



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)

**“VALIDACIÓN DE MÉTODOS DE VORTICIDAD PARA CAVIDADES
CARDÍACAS”**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

ROMÁN MARTÍNEZ ANGÉLICA VIRIDIANA

MATRICULA: 2182800766

VIRI.ROMAN@OUTLOOK.COM

ASESORA DE TESIS:

DRA. SILVIA SANDRA HIDALGO TOBÓN

JURADO:

PRESIDENTE

DR. MANUEL ARREOLA

SECRETARIA

DRA. SILVIA SANDRA HIDALGO TOBÓN

VOCAL

DR. JUAN CARLOS AXAYACATL MORALES GUADARRAMA

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO A 18 DE AGOSTO DE 2022

Índice

	1
Resumen	1
Dedicatoria	2
Agradecimientos	3
Capítulo 1.	4
Presentación y descripción de la Tesis	4
1 Introducción	4
2 Motivación	5
3 Objetivos	5
3.1 Objetivo General	5
3.2 Objetivos particulares	5
4 Hipótesis	6
5 Justificación de la Investigación	7
6 Estado del arte de la investigación	8
Capítulo 2.	10
Descripción de la Imagen por Resonancia Magnética (IRM)	10

7	Historia de la Resonancia Magnética	10
8	La física de la IRM	11
8.1	Configuración Atómica	11
8.2	El núcleo del átomo de hidrógeno	12
8.2.1	Modelo representativo	12
8.2.2	Alineación con el campo magnético externo	13
8.2.3	Movimiento de precesión	14
8.3	Ecuaciones de Bloch	16
8.3.1	Ecuación de Larmor	18
8.4	Resonancia	20
8.4.1	Magnetización longitudinal y transversal	21
8.5	Relajación: una recuperación y un decaimiento	22
8.5.1	Recuperación T_1	22
8.5.2	Decaimiento T_2	23
8.5.3	Diferencias entre T_1 y T_2	24
8.6	Señal de Resonancia Magnética	25
8.6.1	Ley de inducción de Faraday	25
8.6.2	Caída libre de la inducción (FID)	26
9	Definición de IRM	26
10	Equipo de IRM	26
10.1	El Imán	27
10.2	Bobinas gradientes	27
10.3	Bobinas de radiofrecuencia	27
10.3.1	Antenas transmisoras	27
10.3.2	Antenas receptoras	28
10.4	Equipo de cómputo	28
10.5	Área especial	28
11	Elección de la región de la imagen	29
11.1	Gradientes	29
11.2	Selección de corte	29
11.3	Tamaño del corte	31
11.4	Codificación de frecuencia	31

11.5 Codificación de fase	32
12 Colección de datos para formar la imagen	32
12.1 Espacio k	32
13 Secuencias de pulsos básicas	34
13.1 Secuencia Espín-Eco	35
13.2 Secuencia Gradiente Eco	38
14 Factores de calidad de la imagen	39
14.1 Señal/Ruido	40
14.2 Resolución Espacial	41
14.3 Tiempo de Adquisición	41
Capítulo 3.	43
De la física de fluidos hasta Flujo 4D	43
15 Física de Fluidos	43
15.1 Propiedades de los fluidos	44
15.2 Clasificación de los flujos	45
15.3 Hidrodinámica	48
15.3.1 Sistema de referencia: Descripción Euleriana y Lagrangiana	48
15.3.2 Derivada material	48
15.3.3 Ecuaciones diferenciales del movimiento de fluidos	49
16 Turbulencia	50
16.1 Escalas Turbulentas	51
16.2 Teoría de Kolmogorov	51
16.2.1 Microescalas de Kolmogorov	52
17 Hemodinámica	52
17.1 La sangre	53
17.2 Circulación sanguínea	53
17.3 Modelo físico del flujo sanguíneo	54

18 Anatomía del corazón	55
18.1 Ciclo cardíaco	57
18.1.1 Sístole	57
18.1.2 Diástole	57
18.1.3 Electrocardiograma y el ciclo cardíaco	58
19 Resonancia Magnética Cardiovascular (RMC)	58
19.1 Planos de estudio	59
19.1.1 Planos ortogonales	59
19.1.2 Planos intrínsecos	59
19.2 Sincronización de los movimientos	60
19.2.1 Movimiento respiratorio	60
19.2.2 Movimiento cardíaco	61
19.2.3 Movimiento del flujo sanguíneo	61
19.3 Secuencias	61
19.3.1 Técnica de sangre negra	61
19.3.2 Técnica de sangre blanca	62
20 Flujo 4D	64
20.1 Introducción a la secuencia	64
20.2 PCA cine 2D a Flujo 4D	65
20.3 Adquisición de datos	66
20.4 Venc	66
20.5 Tipos de datos	67
20.5.1 Líneas de flujo	67
20.5.2 Trazadores de partículas	67
20.5.3 Campos de velocidades	68
20.6 Artefactos	69
20.7 Ventajas y desventajas de la secuencia	69
Capítulo 4.	70
La vorticidad y formas de identificar vórtices	70
21 Movimiento de rotación de un elemento de fluido	70

22 Definición de vorticidad	72
23 Dinámica de vorticidad	73
24 Métodos numéricos para evaluar vorticidad	73
24.1 Método 1. Método de Chapra de cuarto orden	74
24.1.1 Diferenciación Numérica	74
24.1.2 Diferencia finita dividida	75
24.2 Método 2. Método de 8 puntos	78
24.3 Método 3. Extrapolación de Richardson	81
24.4 Método 4. Extrapolación de Richardson Compacta	83
25 Criterio de λ_2	85
25.1 Definición objetiva de vórtice	85
Capítulo 5.	88
Modelos teóricos de vórtices	88
26 Modelo Teórico 2D. Células vorticales	88
26.1 Evaluación de la magnitud de la vorticidad $ \omega $	88
26.1.1 Cambiando V_{max}	90
26.1.2 Variación de L_x y L_y	92
26.1.3 Ruido	93
26.1.4 Filtro	94
26.2 Aplicación del criterio de λ_2 al modelo 2D	94
27 Modelo Teórico 3D. Vórtice de Burgers	97
27.1 Evaluación de la magnitud de la vorticidad $ \omega $	102
27.1.1 Variando b	103
27.2 Ruido y Filtro	104
27.3 Aplicación del criterio de λ_2 al modelo 3D	105
Capítulo 6.	107

Aplicación con datos de Flujo4D	107
28 Presentación de controles	107
29 Segmentación de la Aorta Ascendente	108
29.1 Aorta	108
29.1.1 Aorta Ascendente	109
30 Implementación del método numérico 4 y el criterio de λ_2	109
31 Valor de corte	111
31.1 Análisis estadístico	111
32 Aproximación de tamaño de los vórtices	113
Capítulo 7.	115
Discusión de resultados y conclusiones	115
33 Discusión	115
33.1 Análisis de Resultados	115
33.1.1 Modelo 2D	115
33.1.2 Modelo 3D	116
33.1.3 Aplicación con datos de Flujo 4D	117
34 Conclusiones	120
35 Trabajo a futuro	122
36 Referencias	123

Resumen

La investigación que se realiza utilizando radiación no-ionizante con la técnica de Resonancia Magnética se ha convertido en una herramienta útil para que los médicos detecten de forma no invasiva cambios anormales en el funcionamiento del cuerpo humano.

Resulta interesante como los avances de la Resonancia Magnética han llevado a una técnica tan sofisticada que permite no solo la evaluación anatómica del corazón si no también su parte funcional reflejada en la distribución del flujo de sangre. Su nombre es "*time-resolved three-dimensional flow-sensitive MRI with three-directional velocity encoding*" o simplemente Flujo 4D, es una técnica que presenta en tres dimensiones los patrones del flujo sanguíneo en el tiempo para evaluar de manera cuantitativa y cualitativamente la hemodinámica.

La siguiente Tesis titulada "*Validación de Métodos de Vorticidad en Cavidades Cardíacas*", se basa en el uso de la técnica de Flujo 4D para evaluar de forma cuantitativa y cualitativa el flujo sanguíneo en el corazón; se delimita su estudio a la detección de los vórtices que se presentan en las estructuras del órgano por medio de métodos numéricos [1] y criterios físicos, con el fin de evaluar sus dimensiones con respecto a las cavidades cardíacas.

Los resultados del presente trabajo comienzan en los modelos teóricos de vórtices el modelo de células vorticales y el modelo del vórtice de Burgers, posteriormente en la aplicación con uso de datos de Flujo 4D en el cálculo de vorticidad, el uso de un valor de corte grupal y terminando con las aproximaciones de longitud por medio de la teoría de Kolmogorov. Si bien no es posible evaluar en su totalidad la proporción de vortices que presenta el flujo cardíaco debido a que no se identifican al cien por ciento todos los vórtices si fue posible analizar la influencia física que tienen los vórtices en el ciclo cardíaco en el movimiento de la sangre dentro de la aorta ascendente. Las interconexiones de vórtices mostradas en los datos de Flujo 4D permiten asociar un momento en el tiempo donde se da la máxima vorticidad, encontrar un rango en donde se presentan flujos turbulentos donde se les puede analizar el tamaño de las escalas disipativas asociándolas al tamaño de la cavidad.

Dedicatoria

*A mi abuelito Apolinar Román, que se durmió antes de saber lo mucho
que me gusta la física.*

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a la Dra. Silvia Hidalgo Tobón por su paciencia y comprensión que me brindo, gracias por responder todas mis dudas, por apoyarme cuando situaciones de dificultad limitaron mi desarrollo académico, por sus enseñanzas para formarme como la física que soy ahora y por las palabras de bienvenida que marcaron mi vida y me motivaron a adentrarme al mundo de la física médica; en definitiva es una de las mujeres que más admiro y respeto por su tenacidad, conocimientos y habilidades, es para mi un ejemplo a seguir.

De igual manera mi más sincero agradecimiento al Dr. Julio García Flores a quien debo las ideas más importantes del presente trabajo, le agradezco resolver mis dudas, brindarme observaciones que fueron mi guía, por su tiempo y paciencia; siempre admire sus conocimientos y su forma de ver el proceso de investigación; muchas gracias por mostrarme lo emocionante que resulta entender el principio físico detrás de cada una de las mediciones.

Quiero agradecer también al Dr. José Luis del Río Correa por su apoyo y sus constantes palabras de aliento, le agradezco por creer en mi y por ayudarme a crecer como persona, me siento muy afortunada de haber sido su alumna y siempre será parte importante en mi vida.

También quiero darle las gracias a mi familia, quienes son mi apoyo principal para mi. A mi mamá Elena quien dio su tiempo y esfuerzo para que yo pudiera desarrollarme profesional y personalmente, gracias mami por todo lo que haz hecho por nosotros; a mi papá Oscar por su esfuerzo para sostener a nuestra familia, por tu fuerza para sacarnos adelante, nunca olvidare todas esas noches que te desvelaste para que Mary y yo pudieramos seguir estudiando; a mi hermana Mary quien fue mi guía desde que tengo memoria, quiero decirte que fuiste tu quien me mostro el mundo y me ayudaste a perder el miedo de seguir adelante.

A mis compañeros de maestría, Leti, Fer, Fani y Noemí, quienes se convirtieron en mis amigos, la maestría fue más amena por su apoyo, risas y compañía.

Por último, quiero agradecer a mi compañero de vida, que gracias a esta etapa lo pude conocer, fue nuestra primera platica la que me motivo a tomar este camino, fuiste mi compañero de maestría y también te convertiste en mi amigo; en todo este tiempo siempre sentí tu apoyo, tu motivación, tu cariño y protección. Héctor, tu sabes cuanto te amo, te admiro y te respeto; me siento muy afortunada de comenzar un proyecto juntos, nuestra familia.

Capítulo 1.

Presentación y descripción de la Tesis

1 Introducción

La física presente en áreas de investigación aplicadas en la medicina se ha convertido en un elemento muy importante para la evolución de los métodos de diagnóstico. La investigación que se realiza utilizando radiación no-ionizante con la técnica de Resonancia Magnética se ha convertido en una herramienta útil para que los médicos detecten de forma no invasiva cambios anormales en el funcionamiento del cuerpo humano. La Imagen por Resonancia Magnética otorga una visualización de cualquier parte del cuerpo, con ello los médicos especialistas tienen en sus manos información valiosa de la situación, y si es el caso, establecer el mejor tratamiento posible para una mejor calidad de vida.

La Angiografía por Resonancia Magnética de Contraste de Fase (PC-MRA) crea contraste entre la sangre y el tejido estático para examinar los vasos sanguíneos presentes en el corazón; cuando se toma esta clase de imágenes en tres direcciones y contemplando el tiempo del ciclo cardíaco es posible caracterizar datos de velocidad de la sangre y otras medidas hemodinámicas, esta técnica se llama Flujo 4D. Esto permite que “la técnica tenga muchas aplicaciones potenciales en la práctica clínica, ya que brinda al especialista información valiosa sobre la función y el estado del sistema cardiovascular”[2].

Dar una explicación física a los fenómenos que se presentan en los datos apoya al entendimiento de los procesos que surgen de aplicar la técnica de Flujo 4D en pacientes reales y resolver los problemas a los que se enfrenta un técnico con el uso de un resonador, el presente trabajo de tesis se apoya en esta idea de dar una explicación física para obtener los valores de vorticidad teniendo los campos de velocidades del flujo sanguíneo. A su vez se pretende validar los métodos numéricos utilizados para el cálculo de la vorticidad partiendo de un estudio en modelos teóricos con el uso de las variaciones de los parámetros, los cuales se convierten en la base de la similitud con las mediciones in vivo.

Sección 1.	Introducción
Sección 2.	Motivación
Sección 3.	Objetivos
Sección 4.	Hipótesis
Sección 5.	Justificación de la investigación
Sección 6.	Estado del arte de la investigación

2 Motivación

La siguiente Tesis titulada “*Validación de Métodos de Vorticidad en Cavidades Cardíacas*”, se basa en el uso de la técnica de Flujo 4D para evaluar de forma cuantitativa y cualitativa el flujo sanguíneo en el corazón; se delimita su estudio a la detección de los vórtices que se presentan en las estructuras del órgano por medio de métodos numéricos [1] y criterios físicos, con el fin de evaluar sus dimensiones con respecto a las cavidades cardíacas. La motivación de analizar su influencia en la función cardíaca comienza en establecer un comportamiento normal que permita identificar un patrón anómalo de los vórtices y así pronosticar una inadecuada funcionalidad que ayude al médico a detectar alguna patología.

“Durante 2018, el 88.4% (638 862) de las defunciones se debieron a enfermedades y problemas relacionados con la salud”según los datos de INEGI 2009. Las enfermedades del corazón es una de las tres principales causas de muerte tanto para hombre como mujeres mexicanos registrado en el comunicado de prensa del INEGI en Octubre del 2019, enfocarnos en la investigación que se hace para realizar una detección temprana de estas enfermedades ayudaría a proveer un tratamiento oportuno.

3 Objetivos

3.1 Objetivo General

Se busca validar un método de vorticidad capaz de evaluar la proporción que tienen los vórtices que se presentan en el flujo cardíaco con las dimensiones de las cavidades cardíacas; así como analizar la influencia física que tiene el desarrollo de los vórtices en el tiempo considerando el ciclo cardíaco y la capacidad de la técnica de Resonancia Magnética Flujo 4D.

3.2 Objetivos particulares

Etapa 1

Estudiar las técnicas fundamentales de validaciones numéricas que utilizan diferencias finitas divididas, el método de Chapra y el método de Richardson en su versión a cuarto orden normal y compacta e integración numérica para el método de 8 puntos para la detección de vórtices en dos dimensiones.

Desarrollar los algoritmos necesarios para la utilización de los métodos en un programa computacional que permita aplicar un modelo teórico bi-dimensional de la representación de un flujo vortical celular y en modelo teórico tridimensional llamado Vórtice de Burger.

Comparar los resultados de las mediciones en variables de velocidad máxima, resolución espacial, ruido y filtro gaussiano para determinar que esquema de vorticidad es más adecuado para cada modelo.

Etapa 2

Aprender el criterio de identificación de λ_2 que se utilizan para la detección de vórtices en un campo vectorial de velocidad dado.

Aplicar el criterio a los dos modelos teóricos que se trabajarán en la etapa 1. Se pretende en esta etapa analizar las consecuencias del criterio en los modelos teóricos con el uso de los métodos numéricos para establecer observaciones que apoyen su utilización a datos de Flujo 4D.

Etapa 3

Se utilizarán datos de controles obtenidos con la técnica de Flujo 4D aplicando el criterio sugerido en la etapa 2 que permita la utilización de los métodos numéricos trabajados en la etapa 1 para responder a las siguientes cuestiones: ¿Cuál es la mejor forma de evaluar e tamaño de los diferentes vórtices en diferentes personas? ¿Cómo es el tamaño de vórtice en relación a la cavidad cardíaca? ¿Cómo cambia la vorticidad en el tiempo? ¿Se puede asociar dicho cambio a otro individuo?

4 Hipótesis

El siguiente proyecto de tesis tiene diversas hipótesis de acuerdo a cada etapa:

1. Los métodos numéricos presentados aquí permiten realizar derivadas numéricas, en este caso resulta adecuado ya que los datos que se tienen del Resonador son datos discretos, el uso de un método más preciso logrará obtener un mejor resultado para el cálculo de la vorticidad. Si se utiliza un método numérico con mayor precisión, entonces se podrá identificar los puntos donde se encuentre la mayor vorticidad y por tanto la localización exacta de los vórtices.
2. La utilización de modelos teóricos permite un entendimiento básico pero sólido para dar pasos en el aprendizaje de la utilización de métodos numéricos. El cambio de las variables abre paso a identificar los principales problemas a los que se enfrentan los programas computacionales cuando se tienen datos reales.
3. El criterio de identificación de λ_2 es un criterio con bases físicas, esto es un motivante principal para su uso en datos reales de un flujo sanguíneo, su utilización tendrá mejores resultados que si se usa un criterio puramente matemático.
4. En el uso de datos con controles reales, se busca localizar un valor de corte local, tomar un promedio para identificar un valor de corte grupal; si se nota que el valor de corte local comparado con el valor de

corte grupal no presenta diferencias significativas entonces no afecta sustancialmente el tamaño del vórtice y se puede tomar un valor de corte característico de este grupo.

5. La formación de vórtices es una explicación compleja, se sabe que su creación lo puede provocar diversos factores, que van desde donde se encuentra el fluido, las paredes que delimitan al fluido, si se encuentra con alguna protuberancia en el camino, sus propiedades físicas del fluido como la viscosidad, el movimiento externo, la creación de vórtices dados unos ya desarrollados, etc. Debido a estas variables se convierte en un problema complicado, la física de fluidos se ha enfrentado a este tipo de problemas haciendo uso de la teoría de turbulencia. Si el fluido es sanguíneo dentro del corazón, entonces su movimiento es tan complicado que se hará uso de las bases de la turbulencia para establecer su formación, su desarrollo y aniquilación de los vórtices.

5 Justificación de la Investigación

La Imagen por Resonancia Magnética es una técnica capaz de presentar, en tres dimensiones, los patrones del flujo sanguíneo en el tiempo, para evaluar la dinámica regional y global del flujo de sangre de manera cuantitativa y cualitativa.

Resulta interesante como los avances de la Resonancia Magnética han llevado a una técnica tan sofisticada que permite no solo la evaluación anatómica del corazón si no también su parte funcional reflejada en la distribución del flujo de sangre. La técnica tiene importantes ventajas como lo son no utilizar radiación ionizante, ser no invasiva (ambas ventajas implícitas de hacer uso de las imágenes de resonancia magnética), no usar medios de contraste yodados para su visualización, ser una secuencia tridimensional y la oportunidad del posprocesamiento para cuantificar el flujo en cualquier plano cuando el paciente ya no está en el equipo de resonancia.

Se busca analizar la información de estos campos para detectar alguna anomalía en el funcionamiento del corazón. Debido a la forma y movimiento de este órgano, es normal encontrar la formación de vórtices en el flujo sanguíneo; presenciar un comportamiento anómalo de los vórtices es señal de una inadecuada funcionalidad [3], que ayudaría al médico a detectar una posible patología cardíaca. “La caracterización cuantitativa del flujo de vórtice podría proporcionar una herramienta objetiva para evaluar la función” en determinadas zonas del corazón [4].

La secuencia de nombre “time-resolved three-dimensional flow-sensitive MRI with three-directional velocity encoding” o simplemente Flujo 4D. Consiste en adquirir imágenes mediante una secuencia de contraste de fase en 2D para obtener datos de velocidad de sangre en tres dimensiones durante

el ciclo cardíaco, por medio de trazadores de partículas, líneas de flujo y vectores de velocidad, que son representaciones que describen la trayectoria de la sangre a través del sistema cardiovascular [3].

6 Estado del arte de la investigación

El análisis del estado del arte que se realiza en la presente investigación se basa en la validación del uso de métodos numéricos y criterios de investigación para la detección de vorticidad usando datos de un campo de velocidades y las investigaciones que se tienen al respecto al uso de la vorticidad en los datos de IRM con el uso de su secuencia de Flujo 4D, considerando la importancia del análisis de los parámetros hemodinámicos que solidifica la justificación de la investigación.

La investigación comienza con la propuesta hecha por [1] donde evalúan diferentes esquemas numéricos para evaluar el campo de vorticidad derivado de mediciones de velocidad en resonancia magnética cardiovascular, ahí surge la idea de hacer uso de modelos teóricos para el análisis de los esquemas numéricos usualmente utilizados y hacer la relación de las variables de IRM con los parámetros de los modelos teóricos, lo que permite justificar la razón de las etapas en los objetivos particulares.

