con el cambio  $r = \rho^{-1}$ , la relación (3.3) se escribe

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U_\alpha(s) = \frac{h}{\rho},\tag{3.31}$$

esta ecuación tiene una singularidad en  $\rho = 0$ . Introducimos nuevas coordenadas  $(\rho, \hat{v}, s, \hat{u})$  [Lacomba 1987], donde la coordenada  $s$  describe la configuración del sistema,  $\hat{v}$  y  $\hat{u}$  son las componentes radial y tangencial de la velocidad respectivamente. Las ecuaciones (3.2) se transforman en

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= -\rho\hat{v}, \\ \frac{d\hat{v}}{d\tau} &= \hat{u}^2 - \rho U_\alpha(s), \\ \frac{ds}{d\tau} &= \frac{6}{\pi}\hat{u}, \\ \frac{d\hat{u}}{d\tau} &= -\hat{u}\hat{v} + \frac{6}{\pi}\rho \frac{dU_\alpha}{ds}(s). \end{aligned} \quad (3.32)$$

La relación de energía (3.3) se reescribe

$$\frac{1}{2}(\hat{u}^2 + \hat{v}^2) - \rho U_\alpha(s) = h. \quad (3.33)$$

Primero estudiaremos el *escape total* de las tres partículas; en este caso no es necesario regularizar las colisiones binarias. Sea  $\rho = 0$ , la relación de energía (3.33) se escribe

$$\hat{u}^2 + \hat{v}^2 = 2h. \quad (3.34)$$

Para el escape total la norma de la velocidad del sistema tiende a una constante  $\sqrt{2h}$  llamada la *velocidad hiperbólica* en el infinito. Definimos la variedad de escape total  $\bar{N}_h$  como el conjunto

$$\bar{N}_h = \left\{ (\rho, \hat{v}, s, \hat{u}) \in E_h \mid \rho = 0, \hat{u}^2 + \hat{v}^2 = 2h \right\}.$$

Para todo  $s \in (-1, 1)$ ,  $\hat{u}^2 + \hat{v}^2 = 2h$  es un círculo, y  $\bar{N}_h$  es topológicamente equivalente a un cilindro sin tapas (figura 3.5). Las variedades  $\bar{N}_h$  y  $\Lambda(\alpha)$  son componentes de la frontera de  $E_h$ . El flujo de (3.32) no es proyectable sobre  $\bar{N}_h$  o sobre  $\Lambda(\alpha)$ . Los puntos de equilibrio de (3.32) pertenecen al conjunto

$$S_h = \left\{ (\rho, \hat{v}, s, \hat{u}) \mid \rho = 0, \hat{v}^2 = 2h, s \in (-1, 1), \hat{u} = 0 \right\},$$

donde  $S_h = S_h^+ \cup S_h^-$ . El conjunto  $S_h^+$  corresponde a  $v = \sqrt{2h}$ , mientras que  $S_h^-$  corresponde a  $v = -\sqrt{2h}$ . De [Lacomba 1987] el flujo sobre  $E_h \cup N_h$  es casi gradiente respecto a  $\hat{v}$ ; tiene  $S_h^+$  como un atractor normalmente hiperbólico y a  $S_h^-$  como un repulsor normalmente hiperbólico. Las órbitas inician en  $S_h^-$  y terminan en  $S_h^+$ , excepto para  $s = \pm 1$ .

**Proposición 17.** *El escape total ocurre en cualquier dirección iniciando y terminando con velocidad hiperbólica para todos los valores de  $\alpha$ .*

Para el caso en el cual una partícula escapa a infinito mientras el otro par se mantiene acotado, es necesario regularizar las colisiones binarias. Sea

$$w = \frac{(1-s^2)}{\sqrt{W_\alpha(s)}}\hat{u}, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\pi(1-s^2)}{6\sqrt{W_\alpha(s)}},$$

donde  $W_\alpha(s) = 2(1-s^2)U_\alpha(s)$ . La relación de energía (3.3) se reescribe como

$$w^2 + \frac{\hat{v}^2(1-s^2)^2}{2W_\alpha(s)} - \frac{\rho W_\alpha(s)}{2(1-s^2)} = h \frac{(1-s^2)^2}{W_\alpha(s)}, \quad (3.35)$$

y las ecuaciones (3.32) se transforman en

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{d\sigma} &= -\frac{\pi}{6}\rho\hat{v}\frac{(1-s^2)}{\sqrt{W_\alpha(s)}}, \\
\frac{d\hat{v}}{d\sigma} &= \frac{\pi}{6}\frac{(1-s^2)}{\sqrt{W_\alpha(s)}}(2h-\hat{v}^2) + \frac{\pi}{6}\rho W_\alpha(s), \\
\frac{ds}{d\sigma} &= w, \\
\frac{dw}{d\sigma} &= -\frac{\pi}{\sqrt{W_\alpha(s)}}\left(2s - (1-s^2)\frac{\dot{W}_\alpha(s)}{2}\right)\left((2h-\hat{v}^2)\left(\frac{1-s^2}{W_\alpha(s)}\right) + 2\rho\sqrt{W_\alpha(s)}\right) \\
&\quad - \frac{\pi}{6}\frac{1-s^2}{\sqrt{W_\alpha(s)}}\left(-\hat{v}w + \rho\frac{1-s^2}{W_\alpha(s)}\frac{dW_\alpha}{ds}(2)\right).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

La variedad del infinito  $N_h$  está dada por el conjunto

$$N_h = \left\{ (\rho, \hat{v}, s, w) \in E_h \mid \rho = 0, w^2 + \frac{\hat{v}^2(1-s^2)^2}{2W_\alpha(s)} = h\frac{(1-s^2)^2}{W_\alpha(s)} \right\}.$$

Para  $s \in (-1, 1)$ ,

$$w^2 + \frac{\hat{v}^2(1-s^2)^2}{2W_\alpha(s)} = h\frac{(1-s^2)^2}{W_\alpha(s)}$$

describe una elipse; para  $s = \pm 1$  la elipse degenera en una línea recta.  $N_h$  es topológicamente equivalente a una esfera  $\mathbb{S}^2$  (figura 3.5).

La velocidad radial  $\hat{v}$  está acotada:  $|\hat{v}| \leq \sqrt{2h}$ . Los puntos de equilibrio de (3.36) están dados por el conjunto  $S_h \cup S_{-1} \cup S_1$ , donde

$$S_h = \left\{ (\rho, \hat{v}, s, w) \in E_h \mid \rho = 0, w = 0, \hat{v}^2 = 2h, s \in [-1, 1] \right\},$$

$$S_{-1} = \left\{ (\rho, \hat{v}, s, w) \in E_h \mid \rho = 0, w = 0, s = -1, \hat{v} \in [-\sqrt{2h}, \sqrt{2h}] \right\},$$

$$S_1 = \left\{ (\rho, \hat{v}, s, w) \in E_h \mid \rho = 0, w = 0, s = 1, \hat{v} \in [-\sqrt{2h}, \sqrt{2h}] \right\}.$$

El conjunto  $S_h \cup S_{-1} \cup S_1$  es topológicamente equivalente a  $S^1$ . Tenemos que  $S_h = S_h^+ \cup S_h^-$ , donde  $S_h^+$  corresponde a  $\hat{v} = \sqrt{2h}$  mientras  $S_h^-$  corresponde a  $\hat{v} = -\sqrt{2h}$ . Para estos conjuntos se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 18.** Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $N_h = S_h^+ \cup S_h^- \cup S_{-1}^0 \cup S_1^0$ , donde  $S_h^+$  es un atractor normalmente hiperbólico,  $S_h^-$  es un repulsor normalmente hiperbólico. Los conjuntos

$$S_h = \{(\rho, \hat{v}, s, w) \in E_h \mid \rho = 0, \hat{v} \in (-\sqrt{2h}, \sqrt{2h})\},$$

$$S_h = \{(\rho, \hat{v}, s, w) \in E_h \mid \rho = 0, w = 0, \hat{v}^2 = 2h, s = 1\},$$

son sillars normalmente hiperbólicas. Para los puntos  $(0, \pm 2h, \pm 1, w = 0)$  el flujo es totalmente degenerado.

El escape a infinito es posible en cualquier dirección. En  $s = \pm 1$  no hay restricción para  $\hat{v}$ ; para  $s \in (-1, 1)$  la velocidad hiperbólica al infinito satisface  $|\hat{v}| = \sqrt{2h}$ . La dinámica sobre  $N_h$  es el equivalente a la dinámica estudiada en [Lacomba 1987].

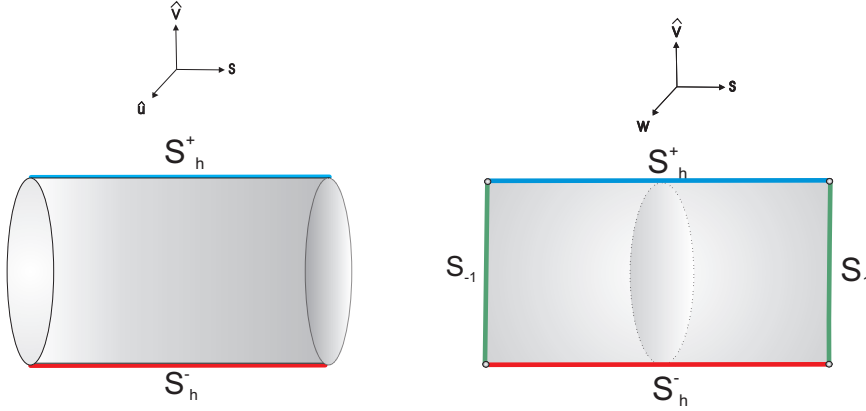


Figura 3.5: Variedad del infinito  $N_h$  y variedad de escape total  $\bar{N}_h$

Un estudio sobre escapes donde se forma una binaria, es decir, la distancia entre un par de partículas se mantiene acotada y estas realizan colisiones binarias, mientras la restante escapa a infinito con velocidad final (órbitas parabólicas) en el problema colineal cargado de tres cuerpos se puede consultar en [Castro-Ortega 2011]. Además el artículo citado incluye los resultados de este capítulo sobre el caso degenerado.

### 3.3. Órbitas parabólicas

Estudiaremos un tipo particular de escape en el problema colineal cargado de tres cuerpos donde la partícula 3 escapa a infinito alcanzándolo con velocidad cero; mientras el par de partículas formado por 1 y 2 realizan colisiones binarias para [Castro-Ortega 2011].

Introduciremos las coordenadas de Jacobi  $J_{12}$  utilizadas en la sección 2.2 definidas por  $x = x_2 - x_1$  y  $y = \frac{3}{2}x_3$  en las ecuaciones de movimiento (2.1). El Hamiltoniano en coordenadas de Jacobi obtenido de (2.3) es

$$H = \left( p_x^2 + \frac{3}{4}p_y^2 \right) - \left( \frac{2}{|x|} + \frac{2}{|y - \frac{x}{2}|} + \frac{1 - \alpha^2}{|y + \frac{x}{2}|} \right), \quad (3.37)$$

con ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2p_x, \\ \dot{y} &= \frac{3}{2}p_y, \\ \dot{p}_x &= -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{(y - \frac{x}{2})^2} - \frac{1 - \alpha^2}{2(y + \frac{x}{2})^2}, \\ \dot{p}_y &= -\frac{2}{(y + \frac{x}{2})^2} - \frac{1 - \alpha^2}{(y + \frac{x}{2})^2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

**Definición 8.** La solución  $(x(t), y(t))$  de (3.38) escapa a infinito si  $y(t) \rightarrow \infty$  cuando el tiempo tiende a infinito; decimos que la solución escapa parabólicamente si  $\dot{y}(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . De forma análoga,

las soluciones que escapan parabólicamente a infinito en tiempo negativo se obtienen reemplazando  $t \rightarrow \infty$  por  $t \rightarrow -\infty$ . Una órbita biparabólica es una órbita que es parabólica para  $t \rightarrow \infty$  y  $t \rightarrow -\infty$ .

Para estudiar el comportamiento de las soluciones que satisfacen  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ , introducimos el siguiente cambio de coordenadas  $y = q^{-2}$  y  $p_y = p$ . Se tiene una singularidad en  $x = 0$ , es decir, cuando el par de partículas 1 y 2 colisionan. Regularizaremos estas colisiones binarias mediante la introducción de las variables de Levi-Civita  $x = \xi^2$ ,  $p_x = \frac{\eta}{\xi}$  (sección 2.1.1).

Las ecuaciones de movimiento obtenidas son

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\eta}{2\xi^2}, \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{2}{\xi^3} + \frac{\eta^2}{2\xi^3} + \frac{8q^4}{(2+q^2\xi^2)^2} - \frac{8q^4}{(2+q^2\xi^2)^2}, \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{2}{3}q^3p, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{8q^4}{(2+q^2\xi^2)^2} - \frac{4q^4(1-\alpha^2)}{(2-q^2\xi^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

y tienen una singularidad cuando  $\xi = 0$ . Introduciendo el reescalamiento  $\frac{dt}{d\tau} = 2\xi^2$ , las ecuaciones de movimiento (3.39) se reescriben como

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\frac{4}{\xi} + \frac{\eta^2}{\xi} + \frac{16q^4\xi^2}{(2+q^2\xi^2)^2} - \frac{16q^4\xi^2}{(2+q^2\xi^2)^2}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{4}{3}q^3p\xi^2, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{16q^4\xi^2}{(2+q^2\xi^2)^2} - \frac{8q^4\xi^2(1-\alpha^2)}{(2-q^2\xi^2)^2}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

con relación de energía

$$H = \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{\xi^2} + \frac{2}{3}p^2 - \frac{2}{\xi^2} - \frac{4q^2}{2+q^2\xi^2} - \frac{2q^2(1-\alpha^2)}{2-q^2\xi^2} = h.$$

Para el valor negativo fijo de la energía  $h = -\frac{1}{2}$  la relación de energía tiene la siguiente expresión

$$\eta^2 + \xi^2 + \frac{4}{3}p^2\xi^2 - \frac{8q^2\xi^2}{2+\xi^2q^2} - \frac{4q^2\xi^2(1-\alpha^2)}{2-q^2\xi^2} = 4. \quad (3.41)$$

El sistema de ecuaciones (3.40) se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi \left( 1 + \frac{4}{3}p^2 - \frac{8q^2}{2+q^2\xi^2} + \frac{4q^2(1-\alpha^2)}{2-q^2\xi^2} \right) + \frac{16q^4\xi^2}{(2+q^2\xi^2)^2} \\ &\quad - \frac{8q^4\xi^2(1-\alpha^2)}{2-q^2\xi^2}, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -\frac{4}{3}q^3p\xi^2, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{16q^4\xi^2}{(2+q^2\xi^2)^2} - \frac{8q^4\xi^2(1-\alpha^2)}{(2-q^2\xi^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.42)$$



Hemos obtenido un sistema de ecuaciones diferenciales sin singularidades que puede utilizarse para estudiar las soluciones que satisfacen que  $y \rightarrow \infty$ , y  $\dot{y} \rightarrow 0$  al regularizar las colisiones binarias.

Definimos la variedad del infinito asociada a los escapes en la dirección de  $y$  como el conjunto

$$V_\infty(y) = \left\{ (\eta, \xi, q, p) \mid q = 0, \eta^2 + \xi^2 \left( 1 + \frac{4}{3}p^2 \right) = 4 \right\}. \quad (3.43)$$

**Proposición 19.**  $V_\infty(y)$  es topológicamente equivalente a una esfera sin dos puntos.

*Demostración.* Consideremos el siguiente cambio de variables

$$\tilde{\eta} = \sqrt{\frac{1 - W^2}{4}} \eta,$$

la ecuación que aparece en la definición de  $V_\infty(y)$  puede reescribirse como

$$4\tilde{\eta}^2 - (1 - W^2) \left( 1 + \frac{4}{3}p^2 \right) \xi^2 + 4W^2 = 4. \quad (3.44)$$

Elegimos  $W$  en tal forma que  $|W| \neq 1$  y tal que satisface la relación  $(1 - W^2) \left( 1 + \frac{4}{3}p^2 \right) = 4$ ; entonces la ecuación (3.44) tiene la forma

$$\tilde{\eta}^2 + \xi^2 + W^2 = 1, \quad (3.45)$$

que es la ecuación de la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Recordando que  $|W| \neq 1$ , se tiene que  $V_\infty(y)$  es una esfera sin los polos  $(0, 0, \pm 1)$ ; *i.e.*  $V_\infty(y) \sim \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$ .  $\square$

**Observación 6.** El valor del parámetro  $\alpha$  no influye la forma de la variedad del infinito  $V_\infty(y)$ .

En la variedad del infinito, los puntos  $\xi = 0$  correspondientes a  $x = 0$  satisfacen la ecuación  $\eta^2 = 4$ , por lo tanto, la componente  $\frac{d\xi}{d\tau}$  del campo vectorial (3.42) no se anula. Las coordenadas  $p$  y  $q$  pueden tomar cualquier valor. El conjunto de las colisiones binarias  $C = \{(\xi, \eta, q, p) \in E_h \mid \xi = 0, \eta^2 = 4\}$  es una variedad de dimensión dos donde el campo vectorial es transversal en la dirección de la coordenada  $\xi$ . De esta forma, se ha extendido el flujo al conjunto de las colisiones binarias en  $x = 0$ .

