Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE IDÓNEA COMUNICACIÓN DE RESULTADOS

No. 00007

SOBRE EL CONCEPTO DE BIFURCACION Y CIERTAS GENERALIZACIONES DE LA BIFURCACION DE HOPF

En México, D.F., se presentaron a las 14:00 horas del día 30 del mes de noviembre del año 2006 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. SANTIAGO LOPEZ DE MEDRANO SANCHEZ

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

DR. JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Idónea Comunicación de Resultados cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: RICARDO LOPEZ HERNANDEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
DIRECCION DE SISTEMAS ESCOLARES
Casa abierta al tiempo

RICARDO LOPEZ HERNANDEZ
FIRMA DEL ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTORA DE LA DIVISIÓN DE CBI

DRA. VERONICA MEDINA BANUELOS

PRESIDENTE

DR. SANTIAGO LOPEZ DE MEDRANO SANCHEZ

VOCAL

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

VOCAL

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNANDEZ

SECRETARIO

DR. JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E
INGENIERÍA

SOBRE EL CONCEPTO DE BIFURCACIÓN Y CIERTAS GENERALIZACIONES DE LA BIFURCACIÓN DE HOPF

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
UNIDAD IZTAPALAPA División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

SOBRE EL CONCEPTO DE BIFURCACIÓN Y CIERTAS GENERALIZACIONES DE LA BIFURCACIÓN DE HOPF

TESIS QUE PRESENTA:
RICARDO LÓPEZ HERNÁNDEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

ASESORES:
DR. PETER SEIBERT KOPP
DR. JUAN HÉCTOR ARREDONDO RUIZ

NOVIEMBRE DE 2006.

Agradecimientos.

Agradezco de todo corazón a **Dios** por haberme permitido lograr este proyecto de vida.

Agradezco muy en especial al **Dr. Peter Seibert Kopp** por haber aceptado dirigir este proyecto y más aun por brindarme incondicionalmente el apoyo necesario para poder concluir esta tesis.

Mi reconocimiento y agradecimiento para el **Dr. Juan Héctor Arredondo Ruíz**, por sus importantes aportaciones al presente trabajo, las cuales ayudaron a la culminación del mismo.

Agradezco enormemente al **Dr. Santiago López de Medrano Sánchez** por su participación como revisor de la tesis, así también agradezco sus observaciones críticas, sugerencias y la gran disposición para mejorar el manuscrito de esta tesis, pero especialmente le agradezco por hacerme concluir que "lo sencillo es una condición necesaria y suficiente para lo importante".

Agradezco al **Dr. Baltazar Aguirre Hernández**, por aceptar la revisión de la tesis, pues con sus comentarios y sugerencias contribuyeron a mejorarla.

Agradezco al **Dr. Joaquín Delgado Fernández**, por participar en la revisión del trabajo y por su amable atención y comentarios.

Agradezco a mi familia por creer siempre en mi, y por el apoyo incondicional para poder concluir mis estudios de maestría.

Agradezco a la Facultad de Ingeniería, Tecnología y Ciencias Básicas de la Universidad Autónoma de Tlaxcala por el apoyo recibido, especialmente al director de la Facultad **M. C. Antonio Durante Murillo**.

Agradezco al **Dr. Isaías López Morales**, por su ayuda en el área computacional.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico otorgado para realizar mis estudios.

A todas las personas que directa o indirectamente participaron en el presente trabajo les doy sinceramente las gracias.

Dedicatorias.

Dedico este trabajo a:

A mis hijos **Pavelito** y **Dalai Jaidaly**, porque ellos son una razón para seguir luchando día con día.

A mi esposa **Maria Luisa** por brindarme la oportunidad de formar juntos una familia. Te amo **Mary**.

A mi mama **Goyita** por haberme dado la vida y porque siempre me ha enseñado y guiado de la manera correcta. Gracias Mamá.

A la memoria de mi padre, **Adrián López Cortés**, porque se que aun cuando no se encuentra físicamente conmigo, siempre me alienta espiritualmente.

A mi Hermano **Israel**, porque aun cuando esta pasando tiempos difíciles, se que llegara su pronta recuperación.

A mis hermanas **Paty**, **Gelita**, **Chely Dulce**, **Erica**, **Miriam** y **Livier**, con mucho cariño.

A mis sobrinos: **Carlitos**, **Heidi**, **Toño**, **Ian**, **Citlali**, **Fer**, **Frida**, **Herán**, **Bombon**, **Jaqueline**, **Robert**, **Armando**, **Uriel**, **Yari**, **Evelyn**, **Erick**, **Fanny** y **Lisseth**.

ÍNDICE GENERAL

Prólogo.

Dada una familia de sistemas dinámicos o semidinámicos, se entiende, por bifurcación un cambio cualitativo en el retrato fase cuando un parámetro alcanza o rebasa un cierto valor crítico. De manera más específica, llamamos bifurcación de un conjunto invariante (en partícular, punto de equilibrio) al caso donde tal cambio es acompañado por la separación del conjunto invariante en dos o más de tales conjuntos (o puntos de equilibrio). De manera intuitiva, se dice que el conjunto invariante o punto de equilibrio se escinde(divide o separa) bajo el cambio del parámetro. En 1942 E. Hopf publicó un artículo famoso sobre este fenómeno. Allá se relacionó el surgimiento de soluciones periódicas con ciertos cambios en el comportamiento de la parte lineal del sistema bajo un cambio de un parámetro. Los trabajos posteriores a los de Hopf usualmente siguieron (y siguen) tomando como principio un cambio en el espectro de la parte lineal del sistema, esto es suficiente si el Teorema de Hartman-Grobman se cumple, que típicamente es acompañado por un cambio ("ganancia o pérdida") de estabilidad. Debido a esto surge la pregunta: Cuando un cambio de estabilidad da lugar a una bifurcación, independientemente de que tal cambio se refleje o no en un cambio cualitativo en el espectro de la parte lineal. En 1976 Marchetti et al., en un artículo, dieron un paso en esta dirección donde demostraron que una bifurcación surge cuando hay transición de la estabilidad asintótica a la inestabilidad completa (sin que las órbitas bifurcantes sean necesariamente periódicas). Posteriormente, en otras investigaciones, las hipótesis mencionadas fueron debilitadas sucesivamente. El tema tratado en este trabajo de tesis cae dentro de este contexto. Las investigaciones mencionadas tienen como conclusión principal que en general el *surgimiento de bifurcación no depende de las propiedades de las partes lineales de los sistemas*, donde pueden ocurrir aquellos aún cuando estas no cambian.
Concretamente, en el presente trabajo se trata de probar la existencia de una bifurcación bajo hipótesis tanto para valores críticos del parámetro como ex-

tracríticos. Tales hipótesis son más débiles que las consideradas en investigaciones anteriores. Para el valor crítico del parámetro, esta condición es la estabilidad con respecto al sistema extendido definido sobre el espacio producto, estado-parámetro, propiedad llamada *estabilidad* $\Lambda-$*total*. Esto cubre los casos de atracción uniforme crítica y estabilidad total crítica como casos especiales. Para los valores extracríticos del parámetro la condición de inestabilidad completa es debilitada a la negación de la equi-atracción débil. El contexto de este trabajo es el de familias de sistemas dinámicos o semidinámicos definidos en espacios métricos, que dependen de un parámetro, el cual puede variar en general también en un espacio métrico.

Introducción.

Con el artículo de Marchetti et al. [6], un nuevo punto de vista se introdujo en la teoría de bifurcación (comprendido en el sentido de la bifurcación de Hopf y sus generalizaciones). Mientras que en la teoría tradicional la existencia de bifurcaciones se basa en el comportamiento de los eigenvalores de la parte lineal de una familia de sistemas bajo un cambio de un parámetro, en el árticulo mencionado, así como también siguiendo la misma linea general ([1],[2],[3],[4],[13],[15], resumido en [11]), se demuestra la misma propiedad bajo la suposición de ciertos cambios en el comportamiento dinámico cuando un parámetro alcanza o sobrepasa algún valor crítico. Existen ejemplos donde la ocurrencia de una bifurcación puede probarse aún cuando los eigenvalores de la parte lineal no cambien en lo absoluto. Esto prueba que el espectro de la parte lineal de un sistema no es realmente esencial para la presencia de una bifurcación. En otras palabras, el criterio basado en la parte lineal da condiciones suficientes pero no necesarias.

Más explícitamente, en [6] se supone (limitandonos a lo escencial) que para cierto valor λ_0 del parámetro λ, un punto de equilibrio o un conjunto compacto M, es asintóticamente estable (o atractor estable) y que para otros ciertos valores de λ, acumulándose en λ_0, M es completamente inestable (o un repulsor o "asintóticamente estable en el sentido negativo del tiempo"). Estas condiciones también se cumplen en el caso clásico de Hopf (en realidad, para sistemas bidimensionales, al cual sin embargo, los casos de dimensión mayor puede reducirse por técnicas de variedad central) pero ellos no necesitan reflejarse en las partes lineales de los sistemas. La principal herramienta metodológica usada en [6], y en el artículo posterior [13], fue un principio de persistencia de estabilidad asintótica: si un sistema con un atractor estable es sometido a una perturbación suficientemente pequeña, el nuevo sistema presenta un atractor estable en una vecindad arbitrariamente pequeña del atractor original. Esto fue probado por primera vez, y en su forma más general, en [9].

Por otra parte, en [13], la condición de inestabilidad completa para valores extracríticos de λ (i.e. $\lambda \neq \lambda_0$, donde λ_0 corresponde al valor del parámetro del sistema no perturbado) fue reemplazado por varias condiciones más débiles, una de las cuales fue que M no debe ser un atractor o atractor débil. En [2], la estabilidad asintótica de M para el valor crítico $\lambda = \lambda_0$ fue reemplazada por la condición más débil de estabilidad bajo perturbaciones sostenidas (o *estabilidad total*).

En el presente trabajo uno de nuestros propósitos es probar la existencia de una bifurcación bajo hipótesis tanto para valores del parámetro críticos como extracríticos, las cuales son más débiles que las hipótesis consideradas en contribuciones previas. Para el valor crítico del parámetro, esta condición es la estabilidad con respecto al sistema extendido definido sobre el espacio producto, estado-parámetro. Esta propiedad la llamamos, adoptando la terminología introducida en [7], *estabilidad* $\Lambda-$*total*. Esto cubre los casos de atracción uniforme crítica y estabilidad total crítica, como casos especiales. Para valores extracríticos del parámetro la condición de inestabilidad completa es debilitada a la negación de la equi-atracción débil. Se presenta un nuevo método de demostración, en el cual el principio de persistencia de estabilidad asintótica usado previamente es reemplazado por la explotación de las propiedades de los conjuntos límites de conjuntos (como esta desarrollado en [5]).