Posteriormente en [5] se confirma el uso de los cuatro métodos numéricos, el método de Chapra, el de 8 puntos, el de Richardson y el de Richardson Compacta usados en su simulación para comparar su método propuesto haciendo uso de la solución analítica de la combinación de modelos de vórtices. A su vez en el mismo año [6] valida que el uso de la dinámica de fluidos computacional con mediciones reales obtenidas con imágenes de resonancia magnética de flujo 4D.

El modelo de vórtice de Burgers fue utilizado debido a la presencia de parámetros físicos que permiten la comparación con variables relacionadas en flujo sanguíneo, debido a que es un resultado a las ecuaciones de Navier-Stokes que describen fluidos viscosos [7].

Si bien los métodos numéricos permiten la evaluación de las derivadas finitas, la detección de los vórtices tiene una mejor sustentación haciendo uso de un criterio de bases físicas, en [8] se propone una definición de vórtice objetiva que cuenta con conceptos de dinámica de fluidos tal que sirve para introducir un esquema que identifica vórtices en un fluido. Después en [9] permite el uso de este método y otros para comparar su superioridad.

En [10] se presenta una revisión de la cuantificación de métricas hemodinámicas cinéticas en el contexto de la enfermedad de la válvula aórtica, lo que motiva el uso de los datos en esa región para establecer la importancia de calcular la vorticidad, ya que patrones de flujo alterados se asocia con la enfermedad cardíaca más prevalente en los países desarrollados y se asocia

con complicaciones graves a futuro. Resulta interesante encontrar si hay un valor de corte general o particular en pacientes control.

Una de las referencias del trabajo de [1] promueve la conexión que surge para el uso del método de Richardson Compacta en el uso de un flujo fisiológico; [11] afirma que un flujo saludable raramente muestra un comportamiento turbulento; la relación entre los parámetros hemodinámicos y la respuesta a la lesión vascular es de gran relevancia para comprender el proceso de una cardiopatía, es decir; se presenta la idea de un análisis turbulento ante la anormalidad de la vorticidad dentro de las cavidades cardíacas.

A su vez en [12] confirma que el flujo sanguíneo turbulento se desarrolla en la aorta de sujetos normales; la IRM usando flujo 4D permite determinar los niveles normales de flujo turbulento en la aorta, lo cual es un requisito previo para comprender el papel de la turbulencia en la fisiopatología de la enfermedad cardiovascular.

Actualmente en [13] y [14] hacen uso del método de Richardson y el criterio de λ_2 en un apartado del análisis de flujo para determinar parámetros hemodinámicos en sus investigaciones.

La presencia de la turbulencia juega un rol clave en las próximas investigaciones en el ámbito de la resonancia magnética cardiovascular haciendo uso de la secuencia de Flujo 4D, actualmente se están desarrollando estudios con super-resolución haciendo uso de redes neuronales que permitirán encontrar mejor precisión en los parámetros hemodinámicos en esta área.

Capítulo 2.

Descripción de la Imagen por Resonancia Magnética (IRM)

La resonancia magnética es muy peculiar, resulta interesante como en su formación existe la contribución de diversas áreas que la han llevado a lo que es hoy en día. Se considera que inicio con la oportuna creación de la transformada de Fourier hasta llegar a la modernización de la tecnología, donde se han desarrollado equipos cada vez más sofisticados y automatizados; se dará un repaso breve sobre momentos importantes de en su historia.

7 Historia de la Resonancia Magnética

En 1822 el matemático Francés Jean Baptiste Joseph Fourier formula una bella expresión matemática conocida como la *transformada de Fourier*, esta ecuación es fundamental para el entendimiento de las señales y la principal base para obtener una imagen. Mientras tanto, físicos de esa década estaban interesados en la idea de organizar la radiación electromagnética, en una estructura que llamaron *espectro electromagnético*; en ese entonces ya se conocía el infrarrojo y con el paso del tiempo fueron descubriéndose más elementos que lo conformarían. Por ejemplo, el año de 1831 Michael Faraday descubría la inducción electromagnética, uno de los principios físicos más importantes para la resonancia magnética; este avance y la de otros científicos permitió a Maxwell plantear las ecuaciones que llevan su nombre. Más tarde, la teoría de Maxwell fue confirmada mediante los experimentos de Hertz donde descubrió que las ondas de radio tienen origen electromagnético, estas ondas interactúan con la materia y como consecuencia la obtención de la imagen por resonancia magnética (IRM) [15].

Por el año de 1920 aún no se explicaba el efecto Zeeman anómalo, este consiste en la presencia de dobletes y tripletes en líneas espectrales para átomos en presencia de grandes campos magnéticos, en 1922 Wolfgang Pauli sugirió agregar un parámetro adicional a los conocidos para explicar dicha multiplicidad, fue cuando propuso la existencia de un espín nuclear [16].

El premio nobel de Física en 1943 fue otorgado a Otto Stern por su descubrimiento del momento magnético del protón, y en 1944 a Isidor Isaac

Sección 7. Historia de la Resonancia Magnética

Sección 8. La física de la IRM

Sección 9. Definición de IRM

Sección 10. Equipo de IRM

Sección 11. Elección de la región de la imagen

Sección 12. Colección de datos para formar la imagen

Sección 13. Secuencia de pulsos básicas

Sección 14. Factores de calidad de la imagen

Rabi “por su método de resonancia para registrar las propiedades magnéticas de los núcleos atómicos” según la página de premio nobel, siendo este último quien acuña el término resonancia magnética nuclear a la técnica.

Simultáneamente Felix Bloch y Edward Mills Purcell observaron que al colocar algunos núcleos atómicos y excitarlos con ondas de radio estos absorbían energía; posteriormente liberaban energía sobrante en forma de ondas de radio que podían ser captados por una antena, principio fundamental de la IRM; en 1952 por dicha investigación fueron galardonados por el premio Nobel de Física [17]. Actualmente a Bloch se le conoce como el padre de la IRM [18]. En 1973, Paul Lauterbur consigue las primeras imágenes de objetos por resonancia magnética cuando propone la codificación espacial de la señal aplicando gradientes magnéticos [16]. A su vez Peter Mansfield en Inglaterra hace la descripción matemática de la transformación de una señal en el tiempo en una representación espacial usando gradientes de campo magnético, él es quién introduce el concepto de espacio k . Ambos por sus contribuciones ganaron el premio Nobel de Fisiología y Medicina en el 2003.

Ya en 1981 se tenía el primer equipo para obtener una IRM y en 1983 se considera por el American Collage of Radiology una técnica estándar para el uso clínico [16]; de esa época a la actualidad se buscan técnicas más sofisticadas de procesamiento de datos, métodos de retroproyección para la formación de imagen, secuencias cada vez más rápidas, mejor resolución, cortes más finos, estudios funcionales, de difusión, de perfusión, obtención de tractografías, espectroresonancia y muchas cosas más que se unen a las aplicaciones de la resonancia magnética.

Resulta curioso destacar que la técnica dejó de llamarse Resonancia Magnética Nuclear debido a la preocupación del término *Nuclear* como un adjetivo negativo al asociarlo con los incidentes nucleares, es por ello que los radiólogos de aquellas épocas deciden eliminar el término para que los pacientes no le temieran a la técnica, ya que no implica ningún tipo de radiación ionizante [18].

8 La física de la IRM

La resonancia magnética se define en términos de fenómenos físicos, en este apartado se busca llegar a una definición de la IRM mediante bases físicas; con el propósito de tener conocimientos sólidos que permitirán entender las bases de esta tesis.

8.1 Configuración Atómica

La materia de la cual están estructurados todos los cuerpos vivos e inertes está compuestos por conjuntos de partículas [19]. Un átomo está compuesto

por protones, neutrones y electrones, los primeros dos se encuentran confinados en el núcleo y los últimos están alrededor de él. En este sistema se encuentran varios tipos de movimientos, los electrones rotan sobre su propio eje y orbitan alrededor del núcleo, finalmente el núcleo orbita sobre su propio eje; este último movimiento permite definir los principios de la resonancia en su forma física más elemental [20]. Se necesita que el núcleo sea un *núcleo activo*, definidos como aquellos núcleos que tienen carga, es decir, que el número de protones más el número de neutrones sea impar, esta estructura tiene la tendencia a alinear su eje promedio, es decir, eje que representa al promedio de los ejes individuales por partícula, con un campo magnético aplicado.

8.2 El núcleo del átomo de hidrógeno

El núcleo del átomo de hidrógeno es un núcleo activo compuesto por un solo protón, la presencia de átomos de hidrógeno es abundante en el cuerpo humano, se verá más adelante que causa una respuesta importante cuando se sitúa en presencia de un campo magnético aplicado [19]. Por ende, la resonancia magnética del núcleo del átomo de hidrógeno es el más utilizado en el diagnóstico clínico y es el que se basará este trabajo para definir los principios físicos.

8.2.1 Modelo representativo

El único protón presente en el núcleo determina que el átomo está cargado eléctricamente (la materia es neutra cuando tiene el mismo número de cargas positivas y/o negativas); como ya se mencionó, el núcleo orbita sobre su propio eje, desde la perspectiva simple de las leyes del electromagnetismo, nos dicen que un campo magnético es creado cuando se mueve una partícula cargada, es por ello que tal movimiento de cargas en el átomo provoca un pequeño campo magnético inducido. Se sabe que las cargas eléctricas en movimiento son la parte fundamental de los campos magnéticos estacionarios, pero cuando se trata de explicar lo que genera las propiedades magnéticas a los materiales la idea se solidifica mejor al determinar que los átomos tienen momentos dipolares magnéticos individuales que pueden estar representados por pequeñas espiras de corriente. El momento dipolar magnético es una magnitud vectorial que apunta en la dirección perpendicular al plano de la espira, se facilita determinar la dirección usando la regla de la mano derecha donde si los cuatro dedos se posicionan en el sentido de la corriente, entonces, el pulgar apuntará en la dirección del momento magnético [21]. Así, el núcleo del átomo de hidrógeno se puede representar como una barra de imán con su campo magnético, figura 1, o mejor como una pequeña espira de carga, ver figura 2, con una corriente eléctrica auxiliar a la que se le puede definir un momento magnético dipolar [22].

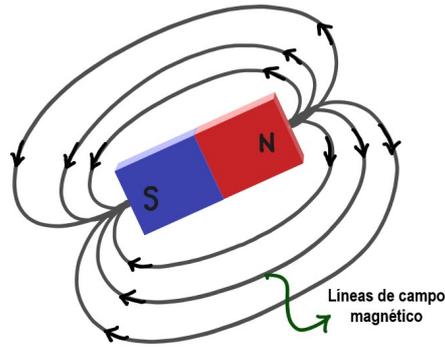


Figura 1. Campo magnético de una barra de imán.

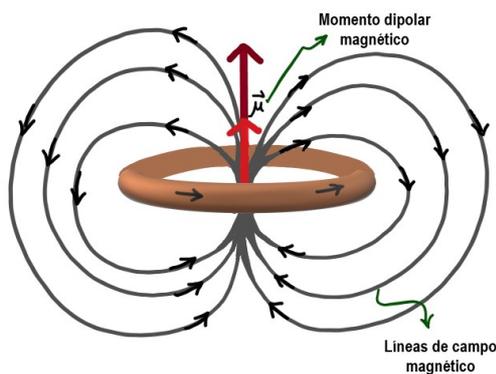


Figura 2. Campo magnético de una espira.

8.2.2 Alineación con el campo magnético externo

La ventaja de establecer una dirección radica en que se puede establecer las consecuencias de colocar al núcleo del átomo de hidrogeno en presencia de un campo magnético externo. En primera estancia, cuando no se tiene un campo magnético externo, el momento magnético apunta en cualquier dirección. Si se tiene bastantes átomos de hidrógeno cada uno apuntará en direcciones aleatorias; pero cuando se aplica un campo magnético externo (producido por otra fuente) suscita la alineación preferente a la dirección del campo, si bien, la mayoría se alinea en la misma dirección al campo, otros pocos núcleos se alinearán en dirección opuesta, figura 3. Esto sucede debido a que el átomo de hidrógeno tiene dos estados, el estado base (el que permite establecer a los átomos alineados con dirección al campo) y el estado excitado que satisfacen la distribución de Boltzmann, cuya probabilidad explica que la mayoría se encuentra en el estado de menor energía, los pocos que se encuentran en el estado excitado poseen la suficiente energía para oponerse al campo aplicado. El número probable depende de la intensidad del campo magnético ya que los niveles de energía se separan más cuando el campo magnético es más intenso. Al ser pocos más los alineados al campo magnético externo, se puede representar un momento magnético neto como la suma de todos los momento individuales al que en las proximas secciones

le llamaremos vector de magnetización neto.

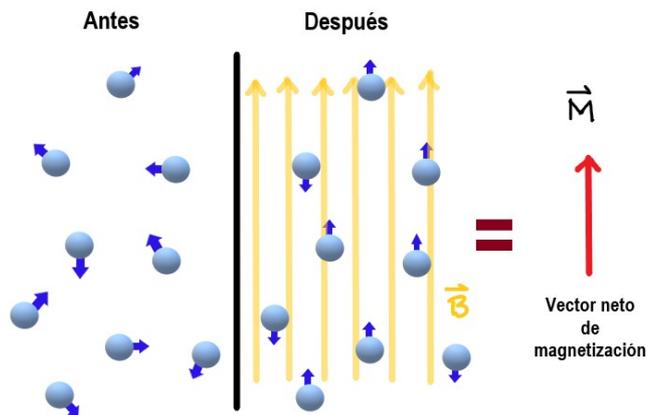


Figura 3. Alineación de espines del átomo de hidrógeno antes y después de aplicar un campo magnético externo

El valor de la magnetización neta está en función de la temperatura, de la intensidad del campo magnético externo y del número de espines; a temperaturas bajas el valor de la magnetización es mayor, cuando hay más espines por unidad de volumen el valor de la magnetización es mayor y cuando se está en presencia de un campo magnético externo intenso, también el valor de la magnetización será mayor. Por ejemplo, a temperatura ambiente en un campo magnético externo de 1.5 T el exceso de espines paralelos con dirección al campo es de 10 ppm [19].

8.2.3 Movimiento de precesión

El protón presente en el núcleo tiene momento dipolar magnético intrínseco, fue por la década de 1920 donde los experimentos revelan la presencia de este momento dipolar magnético, que es adicional al orbital, lo llamaron *espín* [21].

En tal sentido, el núcleo del átomo de hidrógeno gira sobre su propio eje, tal observación se realiza al determinar el vector de magnetización, pero al estar inmerso en un campo magnético externo el movimiento cambia y se presenta un tambaleo adicional al que se le llama *precesión*.

Para entender mejor el movimiento de precesión, se considera un objeto rodante a lo largo de un eje, como un trompo que gira en torno a su eje de simetría, cuando el trompo gira rápidamente, el eje de simetría da vueltas en torno al eje z barriendo un cono como se muestra en la figura 4. Este movimiento en torno a la vertical es la precesión.

Una pregunta interesante que se puede hacer es: ¿Por qué el trompo no se cae? Esto se debe a dos factores, primero hay que establecer que al girar el trompo tiene un momento angular asociado y dirigido a lo largo del eje su rotación. Además el centro de masa no se encuentra justo arriba de su

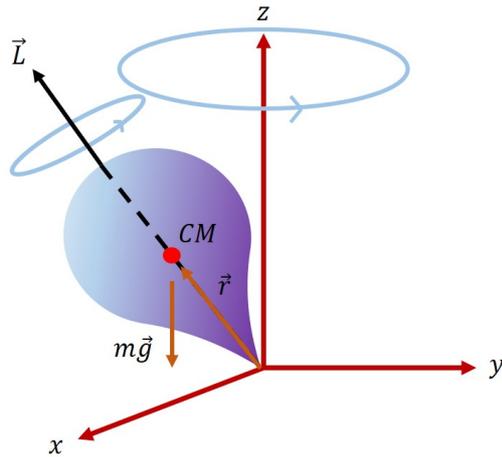


Figura 4. Objeto rotante a lo largo de un eje.

centro de giro sobre el eje z , entonces en el trompo actúa un momento de torsión neto entendido como la tendencia de una fuerza a dar vuelta a un objeto en torno a cierto eje, en esta ocasión se debe a la fuerza gravitacional presente.

Ahora bien, el momento de torsión produce un cambio en la dirección del momento angular asociado, lo que hace que el trompo gire alrededor del eje z produciendo así el movimiento de precesión.

Tal analogía antes expuesta es útil para entender que cuando se tiene un momento magnético este experimentará una torca cuando este en presencia de un campo magnético constante.

Se continúa la analogía partiendo de las dos expresiones de torca, la torca asociada a movimiento del trompo es,

$$- mgr_{cm} \vec{\times} \hat{z}, \tag{8.1}$$

y la torca sobre el momento magnético, en presencia de un campo magnético constante,

$$\gamma B \vec{\mu} \times \hat{z}. \tag{8.2}$$

Se puede apreciar que estas expresiones que corresponden a vectores van en sentido contrario entre ellas, esto se debe a que el campo gravitacional en la expresión del trompo se dirige hacia abajo provocando un movimiento positivo en contra de las manecillas del reloj, por el contrario el campo magnético presente en el momento magnético se dirige hacia arriba y su movimiento positivo es a favor de las manecillas del reloj, se pueden ver en la siguiente figura 5.

Un detalle a mencionar es la presencia de una trayectoria circular a cierta amplitud, si esta aumentará o se dieran nutaciones se deben a la presencia de campos magnéticos dependientes del tiempo.

La rapidez a la que se realiza este movimiento se le llama frecuencia

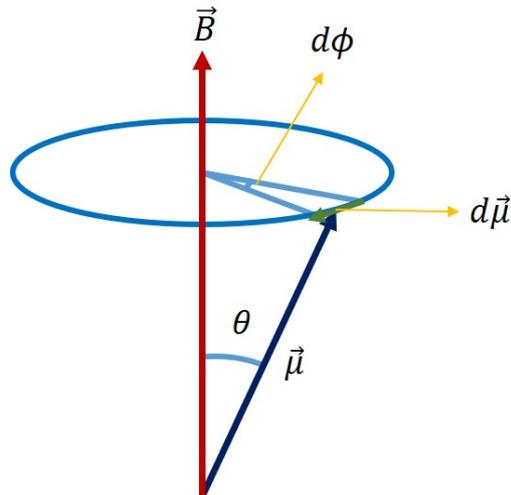


Figura 5. Dirección del momento magnético [22].

de precesión [20], es decir, representa cuantas veces precesa el núcleo por segundo.

Para obtener la ecuación que represente a la frecuencia de precesión primero se determinará la ecuación de movimiento del vector de magnetización en presencia de un campo magnético externo.

8.3 Ecuaciones de Bloch

Las ecuaciones de Bloch son ecuaciones diferenciales que explican como un núcleo, que tiene un campo magnético asociado, interacciona con un campo magnético externo; propiamente es una ecuación de movimiento del vector momento magnético dipolar $\vec{\mu}$ en términos del campo magnético externo \vec{B} ; son una clara descripción del fenómeno físico del magnetismo nuclear [18].

Para obtener las ecuaciones se parte del modelo de la espira, una espira circular de corriente I y área A , al aplicarle un campo magnético \vec{B} , cada elemento diferencial de corriente $I d\vec{l}$ sentirá una fuerza dada por la fuerza de Lorentz [22]

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \tag{8.3}$$

Esta ecuación informa que un elemento diferencial de fuerza es perpendicular a su correspondiente elemento de corriente y al campo magnético, este vector tiene dirección hacia afuera de la espira como se muestra en la figura 6, al tomar todas sus contribuciones, la fuerza total neta sobre la espira circular y de hecho en cualquier espira cerrada es cero.

Una consecuencia directa es dada por la segunda Ley de Newton [22], al no tener fuerza total, el cambio en el momento lineal también es cero,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \tag{8.4}$$

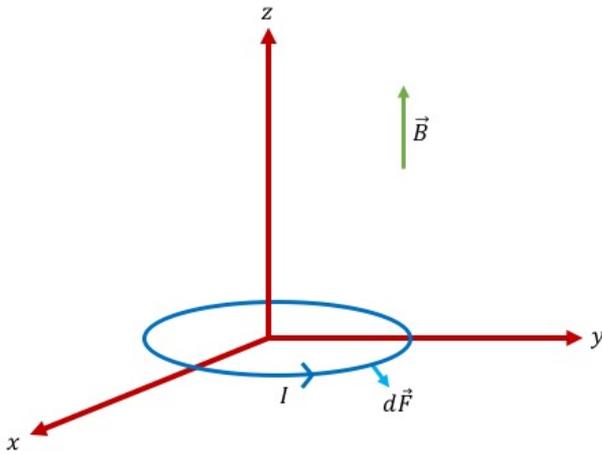


Figura 6. Vector dirigido afuera de la espira.

esto se entiende que al tener una espira inicialmente en reposo permanecerá en reposo en un campo magnético espacialmente constante; pero está puede rotar dependiendo de la orientación, la expresión que describe tal rotación se describe en términos de la torca $\vec{\tau}$, es decir, para cada elemento de fuerza se tiene:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}, \quad (8.5)$$

es evidente que al referirnos a la figura 6, cuando se usa el vector de posición \vec{r} a lo largo del plano xy, este es paralelo a el elemento diferencial de fuerza $d\vec{F}$ y por lo tanto no hay torca; pero cuando la espira se encuentra en un plano arbitrario a un ángulo del campo magnético aplicado si habrá torca, y los elementos de fuerza tenderán a regresar a la espira al plano perpendicular.

Por ello se define la torca neta de cualquier distribución de corriente en término del momento magnético dipolar o simplemente momento magnético $\vec{\mu}$ como:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad (8.6)$$

donde el vector del momento magnético de una espira es:

$$\vec{\mu} = IA\hat{n}, \quad (8.7)$$

así A es el área interior de la espira y al tener la dirección de la corriente I seguido por la regla de la mano derecha quedará un vector normal positivo o negativo, ver figura 7.