Para el conjunto de órbitas en el infinito, el flujo está dado por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi, \\ \frac{dq}{d\tau} &= 0, \\ \frac{dp}{d\tau} &= 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

cuyas soluciones son soluciones periódicas sobre la variedad del infinito  $V_\infty(y)$ , donde la relación de energía es  $\eta^2 + \xi^2 = 4$ . La única solución para (3.46) en el nivel de energía  $E_h$  fijo es una órbita periódica  $OPP_+$  llamada la órbita periódica al infinito localizada en ecuador de  $V_\infty(y)$ . La órbita periódica  $OPP_+$  sobre  $V_\infty(y)$  corresponde al  $\alpha$ -límite y al  $\omega$ -límite del conjunto de soluciones que llegan a infinito con velocidad cero.

El sistema de ecuaciones (3.42) se reescribe como

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\
\frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi \left\{ 1 + \frac{4}{3}p^2 - \frac{8q^2}{2+q^2\xi^2} + \frac{4q^2(1-\alpha^2)}{2-q^2\xi^2} + \frac{16q^4\xi}{(2+q^2\xi)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{8q^4\xi(1-\alpha^2)}{2-q^2\xi^2} \right\}, \\
\frac{dq}{d\tau} &= -\frac{4}{3}q^3p\xi^2, \\
\frac{dp}{d\tau} &= -8q^4\xi^2 \left( 1 + \left\{ -1 + \frac{16q^4\xi^2}{(2+q^2\xi^2)^2} - \frac{8q^4\xi^2(1-\alpha^2)}{(2-q^2\xi^2)^2} \right\} \right).
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Escribimos a (3.47) como

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi}{d\tau} &= \eta, \\
\frac{d\eta}{d\tau} &= -\xi (1 + F_1(q, p, \xi)), \\
\frac{dq}{d\tau} &= -\frac{4}{3}q^3p\xi^2, \\
\frac{dp}{d\tau} &= -8q^4\xi^2 (1 + F_2(q, \xi)),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

donde

$$F_1(q, p, \xi) = \frac{4}{3}p^2 - \frac{8q^2}{2+q^2\xi^2} + \frac{4q^2(1-\alpha^2)}{2-q^2\xi^2} + \frac{16q^4\xi}{(2+q^2\xi)^2},$$

y

$$F_2(q, \xi) = -1 + \frac{16q^4\xi^2}{(2+q^2\xi^2)^2} - \frac{8q^4\xi^2(1-\alpha^2)}{(2-q^2\xi^2)^2}.$$

Notemos que  $F_2(q, \xi)$  es cuadrático en las variables  $q$  y  $\xi$ , mientras  $F_1(q, p, \xi)$  es de primer orden en  $p$  y  $q$ , y de segundo orden en  $\xi$ . Entonces, las condiciones del teorema de McGehee [McGehee 1973] para puntos fijos degenerados se satisfacen, por lo tanto, el origen  $(q, p) = (0, 0)$  es un punto fijo hiperbólico degenerado, entonces  $OPP_+$  tiene dos variedades invariantes de dimensión dos: una estable  $W^s(OPP_+)$  y la otra inestable  $W^u(OPP_+)$ , ambas analíticas, excepto tal vez en  $OPP_+$ .

**Observación 7.** *Las órbitas parabólicas son aquellas para las cuales  $(q, p) \rightarrow (0, 0)$  cuando  $\tau \rightarrow \infty$ . De la proposición 11 in [McGehee 1973] el conjunto de órbitas parabólicas forman una subvariedad real analítica de la superficie de energía.*

Introducimos coordenadas polares para las coordenadas  $(\xi, \eta)$  mediante el cambio de variables

$$\xi = \sqrt{2L} \cos l, \quad \eta = \sqrt{2L} \sin l,$$

Es posible usar la coordenada  $l$  como una variable independiente en una vecindad de  $OPP_+$ . El sistema (3.47) es transformado en un sistema de la forma

$$\begin{aligned}\frac{dq}{d\tau} &= Y(q, p, L, l), \\ \frac{dp}{d\tau} &= Z(q, p, L, l), \\ \frac{dl}{d\tau} &= -1 - F_1 \cos^2 l, \\ \frac{dL}{d\tau} &= -\xi\eta F_1,\end{aligned}\tag{3.49}$$

Sustituyendo en las ecuaciones los cambios de variables  $(\xi, \eta) \rightarrow (l, L)$  en la relación de energía (3.41)

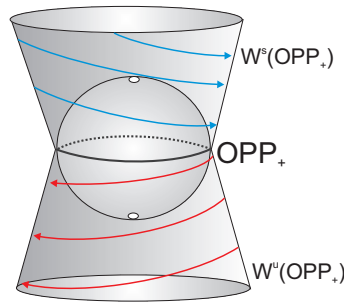


Figura 3.6:  $OPP_+$

es posible describir a la variable  $L$  en términos de la variable  $q$ ,  $p$  y  $l$ , por lo tanto, las primeras dos ecuaciones del sistema (3.48) se escriben como

$$\begin{aligned}\frac{dq}{d\tau} &= Y(q, p, l), \\ \frac{dp}{d\tau} &= Z(q, p, l),\end{aligned}\tag{3.50}$$

tenemos una descripción geométrica para las variedades estable e inestable asociadas a  $OPP_+$ , (figura 3.3).

### 3.4. Resultados numéricos

En esta sección se integran numéricamente las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir del Hamiltoniano (2.6) en coordenadas de Levi-Civita para los valores de masas  $m_i = 1$  y cargas  $q_1 = q_3 = \sqrt{5}$ ,  $q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , correspondientes al caso no hiperbólico estudiado en este capítulo. Las soluciones se obtienen integrando numéricamente mediante *Mathematica* las ecuaciones de movimiento, posteriormente son proyectadas en el plano de posiciones  $z_1$  y  $z_2$  para distintas condiciones iniciales haciendo las identificaciones correspondientes.

Dado que trabajamos con masas iguales en los extremos podemos seguir el planteamiento sugerido en [Broucke 1980]. Consideraremos las condiciones iniciales  $\xi_1(0) = \xi_2(0) = \xi_0$  y  $\eta_1(0) + \eta_2(0) = 0$ , en esta

forma, las partículas 1 y 3 equidistan de la partícula 2 que se encuentra en el centro de masa del sistema; las partículas de los extremos tienen velocidades opuestas.

En [Broucke 1980] se consideran las condiciones iniciales  $\xi_0 = 1$  y  $\eta_1(0) = \eta_0$ , donde el valor de la velocidad  $\eta_0$  se varía con el objetivo de conocer los distintos tipos de soluciones obtenidas numéricamente. La elección de la condición inicial para la posición  $\xi_0 = 1$  no implica pérdida de generalidad, pues el potencial es homogéneo y es posible hacer algún reescalamiento para hacer este ajuste.

La recta  $z_1 = z_2$  es un eje de simetría para las proyecciones de las soluciones en el plano de posiciones  $z_1 - z_2$ . Describimos el comportamiento de las soluciones en función de las condiciones iniciales  $\xi_0 = 1$  y  $\eta_0 \geq 0$  e integramos en un intervalo de tiempo de la forma  $(-s_F, s_F) = (-2, 2)$ . Denotaremos a las colisiones entre las partículas 1 – 2 por el número 1 y las llamaremos de tipo 1 y por 2 a las colisiones entre las partículas 2 – 3, análogamente las llamaremos de tipo 2.

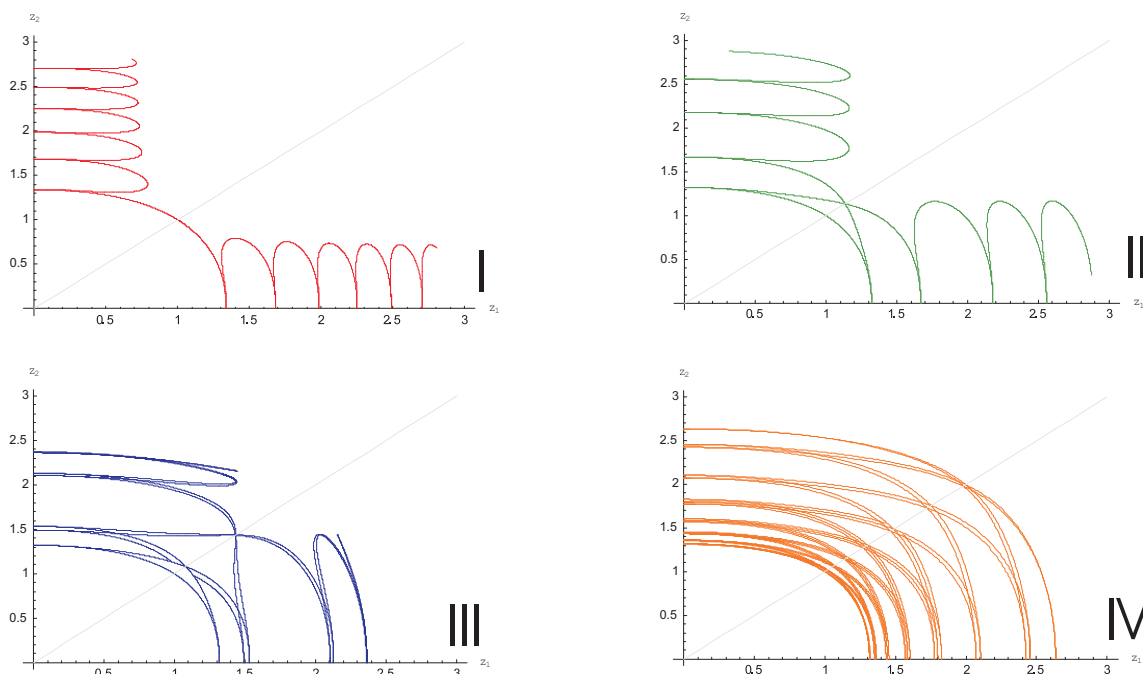


Figura 3.7: Soluciones en el plano  $z_1 - z_2$  del caso no hiperbólico para  $\xi_0 = 1$ .

1. Para  $\eta_0 = 0$ , el sistema de partículas permanecen en reposo.
2. Para  $0 \leq \eta_0 \leq 1.2$ , tenemos el tipo de soluciones I (figura 3.7). Estas soluciones presentan colisiones del tipo 1 al acercarse a la condición inicial en tiempo negativo; al pasar este punto cambia el tipo de colisión binaria al tipo 2 y mantiene este comportamiento al escapar a infinito. En esta solución la fuerza de repulsión entre las partículas de los extremos predomina sobre el efecto de la velocidad inicial  $\eta_0 \geq 0$  permitiendo el escape a infinito en tiempos positivo y negativo. En términos sucesiones de símbolos, las soluciones de tipo I son sucesiones infinitas de la forma  $\dots 111222 \dots$ .

3. Para  $1.2 \leq \eta_0 \leq 1.8$ , tenemos el tipo de soluciones II (figura 3.7). Las soluciones en este caso, presentan el tipo de colisión 1 en tiempo negativo hasta llegar a la condición inicial; pasando por este punto se tiene una colisión de tipo 2, posteriormente se tiene una colisión del tipo 1 y finalmente se tienen colisiones del tipo 2 al escapar a infinito. La sucesión asociada a este comportamiento es de la forma  $\dots 11121222 \dots$ . El efecto de la velocidad inicial del sistema compite con la fuerza de repulsión, pues antes del escape a infinito se alternan una sola vez los dos tipos de colisiones binarias.
4. Para  $\eta_0 \geq 1.8$ , obtenemos primero el tipo de solución III como un estado transitorio al tipo de solución IV. Para el tipo III, ya no se tienen escapes a infinito y la solución está acotada. Los tipos de colisiones binarias se alternan arbitrariamente conforme aumenta el valor de  $\eta_0$ ; al obtener la solución del tipo IV, las soluciones son densas en un cuarto del anillo que aparece en coordenadas de Levi-Civita y la sucesión de colisiones binarias son de la forma  $\dots 121212121 \dots$ , el efecto de las velocidades iniciales supera las influencias de la fuerza de repulsión manteniendo el tamaño del sistema acotado superior e inferiormente.

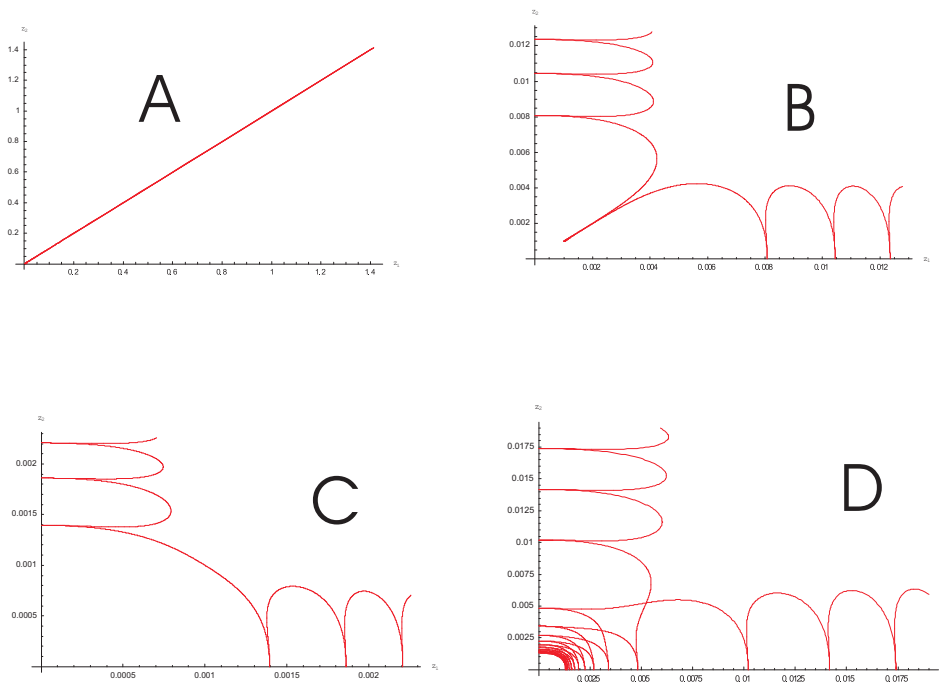


Figura 3.8: Soluciones en el plano  $z_1 - z_2$  del caso no hiperbólico para  $\xi_0 = 0.01$ .

En la figura 3.8 se toman las condiciones iniciales  $\xi_0 = 0.01$  y valores  $\eta_0 \geq 0$  con el objetivo de conocer el comportamiento de las soluciones cerca del origen.

La gráfica A de la figura 3.8, la solución para el valor  $\eta_0 = 0$  es una solución que termina en colisión total. Conforme aumenta el valor de  $\eta_0$  las soluciones vienen de infinito realizando colisiones binarias del tipo 1, para posteriormente realizar colisiones de tipo 2, la sucesión de símbolos asociada a las soluciones B y C es  $\dots 1112222 \dots$ . Las gráficas de las soluciones B y C representan un estado transitorio al tipo final de

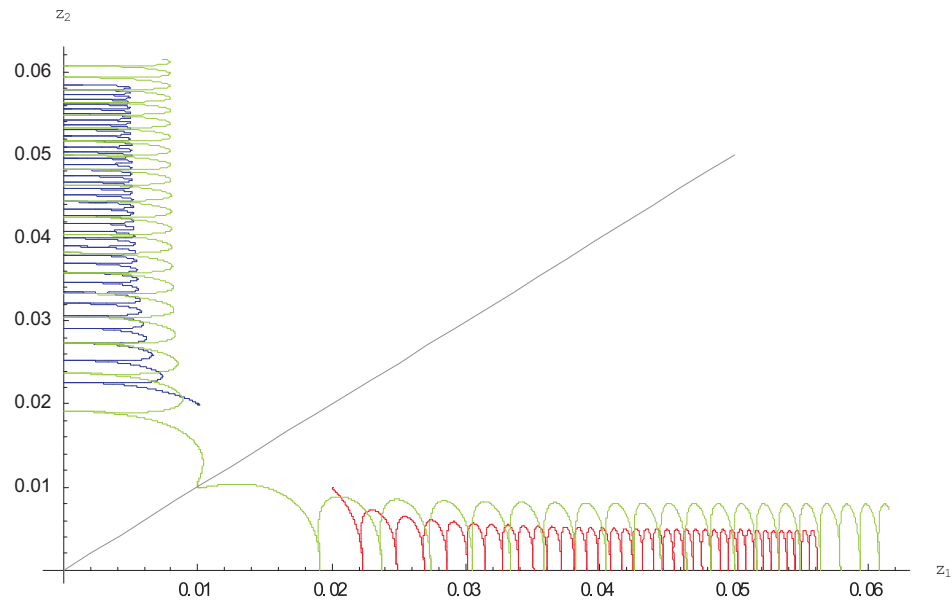


Figura 3.9: Soluciones en el plano  $z_1 - z_2$  del caso no hiperbólico para condiciones iniciales cercanas a la colisión total. Se muestran para tiempo positivo, comparando con la solución verde claro, que corresponde al caso B de la figura 3.8.

soluciones cercanas al origen dado por el tipo D para valores de  $\eta_0 > 2$ , donde la solución viene de infinito realizando colisiones del tipo 1; en una vecindad del origen el tamaño del sistema disminuye hasta una cota inferior positiva mientras se alternan los dos tipos de colisiones binarias, para posteriormente aumentar el tamaño nuevamente y realizar el escape realizando colisiones binarias de tipo 2; la sucesión asociada es de la forma  $\dots 11112121 \dots 21212222 \dots$ . La figura 3.9 muestra el comportamiento de las soluciones para condiciones iniciales fuera de la recta  $z_1 = z_2$ , para velocidades iniciales  $\eta_0 = 0$ ; se observa que la solución escapa para tiempos positivo y negativo a infinito realizando un sólo tipo de colisión binaria, la cual depende de en que región se tomen las condiciones iniciales, para velocidades distintas de cero se mantiene este comportamiento.