El concepto de bifurcación que aparece en la literatura (por ejemplo en [6]) resulta demasiado general para describir lo que, intuitivamente, se concibe como bifurcación: permite una cantidad demasiado grande de conjuntos invariantes, como lo ilustra el ejemplo 3.5 de este trabajo. De hecho las hipótesis (más restrictivas) de los trabajos previos (como [6]) implican bifurcaciones en un sentido más estricto que el reflejado por las definiciones.

CAPÍTULO 1

Preliminares.

Considérese una *familia de sistemas (semi-)dinámicos [o (semi-)grupos de transformaciones continuas] que consisten de un espacio fase (o espacio estado) X, escala de tiempo T, el espacio parámetro* Λ y una función continua

$$F : X \times T \times \Lambda \to X.$$

Aquí X es un espacio métrico con métrica d, T un (semi-)grupo topológico ordenado, en particular el (semi-)grupo aditivo $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^+$) y Λ un espacio métrico, con métrica ρ. La imagen de $(x,t,\lambda) \in X \times T \times \Lambda$, bajo F se denotará por $F_\lambda^t(x)$, o más brevemente por $(xt)_\lambda$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, la restricción de F a $X \times T \times \{\lambda\}$ será denotada por F_λ. La tripleta (X,T,F_λ) constituye un *sistema (semi-)dinámico*:

$$F_\lambda : X \times T \to X.$$

Denotaremos este sistema simplemente por F_λ. La familia de sistemas será denotada por (X,T,Λ,F) o si no hay duda, por F_Λ.

Se requiere que entre el (semi-)grupo T y cada uno de los mapeos F_λ se cumplan los siguientes axiomas:

I)**[Axioma de identidad]**

$$F_\lambda^0(x) = x \qquad (\lambda \in \Lambda; x \in X).$$

II) [(**Axioma de(semi-)grupo**]

$$F_\lambda^{t_1}(F_\lambda^{t_2}(x)) = F_\lambda^{t_1+t_2}(x), \qquad (\lambda \in \Lambda; x \in X; t_1, t_2 \in T).$$

Denotamos por $\gamma_\lambda^+(x)$ la λ-*semiórbita positiva* con punto inicial x:

$$\gamma_\lambda^+(x) := \{F_\lambda^s(x) | s \geqslant 0\} = \{(xs)_\lambda \mid s \geqslant 0\}.$$

También, fijamos un cierto valor del parámetro $\lambda_0 \in \Lambda$, considerando F_{λ_0} como *no perturbado* y $F_\lambda, \lambda \neq \lambda_0$, como *perturbado* con respecto a F_{λ_0}.

Denotamos la $\varepsilon-$*vecindad* $(\varepsilon > 0)$ de un punto $x \in X$, del conjunto $S \subset X$, o λ_0, por $B_\varepsilon(x)$, $B_\varepsilon(S)$ o $B_\varepsilon(\lambda_0)$ respectivamente:

$$B_\varepsilon(x) := \{x' \in X \mid d(x, x') < \varepsilon\},$$

$$B_\varepsilon(S) := \{x' \in X \mid d(x', S) < \varepsilon\},$$

$$B_\varepsilon(\lambda_0) := \{\lambda \in \Lambda \mid \rho(\lambda, \lambda_0) < \varepsilon\},$$

donde

$$d(x', S) := \inf\{d(x, x') \mid x \in S\}.$$

La cerradura de un conjunto M será denotado por $\overline{M}$.

En el presente trabajo supondremos que existe un conjunto compacto no vacío $M \subset X$ el cual es positivamente invariante bajo F_{λ_0}, o *positivamente* λ_0-*invariante*, es decir

$$\gamma_{\lambda_0}^+(M) := \bigcup\{\gamma_{\lambda_0}^+(x) \mid x \in M\} = M.$$

En muchos de los casos M consiste de un solo punto de equilibrio o punto de reposo (en el sentido de la definición 2.13 posterior).

La familia de sistemas (X, T, Λ, F) puede también interpretarse como un solo sistema (semi-)dinámico $(\tilde{X}, T, \tilde{F})$, o simplemente por $\tilde{F}$, sobre el espacio producto

$$\tilde{X} := X \times \Lambda,$$

donde $\tilde{F} : \tilde{X} \times T \to \tilde{X}$, con la propiedad especial de que $\tilde{x} = (x, \lambda)$, $t \in T$ implica
$$\tilde{F}^t(\tilde{x}) = (F_\lambda^t(x), \lambda) \qquad (t \in T).$$

La semiórbita positiva comenzando en $\tilde{x} = (x, \lambda)$ entonces esta dada por
$$\tilde{\gamma}^+(\tilde{x}) = \gamma_\lambda^+(x) \times \{\lambda\}.$$

La distancia entre dos puntos $\tilde{x_1} = (x_1, \lambda_1)$ y $\tilde{x_2} = (x_2, \lambda_2)$ de $\tilde{X}$ se define como
$$\tilde{d}(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) = \tilde{d}((x_1, \lambda_1), (x_2, \lambda_2)) := \max\{d(x_1, x_2), \rho(\lambda_1, \lambda_2)\}.$$

Demostremos que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ es un espacio métrico.

1) $\tilde{d}(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) \geqslant 0$.
Sabemos que $d(x_1, x_2) \geqslant 0$ y $\rho(\lambda_1, \lambda_2) \geqslant 0$; entonces $\max\{d(x_1, x_2), \rho(\lambda_1, \lambda_2)\} \geqslant 0$, por lo tanto $\tilde{d}(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) \geqslant 0$.

2) (conmutatividad)
$\tilde{d}(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) = \max\{d(x_1, x_2), \rho(\lambda_1, \lambda_2)\} = \max\{d(x_2, x_1), \rho(\lambda_2, \lambda_1)\} = \tilde{d}(\tilde{x}_2, \tilde{x}_1)$, pues d y ρ son conmutativas.

3) (desigualdad del triángulo). Como sabemos que $d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ y $\rho(\lambda_1, \lambda_3) \leqslant \rho(\lambda_1, \lambda_2) + \rho(\lambda_2, \lambda_3)$ y usando el hecho de que en general $\max(a + b, c + d) \leqslant \max(a, c) + \max(b, d)$ pues $\max(a, c) \geqslant a$ y $\max(a, c) \geqslant c$, $\max(b, d) \geqslant b$ y $\max(b, d) \geqslant d$ por lo que $\max(a, c) + \max(b, d) \geqslant (a + b)$ y $\max(a, c) + \max(b, d) \geqslant (c, d)$, entonces se tiene que
$$\begin{aligned}\tilde{d}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) &= \max\{d(x_1, x_3), \rho(\lambda_1, \lambda_3)\}\\ &\leqslant \max\{d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3), \rho(\lambda_1, \lambda_2) + \rho(\lambda_2, \lambda_3)\}\\ &\leqslant \max\{(d(x_1, x_2), \rho(\lambda_1, \lambda_2)\} + \max\{d(x_2, x_3), \rho(\lambda_2, \lambda_3)\}\\ &= \tilde{d}(\tilde{x_1}, \tilde{x_2}) + \tilde{d}(\tilde{x_2}, \tilde{x_3}),\end{aligned}$$
por lo tanto $(\tilde{X}, \tilde{d})$ es un espacio métrico. □

La ε-vecindad de puntos $\tilde{x}$ y conjuntos $\tilde{S}$ en $\tilde{X}$, denotados por $\tilde{B}_\varepsilon(\tilde{x})$ y $\tilde{B}_\varepsilon(\tilde{S})$, respectivamente, se definen análogamente como en X:
$$\tilde{B}_\varepsilon(\tilde{x}) := \{\bar{x} \in \tilde{X} \mid \tilde{d}(\tilde{x}, \bar{x}) < \varepsilon\},$$

$$\tilde{B}_\varepsilon(\tilde{S}) := \{\bar{x} \in \tilde{X} \mid \tilde{d}(\bar{x}, \tilde{S}) < \varepsilon\},$$

donde

$$\tilde{d}(\tilde{y}, \tilde{S}) = \inf\{\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid \tilde{x} \in \tilde{S}\}.$$

En particular,

$$\tilde{B}_\varepsilon(\tilde{M}) = B_\varepsilon(M) \times B_\varepsilon(\lambda_0),$$

donde $\tilde{M} = M \times \{\lambda_0\}$.

Los filtros de vecindades de M, λ_0 y $\tilde{M}$ se denotarán por $\mathcal{V}$, $\mathcal{N}$ y $\tilde{\mathcal{V}}$, respectivamente.

CAPÍTULO 2

Estabilidad y Atracción.

2.1. Estabilidad

El conjunto M se llama λ_0-*estable* si y solo si

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) \qquad \gamma^+_{\lambda_0}(B_\delta(M)) \subset B_\varepsilon(M).$$

La *estabilidad* de $\tilde{M}$ [con respecto al sistema $\tilde{F}$] se define análogamente:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0) \qquad \tilde{\gamma}^+(\tilde{B}_\delta(\tilde{M})) \subset \tilde{B}_\varepsilon(\tilde{M}),$$

o explícitamente,

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall\lambda \in B_\delta(\lambda_0)) \qquad \gamma^+_\lambda(B_\delta(M)) \subset B_\varepsilon(M). \tag{2.1}$$

Definición 2.1.- El conjunto M es Λ-*totalmente estable* si y solo si (2.1) se cumple.

2.2. Atracción

Denotemos por $L^+_\lambda(x)$ el *conjunto límite positivo* (o $\omega-$*límite*) de x con respecto al sistema F_λ (en el sentido de la Definición 2.15 posterior).

Definición 2.2.- Un conjunto compacto M es llamado $\lambda-$*atractor débil* si y sólo si, existe una vecindad U_λ de M tal que

$$(\forall x \in U_\lambda) \qquad L^+_\lambda(x) \cap M \neq \emptyset. \tag{2.2}$$

El conjunto de todos los puntos x con esta propiedad es llamada la *región de $\lambda-$atracción débil* de M y será denotada por $A^w_\lambda(M)$. Si, en lugar de (2.2), la condición más fuerte

$$(\forall x \in U_\lambda) \qquad \emptyset \neq L^+_\lambda(x) \subset M \tag{2.3}$$

se cumple, M es llamado un *$\lambda-$atractor*, y el conjunto de todos los puntos que satisfacen la relación de inclusión en (2.3) es llamada la *región de $\lambda-$atracción* de M y será denotada por $A_\lambda(M)$.

La *región de $\lambda-$atracción* de $M \times \Lambda^*$, $\widetilde{A}(M \times \Lambda^*)$, la definimos como el conjunto de todos los puntos $(x, \lambda) \in \widetilde{X}$ tales que x satisface (2.3) y $\lambda \in \Lambda^*$. Análogamente se define la *región de $\lambda-$atracción débil*, $\widetilde{A}^w$.