Un protón presente en el núcleo del átomo de hidrógeno responde a una torca similar. Una torca en un sistema implica un cambio en el momento angular como versión de la segunda ley de Newton para el movimiento rotatorio [22].

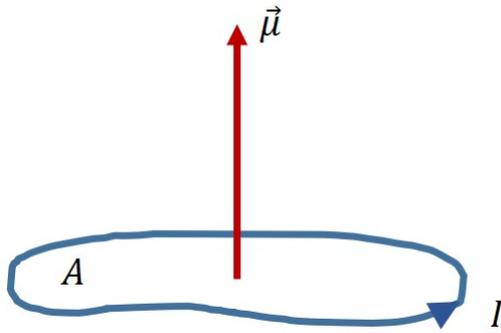


Figura 7. Vector momento magnético.

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (8.8)$$

Para encontrar la ecuación de movimiento, se sustituye la ecuación (8.6) en la ecuación (8.8) como sigue:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad (8.9)$$

La relación del momento magnético y su vector del momento angular del espín es directamente proporcional, y cuya constante de proporcionalidad es la constante giromagnética [22].

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}, \quad (8.10)$$

la constante giromagnética depende de la partícula, en este caso para el protón es:

$$\gamma = 2,675 \times 10^8 \frac{rad/s}{T}, \quad (8.11)$$

o bien, se encuentra como:

$$\varphi = \frac{\gamma}{2\pi} = 42.58 \text{ MHz/T}; \quad (8.12)$$

al despejar la ecuación (8.10) como $\vec{L} = \frac{\vec{\mu}}{\gamma}$ y al reacomodar (8.9):

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \times \vec{B}. \quad (8.13)$$

Esta ecuación es la ecuación fundamental de movimiento, es una versión simplificada de la ecuación de Bloch.

8.3.1 Ecuación de Larmor

Se harán algunas observaciones generales del movimiento de la ecuación de torca magnética dada anteriormente. El lado izquierdo de la ecuación nos presenta el cambio en el tiempo de elementos diferenciales del momento magnético $d\vec{\mu}$ que propiamente es un vector, el lado derecho informa que

este vector debe ser perpendicular a $\gamma\vec{\mu}$ tanto como a \vec{B} , algo que se sabe es que $\vec{\mu}$ no cambiará de magnitud, debido a que tenemos una área y corriente constante. La magnitud no cambia pero la dirección si, y ese pequeño cambio hace una rotación a lo largo de B , para obtener la frecuencia de rotación, o bien la frecuencia de precesión, se usa nuevamente la figura 6, se tiene que la longitud de arco $s = r\theta$ es:

$$|d\vec{\mu}| = \mu \sin \theta d\phi, \quad (8.14)$$

también se sabe que,

$$d\vec{\mu} = \gamma\vec{\mu} \times \vec{B} dt = \gamma\mu B \sin \theta dt, \quad (8.15)$$

igualando adecuadamente, usando que $A = |\vec{A}|$ se tiene:

$$\gamma B |dt| = |d\phi|, \quad (8.16)$$

despejando se obtiene la fórmula de precesión de Larmor [22]:

$$\omega \equiv \left| \frac{d\phi}{dt} \right| = \gamma B. \quad (8.17)$$

Respetando la dirección se muestra,

$$\frac{d\phi}{dt} = -\omega. \quad (8.18)$$

Si el campo es a lo largo del eje z y constante en el tiempo se tiene la solución:

$$\phi = -\omega_0 t + \phi_0, \quad (8.19)$$

donde ϕ_0 es el ángulo inicial. Tal resultado muestra una precesión constante de mano derecha a lo largo de la dirección del campo. Se define la frecuencia de Larmor para el caso de campo constante como:

$$\omega_0 \equiv \gamma B_0. \quad (8.20)$$

Expresa la relación entre el momento angular y el momento magnético, entonces, si se tiene un campo magnético cada vez más intenso se tendrá una frecuencia de precesión más alta, por ejemplo, a $1T$:

$$\omega_0 = (1T)(42.58MHz/T) = 42.58MHz. \quad (8.21)$$

sorprendentemente dice que el núcleo del átomo de hidrógeno precesa más de 42 millones de veces por segundo. Ahora, a $1.5T$ y a $3T$ respectivamente:

$$\omega_0 = (1.5T)(42.58MHz/T) = 63.85MHz. \quad (8.22)$$

$$\omega_0 = (3T)(42.58\text{MHz}/T) = 127.71\text{MHz}. \quad (8.23)$$

Resulta sumamente importante entender el movimiento de precesión y a su vez la frecuencia de Larmor (de precesión) para comprender el apellido más relevante de IRM, la resonancia.

8.4 Resonancia

Ya se hablo de los efectos que tienen los núcleos del átomo de hidrógeno en presencia de un campo magnético, por si solo el campo provoca que el vector de magnetización neto \vec{M} se encuentre en equilibrio, alineado en dirección al campo magnético externo; se vuelve interesante cuando se excita cada pequeño espín, ya que es ahí cuando se puede obtener información [19]. Esto se logra aplicando un pulso de radiofrecuencia perpendicular con intensidad igual a la frecuencia de Larmor, en este caso a la frecuencia de precesión de los núcleos del átomo de hidrógeno.

Cuando un objeto es expuesto a una perturbación oscilante que tienen una frecuencia cercana a su frecuencia natural de oscilación natural existe una transferencia de energía, o bien, si un núcleo es expuesto a una perturbación externa con una oscilación similar a su frecuencia natural, el núcleo gana energía, esto es el principio de la resonancia. [20]. El protón alineado al campo es capaz de absorber energía cuando son expuestos a ondas de radiofrecuencia, siempre que éstas tengan la misma frecuencia de precesión, es por ello la importancia de calcular la frecuencia de Larmor [16]. En el caso de que el pulso de radiofrecuencia no es entregado a la frecuencia de Larmor, no ocurre la resonancia.

En términos de mecánica cuántica, el núcleo de hidrógeno tiene espín $S = 1/2$, cuando es colocado en un campo magnético tiene dos posiciones denominadas *estados*, paralelo al campo o estado de baja energía y antiparalelo al campo magnético externo o estado de alta energía, siendo la diferencia de energía entre ambos de $\Delta E = h\gamma B$, donde h es la constante de Planck, si el protón que se encuentre en su estado base absorbe precisamente la energía entre los dos estados γB , puede sufrir una transición y pasar al estado de mayor energía [16].

Otros núcleos activos cercanos no resonarán, solo los núcleos del átomo de hidrógeno a esa energía y de hecho, precesan en fase, es decir, todos los momentos magnéticos de los núcleos del átomo de hidrógeno se sincronizan [20]. A estas alturas es razonable preguntar ¿Por qué no utilizamos los electrones en la IRM? La principal razón es la frecuencia con la cual precesa el momento magnético en presencia de un campo magnético, la frecuencia de precesión es proporcional a la constante giromagnética, es decir, la frecuencia de precesión del electrón es mucho mayor que la del protón. En un experimento de IRM campos magnéticos oscilantes son necesarios, cuya frecuencia es emparejada con la frecuencia de precesión, haciendo más viable

emparejar la frecuencia de precesión del protón; además utilizar más energía para crear tales campos oscilantes provocaría un aumento de energía depositada en el cuerpo humano.

8.4.1 Magnetización longitudinal y transversal

Macroscópicamente el vector de magnetización neta se aleja de su posición de equilibrio cuando se aplica un pulso de radiofrecuencia a la frecuencia de Larmor, si posicionamos al vector en un sistema cartesiano y se coloca al campo a lo largo de la dirección z , el vector de magnetización cambiará su dirección (ya que los espines precesan en fase) como se muestra en la figura 8 mientras dura el pulso. Al ángulo que forma el vector de magnetización con el eje z se le llama *ángulo de inclinación*, por supuesto, depende de la intensidad del campo de radiofrecuencia aplicado. Cuando se encuentra fuera de la posición de equilibrio se puede representar al vector de magnetización en dos componentes, una componente transversal al campo aplicado y otra componente longitudinal que es paralela al campo aplicado [16].

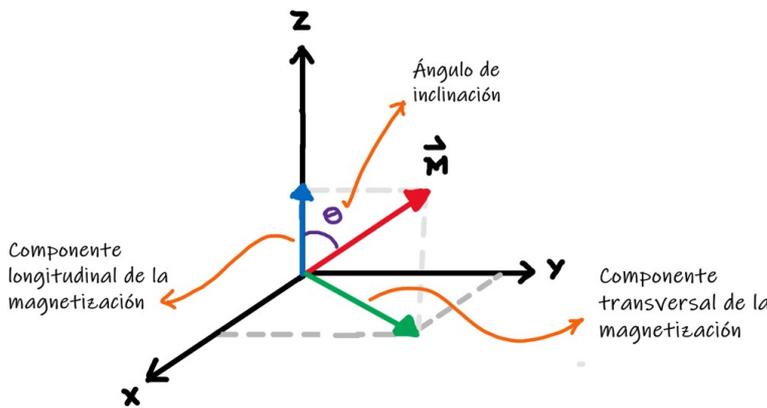


Figure 8. Componentes del vector de magnetización.

Así con $\vec{B}_{ext} = B_0\hat{z}$, entonces:

$$M_{\parallel} = M_z \tag{8.24}$$

Correspondería a su componente paralela o longitudinal y,

$$\vec{M}_{\perp} = M_x\hat{x} + M_y\hat{y}, \tag{8.25}$$

sería su componente perpendicular o transversal; al considerar estas componentes y desarrollar el producto cruz en la ecuación simplificada de Bloch se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{dt} &= 0, \\ \frac{d\vec{M}_{\perp}}{dt} &= \gamma\vec{M}_{\perp} \times \vec{B}_{ext}. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Hay que tomar en cuenta que no se consideraron la interacción con sus alrededores, esto correspondería a una modificación de las últimas ecuaciones, de hecho tales cambios son diferentes para cada ecuación, esta diferencia se relaciona con el hecho de que la magnitud de la magnetización microscópica no es fija, debido a que hay una suma de pequeños momentos magnéticos [22].

8.5 Relajación: una recuperación y un decaimiento

Una vez que termina el pulso de radiofrecuencia, el vector de magnetización neta busca regresar a su estado de equilibrio, donde solo esta en presencia del campo magnético externo y alineado, para ello cede la energía que habia captado; el proceso de volver a su estado base se le conoce como *relajación*. Al mismo tiempo que regresa a su estado de equilibrio sucede que la parte longitudinal incrementa, se conoce como *recuperación* y a la par, la componente transversal decrece, a tal decremento se le llama *decaimiento*.

8.5.1 Recuperación T_1

La *relajación longitudinal*, que explícitamente es la recuperación de la magnetización en el plano longitudinal, es causada por que la energía que el núcleo del átomo de hidrógeno se la da a sus alrededores, también le llaman *relajación espín-red* [20]. Cada vez que se incrementan las interacciones del protón con la red, provoca el cambio en la parte longitudinal de la ecuación de Bloch haciendo que el cambio M_z en el tiempo sea proporcional a la diferencia $M_0 - M_z$, donde M_0 es el valor en el equilibrio de la magnetización transversal, la constante es determinada empíricamente y representa el inverso del tiempo de relajación,

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z), \quad (8.27)$$

formalmente a T_1 se le llama “tiempo de relajación espín-red”y oscila entre decenas y miles de milisegundos para protones en un tejido humano.

La solución a la ecuación (8.27) es:

$$M_z(t) = M_z(0) \exp^{-t/T_1} + M_0 (1 - \exp^{-t/T_1}), \quad (8.28)$$

para un campo externo paralelo al eje z , es notoria la evolución exponencial del valor inicial; además el punto importante es que dado una perturbación la magneticación longitudinal re-crece [22], ver la figura 9. La figura describe que el tiempo del proceso tiende a un valor constante, pero al tener un carácter exponencial brinda una idea de que tan rápido es el proceso, se define al tiempo T_1 como el tiempo que tarda en llegar al 63% de la recuperación de la magnetización longitudinal, recordando que la energía se la brinda a su alrededores [20].

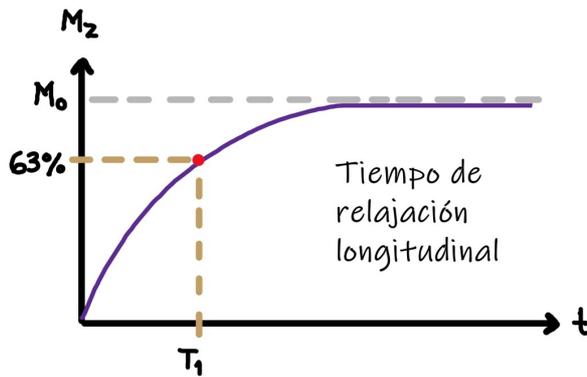


Figure 9. Magnetización longitudinal.

8.5.2 Decaimiento T_2

El *decaimiento transversal*, que es propiamente el decaimiento de la magnetización en el plano transversal, es producida por el intercambio de energía con sus núcleos vecinos, también se le conoce como *relajación espín-espín* [20]. La reducción del vector de magnetización trae consigo otro parámetro experimental T_2 llamado “tiempo de relajación espín-espín”. A la parte transversal de la ecuación simplificada de Bloch se le agrega un término [22].

$$\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = \gamma \vec{M}_\perp \times \vec{B}_{ext} - \frac{1}{T_2} \vec{M}_\perp, \quad (8.29)$$

tal término explica el decaimiento exponencial del valor inicial de la parte transversal del vector de magnetización, cuando se rota el marco de referencia se facilitará ver tal decaimiento,

$$\left(\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} \right)' = -\frac{1}{T_2} \vec{M}_\perp, \quad (8.30)$$

cuya solución:

$$\vec{M}_\perp(t) = \vec{M}_\perp(0) \exp^{-t/T_2}. \quad (8.31)$$

En la interacción espín-espín se da un efecto de desfasamiento colectivo donde no hay pérdida de energía como en el caso anterior [22]. Los espines no están forzados a permanecer en fase, la interacción de los pequeños campos magnéticos de sus vecinos provoca un cambio de frecuencia donde rápidamente cada uno empieza a desacoplarse perdiendo la fase. El tiempo de relajación T_2 está en orden de decenas de milisegundos para protones en tejido humano, y los valores son pequeños en sólidos y muy grandes en líquidos. Al graficar la ecuación (8.30) se tiene un comportamiento descendente como la figura 10, se define al tiempo T_2 como el tiempo que tarda en perder el 63% de la magnetización transversal, sin olvidar que la

energía que se pierde con sus núcleos vecinos [20].

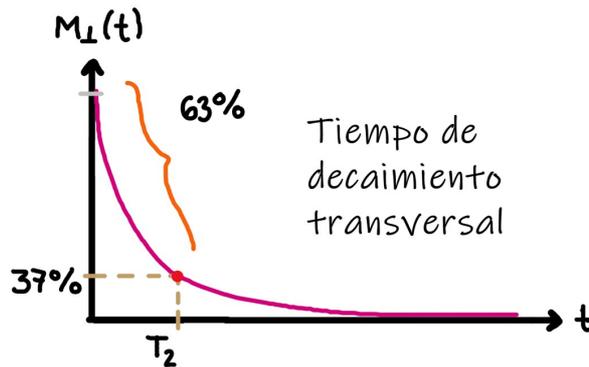


Figure 10. Magnetización transversal.

8.5.3 Diferencias entre T_1 y T_2

El proceso de relajación es un proceso conjunto, donde da una recuperación de la componente longitudinal y un decaimiento de la componente transversal del vector de magnetización neto, pero ambos procesos son diferentes e independientes.

Cuando se habla de la recuperación T_1 depende de la capacidad que tienen los átomos de liberarse de energía, no todos los núcleos del átomo de hidrógeno se recuperan al mismo tiempo, el entorno molecular ayuda a una mayor o menor facilidad en la liberación de energía. Cuando T_1 sea muy corto, la imagen se verá hiperintensa [23], es decir, cuando menos tarde el vector de magnetización en volver a su estado de equilibrio se verá con más intensidad la imagen. Por ejemplo, la grasa, la transferencia de energía es más efectiva con sus alrededores por los extremos de los ácidos grasos que tienen enlaces de carbono con frecuencias próximas a la de Larmor [19]. Contrariamente, cuando el medio donde se libera energía no permite la liberación tan fácil, como es agua libre, donde las moléculas están en continuo movimiento; se dificulta la liberación de energía, el tiempo de relajación aumenta y se tiene poca señal de RM.

El tiempo de decaimiento T_2 mide el tiempo que los núcleos del átomo de hidrógeno permanecen en fase después del pulso de radiofrecuencia, al estar en presencia de campos magnéticos vecinos favorecen el desfase [16], a diferencia de T_1 el T_2 para el agua es largo, al tardar más en desfasarse se tiene más señal de RM y las imágenes se verán hiperintensas en los tejidos que tengan agua, debido a que no hay tantas variaciones locales de campo y por tanto no existe un desfase rápido, contrariamente, cuando se tienen moléculas más grandes provocan una variación del campo magnético local propiciando un desfase rápido, no hay una buena señal de RM y se visualiza en tono oscuro. Entonces, tejidos que pueden no distinguirse usando T_1 podrían distinguirse usando T_2 , ver la figura 11.

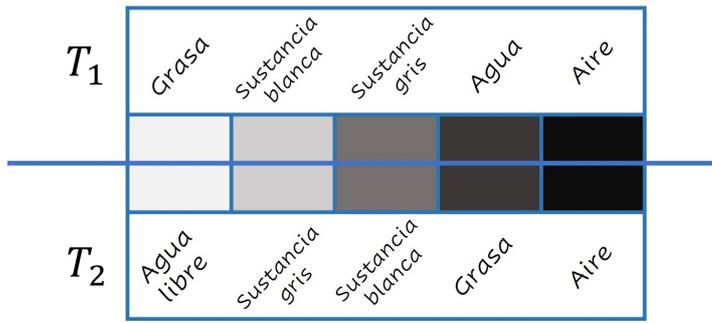


Figure 11. Tonalidades de las diferencias entre T_1 y T_2 [23].

8.6 Señal de Resonancia Magnética

Hasta este momento se han presentado las consecuencias de colocar al núcleo del átomo de hidrógeno en presencia de un campo magnético externo y aplicarle una perturbación perpendicular donde se crea una componente transversal del vector de magnetización neto; el movimiento de precesión en fase en el plano transversal es la clave para observar la magnetización. La manera de detectar este fenómeno se basa en un principio físico extraordinario que Michael Faraday en 1831 descubrió a partir de un proceso experimental [21].

8.6.1 Ley de inducción de Faraday

La ley de inducción de Faraday parte de la idea de poder detectar los cambios de corriente, o bien, los cambios en el número de líneas de un campo magnético. La forma más ilustrativa para este trabajo es pensar en dos espiras en reposo, colocadas cerca una de la otra; si se le hace pasar una corriente a una de ellas por un momento, la otra espira “sentirá” el cambio momentáneo de cuando se inicio a pasar la corriente y cuando se detuvo. En la bobina que “sintió” el cambio se indujo una corriente que se le conoce como *corriente inducida* y se dice que crea una *fuerza electromotriz inducida*.

La fuerza electromotriz fem inducida en una espira debido a el cambio del flujo magnético es:

$$fem = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{8.32}$$

donde Φ es el flujo magnético que pasa a través de la espira definido matemáticamente como:

$$\Phi = \int_{area} \vec{B} \cdot d\vec{S}, \tag{8.33}$$

y $d\vec{S}$ es el vector normal correspondiente a elemento diferencial de área.

Hay que recordar que el flujo magnético se puede considerar proporcional al número de líneas de campo magnético que pasan por el área de

la espira. La Ley de Lenz nos explica que: “El flujo del campo magnético debido a la corriente inducida se opone al cambio de flujo que produce a dicha corriente inducida ”[21]

La señal de MR es detectada usando estas ideas, es decir, si una bobina de rf es puesta cerca de un cuerpo que contiene un gran número de pequeños momentos magnéticos será detectada una señal, las bobinas de transmisión y recepción deben estar diseñadas para detectar la misma frecuencia de Larmor [22].

8.6.2 Caída libre de la inducción (FID)

La señal eléctrica que siente la antena receptora tiene una forma muy peculiar, propiamente es una señal sinusoidal amortiguada decreciente, ya que la antena está en una sola posición y la magnetización neta traza un círculo que se acerca y se aleja de la antena trazando un cono cada vez menor hasta desaparecer (donde ya solo aparece la magnetización longitudinal) a esta forma de la señal se le conoce en inglés como Free Induction Decay (FID), una vez tomada la señal se procede convertirla en una imagen [19].

9 Definición de IRM

Después de revisar los conceptos importantes de la Resonancia Magnética, resulta de interés determinar una definición en términos físicos de la Imagen por Resonancia Magnética: *Es la técnica para obtener imágenes usando el fenómeno de Resonancia Magnética, la imagen es el resultado de colocar materia en un fuerte campo magnético constante y aplicar pulsos de frecuencia que permita excitar núcleos activos elegidos (los pulsos deben tener la frecuencia de Larmor correspondiente a tales núcleos) cuya respuesta a dicha perturbación es recibida (siguiendo el principio de inducción de Faraday) por una bobina receptora, la señal recibida se interpreta para formar una imagen.*

En las secciones anteriores se mostró una revisión de los principios físicos de la Imagen por Resonancia Magnética; el análisis se enfocó en las consecuencias de excitar los núcleos del átomo de hidrógeno en presencia de un campo magnético externo. Ahora, se explicará el proceso de obtener la evidencia de tales consecuencias, se presenta una revisión de los detalles para obtener una imagen.