## Capítulo 4

# SOLUCIONES PERIÓDICAS SIMÉTRICAS

En este capítulo se construye un tipo particular de solución periódica y simétrica respecto a ciertos planos de simetría definidos por las condiciones iniciales en las coordenadas de Levi-Civita. Dicha solución se obtiene mediante una elección particular de masas y cargas dependientes de un parámetro positivo  $\mu \approx 0$ , de tal manera que al considerar el valor  $\mu = 0$  obtenemos las soluciones periódicas con simetrías obtenidas por Kammeyer [Kammeyer 1983]. En esta sección utilizamos coordenadas  $(z_1, z_2)$ .

Dichas soluciones periódicas se continuarán aplicando la continuación analítica de soluciones periódicas de Poincaré (Sección 1.5). Los resultados obtenidos en [Kammeyer 1983] para el caso sin carga se pueden extender al problema colineal cargado de tres cuerpos, obteniendo una familia de soluciones periódicas y simétricas dependiente del parámetro  $\mu \approx 0$ . Finalmente, graficamos las soluciones obtenidas para distintos valores de  $\mu \approx 0$ .

### 4.1. Planteamiento

Sean  $m_1 = \mu(1 - \nu)$ ,  $m_2 = 1 - \mu$ ,  $m_3 = \mu\nu$ ,  $q_1 = -\mu(1 - Q)$ ,  $q_2 = 1 - \mu$ ,  $q_3 = -\mu Q$ , las masas y cargas de las partículas, respectivamente, con parámetros  $0 < Q, \nu < 1$  y  $0 \leq \mu < 1$ .

Para este caso, consideremos  $\lambda_{ij} = \frac{1}{2}(m_i m_j - q_i q_j)$ . Entonces

$$\lambda_{12} = \mu(1 - \mu)\Lambda_{12}, \quad \lambda_{23} = \mu(1 - \mu)\Lambda_{23}, \quad \lambda_{13} = \mu^2\Lambda_{13},$$

donde  $\Lambda_{12} = (1 - \frac{\nu+Q}{2})$ ,  $\Lambda_{23} = \frac{\nu+Q}{2}$ ,  $\Lambda_{13} = \frac{1}{2} \left( \left( Q - \frac{1}{2} \right)^2 - \left( \nu - \frac{1}{2} \right)^2 \right)$ .

Para  $0 < Q$  y  $\nu < 1$ , se tiene  $0 < \lambda_{12} < 1$ ,  $0 < \lambda_{23} < 1$ ,  $\lambda_{13} \in (-\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ . Observemos que  $\Lambda_{12} + \Lambda_{23} = 1$ .

**Observación 8.** Para  $\lambda_{13} \in (0, \frac{1}{8})$ , se tiene el problema colineal de tres cuerpos sin carga. La dinámica para valores de  $\mu \approx 0$  se ha estudiado en [Kammeyer 1983].

El estudio de la dinámica se centrará para el caso en el cual hay fuerza de repulsión entre el par de partículas  $m_1$  y  $m_3$ , es decir, para  $\lambda_{13} \in (-\frac{1}{8}, 0)$ .

Se utilizará el sistema de coordenadas  $(z_1, z_2)$  introducido en la sección 2.1.1, la función potencial en estas coordenadas se escribe

$$U(z_1, z_2) = \frac{\mu(1-\mu)\Lambda_{12}}{z_1} + \frac{\mu(1-\mu)\Lambda_{23}}{z_2} + \frac{\mu^2\Lambda_{13}}{z_1+z_2}. \quad (4.1)$$

El Hamiltoniano del sistema se obtiene a partir de (2.1), sustituyendo el valor respectivo de cada masa

$$H = \frac{\nu(1-\mu\nu)p_1^2 - 2\mu(1-\nu)\nu p_1 p_2 + (1-\nu)(1-\mu(1-\nu))p_2^2}{2\mu\nu(1-\mu)(1-\nu)} - U(z_1, z_2). \quad (4.2)$$

Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1-\mu\nu}{\mu(1-\nu)(1-\mu)}p_1 - \frac{1}{1-\mu}p_2, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{1-\mu}p_1 + \frac{1-\mu(1-\nu)}{\mu(1-\nu)(1-\mu)}p_2, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\mu(1-\mu)\Lambda_{12}}{z_1^2} - \frac{\mu^2\Lambda_{13}}{(z_1+z_2)^2}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\mu(1-\mu)\Lambda_{23}}{z_2^2} - \frac{\mu^2\Lambda_{13}}{(z_1+z_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Introducimos los siguientes cambios  $z_i \rightarrow \mu^2 z_i$ ,  $t \rightarrow \mu^3 t$  en (4.3) obteniendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1-\mu\nu}{(1-\nu)(1-\mu)}p_1 - \frac{\mu}{1-\mu}p_2, \\ \dot{z}_2 &= -\frac{\mu}{1-\mu}p_1 + \frac{1-\mu(1-\nu)}{(1-\nu)(1-\mu)}p_2, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{(1-\mu)\Lambda_{12}}{z_1^2} - \frac{\mu\Lambda_{13}}{(z_1+z_2)^2}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{(1-\mu)\Lambda_{23}}{z_2^2} - \frac{\mu\Lambda_{13}}{(z_1+z_2)^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

El sistema (4.4) se reescribe como un nuevo sistema Hamiltoniano con respecto a la función

$$\bar{H} = \frac{\nu(1-\mu\nu)p_1^2 - 2\mu(1-\nu)\nu p_1 p_2 + (1-\nu)(1-\mu(1-\nu))p_2^2}{2\nu(1-\mu)(1-\nu)} - \bar{U}(z_1, z_2), \quad (4.5)$$

donde la función potencial en (4.5) se reescribe como

$$\bar{U}(z_1, z_2) = \frac{(1-\mu)\Lambda_{12}}{z_1} + \frac{(1-\mu)\Lambda_{23}}{z_2} + \frac{\mu\Lambda_{13}}{z_1+z_2}. \quad (4.6)$$

El potencial (4.6) y las ecuaciones de movimiento (4.4) tienen singularidades debidas a colisiones binarias para  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 0$  y colisión triple para  $z_1 = z_2 = 0$ . Procedemos a regularizar las colisiones binarias



mediante la introducción de las variables de Levi-Civita (Sección 2.1.1). Obtenemos la siguiente función Hamiltoniana al hacer el cambio de coordenadas en la relación de energía para  $\overline{H} = h$

$$\begin{aligned} G_\mu &= \frac{1 - \mu\nu}{2(1 - \nu)(1 - \mu)} \eta_1^2 \xi_2^2 - \frac{\mu}{1 - \mu} \eta_1 \eta_2 \xi_1 \xi_2 + \frac{1 - \mu(1 - \nu)}{2\nu(1 - \mu)} \eta_2^2 \xi_1^2 \\ &- 4(1 - \mu)\Lambda_{12}\xi_2^2 - 4(1 - \mu)\Lambda_{23}\xi_1^2 + \frac{4\mu\Lambda_{13}\xi_1^2\xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} - 4h\xi_1^2\xi_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Las ecuaciones de movimiento reescaladas en coordenadas de Levi-Civita son

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{ds} &= \frac{1 - \mu}{(1 - \mu)(1 - \nu)} \eta_1 \xi_2^2 - \frac{\mu}{1 - \mu} \eta_2 \xi_1 \xi_2, \\ \frac{d\xi_2}{ds} &= -\frac{\mu}{1 - \mu} \eta_1 \xi_1 \xi_2 + \frac{1 - \mu(1 - \nu)}{\nu(1 - \mu)} \eta_2 \xi_1^2, \\ \frac{d\eta_1}{ds} &= \frac{\mu}{1 - \mu} \eta_1 \eta_2 \xi_2 - \frac{1 - \mu(1 - \nu)}{\nu(1 - \mu)} \eta_2^2 \xi_1 + 8(1 - \mu)\Lambda_{23}\xi_1 \\ &+ 8h\xi_1\xi_2^2 - \frac{8\mu\Lambda_{13}\xi_1\xi_2^4}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}, \\ \frac{d\eta_2}{ds} &= -\frac{1 - \mu\nu}{(1 - \nu)(1 - \mu)} \eta_1^2 \xi_2 + \frac{\mu}{1 - \mu} \eta_1 \eta_2 \xi_1 + 8(1 - \mu)\Lambda_{12}\xi_2 \\ &+ 8h\xi_1^2\xi_2 - \frac{8\mu\Lambda_{13}\xi_1^4\xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

El sistema (4.8) es analítico en todas sus variables, excepto para  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$  (colisión triple).

## 4.2. Simetrías

El sistema (4.8) es invariante bajo las simetrías discretas

$$\begin{aligned} Id &: (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s), \\ S_1 &: (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s) \rightarrow (-\xi_1, \xi_2, \eta_1, -\eta_2, -s), \\ S_2 &: (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s) \rightarrow (\xi_1, -\xi_2, -\eta_1, \eta_2, -s), \\ S_3 &: (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, -\eta_1, -\eta_2, -s), \\ S_4 &: (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s) \rightarrow (-\xi_1, -\xi_2, -\eta_1, -\eta_2, s), \\ S_5 &: (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s) \rightarrow (-\xi_1, \xi_2, -\eta_1, \eta_2, s), \\ S_6 &: (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s) \rightarrow (\xi_1, -\xi_2, \eta_1, -\eta_2, s), \\ S_7 &: (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, s) \rightarrow (-\xi_1, -\xi_2, \eta_1, \eta_2, -s). \end{aligned}$$

**Proposición 20.** Si  $\phi(s) = (\xi_1(s), \xi_2(s), \eta_1(s), \eta_2(s))$  es una solución de (4.8) entonces  $S_i(\phi(s))$  es una solución de (4.8).

**Definición 9.** Decimos que la solución  $\phi(s)$  es  $S_i$ -simétrica si  $S_i(\phi(s)) = \phi(s)$ . Una solución es  $S_{ij}$ -simétrica si es  $S_i$ -simétrica y  $S_j$ -simétrica.

La descripción de las soluciones  $S_i$ -simétricas y  $S_{ij}$ -simétricas se introducen en los siguientes resultados con base al teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales.

**Proposición 21.** *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

- a) Una solución  $\phi(s)$  es  $S_1$ -simétrica si y sólo si interseca en un punto al plano  $\xi_1 = 0$  y  $\eta_2 = 0$ . Para  $\mu = 0$  es equivalente a decir que  $\phi(s)$  interseca al eje  $\xi_2$  ortogonalmente.
- b) Una solución  $\phi(s)$  es  $S_2$ -simétrica si y sólo si interseca en un punto al plano  $\xi_2 = 0$  y  $\eta_1 = 0$ . Para  $\mu = 0$  es equivalente a decir que  $\phi(s)$  interseca al eje  $\xi_1$  ortogonalmente.
- c) Una solución  $\phi(s)$  es  $S_3$ -simétrica si y sólo si tiene un punto en  $\eta_1 = 0$  y  $\eta_2 = 0$ . Para  $\mu = 0$  es equivalente a decir que  $\phi(s)$  interseca en un punto a la curva de velocidad cero.
- d) Para  $i = 5, 6$  una órbita es  $S_i$ -simétrica si y sólo si es  $S_3$ -simétrica.

**Proposición 22.** *Si  $\phi(s) = (\xi_1(s), \xi_2(s), \eta_1(s), \eta_2(s))$  es una solución de (4.8), se tiene que*

- a) Si  $\xi_1(s)$  y  $\eta_2(s)$  son cero en  $s = s_0$  y en  $s = s_0 + \frac{S}{2}$ , pero no son simultáneamente cero en ningún valor de  $s \in (s_0, s_0 + \frac{S}{2})$ , entonces  $\phi(s)$  es una solución  $S_1$ -simétrica periódica de periodo  $S$ .
- b) Si  $\xi_2(s)$  y  $\eta_1(s)$  son cero en  $s = s_0$  y en  $s = s_0 + \frac{S}{2}$ , pero no son simultáneamente cero en ningún valor de  $s \in (s_0, s_0 + \frac{S}{2})$ , entonces  $\phi(s)$  es una solución  $S_2$ -simétrica periódica de periodo  $S$ .
- c) Si  $\eta_1(s)$  y  $\eta_2(s)$  son cero en  $s = s_0$  y en  $s = s_0 + \frac{S}{2}$ , pero no son simultáneamente cero en ningún valor de  $s \in (s_0, s_0 + \frac{S}{2})$ , entonces  $\phi(s)$  es una solución  $S_3$ -simétrica periódica de periodo  $S$ .
- d) Para  $i = 5, 6$  si una órbita  $\phi(s)$  es  $S_1$ -simétrica, entonces también es una solución  $S_3$ -simétrica periódica.

Mediante las simetrías  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  es posible generar a las restantes al realizar las composiciones

$$S_4 = S_1 \circ S_2, \quad S_5 = S_1 \circ S_3, \quad S_7 = S_1 \circ S_2 \circ S_3.$$

Hay soluciones que son simultáneamente  $S_i$  y  $S_j$ -simétricas, a las cuales denotaremos como  $S_{ij}$ -simétricas. Cuando las soluciones  $S_{ij}$ -simétricas son además periódicas se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 23.** *Sea  $\phi(s) = (\xi_1(s), \xi_2(s), \eta_1(s), \eta_2(s))$  una solución de (4.8).*

- a) La solución  $\phi(s)$  es una solución periódica  $S_{12}$ -simétrica de periodo  $S$  si y sólo si  $\xi_1(s_0) = \eta_2(s_0) = 0$ , y  $\xi_2(s_0 + \frac{S}{4}) = \eta_1(s_0 + \frac{S}{4}) = 0$ , y no existe  $s \in (s_0, s_0 + \frac{S}{4})$  tal que  $\xi_2(s) = \eta_1(s) = 0$ ; o  $\xi_2(s_0) = \eta_1(s_0) = 0$ , y  $\xi_1(s_0 + \frac{S}{4}) = \eta_2(s_0 + \frac{S}{4}) = 0$ , y no existe  $s \in (s_0, s_0 + \frac{S}{4})$  tal que  $\xi_1(s) = \eta_2(s) = 0$ .
- b) La solución  $\phi(s)$  es una solución periódica  $S_{13}$ -simétrica de periodo  $S$  si y sólo si  $\xi_1(s_0) = \eta_2(s_0) = 0$ , y  $\eta_1(s_0 + \frac{S}{4}) = \eta_2(s_0 + \frac{S}{4}) = 0$ , y no existe  $s \in (s_0, s_0 + \frac{S}{4})$  tal que  $\eta_1(s) = \eta_2(s) = 0$ ; ó  $\eta_1(s_0) = \eta_2(s_0) = 0$ , y  $\xi_1(s_0 + \frac{S}{4}) = \eta_2(s_0 + \frac{S}{4}) = 0$ , y no existe  $s \in (s_0, s_0 + \frac{S}{4})$  tal que  $\xi_1(s) = \eta_2(s) = 0$ .

c) La solución  $\phi(s)$  es una solución periódica  $S_{23}$ -simétrica de periodo  $S$  si y sólo si  $\xi_2(s_0) = \eta_1(s_0) = 0$ , y  $\eta_1\left(s_0 + \frac{S}{4}\right) = \eta_2\left(s_0 + \frac{S}{4}\right) = 0$ , y no existe  $s \in (s_0, s_0 + \frac{S}{4})$  tal que  $\eta_1(s) = \eta_2(s) = 0$ ; o  $\eta_1(s_0) = \eta_2(s_0) = 0$ , y  $\xi_2\left(s_0 + \frac{S}{4}\right) = \eta_1\left(s_0 + \frac{S}{4}\right) = 0$ , y no existe  $s \in (s_0, s_0 + \frac{S}{4})$  tal que  $\xi_2(s) = \eta_1(s) = 0$ .