El supremo de todos los números r tales que $B_r(M) \subset A^w_\lambda(M)$ será llamado *radio de atracción débil* de M denotado por $r^w_\lambda(M)$. El *radio de atracción* de M, $r_\lambda(M)$, se define de manera similar.

Definición 2.3.- Sea Λ^* un subconjunto de Λ. Una familia de conjuntos $\{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^*\}$ es llamada una *familia de equiatractores débiles con respecto a* Λ^* si y solo si existe un $\eta > 0$ tal que $r^w_\lambda(M_\lambda) > \eta$ se cumple para todo $\lambda \in \Lambda^*$. En particular, si todo M_λ coincide con M, llamamos a M *equiatractor débil con respecto al conjunto* Λ^*.

Una *familia de equiatractores* se define análogamente.

Ejemplo 2.4.- Considere la familia de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 - \lambda),$$

eligiendo $X = \mathbb{R}$, $M = M_\lambda = \{0\}$, $\Lambda = \mathbb{R}^+$, $\lambda_0 = 0$. Aquí M es un atractor para todo $\lambda > 0$, pero no es un equiatractor, porque las regiones de atracción se encogen a M cuando λ tiende a λ_0 (para $\lambda = \lambda_0$, M no es ni atractor ni atractor débil, ver figura 2.1).

Ejemplo 2.5.- Ahora considere la familia de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x,$$

definiendo $X = \mathbb{R}$, $M = M_\lambda = \{0\}$, $\Lambda = \mathbb{R}^+$, $\lambda_0 = 0$. M es un atractor global para todo $\lambda > 0$, así M es obviamente un equiatractor con respecto a $(0, \infty)$ (Para $\lambda = \lambda_0(= 0)$, M no es ni atractor ni atractor débil, ver figura 2.2).

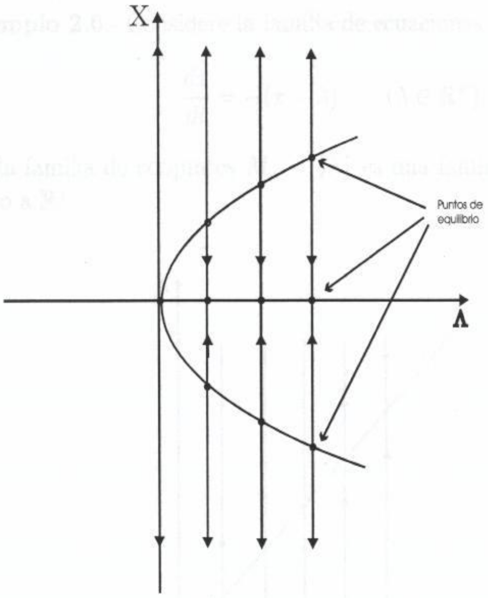

Figura 2.1: Ilustración del encogimiento de las regiones de atracción cuando $\lambda \to \lambda_0$.

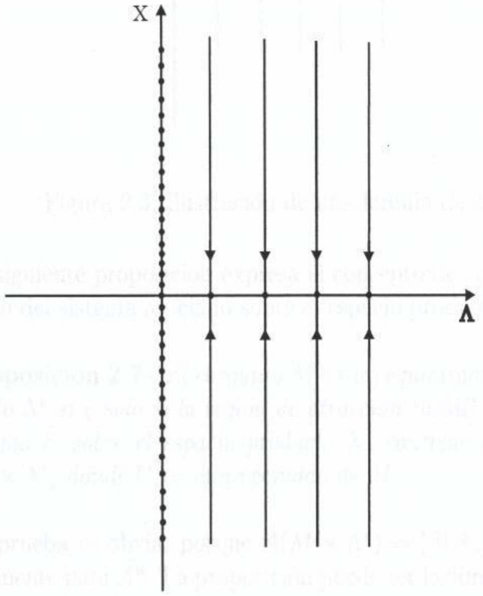

Figura 2.2: Ejemplo de una familia de equiatractores [con respecto a $\Lambda^* = (0, \infty)$].

Ejemplo 2.6.- Considere la familia de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -(x - \lambda) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^+),$$

donde la familia de conjuntos $M_\lambda = \{\lambda\}$ es una familia de equiatractores con respecto a $\mathbb{R}^+$.

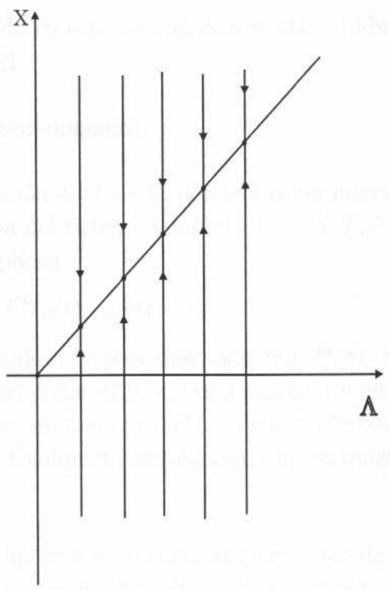

Figura 2.3: Ilustración de una familia de equiatractores

La siguiente proposición expresa el concepto de equiatracción (débil) en el contexto del sistema asociado sobre el espacio producto $(\tilde{X}, T, \tilde{F})$.

Proposición 2.7.- *El conjunto M es un equiatractor (débil) con respecto al conjunto Λ^* si y solo si la región de atracción (débil) de $M \times \Lambda^*$, con respecto al sistema $\tilde{F}$ sobre el espacio producto $\tilde{X}$, contiene un conjunto de la forma $\tilde{U} = U \times \Lambda^*$, donde U es una vecindad de M.*

La prueba es obvia, porque $\tilde{A}(M \times \Lambda^*) = \bigcup\{A_\lambda(M) \times \{\lambda\} \mid \lambda \in \Lambda^*\}$, y similarmente para $\tilde{A}^w$. La proposición puede ser fácilmente extendida a familias de equiatractores (débiles).

Observación 2.8.- El sistema $\tilde{F}$ no admite atractores o atractores débiles (porque λ es constante a lo largo de soluciones por lo cual las soluciones de

$\tilde{F}$ no se pueden acercar a $\tilde{M}$). Sin embargo, podemos hablar de *regiones de atracción (débil),* aunque ellas no sean vecindades de los conjuntos respectivos.

2.3. Conceptos Concernientes a Sistemas Semi-dinámicos.

La terminología introducida en esta sección es tomada del libro [8], con la excepción de la Definición 2.21.

Sea (X, T, F) un sistema semidinámico.

Definición 2.9.- Una función $\phi : I \to X$, donde I es un intervalo no vacío de $\mathbb{R}$, es llamada una *solución* del sistema semidinámico (X, T, F) si y solo si $t \in I$, $s \in \mathbb{R}^+$, y $t + s \in I$ implican

$$F^s(\phi(t)) = \phi(t + s).$$

El intervalo I es el *dominio* de ϕ y será denotado por $\mathcal{D}(\phi)$. Si $x \in X$ y $\mathcal{D}(\phi) = \mathbb{R}^+$, la solución (única) ϕ con $\phi(0) = x$ es llamada el *movimiento positivo a través de x;* su rango es denotado por $\gamma^+(x)$ de acuerdo con la notación introducida en el Capítulo 1. Cualquier solución con x en su rango es llamada una *solución a través de x*.

Definición 2.10.- Una solución $\hat{\phi}$ es llamada una *extensión* de una solución ϕ si y solo si $\mathcal{D}(\hat{\phi}) \supset \mathcal{D}(\phi)$ y $\hat{\phi} = \phi$ sobre $\mathcal{D}(\phi)$. Una solución ϕ es llamada *maximal* si para cualquier extensión $\hat{\phi}$ de ϕ tenemos $\mathcal{D}(\hat{\phi}) = \mathcal{D}(\phi)$.

Proposición 2.11.- ([8], Cap. I, Teorema 4.4) *Para cada $x \in X$ existe una solución maximal a través de x.*

Demostración. Sea $\widetilde{\phi}$ una solución a través de x, tal que $\mathcal{D}(\widetilde{\phi}) = \mathbb{R}^+$. Probaremos como extender esta solución a una solución maximal. Para ello, definamos un conjunto parcialmente ordenado de la siguiente manera. Consideremos la colección de todas las soluciones a través de x, definiendo la relación transitiva y reflexiva (preorden) $\prec$, de tal forma que $\phi \prec \psi$ si y solo si ψ es una extensión de ϕ. Ahora, supongamos que $\{\phi_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ es una cadena (conjunto totalmente ordenado por $\prec$) de soluciones a través de x. Sea $I = \cup\{\mathcal{D}(\phi_\beta) : \beta \in \Gamma\}$ y definimos

$$\phi : I \to X,$$

por

$$\phi(t) = \phi_\beta(t), \qquad t \in \mathcal{D}(\phi_\beta).$$

Notemos que $\phi(t)$ esta bien definida y que realmente es una solución a través de x, con $\mathcal{D}(\phi) = I$. Así, ϕ es una cota superior para la familia $\{\phi_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$. Por el lema de Zorn, se tiene que $\widetilde{\phi}$ admite una extensión maximal a través de x. $\square$

Definición 2.12.- Una solución maximal se llama *principal* si y solo si su dominio es $\mathbb{R}$.

Definición 2.13.- El punto x es llamado *crítico*, o un *punto de equilibrio* o *punto de reposo* si y solo si $\gamma^+(x) = \{x\}$.

Definición 2.14.- Una *órbita* a través de x es el rango de una solución maximal a través de x. Una órbita es llamada *principal* si la correspondiente solución es principal.

Definición 2.15.- Un conjunto $M \subset X$ se llama *positivamente invariante*, si y solo si para cada $x \in X$, $\gamma^+(x) \subset M$ se cumple. (Esta definición obviamente implica la definición de invariancia positiva de un conjunto la cual aparece en el Capítulo 1.) El conjunto M es *invariante* si M y $X \setminus M$ son ambos positivamente invariantes.

Proposición 2.16.- ([8], Cap. II, Lema 2.4). *La cerradura de un conjunto positivamente invariante es positivamente invariante. La unión e intersección de conjuntos positivamente invariantes son positivamente invariantes.*

Demostración: Sea M un conjunto positivamente invariante y sea $x \in \overline{M}$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ en M tal que $x_n \to x$. Como M es positivamente invariante, tenemos que para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $x_n t \in M$ para cada n. Como $x_n t \to xt$, tenemos $xt \in \overline{M}$, por lo que $\overline{M}$ es positivamente invariante.