10 Equipo de IRM

Todo equipo tecnológico tiene componentes indispensables para su funcionamiento, el equipo de Resonancia Magnética no es la excepción; si bien, no se expondrán todos los detalles de un equipo, se presentan los elementos principales que permite adquirir una imagen.

10.1 El Imán

El imán es la parte más importante del equipo, ya que es el que causa el campo magnético externo que permite la alineación de cada uno de los vectores de magnetización. El campo magnético debe ser muy grande y homogéneo. Toman valores de $0.5 T$ hasta $7 T$ para uso clínico. Este elemento principal es el más costoso de mantener ya que para provocar un campo magnético tan intenso se usan superconductores. El electroímán está generalmente hecho de niobio y titanio, cuando son enfriados (a $4K$) estos materiales se convierten en un superconductor [16]. La bobina principal es la que da la forma de tunel cilíndrico característico de un equipo de resonancia, son generalmente de 60 cm de diámetro [18] que permite introducir a un paciente en una camilla ver figura 12. Es necesario mencionar que para mantener constante al campo magnético adicionalmente hay un sistema llamado *shimming* que ajusta las inhomogeneidades del campo, son elementos que producen campos correctores o bien campos magnéticos que suman al principal para mantenerlo constante [16].

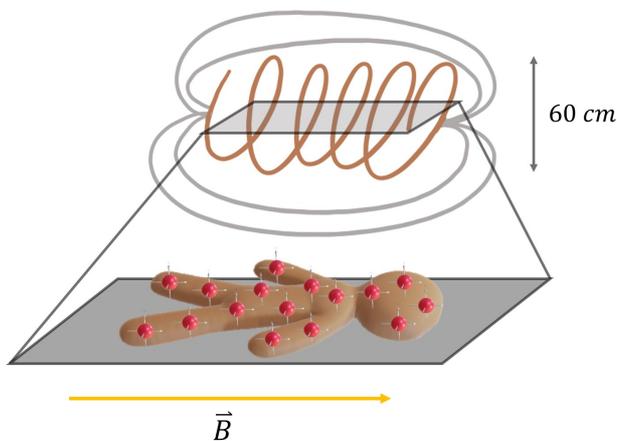


Figure 12. Bobina superconductora.

10.2 Bobinas gradientes

Dentro del cilindro de manera concéntrica son colocadas unas bobinas que hacen un gradiente del campo magnético constante ver la figura 13, estas bobinas permiten obtener la información espacial para identificar el lugar donde se busca obtener la imagen (se mostrará más adelante detalles de esta situación), se necesitan en las tres direcciones, uno para cada eje principal.

10.3 Bobinas de radiofrecuencia

10.3.1 Antenas transmisoras

Este componente envía los pulsos de radiofrecuencia a la frecuencia de Larmor para excita a los núcleos del átomo de hidrógeno, se considera el segundo componente fundamental del equipo, ya que sin esta parte no habría

IRM. El pulso se transmite de manera intermitente dependiendo de secuencia elegida, se revisarán los tipos de secuencia más adelante.

10.3.2 Antenas receptoras

Como se había mencionado antes, cuando se exponía la Ley de inducción de Faraday, está bobina debe estar cerca para captar el cambio de la corriente y así convertirlo en una señal, esta señal permite el resultado, la IRM.

El diseño de antenas ya sea transmisoras o receptoras o ambas, es complejo, tienen muchos componentes, estos deben estar muy bien sincronizados para provocar la excitación y/o para captar la señal. La antena de cuerpo o bobinas de radiofrecuencia (se encuentra concéntrica después de las bobinas gradientes) ver la figura 13, es transmisora y receptora; también existen las antenas de volumen, estas se colocan al paciente y se amoldan para obtener información de cierta región del cuerpo [16].

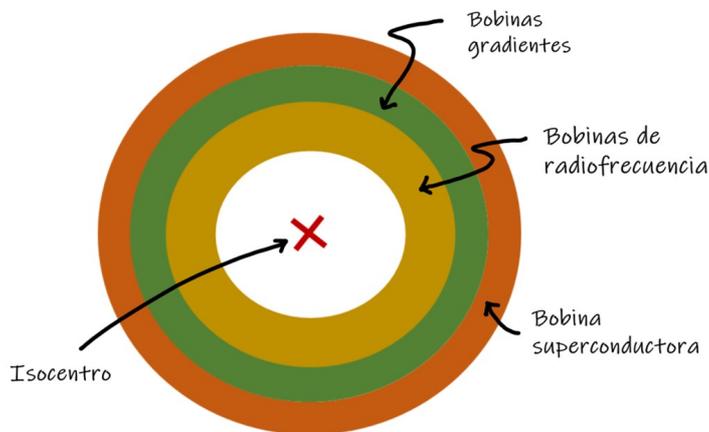


Figure 13. Posición de las bobinas y antenas.

10.4 Equipo de cómputo

El ordenador que permite la manipulación de las condiciones para provocar y recibir la señal está actualmente capacitado para realizar diferentes cosas, por ejemplo, aplicar los gradientes adecuados para obtener la imagen en la región seleccionada, indicar que secuencia de pulsos se debe realizar, cambiar los parámetros que apoyan a obtener una imagen cada vez mejor, recopilar datos y realizar los cálculos necesarios para mostrar la imagen final, entre otras cosas.

10.5 Área especial

Se busca que la imagen sea obtenida lo mejor posible, entre el juego de pulsos de radiofrecuencia y el gran campo magnético es necesario aislar el área donde se encuentra el equipo, para ello se utiliza una Jaula de Faraday que blindada el cuarto de frecuencias externas para evitar interferencias. Una Jaula de Faraday anula el efecto de los campos externos.

11 Elección de la región de la imagen

Para obtener una imagen, se parte del proceso que ya se revisó, la resonancia surge en el momento en que un pulso de radiofrecuencia es aplicado a los núcleos del átomo de hidrógeno para provocar que el vector de magnetización neto caiga al plano transversal, a su vez todos esos espines individuales entran en fase, este proceso es detectado por la bobina receptora colocada en el plano transversal. En principio, todos los núcleos de átomos de hidrógeno absorben la energía del pulso de radiofrecuencia ; es normal que surja la pregunta ¿cómo se sabe de donde proviene la señal?, o bien, ¿cómo se logra posicionar la señal en el punto correcto para obtener una imagen? en esta sección se hablará de como localizar la señal espacialmente en tres dimensiones [20].

11.1 Gradientes

Para realizar este proceso de localización, se busca alterar la homogeneidad del campo magnético externo desencadenando un cambio específico en la frecuencia de precesión de los núcleos del átomo de hidrógeno, esto es, en una región del objeto los núcleos precesarán a una frecuencia diferente que en la otra región del objeto, permitiendo identificar la zona donde se busca tomar la imagen [16].

Alterar el campo se logra con *gradientes* generados por bobinas localizadas en el tunel (ver la figura 13), el valor del campo externo es cambiado linealmente, dejando el isocentro con el valor máximo del campo magnético externo, por ejemplo en la figura 14 donde se tiene el cambio lineal a lo largo del eje x en un campo constante de $1 T$, si el campo aumenta a $1.0005 T$ la frecuencia de Larmor en esa posición será $42.60 MHz$ o bien, cuando disminuye el campo a $0.9995 T$ su frecuencia es $42.55 MHz$.

Esta clase de gradientes son posicionados a lo largo de los tres ejes, el *gradiente z* altera la intensidad del campo magnético a lo largo de *eje Z* , el *gradiente y* altera la intensidad del campo a lo largo del *eje Y* y el *gradiente x* altera a lo largo del *eje X* . Estos gradientes pueden ser activados y desactivados a conveniencia para establecer una región específica y así realizar una selección de corte [20].

11.2 Selección de corte

Elegir el lugar donde se quiere la imagen es posible activando y desactivando los gradientes anteriores, una vez alterado el campo magnético constante se identifica la región a lo largo del eje seleccionado, ya que se conoce la frecuencia de Larmor a la que se excitan los núcleos del átomo de hidrógeno de esta región se envía un pulso de radiofrecuencia a esa energía logrando determinar un corte anatómico concreto, es decir, una rebanada de la región determinada.

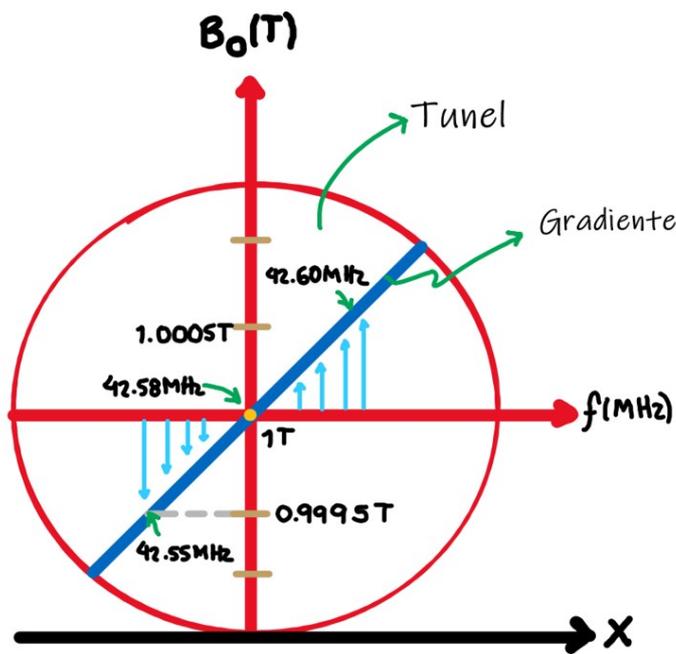


Figure 14. Gradiente lineal en un campo de 1 T.

Elegir una rebanada a lo largo del *eje Z* se dice que se selecciono un *corte axial* ver la figura 15, seleccionar un corte a lo largo del *eje X* se le llama *corte sagital* y a lo largo de *eje Y* se selecciona un *corte coronal*; si se pretende un corte oblicuo se usa la combinación de los ejes para obtenerlo [20].

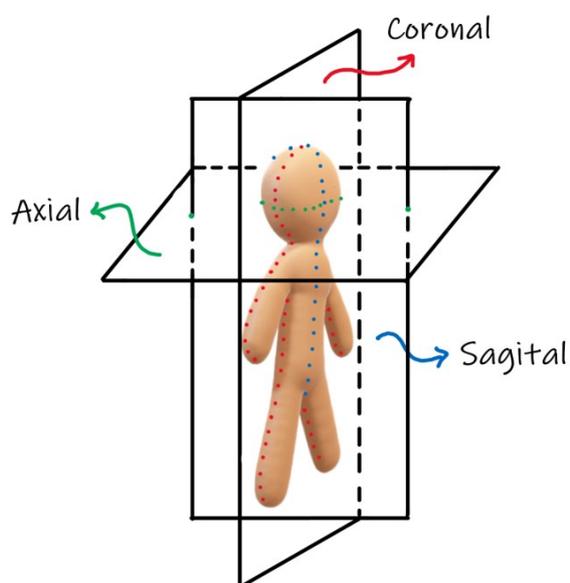


Figure 15. Corte axial, coronal y sagital.

11.3 Tamaño del corte

En este punto ya es posible identificar un corte concreto, en este apartado resulta de interés elegir un tamaño de ese corte, es decir, que tan delgado o grueso se requiere.

Para ello se excita una banda de núcleos que se pueda identificar el punto inicial al punto final donde se quiere el corte. La pendiente del gradiente de selección de corte determina que tan diferentes serán las frecuencias de Larmor de los núcleos, mientras más pronunciada la pendiente hay más diferencia en frecuencias entre cada punto, contrariamente, cuando la pendiente es poco pronunciada no hay tantas diferencias entre puntos, esto permite determinar un ancho de banda, que es el rango de las frecuencias a la que se debe excitar el corte [20].

Si se tiene un ancho de banda de transmisión constante, cortes delgados se obtienen con una pendiente pronunciada y cortes gruesos con una pendiente no tan pronunciada, ver la figura 16.

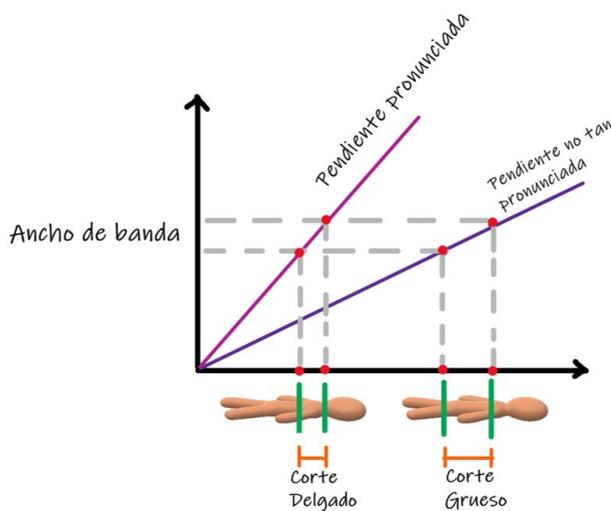


Figure 16. Tamaños de corte.

11.4 Codificación de frecuencia

Seleccionar un corte y el grosor de este nos permite elegir el volumen de donde se necesita obtener la imagen, el corte obtenido debe ser tal que se pueda identificar la posición de, por ejemplo, un órgano. La señal de RM obtenida debe ser capaz de diferenciar los datos recopilados y posicionarlos en su lugar correcto; para ello se realiza la codificación de frecuencia y fase que permite la identificación específica de la señal en un plano.

Se hace uso de otro gradiente que se llama gradiente de codificación de frecuencia que está posicionado a lo largo del eje largo de la zona anatómica excitada [16], al activarse el gradiente se modifica linealmente de la intensidad de campo y por tanto la frecuencia de precesión de la señal a lo largo del gradiente. Esto permite ubicar la señal de acuerdo a su frecuencia. [20],

la amplitud de banda de frecuencias admitidas es a lo que se le conoce como **ancho de banda**. Usualmente se elige el eje z como eje largo en cortes coronales y sagitales debido a la posición del paciente en el resonador, para cortes axiales se suele utilizar el eje x para realizar la codificación de frecuencia ya que es el eje horizontal del magneto.

De igual forma que antes, la inclinación de la pendiente del gradiente determina el tamaño a lo largo del eje mayor, o bien, el tamaño de la anatomía cubierta, a esto se le conoce como **campo de visión FOV** por sus siglas en inglés. A medida de lo posible el FOV debe ajustarse al tamaño de las estructuras anatómicas [23].

11.5 Codificación de fase

Ya que la imagen se encuentra en un plano, es necesario codificar el otro eje para localizar la señal, es por ello que el gradiente de codificación de fase ayuda al posicionamiento a lo largo del eje corto anatómico. Al activarse cambia la intensidad del campo provocando un cambio lineal de frecuencia de precesión a lo largo del eje pero también cambia la fase acumulada de los momentos magnéticos, es decir, cuando se aplica el gradiente de codificación de fase hace que cambie la velocidad de precesión cambiando su fase, cuando se desactiva, los núcleos ya no vuelven a su fase anterior [20]. La pendiente del gradiente de codificación de fase determina el grado de cambio de fase a lo largo del eje de codificación de fase. Para cortes coronales se toma el eje corto como el eje horizontal del magneto (eje x) y para cortes sagitales y axiales se toma el eje vertical del magneto (eje y).

12 Colección de datos para formar la imagen

Como ya se vió arriba, los gradientes se activan y desactivan a conveniencia, estos cambios provocan campos magnéticos variables que permiten la localización de los espines en determinado tiempo, la información de las frecuencias y las fases de los espines, es decir, los datos de cada posición de la señal se guardan después de la aplicación del pulso como puntos en una cuadrícula a la que se le llama *espacio k* [16].

12.1 Espacio k

El espacio k es una malla de ejes perpendiculares cuyas coordenadas son fase y frecuencia, en el eje horizontal esta el eje de las fases y en el eje vertical el de las frecuencias, el espacio completo esta en el dominio de frecuencia espacial ya que ahí se almacena la información sobre la frecuencia de una señal obtenida [20]. El número de codificaciones de fase y codificaciones de frecuencia que contiene el espacio k definen la **matriz de la imagen**, donde los datos están registrados en unidades que cubren a todo el campo

de visión, en adquisiciones en el plano se le llama *pixel* a la unidad y en adquisiciones tridimensionales a la unidad se le conoce como *voxel* (una cara del voxel tiene el tamaño del pixel y su anchura esta determinado por el grosor del corte), mientras más unidades más información de la imagen hay [16]. El espacio k no es la imagen, es solo un conjunto de datos, cuando se usa la técnica matemática *Transformada Inversa de Fourier* para procesar los datos se produce una imagen, ver la figura 17.

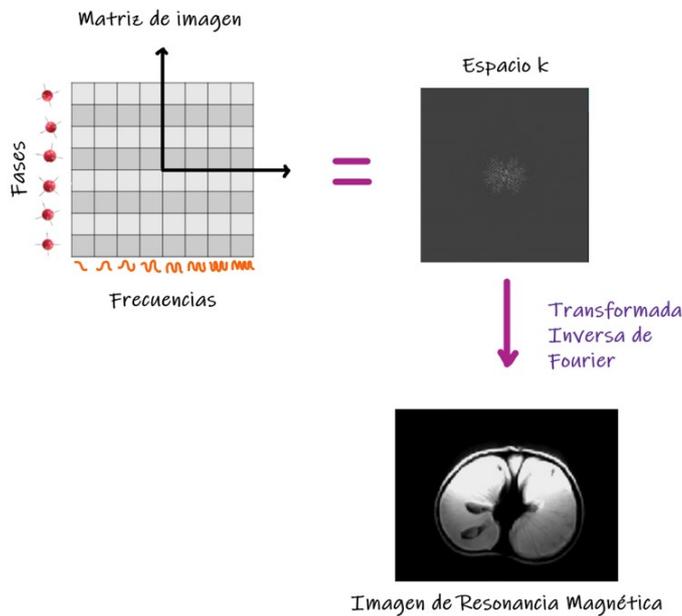


Figure 17. Espacio k .

En el centro se localiza la frecuencia espacial baja que brinda información correspondiente a la forma general de la imagen, como el contraste y conforme se aleja del centro, en la periferia del espacio k , se tienen las frecuencias espaciales altas que son las que llevan la información de los detalles como la definición del borde de los objetos, ver la figura 18. Como ya se mencionó, para cambiar la información del espacio k en una imagen se usa la Transformada de Fourier, este cálculo matemático convierte datos en el dominio de frecuencia a datos en el dominio espacial, es decir, asigna un color de la escala de grises a cada pixel de la imagen [24].

Cada línea del espacio de frecuencias espaciales se llena después de un pulso de radiofrecuencia (donde para medir la señal se activa el gradiente de codificación de frecuencia) esto significa que las señales se adquieren a intervalos de tiempo discreto, así el espacio supone la representación digital de los ecos recogidos por la antena receptora durante el proceso de relajación; después se aplica el gradiente de codificación de fase donde se produce un desplazamiento vertical en el espacio k , así cuando se vuelva a enviar el siguiente pulso se empieza a llenar otra línea (diferente a la primera) del espacio k . Este proceso se repite hasta que quede lleno. La información de

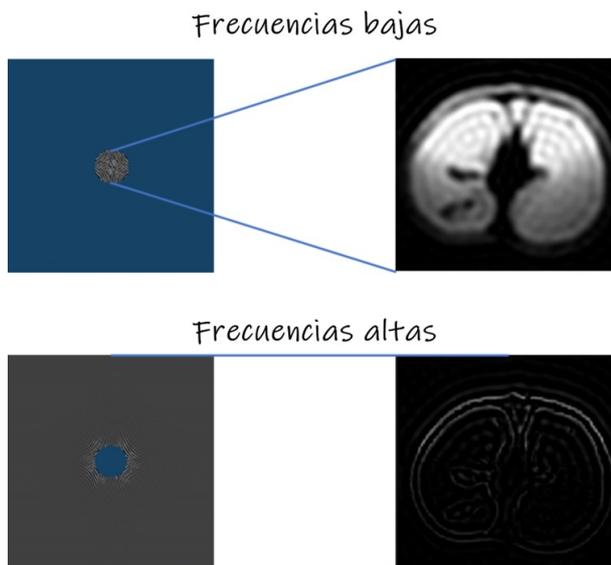


Figure 18. Posición de las frecuencias altas y bajas en el espacio k.

cada pixel de la imagen se encuentra codificada en cada punto del espacio k y al revés [16].

Hay otras formas de llenar el espacio k, algunas secuencias incluso obtienen varias líneas en cada disparo, reduciendo el tiempo del estudio; también existe un llenado en espiral y radial, suelen usarse en aplicaciones específicas como estudios coronarios entre otros, la ventaja que se tiene en espiral es que se obtiene un muestreo general en un disparo continuando a la periferia [25].

13 Secuencias de pulsos básicas

Una de las grandes ventajas de la IRM es la capacidad de distinguir diferentes tejidos, esta técnica logrará una mejor visualización de sus diferencias físicas comparada con otras técnicas de imagen [20]. Una de las cosas más importantes para la distinción y mejoría de la imagen es la elección correcta de la secuencia de pulsos que otorgue una imagen deseada.

Una secuencia de pulsos es el uso de más de un pulso de radiofrecuencia (igual o diferente) a determinado tiempo, y de una forma periódica que permita la adquisición de los datos de una manera particular. Existen muchas secuencias de pulsos pero la mayoría son variantes de las secuencias básicas. Los elementos que son necesarios para realizar una secuencia de pulso o secuencia de adquisición son: la utilización de pulsos de radiofrecuencia y los gradientes de codificación espacial [19].