Se demuestra que no hay soluciones periódicas simétricas con más de dos simetrías.

**Proposición 24.** No existen soluciones periódicas de (4.8) simultáneamente  $S_i$ -simétricas para  $i = 1, 2, 3$ .

*Demostración.* Supongamos que la solución  $\varphi(s)$  de (4.8) es  $S_i$ -simétrica para  $i = 1, 2, 3$ . Existen tiempos  $s_1, s_2, s_3 \in [0, \frac{S}{4})$  tales que

$$\xi_1(s_1) = \eta_2(s_1) = 0, \quad \xi_2(s_2) = \eta_1(s_2) = 0, \quad \eta_1(s_3) = \eta_2(s_3) = 0.$$

Por construcción,  $\varphi(s)$  es  $S_{12}$ -simétrica si y sólo si

$$\xi_2\left(s_1 + \frac{S}{4}\right) = \eta_1\left(s_1 + \frac{S}{4}\right) = 0,$$

entonces  $s_2 = s_1 + \frac{S}{4}$ . Análogamente, la solución  $\varphi(s)$  es  $S_{13}$ -simétrica si y sólo si

$$\eta_1\left(s_1 + \frac{S}{4}\right) = \eta_2\left(s_1 + \frac{S}{4}\right) = 0,$$

entonces  $s_3 = s_1 + \frac{S}{4}$ . Por lo tanto,  $s_2 = s_3$  lo cual es una contradicción.  $\square$

### 4.3. Soluciones periódicas simétricas para $\mu = 0$

Al tomar  $\mu = 0$  en (4.7) obtenemos un nuevo Hamiltoniano

$$G_0 = \frac{1}{2(1-\nu)}\eta_1^2\xi_2^2 + \frac{1}{2\nu}\eta_2^2\xi_1^2 - 4\Lambda_{12}\xi_2^2 - 4\Lambda_{23}\xi_1^2 - 4h\xi_1^2\xi_2^2 = 0$$

con ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{ds} &= \frac{1}{1-\nu}\eta_1\xi_2^2, \\ \frac{d\xi_2}{ds} &= \frac{1}{\nu}\eta_2\xi_1^2, \\ \frac{d\eta_1}{ds} &= -\frac{1}{\nu}\eta_2^2\xi_1 + 8\Lambda_{23}\xi_1 + 8h\xi_1\xi_2^2, \\ \frac{d\eta_2}{ds} &= -\frac{1}{1-\nu}\eta_1^2\xi_2 + 8\Lambda_{12}\xi_2 + 8h\xi_1^2\xi_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

El Hamiltoniano  $G_0$  se desacopla como

$$\overline{H}(z_1, z_2, p_1, p_2) = H_1(z_1, p_1) + H_2(z_2, p_2) = \left(\frac{1}{2(1-\nu)}p_1^2 - \frac{\Lambda_{12}}{z_1}\right) + \left(\frac{1}{2\nu}p_2^2 - \frac{\Lambda_{23}}{z_2}\right), \tag{4.10}$$

donde las funciones  $H_1(z_1, p_1)$  y  $H_2(z_2, p_2)$  son dos integrales primeras del problema no regularizado con Hamiltoniano  $\bar{H}$  en (4.7).

El flujo del problema colineal cargado de tres cuerpos para  $\mu = 0$  en el nivel de energía  $\bar{H} = h = h_1 + h_2$  es obtenido del flujo del Hamiltoniano  $H_1(z_1, p_1)$  en el nivel de energía  $H_1 = h_1$  y el flujo para el hamiltoniano  $H_2(z_2, p_2)$  en el nivel de energía  $H_2 = h_2$ . El Hamiltoniano  $\bar{H}$  es la suma de dos problemas de Kepler desacoplados.

**Observación 9.** *El potencial (4.6) para  $\mu = 0$  se reduce a*

$$\bar{U}(z_1, z_2) = \frac{\Lambda_{12}}{z_1} + \frac{\Lambda_{23}}{z_2}.$$

*El parámetro  $\Lambda_{13}$  no influye en la dinámica asociada a  $\mu = 0$  porque se anula en este caso.*

El Hamiltoniano  $H_1(z_1, p_1)$  escrito en coordenadas de Levi-Civita  $(\xi_1, \eta_1)$  es

$$H_1 = \frac{1}{8(1-\nu)} \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} - \frac{\Lambda_{12}}{\xi_1^2} = h_1,$$

mientras que  $H_2(z_2, p_2)$  en coordenadas  $(\xi_2, \eta_2)$  es

$$H_2 = \frac{1}{8\nu} \frac{\eta_2^2}{\xi_2^2} - \frac{\Lambda_{23}}{\xi_2^2} = h_2.$$

**Proposición 25.** *El sistema de ecuaciones diferenciales (4.9) se puede desacoplar en dos sistemas de ecuaciones diferenciales:*

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{d\sigma} &= \frac{1}{1-\nu} \eta_1, \\ \frac{d\eta_1}{d\sigma} &= 8h_1 \xi_1, \end{aligned} \tag{4.11}$$

*en la escala de tiempo  $\sigma$  y*

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_2}{d\tau} &= \frac{1}{\nu} \eta_2, \\ \frac{d\eta_2}{d\tau} &= 8h_2 \xi_2, \end{aligned} \tag{4.12}$$

*en la escala de tiempo  $\tau$ , donde  $\frac{d\sigma}{ds} = \xi_2^2$  y  $\frac{d\tau}{ds} = \xi_1^2$ .*

*Demostración.* Consideremos la nueva variable de tiempo  $\sigma$  en la forma

$$\frac{d\sigma}{ds} = \xi_2^2, \quad \text{equivalentemente,} \quad \frac{dt}{d\sigma} = 4\xi_1^2.$$

Para la primera ecuación del sistema (4.9), al aplicar la regla de la cadena se obtiene la primera ecuación del sistema (4.11)

$$\frac{d\xi_1}{d\sigma} = \frac{d\xi_1}{ds} \frac{ds}{d\sigma} = \left( \frac{1}{1-\nu} \eta_1 \xi_2^2 \right) \frac{1}{\xi_2^2} = \frac{1}{1-\nu} \eta_1.$$

Para la segunda ecuación del sistema (4.9), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_1}{d\sigma} &= \frac{d\eta_1}{ds} \frac{ds}{d\sigma} = \left( -\frac{1}{\nu} \eta_2^2 \xi_1 + 8\Lambda_{23} \xi_1 + 8h \xi_1 \xi_2^2 \right) \frac{1}{\xi_2^2} \\
&= \xi_1 \left( -\frac{1}{\nu} \frac{\eta_2^2}{\xi_2^2} + \frac{8\Lambda_{23}}{\xi_2^2} + 8h \right) \\
&= \xi_1 \left( -\frac{1}{\nu} \frac{\eta_2^2}{\xi_2^2} + \frac{8\Lambda_{23}}{\xi_2^2} + 8h_2 + 8h_1 \right) \\
&= 8h_1 \xi_1.
\end{aligned}$$

Ahora introducimos otra escala de tiempo  $\tau$  donde

$$\frac{d\tau}{ds} = \xi_1^2, \quad \text{equivalentemente, } \frac{dt}{d\tau} = 4\xi_2^2.$$

En forma análoga al sistema (4.11), obtenemos la primera ecuación del sistema de ecuaciones (4.12)

$$\frac{d\xi_2}{d\tau} = \frac{d\xi_2}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \left( \frac{1}{\nu} \eta_2 \xi_1^2 \right) \frac{1}{\xi_1^2} = \frac{1}{\nu} \eta_2.$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_2}{d\tau} &= \frac{d\eta_2}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \left( -\frac{1}{1-\nu} \eta_1^2 \xi_2 + 8\Lambda_{12} \xi_2 + 8h \xi_1^2 \xi_2 \right) \frac{1}{\xi_1^2} \\
&= \xi_2 \left( -\frac{1}{1-\nu} \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} + \frac{8\Lambda_{12}}{\xi_1^2} + 8h \right) \\
&= \xi_2 \left( -\frac{1}{1-\nu} \frac{\eta_1^2}{\xi_1^2} + \frac{8\Lambda_{12}}{\xi_1^2} + 8h_2 + 8h_1 \right) \\
&= 8h_2 \xi_2.
\end{aligned}$$

□

De la ecuación (4.9). Podemos escribir  $G_0 = \xi_2^2 G_1$  en la nueva variable de tiempo  $\sigma$  donde

$$\begin{aligned}
G_1 &= \frac{1}{2(1-\nu)} \eta_1^2 - 4\Lambda_{12} - 4h_1 \xi_1^2 + \left( \frac{1}{2\nu} \frac{\eta_2^2}{\xi_2^2} - \frac{4\Lambda_{23}}{\xi_2^2} - 4h_2 \right) \xi_1^2, \\
G_1 &= \frac{1}{2(1-\nu)} \eta_1^2 - 4\Lambda_{12} - 4h_1 \xi_1^2.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

El sistema (4.11) es un sistema Hamiltoniano con función Hamiltoniana  $G_1$ .

**Proposición 26.** Para  $h_1 < 0$ , la solución  $(\xi_1(\sigma), \eta_1(\sigma))$  con condiciones iniciales  $\xi_1(0) = \xi_{10}^*$ ,  $\eta_1(0) = \eta_{10}^*$  del sistema (4.11) está dada por las funciones

$$\begin{aligned}
\xi_1(\sigma) &= \xi_{10}^* \cos(\omega_1 \sigma) + \frac{\eta_{10}^*}{\omega_1(1-\nu)} \text{sen}(\omega_1 \sigma), \\
\eta_1(\sigma) &= \eta_{10}^* \cos(\omega_1 \sigma) - \omega_1(1-\nu) \xi_{10}^* \text{sen}(\omega_1 \sigma),
\end{aligned} \tag{4.14}$$

donde  $\omega_1 = \sqrt{-\frac{8h_1}{1-\nu}}$ . La solución (4.14) es periódica de periodo  $\bar{\sigma} = \frac{2\pi}{\omega_1}$  y satisface la relación de energía  $G_1 = 0$ . El periodo del movimiento está dado por

$$T_1(h_1, \nu, Q) = \int_0^{\bar{\sigma}} 4\xi_1^2(\sigma) d\sigma = \frac{\sqrt{2\pi}}{1-\nu} \Lambda_{12} \left( -\frac{1-\nu}{h_1} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

*Demostración.* La demostración se obtiene integrando las ecuaciones (4.11).  $\square$

La relación de energía para las variables  $\xi_2$  y  $\eta_2$  en la variable de tiempo  $\tau$  es

$$G_2 = \frac{1}{2\nu}\eta_2^2 - 4\Lambda_{23} - 4h_2\xi_2^2. \quad (4.15)$$

El sistema de ecuaciones (4.12) es un sistema hamiltoniano con función hamiltoniana (4.15).

**Proposición 27.** Para  $h_2 < 0$ , la solución  $(\xi_2(\tau), \eta_2(\tau))$  del sistema (4.12) con condiciones iniciales  $\xi_2(0) = \xi_{20}^*$ ,  $\eta_2(0) = \eta_{20}^*$  está dada por las funciones

$$\begin{aligned} \xi_2(\tau) &= \xi_{20}^* \cos(\omega_2\tau) + \frac{\eta_{20}^*}{\omega_2\nu} \operatorname{sen}(\omega_2\tau), \\ \eta_2(\tau) &= \eta_{20}^* \cos(\omega_2\tau) - \omega_2\nu\xi_{20}^* \operatorname{sen}(\omega_2\tau), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde  $\omega_2 = \sqrt{-\frac{8h_2}{\nu}}$ . La solución (4.16) es periódica de periodo  $\bar{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_2}$  y satisface la relación de energía  $G_2 = 0$ . El periodo del movimiento está dado por

$$T_2(h_2, \nu, Q) = \int_0^{\bar{\tau}} 4\xi_2^2(\tau) d\tau = \frac{\sqrt{2\pi}\Lambda_{23}}{\nu} \left(-\frac{\nu}{h_2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

*Demostración.* La demostración se obtiene integrando las ecuaciones (4.12).  $\square$

**Proposición 28.** Las soluciones periódicas (4.14) y (4.16) en sus respectivos planos fase son elipses.

*Demostración.* Reescribiendo las relaciones de energía  $G_1 = 0$  y  $G_2 = 0$ , se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{8(1-\nu)\Lambda_{12}}\eta_1^2 + \frac{1}{\left(-\frac{\Lambda_{12}}{h_1}\right)}\xi_1^2 &= 1, \\ \frac{1}{8\nu\Lambda_{23}}\eta_2^2 + \frac{1}{\left(-\frac{\Lambda_{23}}{h_2}\right)}\xi_2^2 &= 1, \end{aligned}$$

cada ecuación representa una elipse en los respectivos planos  $(\xi_i, \eta_i)$ ,  $i = 1, 2$ .  $\square$

**Proposición 29.** Sea  $(\xi_1(\sigma), \eta_1(\sigma))$  una solución periódica de (4.11) para  $h_1 < 0$  con las condiciones iniciales dadas anteriormente y periodo  $\bar{\sigma} = \frac{2\pi}{\omega_1}$  que satisface  $G_1 = 0$ .

Sea  $(\xi_2(\tau), \eta_2(\tau))$  una solución periódica de (4.12) para  $h_2 < 0$  con las condiciones iniciales dadas anteriormente y periodo  $\bar{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_2}$  que satisface  $G_2 = 0$ .

Supongamos que las funciones  $\sigma(s)$  y  $\tau(s)$  están definidas por los reescalamientos propuestos en la proposición 25, elegimos  $\sigma(0) = \tau(0) = 0$ . Supongamos que no existe  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $\xi_1(\sigma(s)) = \xi_2(\tau(s)) = 0$ . Entonces son válidas las siguientes afirmaciones:

a) La curva  $\phi(\xi_1(\sigma(s)), \eta_1(\tau(s)), \xi_2(\sigma(s)), \eta_2(\tau(s)))$  es una solución de (4.9) con condiciones iniciales

$$\xi_1(0) = \xi_{10}^*, \quad \eta_1(0) = \eta_{10}^*, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}^*, \quad \eta_2(0) = \eta_{20}^*,$$

que satisface  $G_0 = 0$ .

b) Si las energías  $h_1$  y  $h_2$  satisfacen

$$h_1 = \left( \frac{p \Lambda_{12}}{q \Lambda_{13}} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} h_2,$$

para  $p, q \in \mathbb{N}$  coprimos, entonces  $\phi(s)$  es una solución periódica de (4.9).

c) Supongamos que  $s(t)$  está dada por la función inversa de

$$t = \int_0^s 4\xi_1^2(\rho)\xi_2^2(\rho)d\rho.$$

Usando las hipótesis del inciso (b), las equivalencias entre las escalas de tiempo para el cálculo del periodo de la solución  $\varphi(s)$  en los distintos tiempos  $t, \tau$  y  $s$  se muestra en la tabla siguiente:

Tiempo $t$	Tiempo $\sigma$	Tiempo $\tau$	Tiempo $s$
$T = pT_1(h_1, \nu, Q) = qT_2(h_2, \nu, Q)$	$\sigma^* = p\bar{\sigma}$	$\tau^* = p\bar{\tau}$	$S^* = s(T)$
$\frac{T}{4}$	$\frac{\sigma^*}{4}$	$\frac{\tau^*}{4}$	$\frac{S^*}{4}$

*Demostración.* a) Directamente de las definiciones de  $(\xi_1(\sigma), \eta_1(\tau)), (\xi_2(\sigma), \eta_2(\tau))$  y de  $\sigma(s) \tau(s)$ .

b) Las soluciones  $(\xi_1(\sigma), \xi_2(\tau)), (\eta_1(\sigma), \eta_2(\tau))$  son periódicas de periodos  $T_1(h_1, \nu, Q)$  y  $T_2(h_2, \nu, Q)$  respectivamente. Para tener un solución periódica de (4.9) es necesario que

$$pT_1(h_1, \nu, Q) = qT_2(h_2, \nu, Q), \quad (4.17)$$

para  $p$  y  $q \in \mathbb{N}$  primos relativos. Despejando de la ecuación (4.17) a  $h_1$ , obtenemos

$$h_1 = \left( \frac{p \Lambda_{12}}{q \Lambda_{13}} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} h_2.$$

c) Verificaremos que el tiempo  $t = \frac{T}{4}$  está en correspondencia con el tiempo  $\sigma = \frac{\sigma^*}{4}$ . De manera similar se tiene que  $t = \frac{T}{4}$  corresponde a los tiempos  $\tau = \frac{\tau^*}{4}, s = \frac{S^*}{4}$ . El sistema (4.15) es invariante bajo la simetría

$$(\xi_1, \eta_1, \sigma) \rightarrow (-\xi_1, \eta_1, -\sigma),$$

es decir,  $\xi_1(\sigma) = -\xi_1(-\sigma)$ . Por lo tanto,  $\xi_1^2(\sigma)$  es una función periódica par de periodo  $\frac{\bar{\sigma}}{2}$ . Tenemos que

$$T_1 = \int_0^{\bar{\sigma}} 4\xi_1^2(\sigma)d\sigma = 2 \int_0^{\frac{\bar{\sigma}}{2}} 4\xi_1^2(\sigma)d\sigma = 4 \int_0^{\frac{\bar{\sigma}}{4}} 4\xi_1^2(\sigma)d\sigma.$$

Es claro que

$$\int_0^{\frac{\bar{\sigma}}{4}} 4\xi_1^2(\sigma)d\sigma = \int_{\frac{\bar{\sigma}}{4}}^{\frac{\bar{\sigma}}{2}} 4\xi_1^2(\sigma)d\sigma = \frac{T_1}{4}.$$

Entonces

$$t\left(\frac{\sigma^*}{4}\right) = \int_0^{p\frac{\bar{\sigma}}{4}} 4\xi_1^2(\sigma)d\sigma = p \int_0^{\frac{\bar{\sigma}}{4}} 4\xi_1^2(\sigma)d\sigma = p \frac{T_1}{4} = \frac{T}{4}.$$

Por lo tanto, el tiempo  $t = \frac{T}{4}$  corresponde a  $\sigma = \frac{\sigma^*}{4}$ .