Sea $A = \bigcup M_\kappa$, donde cada M_κ es positivamente invariante. Sea $x \in A$, entonces $x \in M_i$ para algún i, entonces $\gamma^+(xt) \in M_i$, pues M_i es positivamente invariante, por lo tanto $xt \in A$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, pues $M_i \subset A$, por lo tanto A es positivamente invariante.

Ahora sea $B = \bigcap M_\kappa$; si $x \in B$ entonces $x \in M_i$ para cada i entonces $xt \in M_i$ para todo i, $t \in \mathbb{R}^+$, lo cual implica $xt \in B$, entonces B es también positivamente invariante. $\square$

Definición 2.17.- Para $x \in X$ el conjunto $H^+(x) := \overline{\gamma^+(x)}$, es llamado la *envolvente* o la *cerradura de la semiórbita positiva*. Si $H^+(x)$ es compacto, el correspondiente movimiento positivo es llamado *compacto*.

Definición 2.18.- Un conjunto $M \subset X$ es llamado *débilmente invariante*, si y solo si para cada punto $x \in X$ existe una órbita a través de x la cual es un subconjunto de M.

Debido a la Proposición 2.11, invariancia implica invariancia débil, la cual implica invariancia positiva.

Definición 2.19.- Si $\emptyset \neq S \subset X$, definimos el *conjunto límite positivo* (o *ω-límite*) $L^+(S)$ de S como el conjunto de los límites de todas las sucesiones convergentes de la forma $F^{t_k}(x_k)$, donde $x_k \in S$ y $t_k \to \infty$. Si S consiste de un solo punto x, este concepto se reduce a la noción usual de conjunto límite de un punto x.

Definición 2.20.- El conjunto $E \subset X$ *atrae el conjunto* $A \subset X$ *uniformemente* si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\tau > 0$ tal que $F^{[\tau,\infty)}(A) \subset B_\varepsilon(E)$.

Definición 2.21.- El sistema (X, T, F_λ) $(\lambda \in \Lambda)$ es *asintóticamente compacto* (abreviado *AC*) *sobre un conjunto* $W \subset X$ si y solo si para cada par de sucesiones $x_{\mathbb{N}} \subset W$, $t_{\mathbb{N}} \subset T$ tal que $t_n \to \infty$, la sucesión $(F_\lambda^{t_n}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente.

Proposición 2.22.- *Sea $(X, \mathbb{R}^+, F)$ un semigrupo continuo o sistema semidinámico de clase AC sobre algún conjunto $W \subset X$, y suponiendo que $S \subset X$, $\gamma^+(S) \subset W$. Entonces $L^+(S)$ es no vacío, positivamente invariante, compacto y atrae S uniformemente.*

Demostración:

i)$L^+(S) \neq \emptyset$.
De la definición 2.19, tenemos que el conjunto S debe ser distinto del conjunto vacío. Sea $x \in S$, por hipotesís, $\gamma^+(x) \subset W$. Por otro lado, los conjuntos límites, $L^+(x)$, $x \in S$

$$L^+(x) = \{y \in X / F^{t_n}(x) \to y, t_n \to \infty\},$$

son no vacíos, debido a la propiedad AC sobre W. Tomamos las sucesiones $x_n = x$ (constante), $t_{\mathbb{N}} = t_n \to \infty$, entonces $F^{t_n}(x)$ admite una subsucesión convergente, por lo cual $L^+(x)$ es distinto del vacío, para cada $x \in S$. Con lo que concluimos que $L^+(S) \neq \emptyset$.

ii)$L^+(S)$ es positivamente invariante.
Sea $y \in L^+(S)$, por la propiedad AC, todos los movimientos $\gamma^+(x)$ son relativamente compactos, para $x \in S$. Sean x_n, t_n sucesiones en S y $\mathbb{R}^+$ respectivamente, donde $t_n \to \infty$, tales que

$$x_n t_n = (F^{t_n}(x_n)) \to y.$$

(Esta sucesión reemplaza a la red (xt_α) considerada en la demostración del teorema 3.5, Cap II de [8], con lo que se prueba la invariancia positiva de $L^+(S)$).
iii)$L^+(S)$ compacto.
Esta propiedad es inmediata usando la propiedad AC del sistema.
iv) $L^+(S)$ atrae S uniformemente.
Supongamos que $L^+(S)$ no atrae S uniformemente. Elegimos una sucesión x_n de S y una sucesión t_n de $\mathbb{R}^+$ tal que $t_n \to \infty$ y $d(F^{t_n}(x_n), L^+(S)) \geqslant \varepsilon > 0$, para algún ε. Por la propiedad AC, el conjunto $\{F^{t_n}(x_n)\}$ posee una subsucesión convergente cuyo límite tiene distancia mayor o igual que ε de $L^+(S)$, por lo que la distancia entre $L^+(S)$ y $\{F^{t_n}(x_n)\}$ es cero, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $L^+(S)$ atrae S uniformemente.□

Cuando uno de los conceptos definidos aquí es aplicado a un sistema específico F_λ, se agrega el prefijo $\lambda-$.

CAPÍTULO 3

Bifurcación

Definición 3.1.- Un conjunto compacto λ_0-invariante M se dice que sufre una *bifurcación crítica* (o *bifurcación vertical)* en λ_0 si es invariante y aislado de conjuntos cerrados débilmente invariantes para algunos valores de λ acumulándose en λ_0, y cada vecindad de M contiene un conjunto cerrado débilmente λ_0-invariante disjunto de M.

[Un conjunto M es *débilmente invariante* si por cada uno de sus puntos existe una orbita maximal, (i.e., la cual no puede ser extendida) contenida en el conjunto. En el caso de un sistema dinámico, el concepto se reduce a la invariancia.- M es *aislado de conjuntos cerrados débilmente invariantes* si existe una vecindad U de M la cual no contiene un subconjunto cerrado débilmente invariante de U que no este contenido en M.]

Definición 3.2.- Dada una familia de sistemas (semi-)dinámicos, (X, T, Λ, F), con las notaciones del Capítulo 1, y suponiendo que existe un conjunto compacto, conexo (no vacío) $M \subset X$, el cual es positivamente λ_0-invariante. Sea Λ^* un subconjunto de Λ con λ_0 como un punto de acumulación. Decimos que M sufre una *bifurcación extracrítica* en λ_0 con respecto al conjunto Λ^*, si para cualquier par de vecindades U de M y N de λ_0, y algún $\lambda \in N \cap \Lambda^*, \lambda \neq \lambda_0$ existen dos conjuntos compactos no vacíos débilmente λ-invariantes M_λ y M_λ' tales que $M_\lambda \subset U$, $M_\lambda' \subset U$ y $M_\lambda' \cap M_\lambda = \emptyset$, y si, además, no haya bifurcación crítica para $\lambda \neq \lambda_0$ en cierta vecindad de λ_0.

Esta definición es una variante de la de "bifurcación"en [6]. Sólo se han agregado las hipótesis de conexidad del conjunto M y que no haya bifurcación crítica en cierta vecindad de λ_0.
Además se ha optado por denominarla como "bifurcación extracrítica"para

evitar confusiones con otros posibles conceptos de bifurcación, como los que aparecen en las siguietes situaciones comentadas por el Dr. Santiago López de Medrano Sánchez.

El primer ejemplo es el siguiente: Dado un sistema con un conjunto invariante compacto M, donde M es la unión de dos componentes conexas y considerando la familia constante formada por ese sistema (para todos los valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$), de acuerdo a la definición de bifurcación de [6], se tendría una bifurcación , pero en realidad no se bifurca nada, es por ello que en la definición 3.2 se incluye la hipótesis de que M debe ser conexo.

Pasemos ahora a la siguiente situación. Se puede tener un sistema con un conjunto invariante compacto y conexo, por ejemplo un punto crítico y que mediante una perturbación el conjunto cambie su topología sin dejar de ser conexo, o, simplemente desaparezca, esto representaría un cambio cualitativo que se podría considerar una "bifurcación"del sistema. Pero esto no sería una bifurcación extracrítica de acuerdo a la definición 3.2.
Otro ejemplo sería el de un sistema con un centro ($\lambda = \lambda_0$), que con una perturbación se convierta en un punto atractor ($\lambda \neq \lambda_0$). Esta situación queda fuera de la definición 3.2, por tratarse de una bifurcación crítica.

Si Λ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^+$ (en general un conjunto ordenado), la bifurcación extracrítica es llamada *subcrítica*, o *ultracrítica*, dependiendo si el conjunto Λ^* sea una semivecindad a la izquierda o a la derecha de λ_0.
Definición 3.3.- Un conjunto $C \subset X$ es una $\lambda-$*contracción* ($\lambda \in \Lambda$) si y sólo si $F_\lambda^t(C)$ esta contenido en el interior de C, para cada $t > 0$.

Teorema 3.4.- *Dada una familia continua de sistemas (semi-)dinámicos* (X, T, Λ, F), *admitiendo un conjunto compacto* $M \subset X$, *el cual es (positivamente)* λ_0-*invariante, y suponiendo que las siguientes condiciones se cumplen.*

1. Cada sistema $F_\lambda, (\lambda \in \Lambda)$ *es asintóticamente compacto sobre cierta vecindad* W *de* M.

2. El conjunto $\tilde{M} := M \times \{\lambda_0\}$ *es estable bajo el sistema asociado* $(\tilde{X}, T, \tilde{F})$ *definido sobre el espacio producto* $\tilde{X}$. Esta condición es expresada también diciendo que M es $\Lambda -$ *totalmente estable.*

3. Para cierto conjunto $\Lambda^* \subset \Lambda$ *con* λ_0 *como un punto de acumulación, no existe ninguna familia* $\{M_\lambda\}$ *de equiatractores débiles (en el sentido de la definición 2.3) con respecto a ninguna intersección* $\Lambda_\delta^* := B_\delta(\lambda_0) \cap \Lambda^*, \delta > 0$

con la propiedad de que la distancia maximal de M_λ a M tiende a cero cuando $\lambda \to \lambda_0$. En particular, en el caso de que M sea positivamente λ-invariante para todo $\lambda \in \Lambda$, M no es un equiatractor (débil) con respecto a ningun conjunto Λ^*_δ.

Entonces M sufre una bifurcación en λ_0 con respecto al conjunto Λ^*. Si más aun, para cada $\varepsilon > 0$ y $\lambda \in \Lambda^*$, $\lambda \neq \lambda_0$ pero suficientemente cercano a λ_0, $B_\varepsilon(M)$ contiene un conjunto $\lambda-$contractivo $C_{\lambda,\varepsilon}$, entonces los conjuntos M_λ y M'_λ pueden escogerse de tal forma que uno de ellos es λ-asintóticamente estable [6].