Antes de realizar una revisión de las secuencias elementales, es preferible entender algunos parámetros que ayudarán a definir las secuencias. Los parámetros de tiempo son dos: **tiempo de adquisición** (TA) y **tiempo de repetición** (TR); el primero es el tiempo total que se tarda una se-

cuencia en completar la adquisición de los datos, este tiempo se busca que sea el menor posible que permita obtener la imagen buscada pero que a su vez no deje al paciente mucho tiempo dentro del resonador, no se ha mencionado, pero se necesita que el paciente permanezca inmóvil durante el procedimiento cuando se están aplicando los gradientes de codificación para determinar de donde viene la señal de determinados espines, el movimiento del paciente interfiere dando ubicación errónea de donde proviene la señal. El segundo es el tiempo que pasa entre la aplicación de un pulso y la aplicación del siguiente, este parámetro ayuda a caracterizar el contraste entre los tejidos, hay que recordar que una vez que se aplica un pulso de radiofrecuencia la magnetización longitudinal necesita un tiempo de recuperación; este tiempo indica la relajación longitudinal que se produce entre un pulso y otro. Si bien hay otros parámetros de tiempo se irán definiendo en la explicación de las secuencias de pulso [16].

Las secuencias de pulso se clasifican en la forma de obtener el **eco**, es decir, es el momento en que se da el pico de la señal inducida; su repetición va desde ciclos de 64, 128, 256, 512 ó 1024 veces para llenar el espacio k y lograr reconstruir la imagen.

13.1 Secuencia Espín-Eco

La mayoría de los autores concuerdan que esta secuencia de pulsos es la más elemental de todas, su esquema básico la convirtió en una de las secuencias más utilizadas, actualmente en su forma clásica su uso es limitado por su tiempo largo de adquisición; fue desarrollada por Han en el año de 1950.

Para explicar mejor como se lleva a cabo esta secuencia recordemos un poco la situación física de los espines; los núcleos del átomo de hidrógeno se caracterizan con su vector de magnetización, cuando se encuentran en presencia de un campo magnético constante la mayoría se alinea en dirección del campo, cuando se aplica un pulso de radiofrecuencia al que se le llama de 90° (un pulso de energía y duración específica que provoque que el vector de magnetización recorra un ángulo de 90°) provoca que el vector de magnetización neto caiga al plano transversal, en ese punto todos los pequeños vectores de magnetización que en principio están precesando a la frecuencia de Larmor se desfasan y por ello la componente transversal de la magnetización disminuye.

Partiendo de esto la secuencia de Espín-Eco comienza con un pulso de 90° y después de un tiempo se aplica un pulso de 180° (un pulso de energía y duración específica que provoca que el vector de magnetización recorra un ángulo de 180° , es decir, que el vector del momento magnético neto da medio giro invirtiendo su dirección) donde los momentos magnéticos individuales que se estaban desfasando después del pulso de 90° se vuelvan a refasar volviendo a aumentar la magnitud de la componente transversal de la magnetización ver la figura 19.

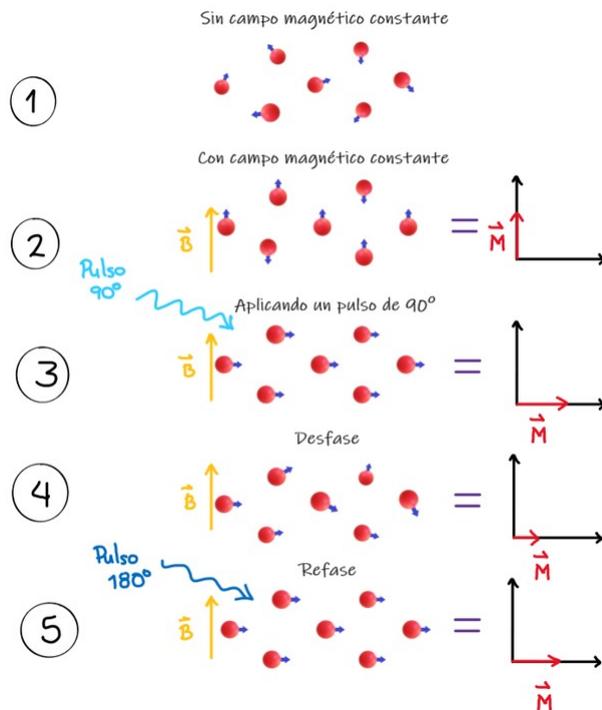


Figure 19. Refase que causa el pulso de 180° .

El pulso de 180° se comporta como una pared que interviene en la precesión de los pequeños espines, una vez que el pulso interacciona provoca un retorno, los que iban más rápido deben recorrer una mayor distancia y los que iban más lento la poca distancia que recorrieron; al final se vuelven a juntar en un mismo punto; es común usar la analogía de la carrera de una tortuga y una liebre, cuando comienza la carrera la liebre no demora mucho en recorrer una gran distancia y la tortuga con su lento movimiento recorre una menor distancia que la liebre, pero en un momento (cuando se dá el pulso de 180°) se les pide a ambos que regresen al punto de llegada, cada uno con su velocidad da media vuelta y regresan, la liebre debe recorrer toda la gran distancia y la tortuga su poca distancia, pero como tienen el mismo tiempo para volver y la misma velocidad con la que iniciaron, fácilmente ambos vuelven al lugar de partida (el refase de los espines) [26].

Al momento en que existe el refase, es decir, el aumento de la señal provocado por el pulso de 180° se le llama *eco*, es por ello el nombre de la secuencia, el tiempo que pasa aplicando el pulso de 90° y el eco se le llama *Tiempo Eco = TE*, exactamente a la mitad en $(TE/2)$ es en donde se aplicó el pulso de 180° . Existen secuencias en donde se aplica más de un pulso de 180° y se les conocen como secuencia multieco.

El gradiente de selección de corte se activa cuando se aplican los pulsos de radiofrecuencia, en 90° y en 180° , ya que esto permite aplicar el pulso el lugar correcto; después de aplicado el primer pulso se activa el gradiente de codificación de fase que provoca el desfase de los espines cuando se deja de aplicar el gradiente no vuelven a su fase inicial. Cuando termina este

proceso se aplica el gradiente de codificación de frecuencia, este gradiente adiciona un desfase a los espines que habian sido desfasados por el gradiente de codificación de fase alterando la codificación, para corregir eso se aplica dos veces, un gradiente de desfase y un gradiente de lectura en el momento del eco. En proceso se repite en cada eco para llenas las columnas y filas del espacio k, ver la figura 20.

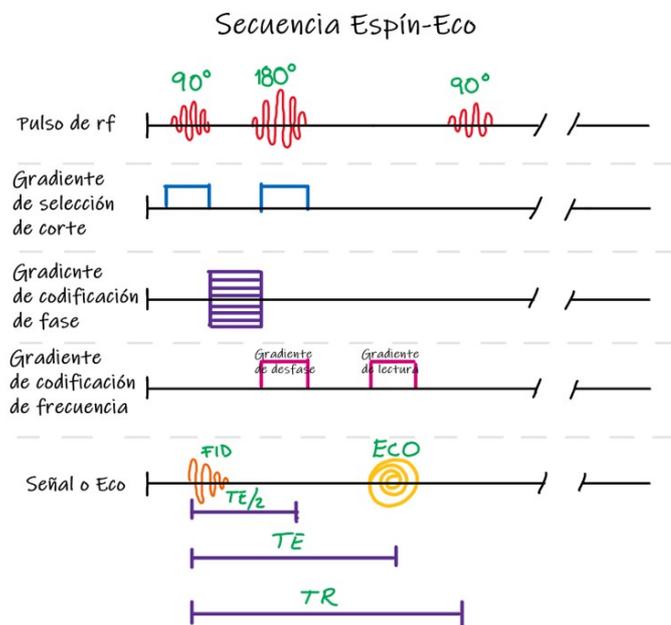


Figure 20. Secuencia Espín-Eco.

Hay que recordar que la secuencia ayuda a obtener una señal específica, esta secuencia permite encontrar un manejo de contraste cuando los parámetros de TR y TE son variados. Para obtener una imagen potenciada en T_1 se obtiene combinando un TR corto (de 300 a 700 ms)¹ y un TE corto (de 10 a 25 ms), cuya característica se basa en que se intensificará la señal de tejidos con T_1 corto, como la grasa y poca intensidad los tejidos con un T_1 largo (se verán oscuros). Una secuencia Espín-Eco potenciada en T_2 se obtiene considerando un TR largo (de 1500 a 3000 ms) y un TE largo (de 80 a 100 ms) la imagen muestra diferencias entre tiempo de T_2 , con T_2 largo se mostrará más brillante la región donde generalmente tienen contenido de agua libre como los procesos patológicos. Por último, imágenes potenciadas en densidad de protones DP, se obtienen con TR largo (de 1500 a 3000 ms) y TE corto (de 10 a 20 ms) aquí los tejidos con mayor concentración de protones por vóxel mostrarán más señal (se verán brillantes) [19].

Existen secuencias híbridas que se basan en esta secuencia Espín-Eco, como la **secuencia Espín-Eco rápida** o **Turbo Espín-Eco** que consiste en la aplicación múltiple de pulsos de 180° , produciendo un tren de ecos en donde en un mismo tiempo de repetición se obtiene más llenado del

¹Valores considerados en equipos de 1.5 T

espacio k ya que hay más gradientes de codificación de fase activándose, su importante ventaja es la reducción del tiempo de adquisición, y uno de los inconvenientes de esta secuencia es su sensibilidad a los artefactos de movimiento [16].

Una versión de la secuencia Espín-Eco utilizada para obtener una fuerte ponderación T_1 es la **secuencia Inversión-Recuperación**, esta secuencia realiza el mismo paso que la secuencia Espín-Eco rápida pero antes de comenzar aplica un pulso de 180° para invertir la magnetización de todos los tejidos; así la magnetización longitudinal parte de un valor doble para recuperarse, si bien pasa por un valor nulo esto permite anular la señal de determinado tejido, por ejemplo, para tejidos con T_1 corto, es posible anular la señal de esos tejidos (como la grasa) y los demás siguen teniendo señal, así si en este momento se toma la secuencia de adquisición se obtiene una imagen donde no hay señal de la grasa [19].

13.2 Secuencia Gradiente Eco

Se crea la siguiente secuencia buscando acortar el tiempo de adquisición. Existen dos maneras de acortar el tiempo de exploración, una de ellas es realizando un llenado parcial del espacio k y otra es acortando el TR, es decir, la duración entre ciclos. Esta secuencia se basa en acortar el TR con la aplicación inicial de ángulos menores a 90° y el uso de gradientes bipolares en lugar de pulsos de 180° , estos gradientes se aplican en la dirección de codificación de frecuencia.

La palabra bipolares hace alusión a que se aplica un gradiente que causa el desfase de los espines y luego cambiando el sentido del gradiente causar un refase de los mismos, en esta ocasión este proceso es lo que permite dar lugar al eco. Después el gradiente de selección de corte activado en la aplicación del pulso de menor a 90° da lugar la FID, se activa el gradiente de codificación de fase y luego el gradiente bipolar de codificación de frecuencia, cuyo segundo lóbulo coincide con el eco para recoger los datos, ver la figura 21

Al ángulo menor de 90° se le llama *flip angle* (FA) en inglés y varía entre 10° a 70° , a mayor ángulo mayor componente transversal de la magnetización teniendo mejor señal, pero a mayor ángulo aumenta el TR, es por ello que ángulos pequeños permite tener TR cortos pero menor señal. Otra característica es que los desfases producidos por la falta de homogeneidad del campo magnético externo no se corrigen y por tanto se tiene un contraste en T_2^* en lugar de T_2 [16].

Esta secuencia es buena para obtener un buen contraste con el hueso y cartílago, estudios de abdomen y angiografías por el uso de sus tiempos cortos [16], esta es su principal ventaja, ser una secuencia rápida con ponderaciones en T_1 , T_2^* (tiempo de relajación que depende de espín-espín y las heterogeneidades del campo magnético principal) o densidad de pro-

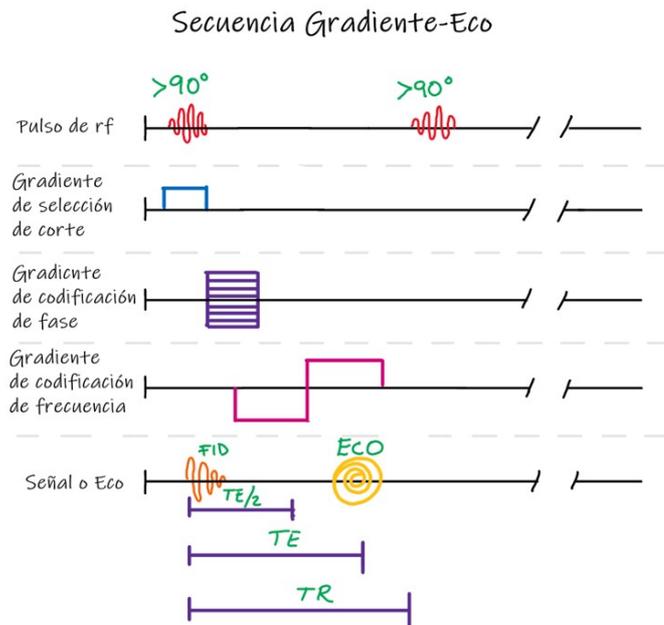


Figure 21. Secuencia Gradiente-Eco.

tones. A diferencia de la secuencia espín eco, esta secuencia resulta un poco más ruidosa debido al uso de los gradientes y resulta muy sensible a la susceptibilidad magnética.

Algo muy curioso que ocurre al utilizar TR cortos es que llega un momento en que se encuentra una coexistencia de magnetización longitudinal y una magnetización transversal a la que el autor [19] llama residual, a este hecho se le conoce como *estado estacionario* y se dividen en dos grupos, incoherentes y coherentes. Las **incoherentes** usan gradientes y pulsos para eliminar la magnetización residual, siendo estas secuencias ultrarrápidas, una de ellas permite la obtención de imágenes de fase y de fase opuesta útiles para detener estructuras con grasa. Y las **coherentes** donde al final de cada ciclo la magnetización transversal residual se mantiene o se busca refasar de manera parcial o total usando proceso de refase. Una de ellas donde el refase es total permite la aplicación clínica en estudios cardíacos de función con reconstrucción en modo cine (que se explicará más adelante).

14 Factores de calidad de la imagen

Se ha visto que la IRM cuenta con un proceso complejo, un objetivo primordial para hacer uso de esta técnica en la clínica es obtener una imagen correcta la cual sea funcional para un diagnóstico médico, existen diversos parámetros de apoyo que ayudan a una buena calidad de la imagen. Una imagen nítida con contraste adecuado, una buena resolución y el tiempo de adquisición sea tolerante son los factores que deben estar en equilibrio para una imagen adecuada.

En este apartado se definen las características responsables de la calidad de la imagen.

14.1 Señal/Ruido

La señal que se obtienen de una región del cuerpo en forma de voltaje que se induce en la antena receptora, no es una señal complemente aislada, también trae consigo cierto nivel de ruido que viene de las imperfecciones del sistema, el proceso de adquisición de la imagen y factores que incluyen al paciente o al ambiente [19].

Resulta útil definir el cociente de estos dos, como:

$$SNR = \frac{Señal}{Ruido}, \quad (14.1)$$

las siglas SNR vienen de sus correspondientes palabras en inglés (Signal to noise ratio), este cociente representa la relación entre la señal recibida y la media de la amplitud del ruido; es notorio que este parámetro es directamente proporcional a la señal, si la señal aumenta, entonces SNR aumentará e inversamente proporcional al ruido, mientras más pequeño sea, el SNR será más grande. En principio, esta relación expresa que mientras más señal, mayor SNR y así mejor imagen, pero esto no siempre se cumple, por ello se consideran otros parámetros que también aumentan el SNR [20].

- *Densidad de protones en el área de estudio:* Un tejido con gran cantidad de protones proporcionará más señal.
- *Tamaño del píxel o voxel:* Una unidad con más grande contendrá mayor número de núcleos de átomo de hidrógeno. Así que cualquier parámetro que cambie el tamaño de la unidad, cambia el SNR.
- *Parámetros en la secuencia (TR, TE y ángulo de inclinación):* Tener un TR que permita la recuperación del vector de magnetización ayuda a tener una buena señal; un TE que permita recoger el eco de la señal a tiempo y el ángulo de inclinación que determina a cantidad de magnetización que se genera, en secuencias espín eco al usar 90° hay más señal que en secuencias gradiente eco donde la señal es menor al usar ángulo de inclinación menor a 90°.
- *Número de adquisiciones:* Si se aumentan las veces en que se repite recoger los datos aumenta el SNR.
- *Ancho de banda:* Cuanto mayor sea el ancho de banda mayor será el ruido (por tener altas frecuencias), lo ideal es disminuir la amplitud del ancho de banda [23].
- *Bobina:* Si no es la correcta se puede originar ruido [16].

14.2 Resolución Espacial

La resolución espacial es la definición de la imagen, o bien, una manera de medir la capacidad de diferenciar dos estructuras proximas de manera nítida, mientras más clara y precisa la imagen mayor resolución espacial [16].

A consecuencia de lo anterior la resolución espacial depende del tamaño de la unidad pixel o voxel, figura 22, en el caso bidimensional, el pixel depende del FOV y del tamaño de la matrix,

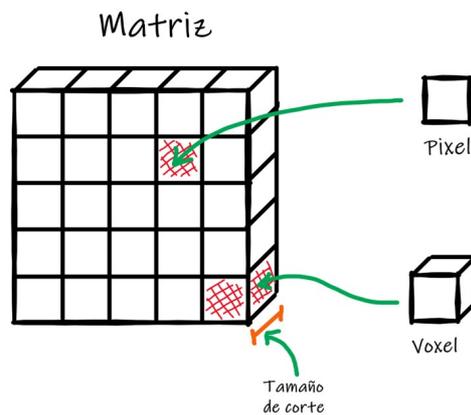


Figure 22. Representación de pixel y voxel.

$$\text{Tamaño del pixel} = \frac{FOV}{\text{Tamaño de la matriz}}, \quad (14.2)$$

en el caso tridimensional dependerá del tamaño del pixel y del grosor de corte,

$$\text{Tamaño del voxel} = \text{Tamaño del pixel} \times \text{Grosor del corte}. \quad (14.3)$$

Por consiguiente, para tener una buena resolución espacial hay que disminuir el FOV, o bien, aumentar el tamaño de la matriz, reducir grosor de corte; tales cambios provocan una disminución del SNR [19].

14.3 Tiempo de Adquisición

Es el tiempo de exploración que se requiere para realizar la obtención de los datos, es decir, el tiempo necesario para que se acomplete la secuencia, se busca que este parámetro sea el mínimo suficiente para tener la paciente el menor tiempo en el resonador, mientras más tiempo permance ahí hay más probabilidades de que se mueva y por tanto disminuir la calidad de la señal [20].

El tiempo de adquisición es directamente proporcional al TR, número de codificaciones de fase, número de adquisiciones, disminuye cuando la secuencia es rápida y aumenta cuando se obtienen secuencias 3D [16].

Capítulo 3.

De la física de fluidos hasta Flujo 4D

En el capítulo anterior se describieron los principios físicos de la técnica de Imagen por Resonancia Magnética hasta el proceso de obtención de una imagen, en este capítulo se presenta la revisión teórica de las características físicas para describir a los fluidos y como son aplicables para describir el movimiento de la sangre en las venas. La IRM usa algunas características para la obtención de imágenes creando contraste entre el movimiento de la sangre y los tejidos estáticos (Angiografía por Resonancia Magnética); esta técnica resulta tan especial y útil para obtener imágenes del corazón. El corazón es el órgano principal del sistema circulatorio, obtener imágenes tridimensionales de sus paredes vasculares y patrones de flujo sanguíneo en el tiempo es la peculiaridad de la secuencia de Flujo 4D.

Sección 15. Física de fluidos

Sección 16. Turbulencia

Sección 17. Hemodinámica

Sección 18. Anatomía del corazón

Sección 19. Resonancia Magnética Cardiovascular

Sección 20. Flujo 4D

15 Física de Fluidos

La estructura de la materia se clasifica de forma general en tres estados: sólido, líquido y gaseoso; intuitivamente se sabe que los sólidos tienen la característica principal de tener una forma definida, en cambio los líquidos y los gases no tienen un volumen ni forma definidos, su estructura molecular permite que adopten la forma del recipiente que los contiene, por esta razón se les conoce como *fluidos*. Un fluido “es un conjunto de moléculas que se ordenan aleatoriamente y se mantienen juntas a partir de fuerzas cohesivas débiles y fuerzas que ejercen las paredes de un contenedor”[27].

La física de fluidos esta clasificada en dos grandes ramas, la hidroestática y la hidrodinámica, la primera es la parte de la física que estudia los fluidos en reposo, mientras que la segunda tiene el objetivo de describir el movimiento de los fluidos; propiamente se fija en un elemento de volumen de fluido que cumpla la hipótesis del continuo, es decir, toma un conjunto sin prestar atención a las moléculas individuales que la forman.

La hipótesis del continuo dice que el elemento de volumen debe ser grande para que contenga un gran número de partículas, pero relativamente pequeño para tratarlo como un punto al que se le aplican reglas de

cálculo diferencial [28]. La hidrodinámica ignora la estructura molecular y se centra en sus características macroscópicas que se manifiestan cuando las dimensiones del fluido son mucho mayores que la distancia intermolecular y cuando el número de moléculas es de varios órdenes de magnitud [?].

15.1 Propiedades de los fluidos

Considerar al fluido como un continuo permite elegir las variables macroscópicas adecuadas para describir su movimiento. Aquí se explican algunas propiedades de interés para este trabajo que ayudan al estudio del movimiento del fluido.