□

**Observación 10.** Para  $\mu = 0$  tenemos que la solución del sistema (4.9) describe el movimiento de-sacoplado de dos partículas de masas y cargas  $m_1 = m_3 = 0$ ,  $q_1 = q_3 = 0$  respecto a una partícula de masa  $m_2 = 1$  y carga  $q_2 = 1$  colocada entre ellas.

De la afirmación (c) de la proposición 29 se tiene que  $\frac{dt}{ds} > 0$  cuando no se tienen colisiones dobles y  $\frac{dt}{ds} = 0$  en las colisiones binarias;  $\frac{dt}{ds}$  no está definido para la colisión triple. Por lo tanto, la función inversa  $s = s(t)$  existe siempre y cuando no se tenga colisión triple y es diferenciable si no hay colisión binaria.

**Observación 11.** Los enteros  $q$  y  $p$  en la proposición 29 son, respectivamente, el número de colisiones binarias entre las partículas  $m_2$  y  $m_3$  durante un periodo y el número de colisiones binarias entre las partículas  $m_1$  y  $m_2$  durante un periodo.

El estudio se centrará en las soluciones periódicas simétricas de (4.9) que satisfacen la relación de energía  $G_0 = 0$ . La siguiente proposición establece las condiciones iniciales para tales soluciones.

**Proposición 30.** a) Si  $p$  y  $q$  son impares, la solución  $\varphi(s)$  dada por la proposición 29 con condiciones iniciales

$$\xi_{10}^* = 0, \quad \xi_{20}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2}}, \quad \eta_{10}^* = \sqrt{8(1-\nu)\Lambda_{12}}, \quad \eta_{20}^* = 0, \quad ,$$

o

$$\xi_{10}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{12}}{h_1}}, \quad \xi_{20}^* = 0, \quad \eta_{10}^* = 0, \quad \eta_{20}^* = \sqrt{8\nu\Lambda_{23}},$$

es una solución periódica  $S_{12}$ -simétrica.

b) Si  $p$  es impar y  $q$  es par, la solución  $\varphi(s)$  dada por la proposición 29 con condiciones iniciales

$$\xi_{10}^* = 0, \quad \xi_{20}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2}}, \quad \eta_{10}^* = \sqrt{8(1-\nu)\Lambda_{12}}, \quad \eta_{20}^* = 0, \quad ,$$

o

$$\xi_{10}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{12}}{h_1}}, \quad \xi_{20}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2}}, \quad \eta_{10}^* = 0, \quad \eta_{20}^* = 0,$$

es una solución periódica  $S_{13}$ -simétrica.

c) Si  $p$  es par y  $q$  es impar, la solución  $\varphi(s)$  dada por la proposición 29 con condiciones iniciales

$$\xi_{10}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{12}}{h_1}}, \quad \xi_{20}^* = 0, \quad \eta_{10}^* = 0, \quad \eta_{20}^* = \sqrt{8\nu\Lambda_{23}}, \quad ,$$

o

$$\xi_{10}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{12}}{h_1}}, \quad \xi_{20}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2}}, \quad \eta_{10}^* = 0, \quad \eta_{20}^* = 0,$$

es una solución periódica  $S_{23}$ -simétrica.

*Demostración.* El resultado se obtiene de evaluar la solución

$$\varphi(s) = \phi(\xi_1(\sigma(s)), \xi_2(\tau(s)), \eta_1(\sigma(s)), \eta_2(\tau(s)))$$

para la distintas condiciones iniciales en los tiempos  $s = 0$  y  $s = \frac{S^*}{4}$ . De la proposición 29

$$\varphi\left(\frac{S^*}{4}\right) = \phi\left(\xi_1\left(p\frac{\bar{\sigma}}{4}\right), \xi_2\left(q\frac{\bar{\tau}}{4}\right), \eta_1\left(p\frac{\bar{\sigma}}{4}\right), \eta_2\left(q\frac{\bar{\tau}}{4}\right)\right).$$

□



**Observación 12.** Las condiciones iniciales de las soluciones periódicas  $S_{ij}$ -simétricas para  $\mu = 0$  las denotaremos utilizando el asterisco.

## 4.4. Continuación de soluciones periódicas simétricas

En esta sección construiremos familias de soluciones  $S_{ij}$ -simétricas aplicando el método de continuación de soluciones debida a Poincaré descrito en la sección 1.5.

### 4.4.1. Soluciones periódicas $S_{12}$ -simétricas

Sea  $\varphi(s)$  la solución del sistema (4.9) para valores  $\nu$  y  $Q$  fijos con condiciones iniciales

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}, \quad \eta_1(0) = \eta_{10}, \quad \eta_2(0) = 0.$$

Para precisar la dependencia de la solución  $\varphi(s)$  de las condiciones iniciales escribimos

$$\varphi(s; 0, \xi_{20}, \eta_{10}, 0, \mu) = \left( \xi_1(s; \xi_{20}, \eta_{10}, \mu), \xi_2(s; \xi_{20}, \eta_{10}, \mu), \eta_1(s; \xi_{20}, \eta_{10}, \mu), \eta_2(s; \xi_{20}, \eta_{10}, \mu) \right).$$

La solución  $\varphi(s; 0, \xi_{20}, \eta_{10}, 0, \mu)$  es una solución periódica  $S_{12}$ -simétrica del problema colineal cargado de tres cuerpos con periodo  $S$  que satisface la relación de energía  $G_\mu = 0$ , si y sólo si

$$\begin{aligned} \xi_2\left(\frac{S}{4}, \xi_{20}, \eta_{10}, \mu\right) &= 0, \\ \eta_1\left(\frac{S}{4}, \xi_{20}, \eta_{10}, \mu\right) &= 0, \\ G_\mu(\xi_{20}, \eta_{10}, \mu) &= 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Resolviendo la última ecuación del sistema (4.18) con respecto a  $\eta_{10}$  obtenemos

$$\eta_{10} = (1 - \mu) \sqrt{\frac{8(1 - \nu)\Lambda_{12}}{1 - \mu\nu}}, \tag{4.19}$$

donde la condición inicial  $\eta_{10}$  es una constante que depende de los valores de los parámetros  $\mu$ ,  $\nu$  y  $Q$ . Por lo tanto,  $\varphi(s; 0, \xi_{20}, \eta_{10}, 0, \mu)$  es una solución periódica  $S_{12}$ -simétrica del problema colineal cargado de tres cuerpos con periodo  $S$  que satisface la relación de energía  $G_\mu = 0$  si y sólo si

$$\begin{aligned} \xi_2\left(\frac{S}{4}, \xi_{20}, \mu\right) &= 0, \\ \eta_1\left(\frac{S}{4}, \xi_{20}, \mu\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Las ecuaciones (4.20) ya no dependen de la variable  $\eta_{10}$ .

Utilizando la proposición 30 construimos una solución periódica  $S_{12}$ -simétrica de (4.9) para  $\nu$  y  $Q$  fijos al tomar  $p = 2l + 1$  y  $q = 2k + 1$  para  $l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $\xi_{20} = \xi_{20}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2^*}}$ ,  $\eta_{10} = \eta_{10}^* = \sqrt{8(1 - \nu)\Lambda_{12}}$ . El periodo de esta solución depende de los valores de  $h_i^*$  ( $i = 1, 2$ ),

$$S = S^* = s(pT_1(h_1^*)) = s(qT_2(h_2^*)),$$

y las energías  $h_1^*$  y  $h_2^*$  satisfacen  $h = h_1^* + h_2^*$  y

$$h_1^* = \left( \frac{p \Lambda_{12}}{q \Lambda_{13}} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} h_2^*.$$

Denotaremos a esta solución periódica  $S_{12}$ -simétrica como  $\varphi(s; 0, \xi_{20}^*, \eta_{10}^*, 0, 0)$ . Prolongaremos para valores pequeños de  $\mu \approx 0$  la solución anterior obtenida para  $\mu = 0$  mediante el método de prolongación analítica de soluciones periódicas.

Aplicando el teorema de la función implícita al sistema (4.20) en una vecindad de la solución  $\varphi(s; 0, \xi_{20}^*, \eta_{10}^*, 0, 0)$  tenemos que si

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial s} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_{20}} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial s} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (4.21)$$

al evaluar el determinante en los valores  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$  y  $\mu = 0$  correspondientes a la solución obtenida para  $\mu = 0$  entonces es posible encontrar funciones únicas y analíticas  $\xi_{20} = \xi_{20}(\mu)$ ,  $S = S(\mu)$  definidas para  $\mu \geq 0$  suficientemente pequeño, tales que

- i)  $\xi_{20}(0) = \xi_{20}^*$ ,  $S(0) = S^*$ ;
- ii) La solución  $\varphi(s; 0, \xi_{20}, \eta_{10}, 0, \mu)$  con  $\xi_{20} = \xi_{20}(\mu)$  y  $\eta_{10}$  dada por (4.19) es una solución periódica  $S_{12}$ -simétrica de (4.8) con periodo  $S = S(\mu)$  que satisface la relación de energía  $G_\mu = 0$ .

A continuación se calcularán los valores de las entradas del determinante (4.21).

**Proposición 31.** *La derivada parcial  $\frac{\partial \xi_2}{\partial s}$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{20}(0) = \xi_{20}^*$  es distinta de cero.*

*Demostración.* Del sistema de ecuaciones (4.9), para  $\mu = 0$  obtenemos

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = \frac{1}{\nu} \eta_2 \xi_1^2. \quad (4.22)$$

Al sustituir  $\xi_{10} = 0$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$ ,  $\eta_{10} = \eta_{10}^*$  y  $\eta_{20} = 0$ , obtenemos

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = - \left( \omega_2 \xi_{20}^* \operatorname{sen}(\omega_2 \tau(s)) \right) \left( \frac{\eta_{10}^*}{\omega_1(1-\nu)} \operatorname{sen}(\omega_1 \sigma(s)) \right)^2. \quad (4.23)$$

El tiempo  $S = \frac{S^*}{4}$  equivale a

$$\frac{\sigma^*}{4} = \frac{p\bar{\sigma}}{4} = \frac{p\pi}{2\omega_1} \quad y \quad \frac{\tau^*}{4} = \frac{q\bar{\tau}}{4} = \frac{q\pi}{2\omega_2},$$

en las respectivas escalas de tiempo, entonces

$$\operatorname{sen} \left( \omega_2 \frac{\tau^*}{4} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{q\pi}{2} \right) = (-1)^k,$$

donde  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y se obtiene de  $p = 2l + 1$ , análogamente  $\operatorname{sen} \left( \omega_1 \frac{\sigma^*}{4} \right) = (-1)^l$ . Al sustituir en la ecuación (4.23) se obtiene

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = (-1)^{k+1} \omega_2 \xi_{20}^* \left( \frac{\eta_{10}^*}{\omega_1(1-\nu)} \right)^2 = (-1)^{k+1} \frac{\Lambda_{12}}{h_1^*} \sqrt{8\Lambda_{23}} \neq 0.$$

□

**Proposición 32.** La derivada parcial  $\frac{\partial \eta_1}{\partial s}$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{20}(0) = \xi_{20}^*$  es cero.

*Demostración.* Del sistema de ecuaciones (4.8), para  $\mu = 0$  y de la relación de energía para las variables  $\xi_2$  y  $\eta_2$  obtenemos

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial s} = -\frac{1}{\nu} \xi_1 \eta_2^2 + 8\Lambda_{23} \xi_1 + 8h \xi_1 \xi_2^2 = 8h_1 \xi_1 \xi_2^2. \quad (4.24)$$

Al sustituir las condiciones iniciales y evaluar en  $\frac{S^*}{4}$  se obtiene que

$$\xi_2 \left( \frac{\tau}{4} \right) = \xi_{20}^* \cos \left( \frac{q\pi}{2} \right) = 0,$$

entonces  $\frac{\partial \eta_1}{\partial s} = 0$ . □

De la proposición anterior se tiene que  $\frac{\partial \eta_1}{\partial s} \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_{20}} = 0$ ; el valor del determinante se obtiene del producto de los elementos de su diagonal, resta entonces evaluar la derivada  $\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}}$  en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$  y  $\mu = 0$ . Este valor esta dado por la derivada parcial respecto a  $\xi_{20}$  de la solución  $\eta_1(\sigma(s); 0, \xi_{20}, \eta_{10}^*, 0, 0)$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$  y  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$ , donde  $\eta_1(\sigma(s); 0, \xi_{20}, \eta_{10}^*, 0, 0)$  es la solución de (4.9) con condiciones iniciales

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}, \quad \eta_1(0) = \eta_{10}^*, \quad \eta_2(0) = 0,$$

que satisface la relación de energía  $G_0 = 0$ .