Esta última condición se cumple en los dos casos donde M es λ_0-asintóticamente estable o λ_0-totalmente estable [2], porque en estos casos cada vecindad de M contiene conjuntos λ-asintóticamente estables [9],[16], respectivamente [10], para λ cercano a λ_0, y estos tienen sistemas de vecindades λ-contractivas. Que la condición no implica ninguno de los dos casos, cuando M es λ_0-totalmente estable o λ_0-asintóticamente estable, se ilustra con el ejemplo $\frac{dx}{dt} = \lambda x(x^2 - \lambda)$. Ver figura 3.1.

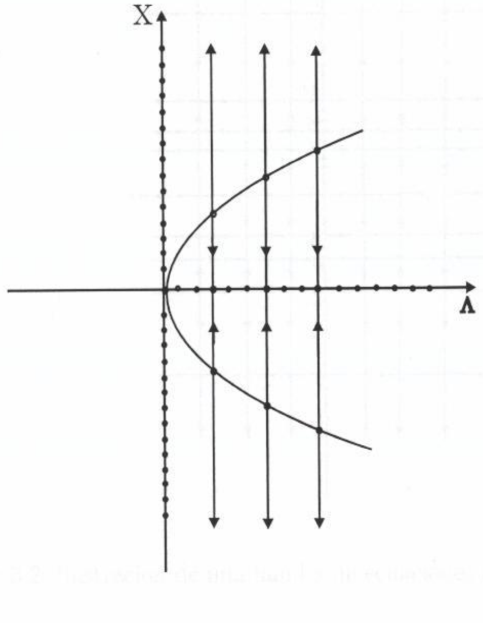

Figura 3.1:

Que no es redundante, se prueba con la siguiente familia de sistemas en $\mathbb{R}$.Consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.5.- Considere la familia de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \lambda^2 x \sin^2(\pi/x), & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}$, $M = \{0\}$, $\Lambda = \mathbb{R}$. Para $\lambda = 0$ todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ son de reposo. Para $\lambda > 0$,

$$x_n = \pm n^{-1}, n \in \mathbb{N}$$

son puntos de reposo (ver figura 3.3). Este ejemplo cae dentro de la definición 3.1. Eligiendo $M = \{0\}$, $\Lambda^* = \mathbb{R}$, $\lambda_0 = 0$, se pueden escoger como conjuntos M y M'_λ, los que consisten del origen en el caso de M, y, por ejemplo puntos de reposo $x_\lambda = [\frac{1}{\lambda}]^{-1}$. Este satisface las condiciones (1), (2), (3) pero no contiene puntos o conjuntos asintóticamente estables para cualquier valor de λ(como se puede ver en la figura). Se puede escoger por ejemplo, $M_\lambda = \{0\}$, $M'_\lambda = \{[\frac{1}{\lambda}]^{-1}\}$.Ver figura 3.2.

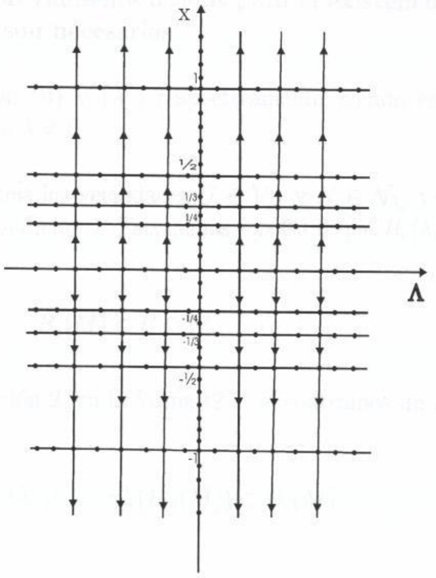

Figura 3.2: Ilustracion de una familia de ecuaciones que no contiene conjuntos A.S.

En el siguiente ejemplo la bifurcación es obvia, pero este representa un caso donde no se satisfacen las hipótesis de cualquiera de los resultados previos mientras que aquellas del teorema precedente se cumplen.

Ejemplo 3.6.- Considere la familia de ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda^2 x^2 (x - \lambda^2),$$

definiendo $X = \Lambda = \Lambda^* = \mathbb{R}$, $M = \{0\}$, $\lambda_0 = 0$ (Ver figura 3.3). Obviamente, es suficiente considerar solamente valores no negativos de λ. Las condiciones 1 y 2 ciertamente se cumplen. Además, las regiones de $\lambda-$atracción de $M_\lambda := \{\lambda^2\}$ (las cuales coinciden con aquellas de atracción débil) son $(0, \infty)$, aquí $\{M_\lambda\}$ no es una familia de equiatractores(débiles) con respecto a ninguna vecindad de λ_0 [el radio de atracción de M_λ(sec. 2) siendo λ^2], y M no es un atractor (débil). Así las hipótesis del teorema se cumplen. Por otro lado, $M'_\lambda = M$ no es ni λ_0-asintóticamente estable (y no siempre totalmente estable, una condición usada en [2]) ni tampoco completamente inestable para $\lambda \neq 0$ (como en el caso de [6] tampoco falla al ser un atractor(débil) para $\lambda > 0$, una condición usada en [13], corolario 4.16). Finalmente, el Teorema 4.13 de tal artículo no se aplica en el caso presente, porque este supone que el conjunto en cuestión es un λ_0-atractor. En otras palabras, el ejemplo muestra que **ninguna de las condiciones suficientes previamente usadas para la existencia de una bifurcación extracrítica son necesarias.**

Los conjuntos M_λ y M'_λ son $\{0\}$ y $\{\lambda^2\}$ respectivamente, siendo este último asintóticamente estable para $\lambda \neq 0$.

Prueba del teorema. Dadas las vecindades $U \in \mathcal{V}_M$ y $N \in \mathcal{N}_{\lambda_0}$ y sea W la vecindad que figura en la condición 1. Escogemos $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\lambda_0) \subset N$ y

$$B_\varepsilon(M) \subset U \cap W \tag{3.1}$$

se cumple. Usando la condición 2, en la forma (2.1) encontramos un $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ tal que

$$(\forall \lambda' \in B_{\varepsilon'}(\lambda_0)) \qquad \gamma^+_{\lambda'}(B_{\varepsilon'}(M)) \subset B_\varepsilon(M). \tag{3.2}$$

Después escogemos un $\varepsilon'' \in (0, \varepsilon')$. Aplicando la condición 2 nuevamente, encontramos $\delta \in (0, \varepsilon'')$ tal que

$$(\forall \lambda \in B_\delta(\lambda_0)) \qquad \overline{\gamma^+_\lambda(B_\delta(M))} \subset B_{\varepsilon''}(M). \tag{3.3}$$

Ahora definimos los conjuntos M_λ, $\lambda \in \Lambda^*_\delta = B_\delta(\lambda_0) \cap \Lambda^*$, como sigue:

$$M_\lambda = L^+_\lambda(B_{\delta_\lambda}(M)), \tag{3.4}$$

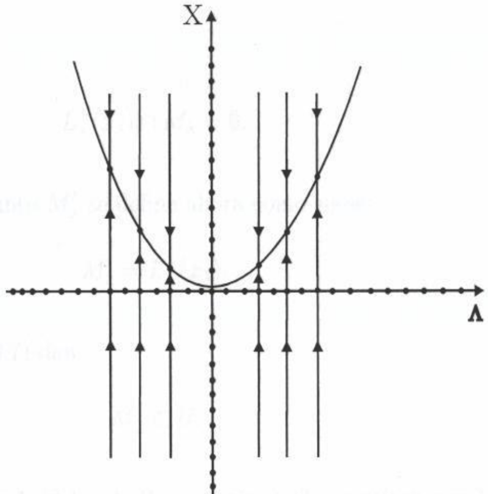

Figura 3.3:

donde $\delta_\lambda := \rho(\lambda, \lambda_0)$. Los conjuntos límite son no vacíos y tienen las propiedades establecidas en la Proposición 2.22 porque de (3.1) y la condición 1, en particular son compactos y débilmente invariantes. Más aun, (3.1), (3.3) y (3.4) implican

$$(\forall \lambda \in B_\delta(\lambda_0)) \qquad M_\lambda \subset B_{\varepsilon''}(M) \subset U. \tag{3.5}$$

(Notemos que $\delta_\lambda < \delta$.)

A continuación fijamos un número $\eta \in (0, \varepsilon' - \varepsilon'')$. Debido a la condición 3, la familia $\{M_\lambda | \lambda \in \Lambda_\delta^*\}$ no puede ser una familia de equiatractores (débiles). En efecto, ya que $\delta_\lambda \to 0$ como $\lambda \to \lambda_0$, la condición 2 implica que la distancia maximal de M_λ a M tiende a cero. En consecuencia existe un $\lambda \in \Lambda_\delta^*$ tal que, con la notación introducida en el Capítulo 2,

$$r_\lambda^w(M_\lambda) < \eta, \tag{3.6}$$

implicando, por (3.5), la existencia de un punto

$$x_\lambda \in B_{\varepsilon'}(M) \tag{3.7}$$

con la propiedad

$$L_\lambda^+(x_\lambda) \cap M_\lambda = \emptyset. \tag{3.8}$$

El correspondiente conjunto M'_λ se define ahora como sigue:

$$M'_\lambda = L_\lambda^+(x_\lambda). \tag{3.9}$$

Entonces (3.1),(3.2) y (3.7) dan

$$M'_\lambda \subset U. \tag{3.10}$$

Nuevamente, la condición 1, (3.1) y la Proposición 2.22 garantizan que M'_λ es no vacío, compacto y débilmente invariante. Más aun, por (3.8) y (3.9), M_λ y M'_λ son disjuntos. Ya que las familias $\{M_\lambda\}$ y $\{M'_\lambda\}$ incluyen elementos contenidos en vecindades arbitrariamente pequeñas U por (3.5) y (3.10), y los correspondientes valores λ están contenidos en vecindades arbitrariamente pequeñas N, la parte del teorema, en lo que se refiere a la existencia de la bifurcación, se sigue.
Para probar la existencia de conjuntos asintóticamente estables contando con conjuntos contractivos, tomamos, para las mismas $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ y δ como en la prueba precedente, y λ suficientemente cercano a λ_0 para garantizar la existencia de un conjunto $\lambda-$contractivo $C_{\lambda,\varepsilon''}$ en $B_{\varepsilon''}(M)$. Definimos $M_\lambda = L^+(C_{\lambda,\varepsilon''})$. Según la Proposición 2.22, M_λ atrae $C_{\lambda,\varepsilon''}$ $\lambda-$uniformemente (i.e. uniformemente con respecto al sistema F_λ); además, $C_{\lambda,\varepsilon''}$ siendo una vecindad de M_λ, atracción $\lambda-$uniforme implica estabilidad $\lambda-$asintótica de M_λ. Ya que $M_\lambda \subset C_{\lambda,\varepsilon''} \subset B_{\varepsilon''}(M)$, la condición (3.5) se cumple (reemplazando δ, si es necesario, por un número más pequeño). De aquí la prueba se sigue como antes.
$\square$

Un ejemplo con las mismas características que el ejemplo 3.4 donde, sin embargo, la existencia de una bifurcación es menos obvia, es el siguiente.