Presión

Dado un volumen de fluido aislado sobre él interactúan diferente tipo de fuerzas, las fuerzas de superficie tienen una componente paralela y perpendicular a la aplicación sobre la superficie, cuando estas últimas son de carácter de compresión, dicho esfuerzo es al que le llaman presión [29]. La presión es la cantidad física que se obtiene al relacionar la fuerza aplicada perpendicularmente sobre alguna superficie de área específica, los fluidos están sometidos a diferentes variaciones de presión dependiendo en donde se encuentren y a su vez ellos aplican presión uniformemente en todas las direcciones a cada volumen inmerso en el fluido [30].

Densidad

La densidad es una medida de la cantidad de masa presente en un volumen determinado, se define en este caso como la masa de fluido presente en una unidad de volumen, matemáticamente:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (15.1)$$

La densidad de los fluidos depende de la temperatura y la presión, para los líquidos es más importante la dependencia con la temperatura y para los gases la dependencia con la presión [31].

Viscosidad

La facilidad con la que se mueven los fluidos lo describe la viscosidad, esta característica mide las fuerzas de rozamiento interno que tiene el fluido; si un fluido tiene la capacidad de fluir libremente se dice que tiene poca viscosidad; de lo contrario, si fluye lentamente el fluido tiene gran viscosidad.

Viscosidad dinámica. A medida que hay movimiento se presenta en el fluido un esfuerzo cortante τ , cuando esta fuerza es proporcional a la rapidez de deformación $\frac{dv}{dy}$, la constante necesaria para quitar la proporcionalidad se le conoce como viscosidad dinámica μ . Para un flujo unidimensional aplica [32]:

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (15.2)$$

De esta forma μ tiene unidades de $N.s/m^2$ o bien, su unidad estandar de $Pa.s$, pero cuando se usan las unidades de densidad conviene expresarlo como $kg/m.s$.

Viscosidad cinemática. Se define como el cociente de la viscosidad dinámica entre la densidad del fluido:

$$\nu = \mu/\rho \quad (15.3)$$

Sus unidades se simplifican a m^2/s . Esta definición resulta útil para algunos cálculos de las ecuaciones en fluidos.

Campo de velocidades

La magnitud de la velocidad en cada punto del fluido es muy variable y evoluciona con el tiempo, propiamente se determina la velocidad del centro de masa de las partículas presentes en el elemento de volumen. Para determinar su velocidad local $\vec{v}(\vec{r}, t)$ se mide el cambio de posición en el tiempo, es posible con algún instrumento determinar la rapidez y dirección que permita establecer un vector velocidad que represente el movimiento en el tiempo; si se elige otro volumen pequeño también tendrá su vector velocidad pero diferente al anterior; es por ello que se describe matematicamente un campo de velocidades (un vector para cada pequeño elemento de volumen) que represente la velocidad del continuo a estudiar, ver la figura 23.

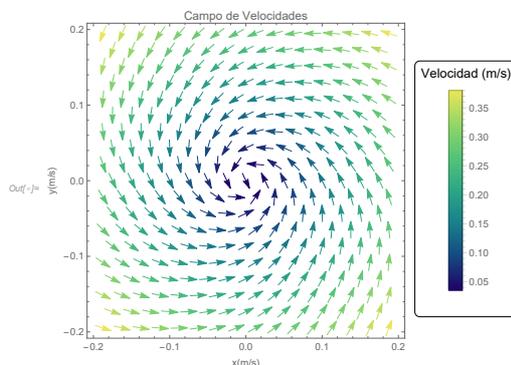


Figure 23. Campo de velocidades a un tiempo t .

15.2 Clasificación de los flujos

Existen muchos tipos de fluidos, algunos tienen características en común que permite clasificarlos para entender mejor su estudio, a continuación se describen algunos términos.

Flujo estacionario y no estacionario

Se establece que un flujo es estacionario cuando no cambian las variables del sistema, esto permiten considerar constante tales variables en el tiempo; al contrario los flujos no estacionarios son aquellos que cambian constantemente sus propiedades en la evolución temporal [31].

Flujo compresible y flujo incompresible

Los líquidos tienen prácticamente densidad constante, para considerar esta idea se dice que son incompresibles. La *compresibilidad* “se refiere al cambio de volumen de una sustancia sometida a un cambio de presión que se ejerce sobre ella” [30]. Estrictamente todos los fluidos tienen cierto grado de compresibilidad, los gases son más compresibles que los líquidos, en los líquidos es tan pequeña que resulta útil considerar la aproximación de incompresibilidad para ayudar a simplificar algunas ecuaciones en la mecánica de fluidos.

Flujo laminar y flujo turbulento

Esta clasificación está basada en el orden de los fluidos. Se le llama flujo laminar cuando el fluido se encuentra ordenado en capas donde no se mezclan entre sí y se permite el movimiento uniforme a velocidades bajas, la palabra laminar viene derivado de la palabra capa [30], describiendo el comportamiento del fluido. A los fluidos que no presentan orden en su movimiento, es decir, los elementos del fluido parecen estarse mezclando entre capas de forma caótica a grandes velocidades se les llama turbulentos, figura 24.

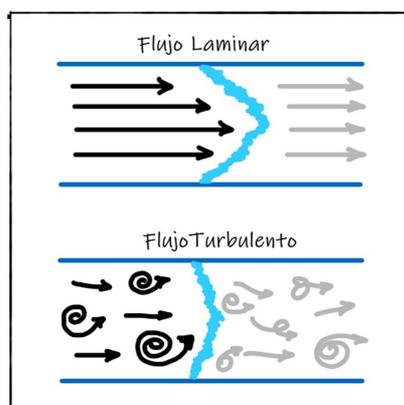


Figure 24. Flujo laminar y turbulento.

En 1880, Osborn Reynolds realizó algunos experimentos donde determinó una manera de caracterizar numéricamente cuando se trata de un fluido laminar o uno turbulento haciendo uso de un número adimensional que lleva su nombre, el número de Reynolds. Él descubrió que el cambio de transición entre uno y otro depende principalmente del cociente de las

fuerzas inerciales entre las fuerzas viscosas (Fuerzas inerciales / Fuerzas viscosas) que actúan sobre el elemento de volumen. Se presenta la siguiente forma matemática del número adimensional de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} \quad (15.4)$$

donde ρ es la densidad con unidades de kg/m^3 , V es la velocidad del fluido en m/s , D es la longitud característica referida a la geometría donde se encuentra moviéndose el fluido, por ejemplo, si se encuentra en un tubo circular sería su diámetro medido en m y μ es la viscosidad dinámica cuyas unidades son $kg/m.s$, o bien, ν que es la viscosidad cinemática m^2/s . Cuando las fuerzas inerciales dominan sobre las fuerzas viscosas, se tienen números de Reynolds grandes; estos se dan cuando se tienen grandes densidades y velocidades promedio; físicamente las fuerzas viscosas no son capaces de controlar el movimiento provocando los cambios erráticos de la turbulencia. Por otra parte, cuando las fuerzas viscosas dominan al fluido y son capaces de mantener su movimiento estable en forma de laminas se tienen números de Reynolds bajos.

Establecer los rangos que definen a los flujos laminares y turbulentos varían para cada autor, pero en [33] y [30] coinciden que $Re < 2000$ el flujo es laminar ya que las perturbaciones se pueden amortiguar debido a la viscosidad, y a $Re > 4000$ el fluido es turbulento; en el rango entre $2000 < Re < 4000$ se establece un intervalo de transición donde no se está bien definido el movimiento del fluido; [34] dice que en un tubo una verdadera turbulencia, es decir, flujos internos turbulentos completamente desarrollados se presenta con números de Reynolds aproximadamente de 10,000.

Flujo viscoso y flujo no viscoso

Se representa a la viscosidad como aquella resistencia interna de un fluido, se dice que un flujo es viscoso cuando los efectos de fricción son considerables en el sistema, por el contrario un flujo es no viscoso cuando tales efectos no interfieren con el análisis, logrando despreciar sus efectos.

Flujo newtoniano y no newtoniano

Con respecto a lo anterior, conviene distinguir a los fluidos que se comportan respetando la relación de la viscosidad, dado que es la relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación; si cumplen este tipo de ley lineal se les llama fluidos *Newtonianos*, esta relación es verificada para un gran número de gases y líquidos [35]. Contrariamente los fluidos que no siguen esta relación lineal en la viscosidad se les llama no newtonianos donde su viscosidad depende del gradiente de velocidad y de la condición del fluido, entre otras cosas [30].

15.3 Hidrodinámica

15.3.1 Sistema de referencia: Descripción Euleriana y Lagrangiana

Para describir el movimiento de un fluido es necesario elegir el marco de referencia en el que se van a escribir sus ecuaciones, en hidrodinámica se puede elegir entre dos sistemas de referencia, la descripción *euleriana* y la descripción *lagrangiana*, ver la figura 25. En la descripción euleriana se tiene al marco de referencia en un sistema fijo en el laboratorio, se presta atención a un volumen fijo por el que pasarán diferentes partículas del fluido cuando transcurra el tiempo, las variables estarán descritas en términos de la posición (dentro de ese volumen elegido) y del tiempo. Ahora bien, en la descripción lagrangiana, se elige un volumen del fluido al que se le seguirá su evolución durante el tiempo, las partículas dentro de este serán siempre las mismas provocando que cambie de tamaño y forma; ya que el volumen se mueve a cierta velocidad, el marco de referencia también lo hará y dependerá de su posición inicial y tiempo inicial [28]. La formulación de Euler es la más usada en hidrodinámica, pero hay algunos conceptos en donde resulta beneficioso usar la descripción de Lagrange, es posible pasar de una a otra usando reglas de transformación.

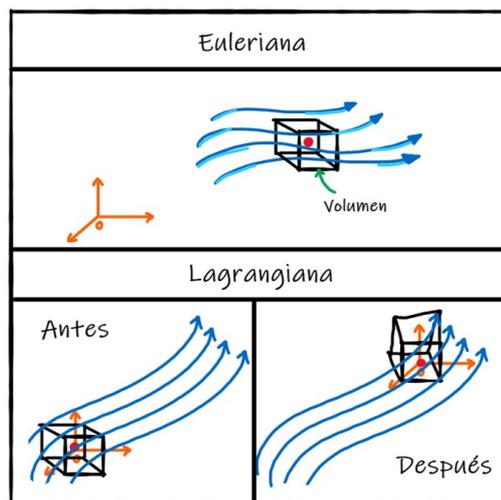


Figure 25. Sistemas de referencia en hidrodinámica.

15.3.2 Derivada material

Describir la velocidad hidrodinámica en el sistema de referencia lagrangiano se ve de la forma:

$$\frac{D\vec{r}}{Dt} = \vec{v}(\vec{R}, t), \quad (15.5)$$

esto implica que se describe al cambio de posición del elemento de volumen en el tiempo que se mueve por el fluido; notesé que se está usando $\frac{D}{Dt}$, esta notación peculiar se le llama *derivada material* y justo coincide con la derivada temporal de cualquier variable escrita en la descripción

lagrangiana; también tiene el nombre de derivada lagrangiana o derivada hidrodinámica [28].

Escribir el cambio temporal de una variable β en la descripción euleriana a una derivada temporal en la descripción lagrangiana estará dada por el cambio temporal de la variable β en la descripción euleriana más un término provocado por el cambio de coordenadas de un sistema de referencia a otro. De esta manera, se tiene:

$$\frac{D\beta}{Dt} = \frac{\partial\beta}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\beta. \quad (15.6)$$

esta última ecuación describe la regla de transformación entre el marco de referencia euleriano al lagrangiano [36].

15.3.3 Ecuaciones diferenciales del movimiento de fluidos

A continuación se presentan de forma breve las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos; si bien son ecuaciones análogas a la descripción de la mecánica de cuerpos sólidos, en mecánica de fluidos la mayoría de las ecuaciones son complicadas de resolver, de hecho son pocos los problemas que tienen soluciones analíticas. Además de establecer bien las ecuaciones diferenciales principales se necesitan ecuaciones adicionales para obtener su solución, determinar las condiciones de frontera y una buena determinación de las condiciones iniciales. Estas ecuaciones buscan caracterizar el movimiento del fluido en cada punto hasta obtener el desarrollo evolutivo de todo el dominio del fluido que no es sencillo a simple vista.

Ecuación de continuidad: Representa el principio de conservación de la masa, establece que una masa contenida en un volumen no cambia en el tiempo [28].

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (15.7)$$

Ecuación de momento lineal: Caracteriza el principio de conservación de la cantidad de movimiento, cuando es aplicada a un elemento de volumen expresa que la variación de su cantidad de movimiento en el tiempo es igual a la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el volumen,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho \vec{f}, \quad (15.8)$$

el término del lado izquierdo es la densidad por la aceleración y el lado derecho la suma de las fuerzas, el término ∇P (donde P es la presión hidrostática) y el término $\nabla \cdot \sigma_{ij}$ (donde σ_{ij} es el tensor de esfuerzos) son parte de las fuerzas de superficie y el término $\rho \vec{f}$ es la fuente del momento que está dado por la fuerza volumétrica [28]. Esta ecuación es la segunda ley de Newton en fluidos.

Ecuación de Navier-Stokes: La ecuación de cantidad de movimiento como se presentó antes, no resulta muy útil debido a la contribución del

tensor de esfuerzos, cuando se reescriben ciertas componentes y se considera un fluido incompresible (ρ constante) se tiene una ecuación vectorial de la forma:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{f}, \quad (15.9)$$

esta ecuación es la base de la mecánica de fluidos, es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, no lineal y no estacionaria, por ello su dificultad, las soluciones analíticas existentes son para fluidos simples con geometrías sencillas [31].

16 Turbulencia

Cuando se tienen flujos desordenados, con un comportamiento inestable, es decir, donde se experimenta un cambio radical en su estructura se dice que el flujo está en estado **Turbulento**.

La turbulencia es un problema de la física de fluidos muy intrigante, ya que la mayoría de los flujos físicos que aparecen en la naturaleza presentan este comportamiento, la mayoría de los textos que hablan de la turbulencia ofrecen diferentes perspectivas [37]. Estrictamente hablando su complejidad depende de las irregularidades que se presentan en el fluido tanto en su distribución espacial como en su evolución temporal.

La manera más intuitiva de presentar la turbulencia es describir sus características [38] [37]:

- Los flujos turbulentos presentan un flujo laminar inestable, es por ello que se define como un fenómeno caótico, presenta movimiento azarosos, desordenados y/o irregulares; es necesario precisar detalles en sus condiciones iniciales, lo que resulta imposible obtener experimentalmente o numéricamente.
- Tiene carácter difusivo, que implica alta transferencia de energía, momento o propiedades termodinámicas.
- Presenta cambios drásticos de vorticidad que consiste en estructuras irregulares identificables a grandes y pequeñas escalas espaciales y temporales.
- Para caracterizar sus interacciones es necesario el uso de términos estadísticos, en el sentido que si en cualquier punto fijo se miden sus valores instantáneos de las variables fluidas durante un intervalo suficientemente largo y se promedian, los valores medios locales obtenidos se comportan de manera determinista variando en espacio y tiempo de forma mucho más suave, hipótesis ergódica.

- Tienen número de Reynolds muy elevado, como ya se menciona antes, flujos internos turbulentos completamente desarrollados se presentan en números de Reynolds aproximadamente de 10,000.
- La turbulencia es extraordinariamente disipativa, para mantener tal comportamiento se necesita un suministro continuo de energía externa.

16.1 Escalas Turbulentas

Debido a que en el tratamiento de la turbulencia se requiere un conocimiento profundo de los complejos mecanismos físicos y matemáticas, se tratará en el presente trabajo mediante descripciones cualitativas.

Se les llama *escalas turbulentas* a las longitudes y tiempos característicos que tienen lugar en el flujo turbulento, y para darle nombre a los movimientos de estas escalas se les conoce como *remolinos*. De aquí se parte de una de las ideas lógicas de la descripción cualitativa, los remolinos más grandes que pueden darse poseen longitud característica del orden el fluido, si un fluido está viajando a través de un conducto, el diámetro es considerado el tamaño característico. En el caso del tiempo se puede encontrar conociendo la longitud característica y la velocidad característica del fluido, que bien puede ser calculada por las condiciones de contorno del sistema, de manera más sencilla, la velocidad característica es el promedio de las velocidades del fluido.

Cuando se presta atención al desarrollo de los remolinos, es posible ver que cuando avanza el tiempo los remolinos más grandes se arremolinan y se convierten en remolinos más pequeños, hasta que la longitud sea tan pequeña que las fuerzas viscosas detengan el proceso. La presencia de diversos tamaños de remolinos que coexisten en el mismo sistema, debe darse gracias a un suministro continuo de energía al que denominaron *cascada de energía* [38].

16.2 Teoría de Kolmogorov

Basándose en las ideas anteriores, de forma cuantitativa, Kolmogorov en 1941 crea una teoría (resultado de 3 artículos) que permita encontrar las escalas turbulentas pequeñas que pueden darse en un flujo turbulento partiendo de los valores característicos [39].

Esta teoría se basa en una descripción estadística de la fenomenología de la turbulencia usando la variación de la energía cinética del fluido que es transferida siempre desde las grandes escalas de longitud hacia las escalas más pequeñas. La energía es la misma en todas las etapas, en su momento de inyección, transferencia y disipación.

Si la longitud característica del fluido es L , y la velocidad característica del fluido es V , el tiempo característico T que describe el movimiento de

los remolinos más grandes es L/V . Y como la energía es la misma en todas las etapas, la tasa de disipación de energía ϵ depende de la velocidad característica.

$$\epsilon \approx \frac{V^3}{L} \quad (16.1)$$

16.2.1 Microescalas de Kolmogorov

Una forma de estimar las pequeñas escalas en flujos turbulentos, es identificando que los efectos de viscosidad crean el movimiento de estas escalas; es decir, los parámetros de movimiento que gobiernan el movimiento a pequeña escala incluyen la tasa de disipación de energía y la viscosidad cinemática. Así se tiene la longitud, el tiempo y la velocidad de las pequeñas escalas [37].

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}, \quad (16.2)$$

$$\tau \equiv \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2}, \quad (16.3)$$

$$v \equiv (\nu\epsilon)^{1/4}. \quad (16.4)$$

Estos valores respecto a los valores característicos se presentan en términos del número de Reynolds:

$$\frac{\eta}{L} = Re^{-3/4}, \quad (16.5)$$

$$\frac{v}{V} = Re^{-1/4}, \quad (16.6)$$

$$\frac{\tau}{T} = Re^{-1/2}. \quad (16.7)$$

17 Hemodinámica

Los principios de la hidrodinámica se usan para explicar cualquier tipo de fluido, al usar tales conceptos en la sangre y estudiar su movimiento a través del sistema cardiovascular es lo que se conoce como hemodinámica.

A lo largo de la historia se ha intentado caracterizar el flujo sanguíneo con el propósito de mantener la función principal de la circulación, el cual es atender las necesidades del cuerpo humano [40] para sobrevivir.

Antes de establecer las características físicas de la circulación, se presenta una breve explicación de la sangre como un fluido y sus características particulares.

17.1 La sangre

En algún momento de nuestra vida hemos visto la consistencia, el color e incluso el sabor de la sangre, tal vez por una pequeña cortada o bien cuando por solicitud médica nos extraen sangre con una jeringa; dicha experiencia nos ha permitido conocer ciertas características simples de la sangre, pero ¿qué es y cuáles son sus características físicas?

La sangre es un fluido no homogéneo conformado por elementos formados y plasma, de un volumen de sangre un 40 a 45% son los elementos formados y un 55 a 60% plasma; los elementos formados incluyen los glóbulos rojos (eritrocitos), glóbulos blancos (leucocitos) y las plaquetas (trombocitos); estos elementos están suspendidos en el plasma, que es un líquido transparente de color ambar [41]. El color rojo de la sangre se lo da la hemoglobina (una proteína que transporta oxígeno) presente en los globulos rojos.

La sangre tiene un poco más densidad que el agua, es de $1060 \frac{kg}{m^3}$ [41] esto se debe a la presencia de las células sanguíneas. También estas células provocan un aumento de la viscosidad que afecta el trabajo requerido para transportar sangre a lo largo del cuerpo, la sangre tiene una viscosidad dinámica a $37^\circ C$ de aproximadamente $4 \times 10^{-3} \frac{Ns}{m^2}$ [42], por lo tanto una viscosidad cinemática de $3.77 \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ [12]. Cabe aclarar que la sangre es un fluido no newtoniano, es decir, no sigue la ley lineal su valor depende de la temperatura (el cuerpo humano no varía mucho su temperatura, el cambio no es tan significativo), de su velocidad de cizallamiento pero especialmente del porcentaje en volumen de los glóbulos rojos (hematocrito).

17.2 Circulación sanguínea

Como ya se menciona la función de la circulación de la sangre en el cuerpo humano consiste en atender las necesidades, que van desde transportar nutrientes, hormonas, desechos y mantener un apropiado entorno para que las células del organismo puedan funcionar. Hay dos tipos de circulación, la circulación sistémica que es la encargada de transportar sangre a todos los tejidos excepto los pulmones esa la realiza la circulación pulmonar [40].

La mayoría de las personas tienen entre 4.5 a 6 L de sangre [41] aproximadamente el 84% se encuentra en la circulación sistémica y el 16% restante se encuentra en el corazón y los pulmones. Dentro de la circulación sistémica existen diferentes tipos de vasos que permiten tal circulación, por ejemplo, las arterias que tienen la función de llevar la sangre del corazón hacia los tejidos o las venas que son los conductos que regresan la sangre al corazón. La sangre arterial es rica en oxígeno y nutrientes, es de color rojo oscuro; contrariamente la sangre venosa es pobre en oxígeno, de color rojo menos intenso, esta sangre el corazón la envía a los pulmones para cargarse de nuevo de oxígeno y realizar de nuevo el proceso [40].