**Proposición 33.** La derivada parcial  $\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}}$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{20}(0) = \xi_{20}^*$  es distinta de cero

*Demostración.* Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}}(\sigma(s); 0, \xi_{20}, \eta_{10}^*, 0, 0) = \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_{20}} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}} \right). \quad (4.25)$$

De la proposición 25 los cambios en la escala de tiempo  $\sigma$  y  $\tau$  están relacionados en la siguiente ecuación

$$\xi_1^2(\sigma) d\sigma = \xi_2^2(\tau) d\tau. \quad (4.26)$$

Al integrar (4.26) con condiciones iniciales  $\sigma(0) = \tau(0) = 0$  observamos que las variables  $\sigma(s)$  y  $\tau(s)$  satisfacen la ecuación

$$\frac{4\sigma}{\omega_1^2} - \frac{\xi_{20}^2 \tau}{2} - \frac{2 \operatorname{sen} 2\omega_1 \sigma}{\omega_1^3} - \frac{\xi_{20}^2 \operatorname{sen}(2\omega_2 \tau)}{4\omega_2} = 0, \quad (4.27)$$

donde  $\omega_2 = \sqrt{-\frac{8h_2}{\nu}}$ ,  $h_2 = -\frac{\Lambda_{23}}{\xi_{20}^2}$  y  $\omega_1 = \sqrt{-\frac{8h_1}{1-\nu}}$ . Para simplificar sea  $\alpha = \Lambda_{23} = \frac{\nu+Q}{2}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Los cálculos se han realizado utilizando *Mathematica*. Derivando implícitamente (4.27) con respecto a  $\xi_{20}$  y evaluando en  $s = \frac{S^*}{4}$  y  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$  se obtiene

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi_{20}} = \frac{(2k+1)\pi\sqrt{\alpha}}{4\sqrt{2}(1-\nu)} \left( \frac{2l+1}{2k+1} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{\nu}{h_2^*}}.$$

Por otro lado, de (4.11)

$$\left. \frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma} \right|_{s=\frac{S^*}{4}, \xi_{20}=\xi_{20}^*} = 8(-1)^{l+1} \sqrt{1-\alpha} \left( \frac{2l+1}{2k+1} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{6}}.$$

Finalmente se calcula

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}} = \sqrt{2} p \pi (-1)^{l+1} \sqrt{(1-\nu)(1-\alpha)} \left( \frac{2l+1}{2k+1} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{-\frac{h_2^*}{\alpha}}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_{20}} = \frac{\sqrt{2} \pi (-1)^{l+1} \sqrt{\alpha(1-\alpha)}}{1-\nu} \left( \frac{2l+1}{2k+1} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{-\frac{\nu}{h_2^*}},$$

y, al realizar los calculos, finalmente se obtiene

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}}(\sigma(s); 0, \xi_{20}, \eta_{10}^*, 0, 0) \neq 0. \quad (4.28)$$

Explícitamente la ecuación (4.28) tiene la expresión

$$\sqrt{2} \pi (-1)^{l+1} \sqrt{1-\alpha} \left( \frac{2l+1}{2k+1} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}} \Delta \neq 0,$$

donde

$$\Delta = \frac{\sqrt{\alpha}}{1-\nu} \left( \frac{2l+1}{2k+1} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{6}} \sqrt{-\frac{\nu}{h_2^*}} + (2l+1) \sqrt{-\frac{(1-\nu)h_2^*}{\alpha}} \neq 0.$$

□

Por las condiciones dadas el determinante es distinto de cero y se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 34.** *Dados  $\nu, Q \in (0, 1)$ , energía  $h < 0$ ,  $p$  impar y  $q$  impar enteros positivos, la solución  $S_{12}$ -simétrica de la proposición (29) con condiciones iniciales*

$$\xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(0) = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2^*}}, \quad \eta_1(0) = \sqrt{8(1-\nu)\Lambda_{12}}, \quad \eta_2(0) = 0$$

*puede ser continuada a una  $\mu$ -familia de soluciones periódicas  $S_{12}$ -simétricas con  $\mu \approx 0$  positivo correspondientes al problema colineal cargado de tres cuerpos con fuerza repulsiva entre las partículas  $m_1$  y  $m_3$ , donde*

$$h_2^* = \frac{h}{1 + \left( \frac{p}{q} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{3}}}.$$

Ejemplificamos el resultado anterior para la solución  $S_{12}$ -simétrica obtenida con los valores de los parámetros  $\nu = 0.001$  y  $Q^* = 0.499$  y los enteros  $p = 1$  y  $q = 3$ . En este caso  $\Lambda_{12} = 0.74955$ ,  $\Lambda_{23} = 0.25045$  y  $\lambda_{13} = -0.1245$ . La solución para  $\mu = 0$  se muestra en la figura 4.1.

Para las gráficas de la figura 4.2 obtenidas para  $\mu = 0.00001$ , los valores de los parámetros  $\lambda_{ij}$  son respectivamente  $\lambda_{12} = 7,5 \times 10^{-6}$ ,  $\lambda_{23} = 2,5 \times 10^{-6}$  y  $\lambda_{13} = -1,245 \times 10^{-11}$ . Para valores de  $\mu$  mayores a  $1 \times 10^{-4}$  las soluciones obtenidas ya no son periódicas. Se han escogido estos valores de los parámetros para modelar el caso donde nos aproximamos al mayor valor de la repulsión entre  $m_1$  y  $m_3$ . Las soluciones para  $\mu \approx 0$  son homotecias de la solución para  $\mu = 0$ .

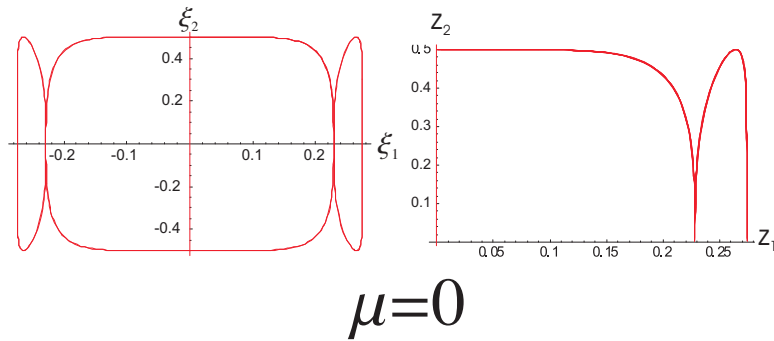


Figura 4.1: Solución periódica  $S_{12}$ -simétrica para  $\nu = 0.001$ ,  $Q^* = 0.499$  y  $\mu = 0$ .

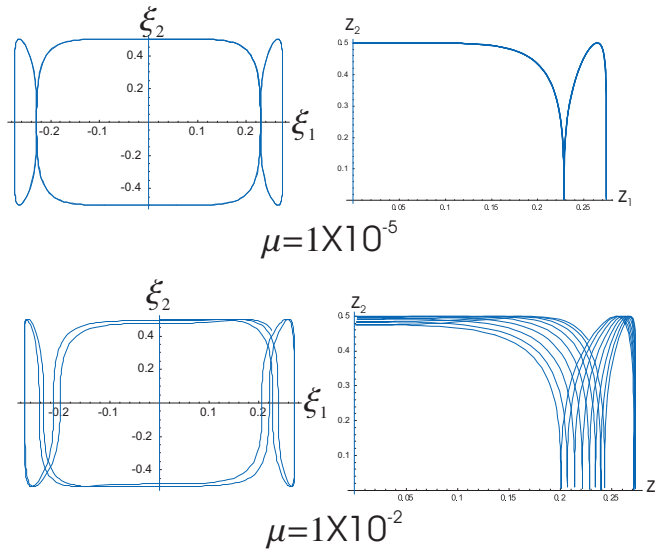


Figura 4.2: Solución  $S_{12}$ -simétrica para  $\nu = 0.001$ ,  $Q^* = 0.499$  y  $\mu = 0,00001$  y solución correspondiente al valor de  $\mu = 1 \times 10^{-2}$ .

#### 4.4.2. Soluciones periódicas $S_{23}$ -simétricas

Sea  $\varphi(s)$  la solución del sistema (4.9) con valores  $\nu$  y  $Q$  fijos con  $1 < \nu$ ,  $Q < 1$  y con condiciones iniciales

$$\xi_1(0) = \xi_{10}, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}, \quad \eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0.$$

La solución  $\varphi(s)$  depende de las condiciones iniciales  $\xi_1(0)$  y  $\xi_2(0)$  escribimos

$$\varphi(s; \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, \mu) = \left( \xi_1(s; \xi_{10}, \xi_{20}, \mu), \xi_2(s; \xi_{10}, \xi_{20}, \mu), \eta_1(s; \xi_{10}, \xi_{20}, \mu), \eta_2(s; \xi_{10}, \xi_{20}, \mu) \right).$$

La solución  $\varphi(s; \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, \mu)$  es una solución periódica  $S_{23}$ -simétrica del problema colineal cargado de tres cuerpos con periodo  $S$  que satisface la relación de energía  $G_\mu = 0$  si y sólo si

$$\begin{aligned}\xi_2\left(\frac{S}{4}, \xi_{10}, \xi_{20}, \mu\right) &= 0, \\ \eta_1\left(\frac{S}{4}, \xi_{10}, \xi_{20}, \mu\right) &= 0, \\ G_\mu(\xi_{10}, \xi_{20}, \mu) &= 0.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Resolviendo la última ecuación del sistema (4.29) con respecto a  $\xi_{20}$  obtenemos

$$\xi_{20}(\xi_{10}, 0) = \frac{\sqrt{\Lambda_{23}} \xi_{10}}{\sqrt{-\Lambda_{12} - h\xi_0^2}}.\tag{4.30}$$

Por lo tanto,  $\varphi(s; \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, \mu)$  es una solución periódica  $S_{23}$ -simétrica del problema colineal cargado de tres cuerpos con periodo  $S$  que satisface la relación de energía  $G_\mu = 0$  si y sólo si

$$\begin{aligned}\xi_2\left(\frac{S}{4}, \xi_{10}, \mu\right) &= 0, \\ \eta_1\left(\frac{S}{4}, \xi_{10}, \mu\right) &= 0.\end{aligned}\tag{4.31}$$

De la proposición 30 se construye la solución a ser continuada. Si  $p = 2l$  y  $q = 2k + 1$  para  $l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $\xi_{10} = \xi_{10}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{12}}{h_1^*}}$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2^*}}$ , entonces tenemos una solución periódica de (4.9) para  $\mu = 0$ .

En este caso, las energías  $h_1^*$  y  $h_2^*$  verifican que  $h = h_1^* + h_2^*$  y  $h_1^* = \left(\frac{p}{q} \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{23}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{(1-\nu)}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} h_2^*$ .

Esta solución corresponde a la solución periódica  $S_{23}$ -simétrica  $\varphi(s; \xi_{10}^*, \xi_{20}^*, 0, 0, 0)$  de la proposición 30.

Prolongaremos para valores pequeños de  $\mu \approx 0$  la solución conocida para  $\mu = 0$  mediante el método de prolongación analítica de soluciones periódicas.

Aplicando el teorema de la función implícita al sistema (4.41) en una vecindad de la solución conocida tenemos que si

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_2}{\partial s} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_{10}} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial s} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{10}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

al evaluar el determinante en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$ ,  $\mu = 0$  es posible encontrar funciones únicas y analíticas

$$\xi_{10} = \xi_{10}(\mu), \quad S = S(\mu)$$

definidas para  $\mu \geq 0$  suficientemente pequeño, tales que

i)  $\xi_{10}(0) = \xi_{10}^*$ ,  $S(0) = S^*$ ;

ii)  $\varphi(s; \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, \mu)$  con  $\xi_{10} = \xi_{10}(\mu)$  y  $\xi_{20} = \xi_{20}(\xi_{10}(\mu), \mu)$  dada por (4.19) es una solución periódica  $S_{23}$ -simétrica de (4.8) con periodo  $S = S(\mu)$  que satisface la relación de energía  $G_\mu = 0$ .

**Proposición 35.** La derivada parcial  $\frac{\partial \xi_2}{\partial s}$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{10}(0) = \xi_{10}^*$  es distinta de cero.

*Demostración.* Del sistema de ecuaciones (4.9), para  $\mu = 0$  obtenemos

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = \frac{1}{\nu} \eta_2 \xi_1^2. \quad (4.32)$$

Al sustituir  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$ ,  $\eta_{10} = 0$  y  $\eta_{20} = 0$ , obtenemos

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = \left( \omega_2 \nu \xi_{20}^* \operatorname{sen}(\omega_2 \tau) \right) \left( \xi_{10}^* \cos(\omega_1 \sigma) \right)^2. \quad (4.33)$$

El tiempo  $S = \frac{S^*}{4}$  equivale a

$$\frac{\sigma^*}{4} = \frac{p\bar{\sigma}}{4} = \frac{p\pi}{2\omega_1} = \frac{l\pi}{\omega_1} \quad \text{y} \quad \frac{\tau^*}{4} = \frac{q\bar{\tau}}{4} = \frac{q\pi}{2\omega_2},$$

en las respectivas escalas de tiempo; entonces

$$\operatorname{sen}\left(\omega_2 \frac{\tau^*}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{q\pi}{2}\right) = (-1)^k, \quad \cos\left(\omega_1 \frac{\sigma^*}{4}\right) = \cos(l\pi) = (-1)^l,$$

donde  $l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  se obtienen de  $p = 2l$ ,  $q = 2k + 1$ . Al sustituir en la ecuación (4.43) se obtiene

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = (-1)^k \omega_2 \xi_{10}^{*2} \xi_{20}^* \neq 0.$$

□

**Proposición 36.** La derivada parcial  $\frac{\partial \eta_2}{\partial s}$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{10}(0) = \xi_{10}^*$  y en  $\xi_{20}(0) = \xi_{20}^*$  es cero.

*Demostración.* Del sistema de ecuaciones (4.8) y de la relación de energía para las variables  $\xi_2$  y  $\eta_2$  obtenemos

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial s} = -\frac{1}{\nu} \xi_1 \eta_2^2 + 8\Lambda_{23} \xi_1 + 8h \xi_1 \xi_2^2 = 8h_1 \xi_1 \xi_2^2. \quad (4.34)$$

Al sustituir  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$ ,  $\eta_{10} = 0$  y  $\eta_{20} = 0$  se obtiene que

$$\xi_2\left(\frac{\tau^*}{4}\right) = \xi_{20}^* \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \equiv 0.$$

□

Resta evaluar la derivada  $\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}}$  en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$ ,  $\mu = 0$ . Este valor está dado por la derivada evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$  y  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$  de la solución  $\eta_1(\sigma(s); \xi_{10}^*, \xi_{20}^*, 0, 0, 0)$  con respecto a  $\xi_{10}$ , donde  $\eta_1(\sigma(s); \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, 0)$  es la solución de (4.9) con condiciones iniciales

$$\xi_1(0) = \xi_{10}, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}(\xi_{10}, 0), \quad \eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0,$$

que satisface la relación de energía  $G_0 = 0$ .

**Proposición 37.** La derivada parcial  $\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}}$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{10}(0) = \xi_{10}^*$  es distinta de cero

*Demostración.* Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}}(\sigma(s); \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, 0) = \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_{20}} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{20}} \right). \quad (4.35)$$

De la proposición 25 los cambios en la escala de tiempo  $\sigma$  y  $\tau$  propuestos están relacionados en la siguiente ecuación

$$\xi_1^2(\sigma)d\sigma = \xi_2^2(\tau)d\tau. \quad (4.36)$$

Integrando (4.36) con condiciones iniciales  $\sigma(0) = \tau(0) = 0$ , se tiene que  $\sigma(s)$  y  $\tau(s)$  satisfacen la ecuación

$$\frac{4\sigma}{\omega_1^2} - \frac{\xi_{20}^2\tau}{2} - \frac{2\operatorname{sen} 2\omega_1\sigma}{\omega_1^3} - \frac{\xi_{20}^2\operatorname{sen}(2\omega_2\tau)}{4\omega_2} = 0, \quad (4.37)$$

donde  $\omega_2 = \sqrt{-\frac{8h_2}{\nu}}$  y  $\omega_1 = \sqrt{-\frac{8h_1}{1-\nu}}$ . Derivando implícitamente la ecuación (4.37) con respecto a  $\xi_{10}$  y evaluando en  $s = \frac{s^*}{4}$  y  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$ , se obtiene

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_{10}} = -\frac{(2k+1)(1-\alpha)\pi}{4\sqrt{2}(1-\alpha+h(\xi_{10}^*)^2)^2} \left(\frac{2l+1}{2k+1} \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{(1-\alpha)h_2^*}{\nu h_1^*}} \neq 0.$$

Calculamos la derivada parcial

$$\left.\frac{\partial\eta_1}{\partial\sigma}\right|_{s=\frac{s^*}{4}, \xi_{10}=\xi_{10}^*} = 8(-1)^l h_1^* \xi_{10}^* = 8(-1)^l \sqrt{-\Lambda_{12} h_1^*}.$$

El valor de la derivada parcial restante es

$$\left.\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_{10}}\right|_{s=\frac{s^*}{4}, \xi_{10}=\xi_{10}^*} = 2\sqrt{2}(-1)^{l+1} l\pi\sqrt{1-\nu}\sqrt{-h_1^*}. \quad (4.38)$$

Entonces

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial\xi_{10}} = \frac{\sqrt{2}(-1)^{l+1}(2k+1)(1-\alpha)\pi}{(1-\alpha+h(\xi_{10}^*)^2)^2} \left(\frac{2l+1}{2k+1} \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{-\frac{(1-\alpha)h_2^*\Lambda_{12}}{\nu}}. \quad (4.39)$$

Las ecuaciones (4.38) y (4.39) tienen como factor común  $\sqrt{2}(-1)^{l+1}\pi$ . De este modo,

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi_{10}}(\sigma, \xi_{10}^*, \xi_{20}^*, 0, 0, 0) \neq 0,$$

al tener una suma de cantidades positivas distintas de cero.  $\square$

Se ha demostrado el siguiente resultado.

**Proposición 38.** *Dados  $\nu, Q \in (0, 1)$ , energía  $h < 0$ ,  $p$  par y  $q$  impar enteros positivos, la solución  $S_{12}$ -simétrica de la proposición (29) con condiciones iniciales*

$$\xi_1(0) = \sqrt{-\frac{\Lambda_{12}}{h_1^*}}, \quad \xi_2(0) = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2^*}}, \quad \eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0$$

*puede ser continuada a una  $\mu$ -familia de soluciones periódicas  $S_{23}$ -simétricas con  $\mu \approx 0$  positivo correspondientes al problema colineal cargado de tres cuerpos con fuerza repulsiva entre las partículas  $m_1$  y  $m_3$ , donde*

$$h_2^* = \frac{h}{1 + \left(\frac{p}{q} \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$



En la figura 4.3 se muestra la proyección de la solución correspondiente a los valores  $\nu = 0.001$ ,  $Q^* = 0.499$ , para las gráficas de la figura 4.3 obtenidas para  $\mu = 0,00001$ , los valores de los parámetros  $\lambda_{ij}$  son respectivamente  $\lambda_{12} = 7,5 \times 10^{-6}$ ,  $\lambda_{23} = 2,5 \times 10^{-6}$  y  $\lambda_{13} = -1,245 \times 10^{-11}$ . Para valores de  $\mu$  mayores a  $1 \times 10^{-4}$  las soluciones obtenidas ya no son periódicas. Se han escogido estos valores de los parámetros para modelar el caso donde el valor de la repulsión entre  $m_1$  y  $m_3$  se acerca al máximo posible con este planteamiento. Las soluciones para  $\mu \approx 0$  son homotecias de la solución para  $\mu = 0$ .