Ejemplo 3.7.- Considere la familia de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x^2(\lambda^3 - x\cos\pi x - x^3)$$

con $X = \mathbb{R}$, $\Lambda = \mathbb{R}^+$ y $M = \{0\}$. Para valores grandes de $|x|$,

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x^5(1 + o(1)),$$

probando que la ecuación define un sistema semidinámico sobre X.

Para $\lambda = 0$ el origen es estable pero no totalmente estable, ni tampoco es un atractor (débil) o repulsor para valores positivos pequeños de λ. En efecto, $\frac{dx}{dt}$ es estrictamente positiva para $\lambda > 0$, $x \neq 0$, pequeño, y estrictamente negativa para $x = \lambda$, a condición de que $0 < \lambda < 1/2$. Esto implica que para cualquier $\lambda \in \Lambda^* := (0, 1/2)$, el intervalo $0 < x < \lambda$ contiene un conjunto $\lambda-$asintóticamente estable M'_λ, que tiene las propiedades especificadas en el teorema. El otro conjunto $\lambda-$invariante, M_λ, es el origen, obviamente disjunto de M'_λ.

CAPÍTULO 4

Conexiones entre Estabilidad Λ-total y otros Tipos de Estabilidad

4.1. Atracción Uniforme.

En lo que sigue, haremos para F_{λ_0} la siguiente suposición concerniente a la *dependencia continua respecto a valores iniciales, uniforme sobre conjuntos acotados*:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall T > 0)(\forall \beta > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in [0,T])(\forall x \in B_\beta(M))$$

$$d(x,x') < \delta \Rightarrow d(F^t_{\lambda_0}(x), F^t_{\lambda_0}(x')) < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Esta condición obviamente implica la suposición 1.1 de [14] la cual difiere de (4.1) solamente en el sentido de que $x \in B_\beta(M)$ es reemplazado por $F^{[0,T]}(x) \subset B_\beta(M)$.

Nuestro propósito es probar que la atracción uniforme implica estabilidad $\Lambda-$total, aplicando el teorema 3.4 de [14] (pag. 297). El marco de este teorema es el siguiente:

Un sistema semidinámico dado sobre un espacio métrico X, junto con dos subconjuntos positivamente invariantes Y y M de X (Y teniendo interior vacío), donde Y es cerrado y M es compacto, y $M \subset Y$. Entonces el sistema semidinámico definido sobre X induce un sistema semidinámico sobre un subespacio (Y, d) [d es la métrica inducida sobre Y].

El conjunto M es llamado un $Y-$*atractor uniforme* si y solo si es un atractor uniforme con respecto al sistema inducido sobre Y.

Y es llamado *estable localmente cercano a* M si y solo si

$$(\exists U \in \mathcal{V})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in B_\delta(M))$$
$$F^{[0,T]}(x) \subset U \Rightarrow F^{[0,T]}(x) \subset B_\varepsilon(Y).$$

En otras palabras, una semiórbita positiva comenzando en $U \cap B_\delta(M)$, mientras permanezca en U, no puede salir de $B_\varepsilon(Y)$.

El teorema 3.4 de [14] establece que *si* M_1 *es un* Y*-atractor uniforme y* Y *es estable localmente cercano a* M_1*, entonces* M_1 *es estable.* Este resultado es probado bajo la Suposición 1.1 mencionada antes. (Denotamos aquí el conjunto M de [14] por M_1 para evitar confusión con la notación usado en este trabajo.)

Para aplicar este resultado a nuestro presente contexto, identificamos el espacio estado de [14] con el espacio producto $\tilde{X} = X \times \Lambda$, el subespacio Y con el subespacio $X \times \{\lambda_0\}$ de $\tilde{X}$, y el conjunto M_1 con $\tilde{M} = M \times \{\lambda_0\}$. (La métrica sobre $\tilde{X}$ fue definida en el Capítulo 1.) Entonces la atracción $Y-$uniforme de M_1 se reduce a la λ_0-atracción uniforme de M (i.e. atracción uniforme con respecto al sistema F_{λ_0}). La estabilidad local, por otro lado, se cumple automáticamente, porque λ es constante a lo largo de las órbitas para el sistema sobre el espacio producto. Finalmente, la estabilidad de M_1 es equivalente a la estabilidad $\Lambda-$total de M. Esta es una consecuencia inmediata de las definiciones correspondientes.

Entonces el teorema 3.4 de [14] da el siguiente.

Teorema 4.1.- *Si M es un λ_0-atractor uniforme, entonces M es $\Lambda-$totalmente estable.*

Corolario 4.2.- *Si la condición 2 del Teorema 3.4 es reemplazada por M siendo un λ_0-atractor uniforme, y F_o satisface la condición de continuidad (4.1), la conclusión del teorema mencionado permanece válida. Este también se cumple en la forma más fuerte si uno de los conjuntos resultando invariante siendo asintóticamente estable, porque bajo bifurcaciones suficientemente pequeñas existe un conjunto asintóticamente estable arbitrariamente cercano al* *conjunto invariante M del sistema no perturbado*([6],[9],[13]).

4.2. Estabilidad Total.

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{4.2}$$

donde f denota una función continua de un espacio lineal normado X sobre si mismo, x una función de clase C^1 de $\mathbb{R}^+$ sobre X. Suponemos que el origen o del espacio X sea un punto de equilibrio de (4.2), $f(o) = o$. La función f está sujeta a pequeñas perturbaciones las cuales pueden interpretarse como pequeñas desviaciones del modelo matemático del objeto del mundo-real a ser modelado. Junto con (4.2) consideramos por lo tanto una familia de ecuaciones "perturbadas",

$$\frac{dx}{dt} = g(x), \tag{4.3}$$

suponiendo que las funciones g tienen la misma propiedad que f y que las soluciones de las ecuaciones (4.2) y (4.3) forman sistemas semidinámicos $(X, \mathbb{R}^+, F_f)$ y $(X, \mathbb{R}^+, F_g)$, respectivamente, con F_f siendo la solución de la ecuación (4.2) satisfaciendo la condición inicial $F_f^0(x) = x$, y F_g análogamente. Denotamos por $\mathcal{G}$ el conjunto de todas las funciones g en la familia de ecuaciones (4.3). Se supone que $f \in \mathcal{G}$.

La distancia entre las funciones f y g con respecto a la $\varepsilon-$vecindad del origen o se define como

$$\rho_\varepsilon(f,g) = sup\{\| f(x) - g(x) \| \quad : \quad \| x \| \leqslant \varepsilon\}, \tag{4.4}$$

siendo ε algún número positivo fijo. El correspondiente espacio métrico sera denotado por $(\mathcal{G}, \rho_\varepsilon)$.

Definición 4.3.- El punto de equilibrio o de (4.2) es *estable $\mathcal{G}-$totalmente* si y solo si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall g \in \mathcal{G} | \rho_\varepsilon(f,g) < \delta)$$

$$\gamma_g^+(B_\delta(o)) \subset B_\varepsilon(o),$$

donde γ_g^+ denota la semiórbita positiva con respecto a (4.3).

Para relacionar este concepto con estabilidad Λ-total (definición 2.1) es necesario introducir una métrica única ρ en $\mathcal{G}$. Para este fin fijamos algún número positivo ε_0 y denotamos ρ_{ε_0} por ρ. Entonces la definición 2.1 puede aplicarse a la familia de sistemas $\{(X, \mathbb{R}^+, F_g) \mid g \in \mathcal{G}\}$, donde $\mathcal{G}$ está dotada con la métrica ρ. En el caso presente, Λ es $(\mathcal{G}, \rho)$, λ_0 es f, λ es g, y M es $\{o\}$. Para evitar una ambiguedad de términos, nos referiremos al concepto definido por (2.1) en el caso presente como *estabilidad* $(\mathcal{G}, \rho) - total$.

Nuestro objetivo inmediato es probar que estabilidad $\mathcal{G}$-total implica estabilidad $(\mathcal{G}, \rho)$-total, para aplicar el Teorema 4.3. En efecto, si o es estable $\mathcal{G}-$totalmente, entonces para cada $\varepsilon > 0$, el cual podemos suponer que sea más pequeño que ε_0, existe un $\delta > 0$ tal que la condición de la definición 4.3 se cumple. Ya que ρ_ε es una función no decreciente de ε, $\varepsilon < \varepsilon_0$, y $\rho = \rho_{\varepsilon_0}$, tenemos

$$\{g \in \mathcal{G} \mid \rho(f,g) < \delta\} \subset \{g \in \mathcal{G} \mid \rho_\varepsilon(f,g) < \delta\}.$$

De esta relación, comparando las definiciones relevantes, obtenemos la siguiente

Proposición 4.4.- *Si el estado de equilibrio o de la ecuación (4.2) es estable $\mathcal{G}$-totalmente en el sentido de la definición 4.3, entonces este es estable $(\mathcal{G}, \rho)-$totalmente, lo cual es equivalente, en la interpretación presente, a la estabilidad $\Lambda-$total del Capítulo 2.*

Esta proposición, junto con el Teorema 3.4, dan el siguiente

Corolario 4.5.-*Bajo las mismas hipótesis de la Proposición 4.4 y del Teorema 3.4, el punto de equilibrio o de la ecuación (4.2) sufre una bifurcación con respecto a la familia de ecuaciones (4.3).*

Aquí, bifurcación de o con respecto a la familia de ecuaciones (4.3) se entiende como sigue: existe un número $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cualquier par de vecindades U de o y N de f, en el sentido de la métrica ρ_{ε_0}, definida por (4.4), con $\varepsilon = \varepsilon_0$, y alguna $g \in \mathcal{G} \cap N$, $g \neq f$, existen dos conjuntos compactos, débilmente invariantes, no vacíos M_λ y M'_λ, tales que $M_\lambda \subset U$, $M'_\lambda \subset U$ y $M_\lambda \cap M'_\lambda = \emptyset$.

Observación 4.6.-El concepto de estabilidad total usado aquí es aparentemente más débil que el usual, el cual permite perturbaciones dependientes del tiempo. Por lo tanto, nuestro resultado se cumple también si las perturbaciones comprendidas en este sentido más amplio.

En particular, el Corolario 4.5 contiene el resultado principal del artículo de Bertotti et al., [2] el cual establece que si la solución trivial de una familia de ecuaciones diferenciales es totalmente estable para el valor $\mu = 0$ de un parámetro μ y completamente inestable para $\mu > 0$, entonces surge una familia de conjuntos asintóticamente estables bifurcantes. La estabilidad asintótica de conjuntos bifurcantes se sigue del hecho de que un conjunto totalmente estable posee vecindades asintóticamente estables arbitrariamente pequeñas [10], y bajo perturbaciones suficientemente pequeñas surgen conjuntos asintóticamente estables arbitrariamente cercanos a uno del sistema no perturbado [6],[9], [16].