17.3 Modelo físico del flujo sanguíneo

Cuando el flujo sanguíneo pasa a través de un vaso lo hace determinado por dos cosas: la diferencia de presión o gradiente de presión que es la fuerza con la que la sangre viaja en el vaso y la resistencia vascular como los impedimentos que detienen para que fluya al sangre. Como una analogía de la corriente eléctrica que viaja a través de un conductor, el flujo sanguíneo F se puede calcular con la *Ley de Ohm*,

$$F = \frac{\Delta P}{R}, \quad (17.1)$$

donde ΔP es la diferencia de presión (como la diferencia de potencial en el caso eléctrico) y R la resistencia como consecuencia de la fricción del flujo con las paredes o alguna deformidad del vaso, figura 26. Para fines prácticos tal relación permite establecer la cantidad de sangre que fluye por el vaso de un punto a otro, normalmente se expresa en *mililitros/minuto* o *litros/minuto*, un adulto en reposo tiene aproximadamente $5000 \frac{ml}{min}$ esto representa el gasto cardíaco o volumen de sangre que bombea el corazón [40].

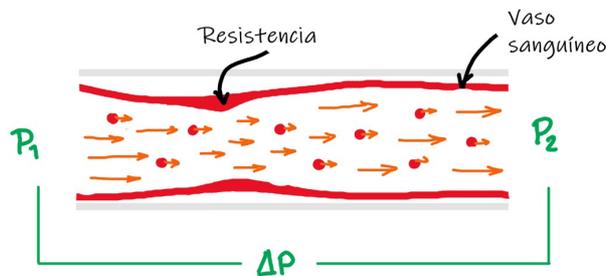


Figure 26. Ley de Ohm para el flujo sanguíneo.

La velocidad del flujo sanguíneo depende del vaso donde se este transportando y la necesidad del tejido, las arterias tienen las velocidades más altas debido a su presión alta comparado con las venas, en general en vasos sanguíneos largos el flujo es laminar [40] y su velocidad es mayor en el centro del vaso que en las paredes como un flujo en tubería formando lo que se conoce como velocidad parabólica, ver la figura 27.

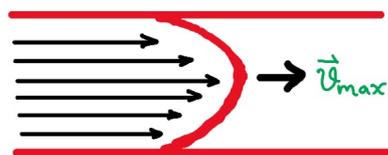


Figure 27. Perfil parabólico.

Si se considera la viscosidad de la sangre μ (como si fuera fluido newtoniano) y la geometría de vaso, es posible encontrar la velocidad del flujo. Fueron los trabajos de G. Hagen y J. Poiseuille quien establecieron la

ecuación de Hagen-Poiseuille donde dedujeron una relación entre la pérdida de energía y los parámetros del sistema, parten considerando que la fuerza de fricción es igual a la fuerza propulsora para encontrar el comportamiento de la velocidad que depende del radio tomando como condiciones de frontera que la velocidad es máxima en el centro y cero en las paredes; al integrar dicho comportamiento a lo largo del todo el recorrido encuentran el flujo de volumen a través del tubo [43].

$$F = \frac{\pi \Delta P r^4}{8L\mu} \quad (17.2)$$

donde r es el radio del vaso sanguíneo y L es la longitud del vaso. Notesé la dependencia cuartica con el radio del vaso, a mayor radio mayor flujo sanguíneo, esto implica que resulta de mayor importancia el radio del vaso para determinar la velocidad del flujo sanguíneo [40], el cambio brusco del tamaño del vaso (por ejemplo, cuando hay pérdida de elasticidad) podría traer consecuencias en la circulación [43].

En la ley de Hagen-Poiseuille se considera un fluido newtoniano, ya que se usa el coeficiente de viscosidad dinámica μ ; esta ley deja de ser válida para flujos no newtonianos el cual es el caso de la sangre, debido a que es un líquido con moléculas complejas que no obedece la relación lineal [33].

Este modelo se convierte en una aproximación para obtener la velocidad del flujo sanguíneo del cuerpo humano [31]

18 Anatomía del corazón

El presente trabajo se basa en las mediciones del flujo sanguíneo del corazón, es por ello que antes de revisar los conceptos del uso de la técnica de Imagen por Resonancia Magnética Cardiovascular se revisará brevemente la estructura y funcionalidad del órgano a nivel básico (sin profundizar a nivel médico) con el proposito de utilizar los términos adecuados.

El corazón es uno de los principales órganos del cuerpo humano, encargado de mover la sangre a través del sistema circulatorio, realizando una sincronía perfecta entre enviar sangre oxigenada o arterial a todo el cuerpo, regresar la sangre desoxigenada o venosa, enviarla a los pulmones para volverla a oxigenar y regresar la sangre al corazón para realizar de nuevo el proceso.

Se encuentra posicionado entre los dos pulmones (visto de frente) en el mediastino inferior, en la parte media, tiene forma de una pirámide cuya base esta invertida y su pico recibe el nombre de *apex*, si tomamos al apex como la punta de un vector paralelo al eje anatómico del órgano su dirección sería hacia adelante y hacia la izquierda. Cuando se toma de referencia las cervicales, el corazón se encuentra entre las cervicales T_6 y T_9 cuando estamos de pie y entre la T_5 y T_8 cuando estamos acostados, figura 28.

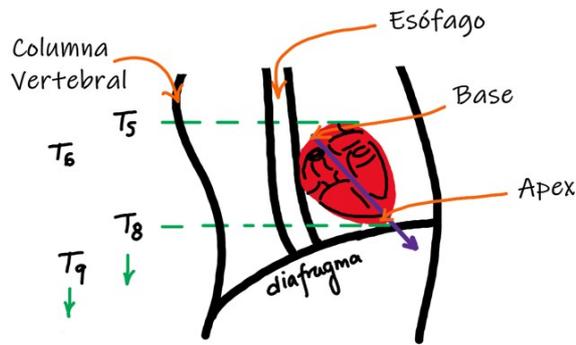


Figure 28. Posición del corazón.

Funciona como dos bombas separadas, una en el lado derecho y otra en el lado izquierdo; cada bomba está compuesta por dos cavidades, una aurícula y un ventrículo. Las aurículas funcionan como una bomba débil que dirigen la sangre a los ventrículos y los ventrículos brindan la fuerza de bombeo para expulsar la sangre, el lado derecho hacia los pulmones y el lado izquierdo hacia la circulación sistémica. [40]. Como ya se menciona en el apartado de circulación sanguínea, las arterias (vasos sanguíneos encargados de llevar la sangre oxigenada) están conectadas a la parte izquierda y las venas (vasos sanguíneos que regresan la sangre desoxigenada al corazón) están conectadas a la parte derecha del corazón. El nombre de los conductos conectados se encuentran en la imagen 29.

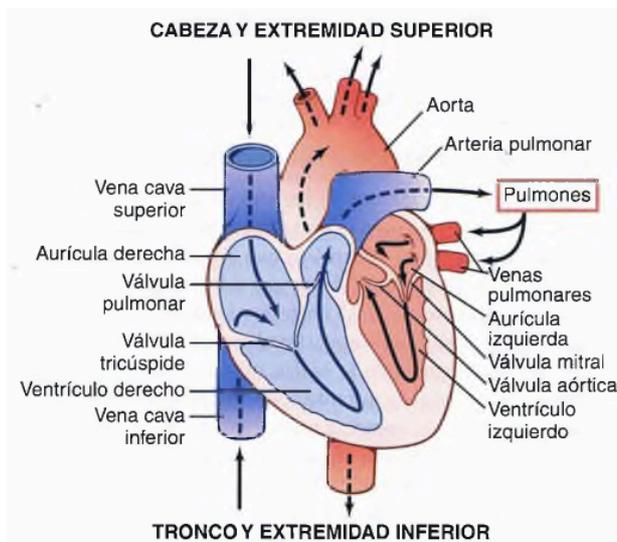


Figure 29. Estructura del corazón [40].

La circulación de la sangre dentro del corazón inicia cuando la sangre desoxigenada llega de todo el cuerpo a través de la *vena cava inferior* y la *vena cava superior* a la *aurícula derecha*, esta envía la sangre al *ventrículo derecho* pasando por la *válvula tricúspide* (las válvulas funcionan como las compuertas que dirigen a la sangre en un sentido). De ahí, la sangre se

envía a los pulmones abriendo la *válvula pulmonar* y viajando a través de la *arteria pulmonar*, en los pulmones la sangre se vuelve a oxigenar cuando se da la respiración y regresa la sangre al corazón por las *venas pulmonares* hacia la *aurícula izquierda*, que manda la sangre al *ventrículo izquierdo* pasando por la *válvula mitral*. El ventrículo izquierdo finaliza el proceso bombeando la sangre oxigenada hacia la *aorta* (abriendo la *válvula aórtica*) que es la arteria principal que reparte la sangre a todo el cuerpo [44].

La función cardíaca se da gracias a la fisiología del músculo cardíaco, la contracción de las cámaras es similar a la del músculo esquelético pero con mayor duración, donde se presentan descargas eléctricas de manera automática para controlar el ritmo cardíaco [40].

18.1 Ciclo cardíaco

El ruido que produce el corazón se da principalmente por el bombeo cuando se cierran las válvulas cardíacas, todos los eventos que ocurren entre un latido y otro se le conoce como ciclo cardíaco. Su duración total es el inverso de la frecuencia cardíaca, un ser humano promedio tiene aproximadamente 72 latidos cada minuto [34], así,

$$T_{\text{ciclo cardíaco}} = \frac{1}{f_{\text{cardíaca}}} = \frac{1}{72} = 0.0138 \text{ min por latido} \quad (18.1)$$

lo que equivale a 0.83 segundos por latido, es decir, el ciclo se lleva a cabo en menos de un segundo.

A su vez, el ciclo cardíaco está formado por una contracción la cual recibe el nombre de sístole y una relajación a la que llaman diástole [34].

18.1.1 Sístole

La sístole describe el momento en que existe la contracción de las cámaras del corazón (no todas al mismo tiempo) y hay eyección de la sangre. Para una frecuencia normal la sístole conforma el 0.4 del ciclo cardíaco [40].

En la descripción del ciclo cardíaco resulta conveniente hablar de lo que sucede en el lado izquierdo debido a que es más significativo para la funcionalidad general del corazón [34], así la sístole está conformada por el momento en que se cierra la válvula mitral, comienza a aumentar la presión del ventrículo izquierdo que hace que se abra la válvula aórtica ocurriendo la salida de la sangre por la aorta y disminuyendo el volumen del ventrículo izquierdo.

18.1.2 Diástole

Después de la contracción se da la relajación o diástole, el proceso empieza cuando se cierra la válvula aórtica, la presión en la aurícula aumenta que hace que se abra la válvula mitral para llevar a cabo el llenado del ventrículo

izquierdo, esta presión se mantiene mayor en la aurícula que en el ventrículo para que permita mantener abierta la válvula que los conecta [34]; el volumen del ventrículo aumenta y finaliza cuando se cierra la válvula mitral (momento donde comienza la sístole). Este proceso es el más tardado de las dos fases.

18.1.3 Electrocardiograma y el ciclo cardíaco

El electrocardiograma (ECG) es la forma gráfica de las ondas que detecta un electrocardiógrafo, estas ondas representan los voltajes eléctricos que se dan en las cámaras del corazón, el momento en que se registran las ondas comparadas con el proceso del ciclo cardíaco está presentado en la figura 30. Cuando se llenan las aurículas las señales eléctricas se difunden a través de las aurículas y hace que se despolaricen (onda P) momento después ocurre la sístole auricular; lo que sigue es enviar la señal para comenzar la despolarización de los ventrículos, este proceso ocurre en tres partes que están representadas por el complejo QRS (en este momento también ocurre la repolarización auricular pero queda perdida debido a que el proceso de los ventrículos es más intenso). Por consiguiente los ventrículos se contraen y expulsan la sangre. Finalmente se da la onda T que representa la repolarización de los ventrículos momento antes de la diástole ventricular [40] [34].

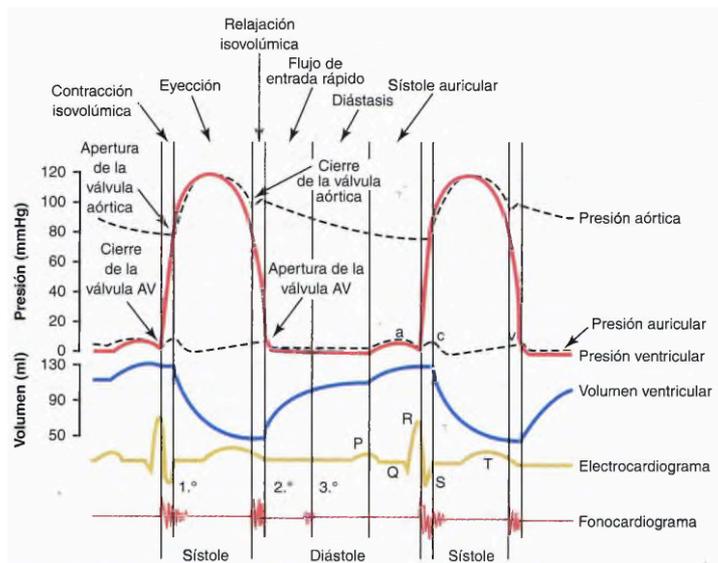


Figure 30. Ciclo cardíaco [40].

19 Resonancia Magnética Cardiovascular (RMC)

Usar la técnica de Imagen por Resonancia Magnética para obtener imágenes del corazón se ha convertido en una herramienta muy útil para evaluar la morfología del órgano, analizar su funcionalidad, cuantificar el flujo sanguíneo, identificar las anomalías, entre otras cosas [45]. Las ideas antes

expuestas de resonancia magnética, hemodinámica, y conocimiento de la anatomía cardíaca lograrán centrar las bases necesarias para una explicación adecuada del uso de la técnica para la IRM cardíaca.

En el corazón se encuentran tres tipos de tejidos diferentes: miocardio o tejido muscular del corazón, grasa y sangre fluyendo; esto resulta ventajoso ya que cada uno de estos tejidos tienen diferentes tiempos T_1 y T_2 haciendo que las imágenes obtenidas haya un buen contraste entre cada tejido. Sin embargo, lo que dificulta la obtención de las imágenes es el movimiento debido a la contracción y relajación de todas las cámaras cardíacas, el movimiento de respiración y el movimiento de la sangre fluyendo [18].

Se requiere que todos los componentes se encuentren ajustados y sincronizados para realizar una buena obtención de imágenes cardíacas, además se necesitan disponibles algunas características del hardware que permitan tener imágenes con poco ruido y mejor resolución espacial y temporal. Se considera un buen equipo para estos casos uno de al menos $1.5T$, si bien se puede realizar con equipos de $0.2T$ con equipos de $1.5T$ se tiene una mejor evaluación fisiológica [18].

19.1 Planos de estudio

Otra dificultad que se encuentra al buscar obtener imágenes del corazón es la posición del órgano en el cuerpo humano, ver la figura 28, es por ello que se suelen utilizar dos grupos de planos que dependen de la necesidad clínica [45].

19.1.1 Planos ortogonales

Consiste en el uso de los planos habituales que utiliza la técnica de IRM, estos planos ayudan a comparar el corazón con su alrededor. Por ejemplo, una imagen axial permite analizar la morfología y su relación de las cámaras con el pericardio, una imagen coronal analiza de una mejor manera el ventrículo y aurícula izquierda y las venas pulmonares y un corte sagital ayuda a analizar las conexiones de los ventrículos con los vasos sanguíneos grandes. Además suele usarse algunos planos oblicuos que permitan estudiar la aorta [45].

19.1.2 Planos intrínsecos

Los planos intrínsecos permiten visualizar al corazón respetando su estructura, se eligen de tal forma que se puedan realizar cortes al órgano considerando su posición para tener un panorama completo de las cámaras y vasos sanguíneos.

Se tienen cortes con nombres de acuerdo a las cámaras, corte *dos cámaras*, de *tres cámaras*, *cuatro cámaras* y un *eje corto*, figura 31. Se comienza tomando planos localizadores (los planos ortogonales), para obtener el plano de *dos cámaras*, también conocido como eje largo, se parte de un

corte axial donde se traza un plano paralelo a la conexión entre los ventrículos (septo interventricular) que pase por el centro de la válvula mitral. Este plano ayuda a obtener el plano de *cuatro cámaras* realizando un corte transversal. Para tener el plano de *eje corto* se utiliza el anterior de cuatro cámaras trazando un corte perpendicular (paralelo al plano de las válvulas), aquí el ventrículo izquierdo se ve como un anillo. Finalmente el plano de *tres cámaras* se obtiene usando el de dos cámaras y el del eje corto donde se traza un corte que pase por el ápex del ventrículo izquierdo y la aorta, este corte se le llama tracto de salida del ventrículo izquierdo [16].

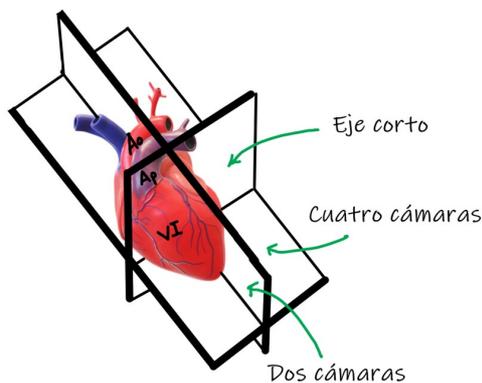


Figure 31. Planos intrínsecos.

19.2 Sincronización de los movimientos

Antes de explicar la forma en que se obtienen los datos se expondrá la manera habitual de sincronizar cada movimiento.

19.2.1 Movimiento respiratorio

La forma de obtener buenas imágenes cardíacas se basa en emparejar la obtención de datos con sistemas que minimicen o eliminen los efectos que provocan tales movimientos [45]. El movimiento respiratorio es el más notorio, en cada respiración el corazón se mueve hacia arriba 3 cm verticalmente; instruyendo al paciente cuidadosamente se puede utilizar la técnica de apnea (suspender la inspiración o expiración por un breve tiempo) en donde se obtienen los datos en determinada fase del ciclo respiratorio, se logran obtener imágenes de buena intensidad de señal y alta resolución con apnea de hasta 16 segundos [45]. Cuando no es posible contener la respiración se utiliza la sincronización respiratoria utilizando algunos dispositivos que registran el movimiento del paciente, la adquisición de imágenes por este método prolonga el número de repeticiones y es necesaria una buena familiaridad con el método para obtener una buena calidad de imagen [46].

19.2.2 Movimiento cardíaco

Para el movimiento del corazón se busca sincronizar la obtención de los datos con un ECG, un adecuado registro ayuda a una mejor sincronización, se efectúa colocando electrodos (no magnéticos) que se colocan en el torax, o bien, si no se permite debido a las interferencias se coloca un sensor periférico de pulso [45]. Habitualmente se identifica las ondas R para obtener una calidad óptima. Es importante que los cables de los electrodos estén colocados de tal forma que no cierren un círculo ni con el cuerpo [18] ya que puede provocar cerrar un circuito donde pase corriente debido a la presencia de campos magnéticos oscilantes y provocar quemaduras.

19.2.3 Movimiento del flujo sanguíneo

La técnica de IRM es muy sensible a los movimientos de los núcleos del átomo de hidrógeno, incluso en la mayoría de las situaciones el movimiento es un artefacto que se busca quitar; en esta ocasión se aprovecha tal movimiento para diferenciar los núcleos de los átomos de hidrógeno de los líquidos orgánicos, que se encuentran en movimiento, comparados con los tejidos a su alrededor que en general parecen estar estáticos. Un ejemplo de líquido orgánico es la sangre, los estudios utilizados en la clínica para medir los flujos sanguíneos se le conoce como Angiografía. Combinando los principios de angiografía y la técnica IRM se le conoce como Angiografía por Resonancia Magnética (ARM) [23].

Los núcleos del átomo de hidrógeno presentes en la sangre se están moviendo, a los que llamaremos espines móviles, al momento de enviarles un pulso de radiofrecuencia este puede aumentar su señal o eliminarse cuando se adquiere la señal de la región específica ya que se hayan saturado previamente o se hayan ido siguiendo su camino al momento de adquirir la imagen, el contraste que se da entre la estructura anatómica y el movimiento de la sangre hace que está se vea más brillante u oscura.

19.3 Secuencias

Para la RMC las secuencias básicas utilizadas son la técnica de sangre negra y la técnica de sangre blanca, la primera se considera el uso de secuencias espín eco convencional y las rápidas espín eco, esta técnica se usa para tener información anatómica del órgano y sus vasos, se suelen usar los planos ortogonales. La técnica de sangre blanca usa secuencias de gradiente eco que ayudan a recopilar información funcional además de anatómica, se deben usar los ejes intrínsecos [16]. Para objetivos de este trabajo resulta de interés la técnica de sangre blanca de contraste de fase.

19.3.1 Técnica de sangre negra

La técnica de sangre negra tiene como objetivo mostrar el flujo sanguíneo oscuro comparado con el tejido estático, se acostumbra a usar secuencias

espín eco, recordando que está técnica necesita el uso de dos pulsos de radiofrecuencia para obtener un eco (primero de 90° y luego de 180°) una vez que se aplica a la región, los espines móviles a que fueron excitados ya dejaron el plano de la imagen cuando se envía el segundo dejando un vacío de señal, figura 32. Se debe cumplir que la velocidad sea mayor a d/TE donde d es el espesor de corte [19], ver figura 33.