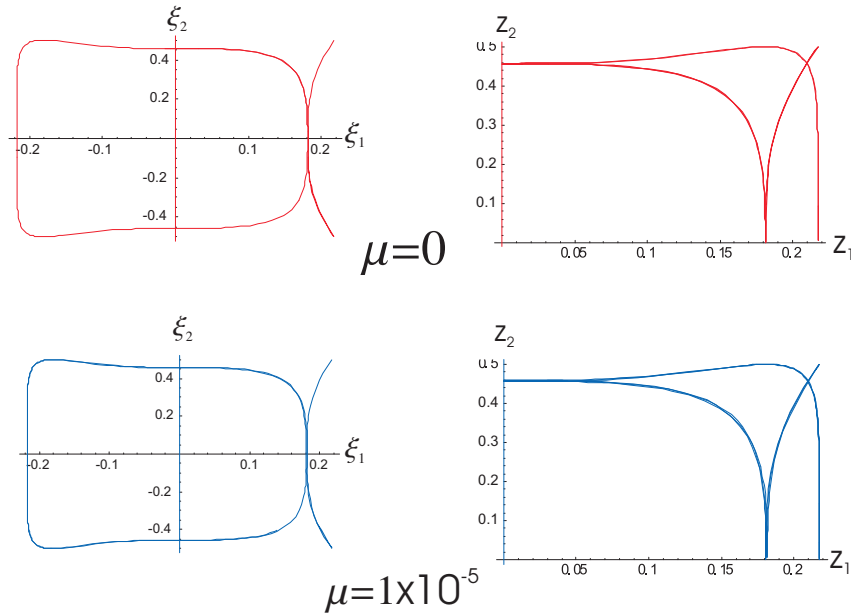


Figura 4.3: Soluciones periódicas  $S_{23}$ -simétricas donde  $\nu = 0.001$ ,  $Q^* = 0.499$  y valores  $\mu = 0$ ,  $\mu = 1 \times 10^{-5}$ .

#### 4.4.3. Soluciones periódicas $S_{13}$ -simétricas

Sea  $\varphi(s)$  la solución del sistema (4.9) con valores  $\nu$  y  $Q$  fijos con  $1 < \nu, Q < 1$  y con condiciones iniciales

$$\xi_1(0) = \xi_{10}, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}, \quad \eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0.$$

La solución  $\varphi(s)$  depende de las condiciones iniciales  $\xi_1(0)$  y  $\xi_2(0)$  escribimos

$$\varphi(s; \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, \mu) = \left( \xi_1(s; \xi_{10}, \xi_{20}, \mu), \xi_2(s; \xi_{10}, \xi_{20}, \mu), \eta_1(s; \xi_{10}, \xi_{20}, \mu), \eta_2(s; \xi_{10}, \xi_{20}, \mu) \right).$$

La solución  $\varphi(s; \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, \mu)$  es una solución periódica  $S_{13}$ -simétrica del problema colineal cargado de tres cuerpos con periodo  $S$  que satisface la relación de energía  $G_\mu = 0$  si y sólo si

$$\begin{aligned} \xi_1 \left( \frac{S}{4}, \xi_{10}, \xi_{20}, \mu \right) &= 0, \\ \eta_2 \left( \frac{S}{4}, \xi_{10}, \xi_{20}, \mu \right) &= 0, \\ G_\mu (\xi_{10}, \xi_{20}, \mu) &= 0. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Como en la sección 4.4.2 al resolver la última ecuación del sistema (4.29) con respecto a  $\xi_{20}$  obtenemos

$$\xi_{20}(\xi_{10}, 0) = \frac{\sqrt{\Lambda_{23}} \xi_{10}}{\sqrt{-\Lambda_{12} - h\xi_0^2}}.$$

Por lo tanto,  $\varphi(s; \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, \mu)$  es una solución periódica  $S_{13}$ -simétrica del problema colineal cargado de tres cuerpos con periodo  $S$  que satisface la relación de energía  $G_\mu = 0$  si y sólo si

$$\begin{aligned} \xi_1\left(\frac{S}{4}, \xi_{10}, \mu\right) &= 0, \\ \eta_2\left(\frac{S}{4}, \xi_{10}, \mu\right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

De la proposición 30 construimos la solución a ser continuada. Si  $p = 2l + 1$  y  $q = 2k$  para  $l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $\xi_{10} = \xi_{10}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{12}}{h_1^*}}$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^* = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2^*}}$ , tenemos una solución periódica de (4.9) para  $\mu = 0$ . En este caso, las energías  $h_1^*$  y  $h_2^*$  verifican que  $h = h_1^* + h_2^*$  y  $h_1^* = \left(\frac{p}{q} \frac{\Lambda_{12}}{\Lambda_{23}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{(1-\nu)}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}} h_2^*$ .

Esta solución corresponde a la solución periódica  $S_{13}$ -simétrica  $\varphi(s; \xi_{10}^*, \xi_{20}^*, 0, 0, 0)$  de la proposición 30.

Prolongaremos para valores pequeños de  $\mu \approx 0$  la solución conocida para  $\mu = 0$  mediante el método de prolongación analítica de soluciones periódicas.

Aplicando el teorema de la función implícita al sistema (4.41) en una vecindad de la solución conocida tenemos que si

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial s} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_{10}} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial s} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_{10}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

al evaluar el determinante en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$  y  $\mu = 0$  es posible encontrar funciones únicas y analíticas

$$\xi_{10} = \xi_{10}(\mu), \quad S = S(\mu),$$

definidas para  $\mu \geq 0$  suficientemente pequeño, tales que

- i)  $\xi_{10}(0) = \xi_{10}^*$ ,  $S(0) = S^*$ ;
- ii)  $\varphi(s; \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, \mu)$ , con  $\xi_{10} = \xi_{10}(\mu)$  y  $\xi_{20} = \xi_{20}(\xi_{10}(\mu), \mu)$  dada por (4.19) es una solución periódica  $S_{13}$ -simétrica de (4.8) con periodo  $S = S(\mu)$  que satisface la relación de energía  $G_\mu = 0$ .

**Proposición 39.** La derivada parcial  $\frac{\partial \xi_1}{\partial s}$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{10}(0) = \xi_{10}^*$  es distinta de cero.

*Demostración.* Del sistema de ecuaciones (4.9), para  $\mu = 0$  obtenemos

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial s} = \frac{1}{1-\nu} \eta_1 \xi_2^2. \quad (4.42)$$

Al sustituir  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$ ,  $\eta_{10} = 0$  y  $\eta_{20} = 0$ , obtenemos

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = \left( -\omega_1 \xi_{10}^* \operatorname{sen}(\omega_1 \sigma) \right) \left( \xi_{20}^* \cos(\omega_2 \tau) \right)^2. \quad (4.43)$$

El tiempo  $S = \frac{S^*}{4}$  equivale a

$$\frac{\sigma^*}{4} = \frac{p\bar{\sigma}}{4} = \frac{p\pi}{2\omega_1} \quad y \quad \frac{\tau^*}{4} = \frac{q\bar{\tau}}{4} = \frac{q\pi}{2\omega_2} = \frac{k\pi}{\omega_2},$$

en las respectivas escalas de tiempo, entonces

$$\sin\left(\omega_1 \frac{\sigma^*}{4}\right) = \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) = (-1)^l, \quad \cos\left(\omega_2 \frac{\tau^*}{4}\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k,$$

donde  $l, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  se obtienen de  $p = 2l + 1$ ,  $q = 2k$ . Al sustituir en la ecuación (4.43) se obtiene

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial s} = (-1)^{l+1} \omega_1 \xi_{10}^* \xi_{20}^{*2} \neq 0.$$

□

**Proposición 40.** La derivada parcial  $\frac{\partial \eta_2}{\partial s}$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{10}(0) = \xi_{10}^*$  y en  $\xi_{20}(0) = \xi_{20}^*$  es cero.

*Demostración.* Del sistema de ecuaciones (4.8)

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial s} = -\frac{1}{1-\nu} \xi_1 \eta_2^2 + 8\Lambda_{12} \xi_1 + 8h \xi_1 \xi_2^2 = 8h_2 \xi_1^2 \xi_2. \quad (4.44)$$

Al sustituir  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$ ,  $\xi_{20} = \xi_{20}^*$ ,  $\eta_{10} = 0$  y  $\eta_{20} = 0$  se obtiene

$$\xi_1\left(\frac{\sigma^*}{4}\right) = \xi_{10}^* \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \equiv 0.$$

□

Resta evaluar la derivada  $\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_{10}}$  en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$ ,  $\mu = 0$ . Este valor está dado por la derivada evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$  y  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$  de la solución  $\eta_2(\tau(s); \xi_{10}^*, \xi_{20}^*, 0, 0, 0)$  con respecto a  $\xi_{20}$ , donde  $\eta_2(\tau(s); \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, 0)$  es la solución de (4.9) con condiciones iniciales

$$\xi_1(0) = \xi_{10}, \quad \xi_2(0) = \xi_{20}(\xi_{10}, 0), \quad \eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0,$$

que satisface la relación de energía  $G_0 = 0$ .

**Proposición 41.** La derivada parcial  $\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_{10}}$  evaluada en  $s = \frac{S^*}{4}$ ,  $\xi_{10}(0) = \xi_{10}^*$  es distinta de cero

*Demostración.* Aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_{10}} = (\tau(s); \xi_{10}, \xi_{20}, 0, 0, 0) \left( \frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \xi_{10}} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_{10}} \right). \quad (4.45)$$

De la proposición 25 los cambios en la escala de tiempo  $\sigma$  y  $\tau$  propuestos están relacionados en la siguiente ecuación

$$\xi_1^2(\sigma) d\sigma = \xi_2^2(\tau) d\tau. \quad (4.46)$$

Integrando (4.46) con condiciones iniciales  $\sigma(0) = \tau(0) = 0$ , se tiene que  $\sigma(s)$  y  $\tau(s)$  satisfacen la ecuación

$$\frac{4\sigma}{\omega_1^2} - \frac{\xi_{20}^2 \tau}{2} - \frac{2 \operatorname{sen} 2\omega_1 \sigma}{\omega_1^3} - \frac{\xi_{20}^2 \operatorname{sen}(2\omega_2 \tau)}{4\omega_2} = 0, \quad (4.47)$$

donde  $\omega_2 = \sqrt{-\frac{8h_2}{\nu}}$  y  $\omega_1 = \sqrt{-\frac{8h_1}{1-\nu}}$ . Derivando implícitamente la ecuación (4.47) con respecto a  $\xi_{10}$  y evaluando en  $s = \frac{s^*}{4}$  y  $\xi_{10} = \xi_{10}^*$ , se obtiene

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi_{10}} = -\frac{k\pi\Lambda_{12}}{\omega_2\xi_{10}^* (\Lambda_{12} + h\xi_{10}^{*2})} \neq 0.$$

Calculamos la derivada parcial

$$\left. \frac{\partial \eta_2}{\partial \tau} \right|_{s=\frac{s^*}{4}, \xi_{10}=\xi_{10}^*} = 8h_2\xi_2 \Big|_{s=\frac{s^*}{4}, \xi_{10}=\xi_{10}^*} = 8(-1)^k h_2^* \xi_{20}^*.$$

El valor de la derivada parcial restante es

$$\left. \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi_{10}} \right|_{s=\frac{s^*}{4}, \xi_{10}=\xi_{10}^*} = \frac{2\sqrt{2}(-1)^{k+1}k\pi\sqrt{\Lambda_{12}}(1-\nu)\sqrt{-h_1^*}}{\sqrt{-\Lambda_{12} - h_2\xi_{10}^*}} \neq 0. \quad (4.48)$$

Entonces

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_{10}} = \frac{8(-1)^{k+1}h_2^*\xi_{20}^*k\pi\Lambda_{12}}{\omega_2\xi_{10}^*(\Lambda_{12} + h\xi_{10}^{*2})} \neq 0. \quad (4.49)$$

Las ecuaciones (4.48) y (4.49), tiene como factor comun  $\sqrt{8\Lambda_{12}}(-1)^{k+1}k\pi$ , entonces

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_{10}}(\sigma, \xi_{10}^*, \xi_{20}^*, 0, 0, 0) \neq 0,$$

al tener una suma de cantidades positivas distintas de cero. □

Se ha demostrado el siguiente resultado.

**Proposición 42.** *Dados  $\nu, Q \in (0, 1)$ , energía  $h < 0$ ,  $p$  impar y  $q$  par enteros positivos, la solución  $S_{13}$ -simétrica de la proposición (29) con condiciones iniciales*

$$\xi_1(0) = \sqrt{-\frac{\Lambda_{12}}{h_1^*}}, \quad \xi_2(0) = \sqrt{-\frac{\Lambda_{23}}{h_2^*}}, \quad \eta_1(0) = 0, \quad \eta_2(0) = 0$$

*puede ser continuada a una  $\mu$ -familia de soluciones periódicas  $S_{13}$ -simétricas con  $\mu \approx 0$  positivo correspondientes al problema colineal cargado de tres cuerpos con fuerza repulsiva entre las partículas  $m_1$  y  $m_3$ , donde*

$$h_2^* = \frac{h}{1 + \left(\frac{p}{q} \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

En la figura 4.4 se muestra la proyección de la solución correspondiente a los valores  $\nu = 0.001$ ,  $Q^* = 0.499$ , para las gráficas de la figura 4.4 obtenidas para  $\mu = 0,00001$ , los valores de los parámetros  $\lambda_{ij}$  son respectivamente  $\lambda_{12} = 7,5 \times 10^{-6}$ ,  $\lambda_{23} = 2,5 \times 10^{-6}$  y  $\lambda_{13} = -1,245 \times 10^{-11}$ . Para valores de  $\mu$  mayores a  $1 \times 10^{-4}$  las soluciones obtenidas ya no son periódicas. Se han escogido estos valores de los parámetros para modelar el caso donde el valor de la repulsión entre  $m_1$  y  $m_3$  se acerca al máximo posible con este planteamiento. Las soluciones para  $\mu \approx 0$  son homotecias de la solución para  $\mu = 0$ .

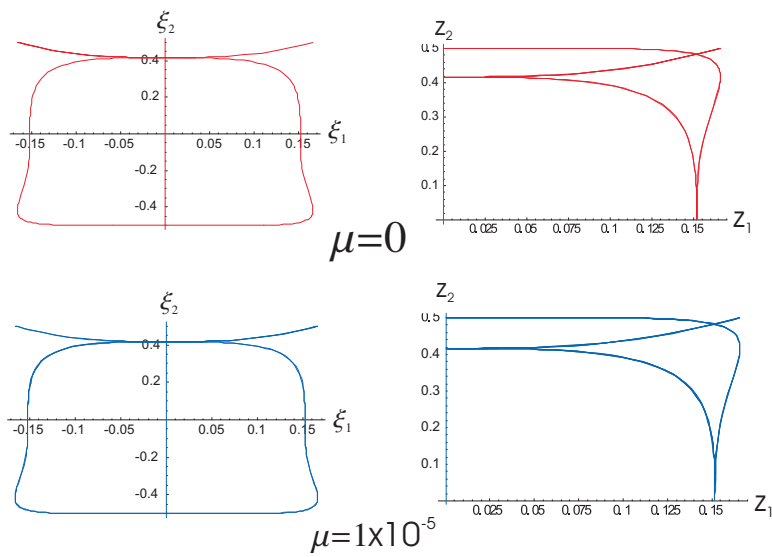


Figura 4.4: Soluciones periódicas  $S_{13}$ -simétricas donde  $\nu = 0.001$ ,  $Q^* = 0.499$  y valores  $\mu = 0$ ,  $\mu = 1 \times 10^{-5}$ .