CAPÍTULO 5

Ejemplo de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales.

En el presente capítulo damos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, el cual fue propuesto por el Dr. Juan Hector Arredondo Ruiz, y verificamos que el sistema satisface las hipótesis del teorema 3.4.

PROBLEMA EN LA FRONTERA COMO PROBLEMA DE CAUCHY.
Problema General de Cauchy.- Consideremos la ecuación diferencial general

$$\dot{w} = Aw, \tag{5.1}$$

donde A es un operador actuando en un espacio lineal normado X, y w denota una función diferenciable de $\mathbb{R}^+$ en X. Supongamos que la ecuación (5.1) junto con la condición inicial

$$w(0) = w_0; \tag{5.2}$$

posea una solución (con dominio $\mathbb{R}^+$) que es única.
Si estas condiciones valen para todo $w_0 \in X$, las soluciones del problema de Cauchy, (5.1) con (5.2), con w_0 variando en X, constituyen un *semigrupo de transformaciones de X sobre X, o sistema semidinámico sobre X.*
Para formalizar este, introducimos la función de $\mathbb{R}^+ \times X$ sobre X definida por

$$F^t(w_0) = w(t), \tag{5.3}$$

donde $w(\cdot)$ denota la solución de (5.1) con (5.2).
La función F obviamente satisface los axiomas (I) y (II) del Capítulo 1 [reemplazando F_λ por F].
Para aplicar lo anterior consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, acoplado, que dependen del parámetro λ,

$$u_t = u_{xx} + u - K(u, x, \lambda), (0 < x < \pi)(\lambda \geqslant 0), \tag{5.4}$$

$$v_t = v_{xx} - \lambda v + uf(u), \tag{5.5}$$

donde f se supone que es una función continua acotada en $\mathbb{R}$, y

$$K(u, x, \lambda) := u(u^2 - \lambda^2 \sin^2 x)^2 e^{-u^2}. \tag{5.6}$$

Consideramos condiciones de Dirichlet en la frontera,

$$u(0,t) = u(\pi, t) = 0, \tag{5.7}$$

$$(t \geqslant 0)$$

$$v(0,t) = v(\pi, t) = 0, \tag{5.8}$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{5.9}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant \pi),$$

$$v(y,0) = \psi(y), \tag{5.10}$$

con $\varphi, \psi \in L^2(0,\pi)$.
El problema está bien planteado para $X = \mathcal{H} \times \mathcal{Y}$, donde $\mathcal{H} = \{\varphi \in L^2(0,\pi)\}$, $\mathcal{Y} = \{\psi \in L^2(0,\pi)\}$, donde $L^2(0,\pi)$ es el espacio real de funciones Lebesgue medibles cuadrado integrables, denotando el producto escalar en este espacio por

$$(\varphi, \psi) := \int_0^\pi \varphi(x)\psi(x)dx, \tag{5.11}$$

por simplicidad, en la mayoría de los casos, denotaremos a $L^2(0,\pi)$ por L^2.

La norma en L^2 es

$$\|\varphi\|_{L^2} = \left(\int_0^\pi |\, \varphi(x) \,|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.12}$$

con $\varphi \in L^2$, es decir

$$\int_0^\pi |\, \varphi(x) \,|^2 \, dx < \infty.$$

El espacio Λ de parámetros para este caso, es el conjunto $[0, \infty)$.
Probaremos que con estas hipótesis el sistema de ecuaciones diferenciales parciales, satisface las condiciones del Teorema 3.4, primero demostraremos la siguiente desigualdad.

Paso 1.- Para $\lambda \geqslant 0$, afirmamos que se cumple la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^\pi u^2 dx = \int_0^\pi u u_t dx$$

$$= \int_0^\pi u(u_{xx}+u)dx - \int_0^\pi u^2(u^2-\lambda^2\sin^2 x)^2 e^{-u^2}dx \leqslant 0. \qquad (5.13)$$

Suponiendo que para $t > 0$, $u \in D(A)$, donde

$$D(A) := \{\varphi \in L^2 \mid \varphi, \varphi', \text{ absolutamente continuas}, \varphi'' \in L^2, \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0\},$$

con A el operador autoadjunto sobre $L^2(0,\pi)$

$$A = \frac{d^2}{dx^2} + I.$$

Aquí I es el operador identidad. Este operador tiene un conjunto ortonormal de eigenvectores dados por $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} kx\}_{k=1}^{\infty}$, con el correspondiente conjunto de eigenvalores $\{-k^2+1\}_{k=1}^{\infty}$.

Demostración: Para verificar la desigualdad (5.13), consideremos en general cualquier elemento $\varphi \in D(A)$, escribimos a tal elemento en su desarrollo en serie de Fourier

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin nx,$$

entonces

$$A\varphi = (\frac{d^2}{dx^2} + I)(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(1-n^2)\sin nx. \qquad (5.14)$$

Usando el producto interno en L^2 calculamos $(\varphi, A\varphi)$ para $\varphi \in D(A)$,

$$(\varphi, A\varphi) = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty}(1-n^2)(\varphi_n)^2 dx \leqslant 0,$$

donde hemos usado el hecho de que $(\sin nx, \sin kx) = \frac{\pi}{2}$ si $k = n$, y $(\sin nx, \sin kx) = 0$ si $k \neq n$. Con esto demostramos la desigualdad (5.13).□

Notemos que $u \in D(A)$ si $t > 0$ y en consecuencia

$$\int_0^\pi u(u_{xx}+u)dx = (u, Au).$$

Además, en la ecuación (5.1), para cada λ, (φ,ψ), hacemos $w := (u,v)$. En la ecuación (5.5) tenemos que $v_t = v_{xx}$ si $\lambda = 0$.
A continuación vamos a verificar que las hipótesis del teorema 3.4 se cumplen. En el contexto actual definimos el sistema semidinámico, para cada $\lambda \geqslant 0$, como

$$F_\lambda^t(\varphi,\psi) := (u(\cdot,t), v(\cdot,t))_{(\lambda;\varphi,\psi)},$$

donde $(u,v)_{(\lambda;\varphi,\psi)}$ denota la solución del sistema de ecuaciones (5.4)-(5.10), para una combinación fija de λ, φ, y ψ, además usaremos la siguiente notación $u^t(x) := u(x,t)$ y $u(\cdot,t) := u^t$.

Consideremos los siguientes conjuntos como subespacios de X como sigue;

$$\mathcal{H}_o = \mathcal{H} \times \{0\}, \qquad \mathcal{Y}_o = \{0\} \times \mathcal{Y}.$$

El subespacio $\mathcal{Y}_o$ es $\lambda-$invariante, para $\lambda \geqslant 0$, mientras que $\mathcal{H}_o$ no lo es. El conjunto M del teorema, es tomado como el origen o del espacio X, $o := (o,o)$ y $\lambda_0 = 0$.

Para confirmar la condición 1 del teorema 3.2 (compacidad asintótica local), hacemos primero la siguiente estimación.

Paso 2.- La solución de (5.4)-(5.7)-(5.9) esta dada por

$$u^t = e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-s)A}(K(u^s,\cdot,\lambda)ds, \tag{5.15}$$

Demostración: Para obtener (5.15) se aplica el método de variación de parámetros como en las ecuaciones diferenciales ordinarias. Para verificar que (5.15) satisface (5.4)-(5.7)-(5.9), lo haremos en forma directa, usando que para $\varphi \in L^2(0,\pi)$

$$e^{tA}\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} e^{t(-k^2+1)}\varphi_k \sin kx, \qquad t > 0. \tag{5.16}$$

Notemos que e^{tA} es un semigrupo sobre $\mathbb{R}^+$ generado por A y de (5.14) obtenemos

$$\frac{d}{dt}e^{tA}\varphi = Ae^{tA}\varphi, \qquad t > 0.$$

Derivando (5.15) con respecto a t, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^t}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-s)A}(K(u^s,\cdot,\lambda)ds\right] \\
&= Ae^{tA}\varphi + e^{tA}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^t e^{(t-s)A}(K(u^s,\cdot,\lambda)ds\right] \\
&= A\left[e^{tA}\varphi + \int_0^t e^{(t-s)A}(K(u^s,\cdot,\lambda))ds\right] + K(u^t,\cdot,\lambda) \\
&= Au(x,t) + K(u^t,\cdot,\lambda) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - K(u^t,\cdot,\lambda) \\
&= u_{xx} + u - K(u^t,\cdot,\lambda),
\end{aligned}$$

por lo tanto (5.15) satisface (5.4). Haciendo $x = 0$ en (5.15) obtenemos la condición de frontera (5.7). De la misma forma, si en (5.15) tomamos $t = 0$ se tiene la condición inicial (5.9).□

Ahora consideremos la siguiente sucesión

$$u_n^t := \frac{2}{\pi}(u(t), \operatorname{sen} nx), \tag{5.17}$$

entonces por la identidad de Parseval

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(u_n^t)^2 = \| u \|^2, \tag{5.18}$$

que es la relación que existe entre los coeficientes de Fourier y la función.

Paso 3.- Para $n \geqslant 2$ se cumple la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} u_n = \frac{2}{\pi}(u, \operatorname{sen} nx) &= \frac{2}{\pi}(e^{tA}\varphi, \operatorname{sen} nx) + \frac{2}{\pi}(\int_0^t e^{A(t-s)}Ku(s)ds, \operatorname{sen} nx) \\ &= \frac{2}{\pi}(\varphi, e^{(-n^2+1)t}\operatorname{sen} nx) + \frac{2}{\pi}\int_0^t (Ku(s), e^{(-n^2+1)(t-s)}\operatorname{sen} nx)ds. \end{aligned}$$

Demostración: Para probar esta igualdad, usaremos el hecho que la familia de semigrupos $\{e^{tA}\varphi\}$ satisface

$$e^{tA}\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{t(1-n^2)}\varphi_n \operatorname{sen} nx.$$

Tenemos para el primer término

$$\begin{aligned} (e^{tA}\varphi, \operatorname{sen} nx) &= (\sum_{j=1}^{\infty} e^{t(1-j^2)}\varphi_j \operatorname{sen} jx, \operatorname{sen} nx) \\ &= \int_0^{\pi}\sum_{j=1}^{\infty} e^{t(1-j^2)}\varphi_j \operatorname{sen} jx \operatorname{sen} nx dx \\ &= (\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j \operatorname{sen} jx, e^{t(1-n^2)}\operatorname{sen} nx) \\ &= (\varphi, e^{t(1-n^2)}\operatorname{sen} nx), \end{aligned}$$

y para el segundo término

$$(\int_0^t e^{A(t-s)}Ku(s)ds, \operatorname{sen} nx) = \int_0^{\pi}(\int_0^t e^{A(t-s)}Ku(s)ds)\operatorname{sen} nx dx$$

$$= \int_0^t (\int_0^\pi Ku(s) e^{(t-s)(1-n^2)} \operatorname{sen} nx dx ds$$

$$= \int_0^t (Ku(s), e^{(1-n^2)(t-s)} \operatorname{sen} nx) ds,$$

que es exactamente el segundo término.□

El paso siguiente es probar la acotación uniforme.

Paso 4.- La sucesión de funciones $u^{(j)}(x, t_j)$ es uniformemente acotada.

Demostración: Aplicando la desigualdad de Bunyakovski-Schwarz obtenemos, usando (5.6)

$$| u_n(t) | \leqslant e^{(-n^2+1)t} | \varphi_n | + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \| (u)(s) \|_{L^2} \times \int_0^t e^{(-n^2+1)(t-s)} ds \tag{5.19}$$

$$\leqslant e^{(-n^2+1)t} | \varphi_n | + C \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \| u \|_{L^2} \frac{1}{n^2-1}$$

$$\leqslant e^{(-n^2+1)t} | \varphi_n | + C \| \varphi \|_{L^2} \frac{1}{n^2-1}.$$

Ahora consideremos para nuestro caso $t_j \to \infty$ y $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ en un conjunto acotado de $L^2(0, \pi)$, digamos, $W := \{\| \varphi \| < M < \infty\}$, $\varphi_j \in W$. Consideremos la sucesión $u^{(j)}(x, t_j)$, con su respectiva serie de Fourier

$$u^{(j)}(x, t_j) = \sum_{k=1}^\infty u_k^{(j)}(t_j) \operatorname{sen} kx.$$

Usando (5.18) obtenemos

$$| u^{(j)}(x, t_j) | \leqslant \sup_{j \geqslant 1} | u^{(j)}(x, t_j) | \leqslant M_x < \infty, \qquad x \in [0, \pi],$$

donde M_x es una constante positiva y u_j es la solución de (5.4),(5.7),(5.9), con condiciones iniciales φ_j, lo cual significa que φ es reemplazada por φ_j. De lo anterior concluimos que la sucesión de funciones $u^{(j)}(x, t_j)$ es uniformemente acotada.□

Ahora provemos la equicontinuidad de la sucesión de soluciones.

Paso 5.- La sucesión de soluciones es equicontinua.

Demostración: Para probar esto consideremos

$$| u^{(j)}(x',t_j) - u^{(j)}(x'',t_j) | = \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(j)}(t_j) \operatorname{sen} kx' - \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(j)}(t_j) \operatorname{sen} kx'' \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} | u_k^{(j)}(t_j) || \operatorname{sen} kx' - \operatorname{sen} kx'' |$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} | u_k^{(j)}(t_j) || \operatorname{sen} kx' - \operatorname{sen} kx'' | + 2 \sum_{k>N}^{\infty} | u_k^{(j)}(t_j) |$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} | u_k^{(j)}(t_j) || \sin kx' - \sin kx'' | + 2 \left(\sum_{k>N}^{\infty} e^{(-k^2+1)t_j} | \varphi_k^{(j)} | + \frac{C}{k^2-1} \| \varphi^{(j)} \|_{L_2} \right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} | u_k^{(j)}(t_j) || \sin kx' - \sin kx'' | + 2 \left(\sum_{k>N}^{\infty} \frac{C'}{k^2} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esta ultima desigualdad resulta de la continuidad de un número finito de funciones seno, con lo cual se demuestra la equicontinuidad de la familia de funciones $\{u^{(j)}(x,t_j)\}$.□

Por el teorema de Arzelá-Ascoli, esta familia tiene una subsucesión $\{u^{(j_l)}\}$ uniformemente convergente en $x \in [0,\pi]$, implicando la convergencia respectiva en $L^2(0,\pi)$. Haciendo un analisis similar para la solución de (5.5), (5.8), (5.10), podemos probar que $v_{j_l}(\cdot,t_{j_l})$ tiene una subsucesión convergente en $L^2(0,\pi)$), siempre que $\{\psi_{j_l}\}_{l=1}^{\infty}$ permanezca acotado un conjunto de $L^2(0,\pi)$. Aquí v_{j_l} es la solución respectiva con ψ reemplazada por ψ_{j_l}. Por lo tanto el sistema semidinámico es AC sobre conjuntos acotados.

El siguiente paso es probar la condición 2 del teorema, es decir, o es $\Lambda-$totalmente estable, lo cual significa que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \varepsilon' > 0)(\forall \lambda \in B_{\varepsilon'}(\lambda_0))$$

$$\gamma_\lambda^+(B_{\varepsilon'}(M)) \subset B_\varepsilon(M), \qquad M = o.$$

Para este fin usamos el Corolario 3.5 de [14], el cual establece que *Si M es un $Y-$atractor uniforme y Y es uniformemente estable, entonces M es estable.* Tomamos el espacio de estados X del Corolario como $\widetilde{X} = X \times \Lambda$, $\widetilde{M} = \{o\} \times \{0\} \subset \widetilde{X}$, y para Y el conjunto $\widetilde{\mathcal{Y}}_o = \mathcal{Y}_o \times \{0\}$. De (5.5),(5.8), (5.10) y (5.13) obtenemos directamente que $\widetilde{\mathcal{M}}$ es un $\widetilde{\mathcal{Y}}_o-$atractor uniforme y que $\widetilde{\mathcal{Y}}_o$ por (5.13) es uniformemente estable. Las hipótesis del corolario se satisfacen, por lo que $\widetilde{\mathcal{M}}$ es estable, o equivalentemente, $M = \{o\}$ es $\Lambda-$totalmente estable.(Alternativamente, se puede usar el Corolario 3.8 de [12].)

En cuanto a la condición 3 del teorema, notemos que $\widetilde{\mathcal{M}}$ siendo invariante, es suficiente probar que no es equi-atractor (débil) con respecto a ningun conjunto $\Lambda_\delta^* = B_\delta(o) \cap \Lambda^*$, para cualquier $\delta > 0$ y cualquier conjunto Λ^*, como se especifica en el teorema. Esta es una consecuencia inmediata del hecho que el sistema semidinámico definido por (5.4)-(5.7) tiene puntos de equilibrio en $\pm\lambda \operatorname{sen} x$.
En conclusión, se sigue que, para $\lambda > 0$, existen conjuntos invariantes los cuales proyectan sobre $\{\pm\lambda \operatorname{sen} x\} \times \{0\} \subset X$. Dado que se satisfacen las hipótesis del teorema 3.2, cocluimos que el sistema de ecuaciones diferenciales parciales exhibe bifurcación extracrítica.

Conclusiones.

En el presente trabajo se desarrolla un estudio de la teoría de bifurcaciones en sistemas dinámicos y semidinámicos en espacios generales.

El concepto de bifurcación adoptada en la tesis, es una variante de la que aparece en [6]. La hemos denominado "bifurcación extracrítica"para diferenciarla de otras ideas intuitivas de bifurcación que existen. Algunos autores en trabajos anteriores, en particular en [6], en realidad no corresponde a la idea intuitiva, en el sentido de que permite una cantidad demasiado grande de conjuntos invariantes, como se ilustra en el ejemplo 3.5.

Como las hipótesis son más restrictivas en los trabajos previos, implican tipos de bifurcaciones en un sentido más estricto que el reflejado por las definiciones; un paso en esta dirección está contenido en la última parte del Teorema 3.2, donde se exije que uno de los conjuntos bifurcantes sea un conjunto asintóticamente estable.

Uno de los problemas que quedarían por considerar en estudios futuros es el siguiente: Dar una definición nueva de bifurcación más restrictiva, y encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que dicha bifurcación exista.

BIBLIOGRAFÍA

[1] L. AGUIRRE- P. SEIBERT, *Types of change of stability and corresponding types of bifurcations*, Discrete & Continuous Dynam. Systems, **5** (4) (1999), pp. 741-752.

[2] M.L. BERTOTTI -V. MOAURO, *Bifurcations and total stability*, Rend. Sem. Mat.Univ. Padova, **71** (1984), pp. 131-139.

[3] J.S. FLORIO, *On the topological content stability, instability and persistence*, Univ. Iagellon. Acta Math., **36** (1998), pp. 89-95.

[4] F. MARCHETTI, *Some stability problems from a topological viewpoint*, Rend. Accad. Naz. Lincei, **60** (1976), pp. 733-742.

[5] O. LADYZHENSKAYA, *Attractors for semigroups and evolution equations*, Lezioni Lincee, Accad. Naz. Lincei, Cambridge University Press, (1991).

[6] F. MARCHETTI- P. NEGRINI- L. SALVADORI- M. SCALIA, *Liapunov direct method in approaching bifurcation problems*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **71** (1976), pp. 211-226.

[7] L. SALVADORI - F. VISENTIN, *Secular stability and total stability*, Nonlinear Anal. **40** (2000), pp. 549-564.

[8] S. H. SAPERSTONE, *Semidynamical Systems in Infinite Dimensional Spaces*, Springer-Verlag, Berlin (1981).

[9] P. SEIBERT, *Stability under perturbations in generalized dynamical systems*, Int. Sympos. Nonlinear Differential Eqs. & Dynam. Systems, Academic Press, New York, 1963, pp. 463-473.

[10] P. SEIBERT, *Estabilidad bajo perturbaciones y su generalización en sistemas dinámicos* , Acta Mexicana Ci. Tecn.,**2** (1968), pp. 154-165.

[11] P. Seibert, *Dynamical persistence principles and bifurcations,* Univ. Iagellon. Acta Math., **36** (1998), pp. 65-77.

[12] P. Seibert - J.H. Arredondo - J. Delgado - L. Aguirre, *Reduction theorems for uniform stability of systems in general spaces,* Bol.Soc.Mat.Mexicana (3) **3** (1997), pp. 69-88.

[13] P. Seibert - J.S. Florio, *On the foundations of bifurcations theory,* Nonlinear Anal., **22** (1994), pp. 927-944.

[14] P. Seibert - J.S. Florio, *On the reduction to a subspace of stability properties of systems in metric spaces,* Ann. Mat. Pura Appl., (4) **169** (1995), pp. 291-320.

[15] P. Seibert - J.S. Florio, *On bifurcations arising from unstable equilibria and invariant sets,* J of Differential Equations, **150** (1998), pp. 250-263.

[16] T. Yoshizawa, *Stability Theory by Lyapunov's Second Method,* Math. Soc. Japan, 1966.