## Capítulo 5

# CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

### 5.1. Conclusiones

Las aportaciones de este trabajo son las siguientes:

1. *Clasificación de las variedades de colisión para distintos valores de masas y cargas con base a la teoría de configuraciones centrales.*
2. *Clasificación de las variedades de colisión para el caso simétrico, donde la magnitud de la fuerza y la distancia entre las partículas de los extremos con respecto a la partícula intermedia es la misma.*
3. *La dinámica del problema colineal cargado de tres cuerpos cercana a la colisión triple para valores pequeños de la repulsión tiene cualitativamente el mismo comportamiento del caso no cargado.*
4. *Se obtuvo la dinámica cercana a los puntos de equilibrio no hiperbólicos (colisión triple) obtenidos al estudiar el diagrama de bifurcación de la figura 2.12. Para energía negativa soluciones que vienen de infinito realizando algún tipo de colisión binaria se acercan al origen y escapan manteniendo el mismo tipo de colisión binaria, mientras que para energía positiva estas soluciones intercambian el tipo de colisión binaria al pasar cerca de la colisión triple.*
5. *Las variedades centrales para el punto de equilibrio degenerado se tienen para valores positivos de la energía y son soluciones de colisión/escape.*
6. *La soluciones periódicas simétricas obtenidas en la sección 4.3 se pueden continuar a una familia de soluciones periódicas simétricas donde la fuerza entre las masas de los extremos es de repulsión.*

## 5.2. Nuevas posibilidades de investigación.

Un tipo de solución particular del problema colineal de tres cuerpos es la obtenida por Schubart [Schubart 1956], para la demostración de la existencia de este tipo de solución se han utilizado tanto técnicas variacionales como topológicas. La línea de trabajo estudiada por el autor es propuesta por [Moeckel 1983] y es de tipo topológico. A continuación presentamos los resultados relevantes al respecto.

**Definición 10.** *Una órbita de Shubart es una solución periódica del problema colineal de tres cuerpos, de período  $T$ , tal que:*

1. *Para  $t = 0$  las masas  $m_1, m_3, m_2$ , dispuestas en esa configuración, se encuentran en la configuración central de Euler con velocidades iniciales tales que la  $m_1$  se aleja de  $m_3$ , mientras que  $m_2$  y  $m_3$  tienen velocidades iniciales tales que se acercan para colisionar entre ellas.*
2. *Para el tiempo  $t = \frac{T}{4}$ , la masa  $m_1$  tiene velocidad nula mientras  $m_2$  y  $m_3$  colisionan.*
3. *En el tiempo  $t = \frac{T}{2}$  las masas regresan a la configuración de Euler con las velocidades iniciales invertidas.*
4. *Para  $t = \frac{3}{4}T$ , las masas  $m_1$  y  $m_3$  colisionan mientras que  $m_2$  tiene velocidad nula.*
5. *Finalmente, para  $t = T$ , regresamos a las condiciones iniciales*

La existencia de estas soluciones en el caso cargado es verificable siguiendo los argumentos de la prueba de Moeckel y los resultados obtenidos en esta tesis. Consideremos el problema colineal cargado de tres cuerpos con masas iguales  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$  y cargas  $q_1 = q_2 = \alpha > 0$  y  $q_3 = -\alpha^{-1}$ . Se sustituyen los valores de los productos de masas por los parámetros y se realiza la explosión del origen obteniendo el sistema de ecuaciones diferenciales (5.1) en coordenadas  $(r, v, u, \gamma)$  equivalentes a las coordenadas de McGehee. En este caso las configuraciones satisfacen que  $u \in [-1, 1]$ . Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \theta_0 \cos^2 u r v, \\ \frac{dv}{ds} &= \theta_0 \left( G(u) - \frac{1}{2} v^2 \cos^2 u - 2r \cos^2 u \right), \\ \frac{du}{ds} &= \gamma, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= 4G_u(u) - \frac{1}{2} \theta_0 v \gamma \cos^2 u + 4 \sin u \cos u (v^2 + 2r), \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde el potencial regularizado  $G(u)$  se define como

$$G(u) = \cos^2 u W(u), \quad W(u) = \frac{\lambda_{12}}{\rho_{12}} + \frac{\lambda_{13}}{\rho_{13}} + \frac{\lambda_{23}}{\rho_{23}}. \tag{5.2}$$

Las distancias entre las partículas están dadas por

$$\begin{aligned} \rho_{12}^2 &= 1 + \cos[\theta_0 \sin u], \\ \rho_{13}^2 &= 2 \sin^2 \left[ \theta_0 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \left( u + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right], \\ \rho_{23}^2 &= 2 \sin^2 \left[ \theta_0 \sin^2 \left( \frac{1}{2} \left( u - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right], \end{aligned} \tag{5.3}$$

con la relación de energía siguiente

$$\frac{1}{2}v^2 \cos^2 u + \frac{1}{8}\gamma^2 - G(u) = rh \cos^2 u. \quad (5.4)$$

El potencial  $W(u)$  tiene singularidades en  $u = \pm\frac{\pi}{2}$  correspondientes a las colisiones binarias. La función  $W(u)$  es convexa en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , con segunda derivada  $W_{uu} > 0$ ; hay un único punto de equilibrio que corresponde a la configuración central de Euler.

En el intervalo  $(0, \frac{\pi}{2})$ ,  $W_u(u) > 0$ . El potencial regularizado  $G(u)$  se extiende analíticamente a las colisiones dobles para tener una función analítica en todo  $\mathbb{R}$  de periodo  $\pi$ .

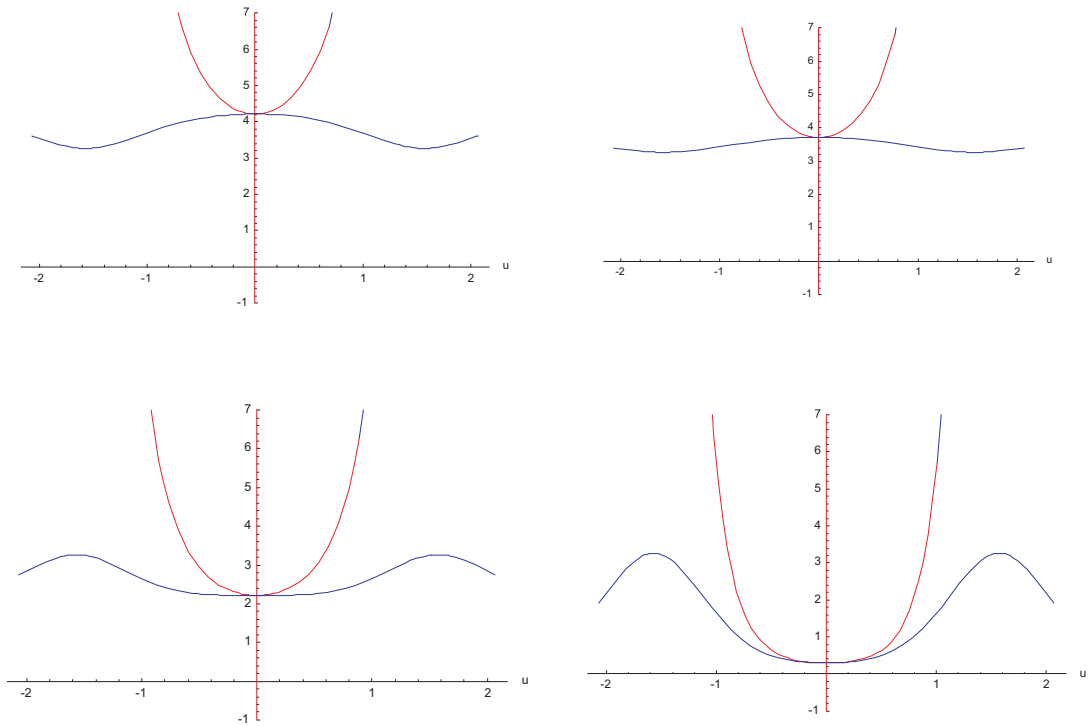


Figura 5.1: Gráficas de la función potencial  $U(u)$  y potencial regularizado  $G(u)$ .

En la figura 5.1 se muestran las gráficas de las funciones  $W(u)$  y  $G(u)$  en rojo y azul respectivamente. Se observa que al aumentar la repulsión entre los partículas de los extremos, el potencial regularizado  $G(u)$  cambia su forma. El punto  $(0, G(0))$  pasa de ser un máximo a un mínimo.

Al aumentar el valor de la repulsión la función potencial  $W(u)$  se comporta conforme lo descrito en el capítulo 2 para el caso de los potenciales simétricos. Los conjuntos de Wazewsky para los valores de repulsión que satisfacen que  $W(0) > 0$  son topológicamente el mismo, pues la forma de este conjunto depende de la forma del potencial  $W(u)$  para  $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Los argumentos de la demostración de Moeckel [Moeckel 1983] cambian cuando se estudia el flujo en el conjunto de Wazewsky, pues en las ecuaciones de movimiento 5.1 hay una dependencia del comportamiento del potencial regularizado  $G(u)$ . A partir de estos argumentos se conjetura lo siguiente: *Para*



los valores de repulsión, donde se satisface que  $W(0) > 0$  y el punto  $(0, G(0))$  es un máximo se tienen órbitas de Shubart. Esta conjetura se toma como punto de partida para estudiar la dinámica para los valores de repulsión donde no se satisfacen las dos condiciones anteriores utilizando técnicas topológicas y simulación numérica, con el objetivo de estudiar la persistencia de las soluciones de Shubart para distintos valores de la fuerza de repulsión.

Los resultados de esta tesis pueden ser ampliados siguiendo la línea de investigación propuesta en [Martynova 2008], donde se utiliza la integración numérica de las ecuaciones de movimiento para clasificar a las condiciones iniciales dependiendo de la evolución de las soluciones que determinan cuando  $t \rightarrow \infty$ . Se pueden tener soluciones periódicas, escapes, soluciones homotéticas ó soluciones de Shubart. Los autores han encontrado una región donde las condiciones iniciales dan lugar a soluciones parecidas a la solución de Shubart. En el estudio del átomo de Helio, Mitsusada Sano [Sano 2004] emplea las técnicas anteriores para estudiar este modelo obteniendo regiones de comportamientos caóticos y una solución de Shubart.

Con base a lo anterior, se tiene una forma alternativa de estudiar a las soluciones de Shubart desde este punto de vista. Una conjetura es: *en el caso de potenciales simétricos la región donde las condiciones iniciales dan lugar a soluciones de Shubart, tiende a desaparecer a medida que el valor de la repulsión entre las partículas de los extremos aumenta.*

# Bibliografía

- [Alfaro 1997] F. Alfaro, E. Pérez-Chavela, *The Rhomboidal Charged Four Body Problem*, Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics (HAMSYS-98), Proc. of the III Int. Symp., 2000, 1–19.
- [Alfaro 2002] F. Alfaro, E. Pérez-Chavela, *Families of continua of central configurations in charged problems*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **9**, 2002, 463–465.
- [Antonacopoulos 1981] G. Antonacopoulos, D. Dionysiou, *Relativistic dynamics for three charged particles*, Celestial Mechanics **23**, 1981, 109–117.
- [Ashkenazi 1988] M. Ashkenazi, S. Chow, *Normal forms near critical points for differential equations and maps*, IEEE Transactions On Circuits and Systems **35**, 1988, no. 7, 850–862.
- [Atela 1994] P. Atela, R. McLachlan, *Global behaviour of the charged isosceles three-body problem*, International Journal of Bifurcation and Chaos **4**, no. 4, 1994, 865–884.
- [Broucke 1980] R. Broucke, D. E. Walker, *Numerical explorations of the rectilinear problem of three bodies*, Celestial Mechanics **21**, 1980, 73–81.
- [Castro-Ortega 2011] A. Castro Ortega, E. A. Lacomba, *Non-hyperbolic equilibria in the charged collinear three-body*, Journal of dynamics and differential equations **24**, 2012, 85–100.
- [Carr 1981] J. Carr (ed.), *Applications of centre manifold theory*, Applied Mathematical Sciences 35, vol. 35, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [Chen 1999] G. Chen, J. D. Dora, *Normal forms for differentiable maps near a fixed point*, Numerical Algorithms **22**, 1999, 213–230.
- [Corbera-Llibre-Pérez-Chavela 2006] M. Corbera, J. Llibre, E. Pérez-Chavela, *Generation of symmetric periodic orbits by a heteroclinic loop formed by two singular points and their invariant manifolds of dimension 1 and 2 in  $\mathbb{R}$* , Journal of Physics A: Mathematical and General **39**, 2006, 15313–15326.
- [Devaney 1980] R. Devaney, *Triple collision in the planar isosceles three-body problem*, Inventiones Mathematicae **60**, 1980, 249–267.
- [Devaney 1981] R. Devaney, *Singularities in Classical and celestial mechanics*, Ergodic theory and dynamical systems **387**, I. Progress in mathematics, vol. 10, 211–233. Birkhauser, Boston, 1981.

- [Hietarinta 1989] J. Hietarinta, S. Mikkola, *A numerical investigation of one dimensional Newtonian three-body problem*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **46**, 1989, 1–18.
- [Hietarinta 1990] J. Hietarinta, S. Mikkola, *A numerical investigation of one dimensional Newtonian three-body problem. II-positive energies*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **51**, 1990, 321–331.
- [Hietarinta 1993] J. Hietarinta, S. Mikkola, *Chaos in the one-dimesional gravitational three-body problem*, *Chaos* **3**, 1993, 183–203.
- [Kammeyer 1983] P.C. Kammeyer, *Symmetric rectilinear periodic orbits of three bodies*, *Celestial Mechanics* **30**, 1983, 329–342.
- [Karttunen 2006] H. Karttunen, M. Valtonen, *The three-body problem*, Cambridge University Press, UK, 2006.
- [Lacomba 1987] E. A. Lacomba, *Infinity manifolds for positive energy in celestial mechanics*, *Contemporary Mathematics* **58**, Part III, 1987, 193–201.
- [Levi-Civita 1920] T. Levi-Civita, *Sur la regularisation du probleme des trois corps*, *Acta Mathematica* **42**, 1920, 99–144.
- [Llibre-Pasca 2007] J. Llibre, D. Pasca, *Periodic orbits near a heteroclinic loop formed by one-dimensional manifold: application to the charged collinear three-body problem*, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **17**, 2007, no. 6, 2175–2183.
- [Martynova 2008] A. I. Martynova, V. V. Orlov, A. V. Petrova, K. Tanikawa, M. Saito, *The rectilinear three-body problem*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **100**, 2008, 93–120.
- [McGehee 1973] R. McGehee, *A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics*, *Journal of Differential Equations*, 1973, no. 14, 70–88.
- [McGehee 1974] R. McGehee, *Triple collision in the collinear three body problem*, *Inventiones Mathematicae*, 1974, no. 227, 191–227.
- [Moeckel 1983] R. Moeckel, *A topological proof of existence proof for the Shubart orbits in the collinear three-body problem*, *Celestial Mechanics* **30**, 1983, 329–342.
- [Pérez-Chavela-Saari 1996] D. G. Saari, E. Pérez-Chavela, A. Suzin, and Z. Yan, *Central configurations in the charged three-body problem*, *Contemporary Mathematics* **198**, 1996, 137–153.
- [Pollard 1976] H. Pollard, *Celestial mechanics*, The CAMS Mathematical Monography **18**, The Math. Assoc. Amer., 1976.
- [Ramírez 1992] R. Ramírez, *Problema colineal repulsivo de tres cuerpos con fuerza repulsiva*, Tesis de Maestría, Facultad de ciencias, UNAM, 1992.
- [Samovol 2004] V. S. Samovol, *Normal forms of autonomous systems with one zero eigenvalue*, *Mathematical Notes*, Translated from *Matematicheskije Zametki*, Vol. **75**, No.5 , 2004, 660- 668.

- [Saito 2007] M. M. Saito, K. Tanikawa *The rectilinear three-body problem using symbol sequence I. Role of triple collision*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **98**, 2007, 95-120.
- [Sano 2004] M. Sano, *The classical Coulomb three-body problem in the collinear eZ e configuration*, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **37**, 2004, 803-822.
- [Shubart 1956] J. Schubart, *Numerische Aufscuchung periodischer Losungen im Dreikörperproblem*, *Astron. Nachr.* **283**, 1956, 17-22.
- [Simó 1980] C. Simó, *Masses for which triple collision is regularizable*, *Celestial Mechanics* **21**, 1980.
- [Sundman 1913] K. F. Sundman, *Memoire sur le problemé des trois corps*, *Acta Mathematica* **36**, 1913, 105-179.
- [Szebehely 1967] V. Szebehely, *Theory of orbits*, Academic Press, New York, London, 1967.
- [Wiggins 1990] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

**DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA**

**ESTUDIO DE UN PUNTO DE EQUILIBRIO NO HIPERBOLICO  
EN EL PROBLEMA COLINEAL CARGADO DE TRES CUERPOS**

Tesis que presenta

**ALBERTO CASTRO ORTEGA**

Para obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)**

**ASESOR: DR. ERNESTO A. LACOMBA ZAMORA**

9 DE MARZO DE 2012

**UNIDAD IZTAPALAPA**

Av. San Rafael Atlixco 186 Col. Vicentina, Del. Iztapalapa CP 09340 México, DF Tel. 5804-4600