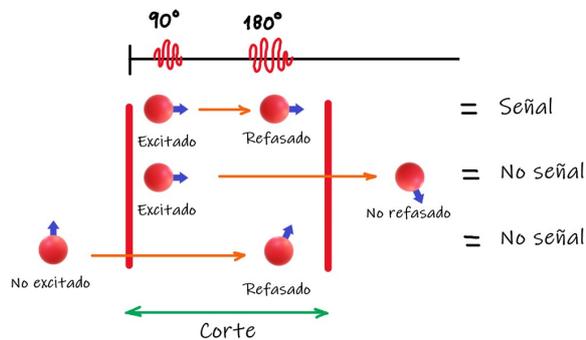


Figure 32. Fenómeno de tiempo de vuelo [20].

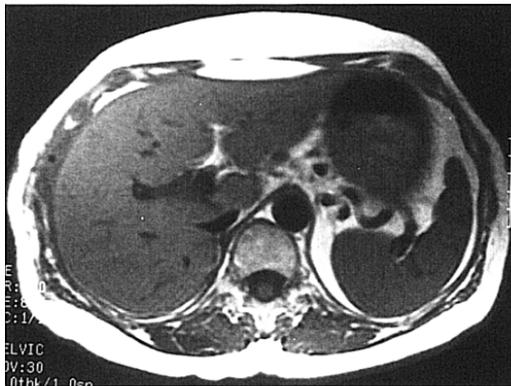


Figure 33. Técnica de sangre negra [20].

19.3.2 Técnica de sangre blanca

A diferencia de la técnica de sangre negra, esta técnica realiza la señal de la sangre en movimiento haciendo el flujo sanguíneo brillante. Existen dos técnicas, tiempo de vuelo (TOF por sus siglas en inglés) o contraste de fase (PC por sus siglas en inglés), lo que hacen es utilizar las diferencias de señal de los espines en movimiento y el tejido estático con secuencias de gradiente eco, ver figura 34 [19].

Tiempo de vuelo (TOF): Es la que más se utiliza en la clínica ya que no necesita gradientes fuertes y la mayoría de los equipos de RM lo tienen. Consiste en utilizar pulsos repetitivos que saturan la magnetización del tejido estático, cuando la sangre viaja por la región su magnetización longitudinal no estará saturada como la del tejido estático, por tanto producirá señal [19]. La intensidad del flujo depende así de la velocidad, geometría del vaso con respecto al corte, el TE y el TR.

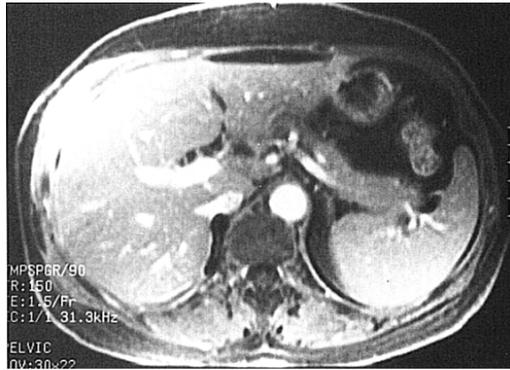


Figure 34. Técnica de sangre blanca [20].

Contraste de fase (PC): La secuencia para obtener una imagen de contraste de fase se usa más para la cuantificación del flujo sanguíneo, necesita la sincronización con el ECG, el plano debe estar perpendicular al vaso a considerar y tener la información de la velocidad del flujo para evitar tener artefactos.

Usa las diferencias de la velocidad (como los cambios en la sístole y diástole), lo que equivale a cambios de fase en los espines en movimiento para proporcionar contraste [20]. El principio físico de esta técnica parte del hecho de tener un gradiente bipolar, figura 35, (dos lóbulos gradientes, uno positivo y otro negativo ambos con la misma intensidad), cuando son aplicados a la región de corte específica los núcleos del átomo de hidrógeno del tejido estático (círculo sin asterisco) no acumulan desfase ya que al aplicarles el gradiente positivo se desfazan y cuando se aplica el gradiente negativo regresan a su fase inicial, contrariamente los núcleos del átomo de hidrógeno de la sangre en movimiento (círculo con asterisco) no pasan por este proceso, ya que no sienten con la misma intensidad un gradiente que el otro debido a su cambio de posición en el tiempo, incluso su acumulación de desfase es proporcional a su velocidad; es por ello su dependencia con la velocidad del flujo [19]. Se obtienen dos adquisiciones, en una se restan para que las señales de los núcleos del átomo de hidrógeno de los tejidos estáticos se resten dejando solo la señal de los núcleos del átomo de hidrógeno de la sangre, se le conoce como las imágenes de fase (el tono de gris depende de la velocidad y sentido del flujo), las combinaciones no restadas son datos de imágenes sensibles al flujo y se conocen como imágenes de magnitud (aspectos similar al TOF) [20].

La velocidad que se debe conocer para el éxito de esta secuencia es la velocidad a la que la sangre viaja en el flujo sanguíneo, el parámetro se conoce como codificación de velocidad o VENC (por sus siglas en inglés) esta velocidad compensa la diferencias de velocidad dentro del vaso sanguíneo controlando la amplitud del gradiente bipolar. El VENC debe permanecer en un rango, si es menor se puede producir un artefacto, la velocidad dentro del vaso sanguíneo es mayor en medio que en las paredes, ver

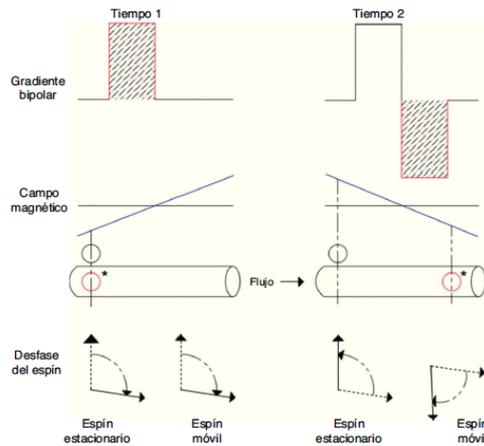


Figure 35. Secuencia cine PC [2].

figura 27, al ser menor el VENC da como resultado una baja de intensidad en esa región; cuando es mayor el problema estaría cerca de las paredes; es por ello la importancia del ajuste ideal del parámetro [20] [19].

Combinación de Cine-PC: El método de Cine consiste en recopilar datos de forma continua a lo largo de un ciclo cardíaco, donde los datos de cada corte se tienen en diferentes puntos durante el ciclo, cuando se combina con PC se tienen imágenes que permiten cuantificar la velocidad del flujo a lo largo del ciclo cardíaco [20].

Parte seleccionando el corte perpendicular al flujo, selecciona el VENC; de las imágenes se dibuja una región de interés del tamaño del vaso sanguíneo y se obtienen una curva de la velocidad del flujo, el dato mejora cuantas más imágenes se logren obtener en el ciclo que están determinadas por el intervalo de R a R del ECG y el TR (análogo a los fotogramas por segundo, pero aquí en cine son fases por ciclo cardíaco). El resultado es la media de las velocidades de los vóxeles que están en la región de interés [19].

20 Flujo 4D

La técnica de RM de interés en el siguiente trabajo es Flujo 4D, las bases antes presentadas desde la física de Resonancia Magnética hasta la obtención de una imagen se solidifican a algo tan complejo como lo son los resultados del uso de esta secuencia. En la presente sección se explicará de manera sencilla las bases de la técnica, la obtención de datos, y sus aplicaciones principales.

20.1 Introducción a la secuencia

Resulta interesante como los avances de la Resonancia Magnética han llevado a una técnica tan sofisticada que permite no solo la evaluación anatómica

del corazón si no también su parte funcional reflejada en la distribución del flujo de sangre.

Su nombre es "*time-resolved three-dimensional flow-sensitive MRI with three-directional velocity encoding*" o simplemente Flujo 4D, es una técnica que presenta en tres dimensiones los patrones del flujo sanguíneo en el tiempo para evaluar de manera cuantitativa y cualitativamente la hemodinámica.

Consiste en adquirir imágenes mediante una secuencia de angiografía con contraste de fase que obtiene datos de velocidad de sangre en tres dimensiones durante el ciclo cardíaco, con ello se pueden ver los patrones de flujo sanguíneo del corazón en representaciones que describen la trayectoria de la sangre a través del sistema cardiovascular [2]. Evaluando la dinámica regional y global del flujo de sangre.

20.2 PCA cine 2D a Flujo 4D

El flujo 4D se basa en el uso de la secuencia *Phase Contrast Angiography* (PCA) cine 2D sincronizada con el electrocardiograma (ECG) que nos brinda imágenes en contraste de fase sensibles a la velocidad. Proporciona distintas fases del ciclo cardíaco para evaluar parámetros hemodinámicos como lo son los flujos, determinado volumen y velocidad en cada punto. Al principio esta técnica solo fue conocida para dar información cualitativa mediante la representación tridimensional del flujo cardiovascular, pero se ha desarrollado de tal manera que se puede analizar cuantitativamente el flujo.

Retomando la idea de PC cine, la manera en que se cuantifica el flujo es midiendo la magnetización transversal del espín en tiempos diferentes; se aplica un gradiente bipolar, un lóbulo positivo seguido de un lóbulo negativo, ambos de igual magnitud pero en dirección opuesta. Se sustenta en la diferencia de fase del vector de magnetización transversal para codificar la velocidad de la sangre para espines que permanecen quietos y para espines que están en movimiento. Los espines que permanecen quietos al aplicarles el lóbulo positivo rotan cierto ángulo pero al aplicarles el negativo en sentido opuesto regresan a su posición de fase original, es decir no acumulan un desfase a diferencia de los espines en movimiento que si acumulan un desfase debido a la intensidad que experimentan por los gradientes, no regresan a su fase original, este ángulo de desfase es directamente proporcional a la velocidad. Con los datos adquiridos se producen imágenes de magnitud que nos da información anatómica de los vasos sanguíneos y de fase donde se codifica la velocidad con la intensidad de la imagen, un color brillante representa un flujo saliendo de la imagen y un color oscuro entrando en la imagen.

Esta misma idea se extiende para la técnica de Flujo 4D donde se aplican gradientes bipolares para hacer la codificación de la velocidad en las

tres direcciones ortogonales [3], es decir, se aplica esta secuencia en las tres dimensiones para codificar la velocidad sanguínea en las tres direcciones del sistema contemplando el tiempo de un ciclo cardíaco. El resultado de la adquisición son dos tipos de imágenes, una imagen anatómica e imágenes codificadas por velocidad, la primera es de referencia y las otras son tres una por cada dirección del flujo [3].

20.3 Adquisición de datos

Esta técnica puede ser aplicada en un corte o en un volumen, la secuencia de volumen en todo el corazón tarda aproximadamente de 10 a 15 minutos [3]. Para tener datos de este estilo en función del tiempo, se utilizan métodos de segmentación del espacio k, concretamente, al tener el espacio k cartesiano tridimensional k_x, k_y y k_z , cada eje dividido en tres matrices N_x, N_y y N_z , en cada latido se adquiere un conjunto de líneas del espacio de un solo corte para todas las fases del ciclo cardíaco donde se recogen 4 tipos de datos, la de referencia y tres codificaciones de velocidad resultantes del uso de los gradientes bipolares aplicados en cada dirección. La reconstrucción de las imágenes de fase se hace con la diferencia de fase entre los datos de referencia y los de codificación de fase para cada dirección, ver la figura 36.

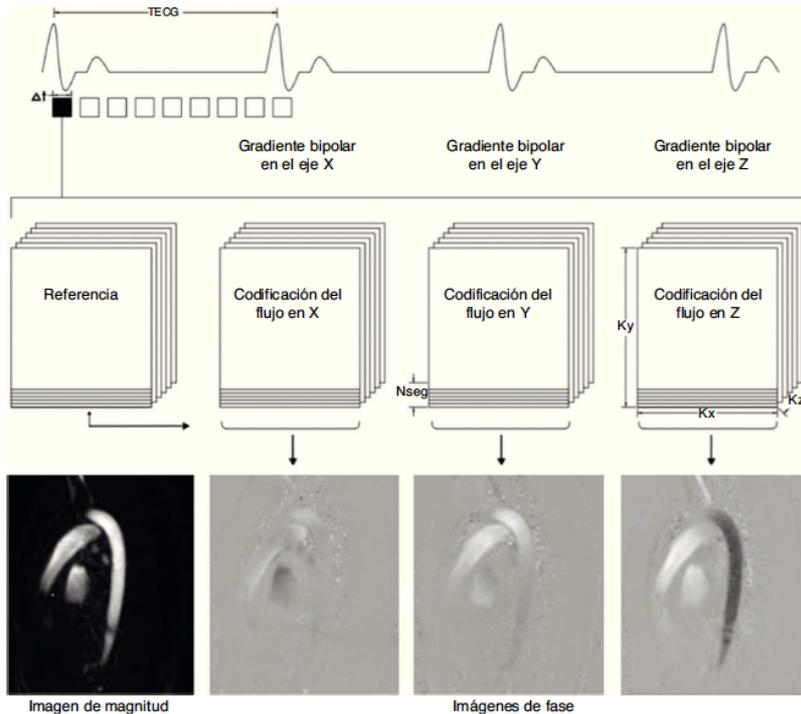


Figure 36. Esquema de adquisición [2].

20.4 Venc

Una de las características importantes de la secuencia PCA cine 2D es la velocidad **Venc** (*Velocity encoding*) que es un parámetro que determina la

velocidad máxima, sus unidades son en cm/s , el cual tiene la cualidad de que si se obtienen velocidades mayores a este parámetro la codificación se realiza erróneamente provocando un artefacto en la imagen. Las imágenes donde la secuencia es de contraste son sensibles a artefactos debido a las corrientes remolino o corrientes de Eddy que tienden cuando la región estudiada se aleja del isocentro del campo magnético fijo. La corrección de estos artefactos se convierte en algo esencial para una adecuada visualización del flujo y cuantificación de la velocidad de la sangre; es por ello que la elección del Venc debe ser el valor más adecuado, si se elige un Venc alto eliminaría los artefactos, pero limitará la sensibilidad de la velocidad cuando este tiene un valor bajo.

20.5 Tipos de datos

Los datos obtenidos se visualizan en representaciones de patrones de flujo tridimensional en el tiempo, los diferentes tipos son:

20.5.1 Líneas de flujo

Son curvas que conectan partículas del fluido en el espacio, la curva que se representa es la tangente del vector velocidad de varias partículas en un determinado tiempo fijo; estas proporcionan un patrón del flujo que describe un elemento del fluido en el ciclo cardíaco en un instante determinado, ver figura 37.

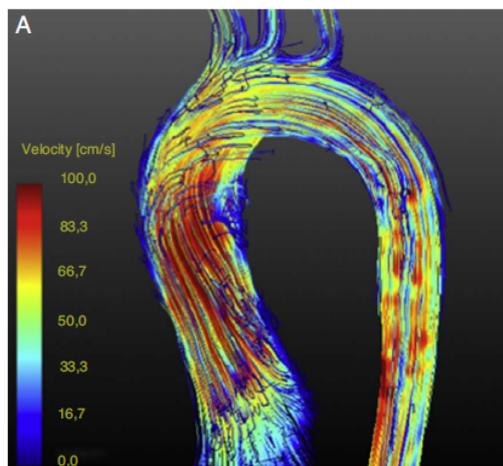


Figure 37. Líneas de flujo usando Flujo 4D [2].

20.5.2 Trazadores de partículas

Indican la trayectoria que sigue una partícula del fluido, se visualiza como el camino que una pelotita recorrería si es lanzada al fluido. Se considera como el registro del camino en un determinado periodo de tiempo, se usan para analizar la evolución temporal de los patrones de flujo de sangre durante el ciclo cardíaco; además con ello se puede hacer uso de colores para codificar la velocidad del fluido, ver figura 38.

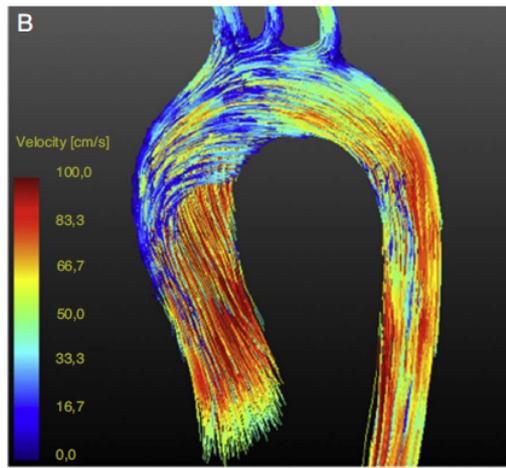


Figure 38. Trazadores de partículas usando Flujo 4D [2].

20.5.3 Campos de velocidades

Una gráfica donde aparecen solo vectores que representan la dirección a la que se dirige una partícula del fluido y la longitud de el vector la magnitud de la velocidad, de manera que se puede ver para cada punto la evolución del patrón de velocidad de flujo en el tiempo. Es posible construir mallas 3D que muestran los perfiles de velocidad del flujo de sangre, ver figura 39.

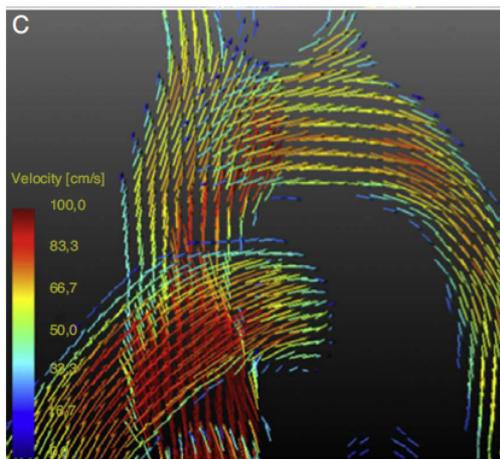


Figure 39. Campo de velocidades usando Flujo 4D [2].

Además, al ser una técnica de contraste de fase permite la cuantificación de flujos cardíacos haciendo un corte en el plano perpendicular al vaso de interés con los gradientes bipolares aplicados y los gradientes de selección de corte en la misma dirección; seleccionando una región de interés se puede obtener las curvas de flujos cardiovasculares; el promedio de las velocidades considerando el área de la región y la cantidad de flujo que pasa en una determinada fase cardíaca; hasta es posible cuantificar el volumen de sangre sumando los flujos obtenidos durante todas las fases.

A su vez permite evaluar los patrones de flujo como vorticidad, determinar la trayectoria de la sangre, calcular "shunts" cardíacos debido a

conexiones arterio-venosas y realizar estimaciones y realizar estimaciones del "wall shear stress" en grandes vasos.

20.6 Artefactos

Debido a su inestabilidad por tener flujos de sangre en movimiento las imágenes de fase son susceptibles a artefactos, además considerando la elección correcta de la velocidad V_{enc} y los movimientos de la respiración se convierte de gran importancia evitar y corregir tales errores para garantizar una visualización y cuantificación de medidas de flujo 4D correcta. Primero hay que considerar realizar una secuencia PCA cine 2D y de acuerdo a la velocidad pico calculada escoger el valor de V_{enc} . Para evitar los errores del movimiento al respirar existen técnicas de compensación con sensores para sincronizar la técnica.

20.7 Ventajas y desventajas de la secuencia

La técnica tiene importantes ventajas como lo son no utilizar radiación ionizante, ser no invasiva (ambas ventajas implícitas de hacer uso de las imágenes de resonancia magnética), no usar medios de contraste yodados para su visualización, ser una secuencia tridimensional y la oportunidad del posprocesamiento para cuantificar el flujo en cualquier plano cuando el paciente ya no está en el equipo de resonancia.

Un inconveniente de esta secuencia es el tiempo de adquisición, que aumenta cuando se requiere una resolución espacial mayor o el volumen adquirido es grande; otro de ellos son los artefactos que salen debido al movimiento respiratorio para este inconveniente se usan sensores que detecta la respiración del paciente y se sincroniza con la adquisición de la secuencia. Ambos detalles pueden solucionarse con métodos de aceleración que incluyen las imágenes en paralelo, estrategias de muestreo que exploran correlaciones en el dominio espacio temporal y adquisiciones radiales del espacio k.

Capítulo 4.

La vorticidad y formas de identificar vórtices

21 Movimiento de rotación de un elemento de fluido

Un elemento de fluido puede realizar cuatro movimientos o deformaciones importantes, traslación, rotación, deformación lineal y deformación por esfuerzos cortantes [31]; a diferencia de los sólidos, los fluidos pueden realizar tales cambios de manera simultánea. Las primeras dos razones de cambio son intuitivas debido a la experiencia de mecánica de sólidos, de igual manera la traslación de un pequeño volumen de fluido se describe en términos del vector velocidad:

$$\vec{V} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}, \quad (21.1)$$

donde cada componente describe su traslación a lo largo de los ejes coordenados. Para el movimiento de rotación, se conoce a nivel macroscópico que describe un giro sobre un eje específico considerando una dirección elegida, generalmente positiva cuando gira en contra de las manecillas de reloj; tal alteración se describe en términos de la velocidad angular que determina el cambio del ángulo en el tiempo. En un elemento de fluido este movimiento de rotación implica a su vez un cambio de forma notorio, debido a la separación que tienen las moléculas.

A continuación se describirá una rotación de un elemento de fluido rectangular bidimensional sobre el plano cartesiano, se posiciona de tal forma que uno de sus vértices (punto P) coincida con el origen del sistema coordenado, el cual permanecerá fijo por conveniencia, ver la figura 40.

En primera instancia, la línea A coincide con el eje X y perpendicularmente la línea B coincide con el eje Y , una vez que pasa el tiempo, el elemento de fluido rota sobre el eje Z en el punto P , el rectángulo deja de existir y el elemento de fluido toma una forma caprichosa (dependiendo de las características del fluido total) pero para este ejemplo se modifica como se muestra en la figura 41, las líneas A y B cambian a sus correspondientes A' y B' . Si se define sus cambios en términos de ángulos con respecto a

Sección 21. Movimiento de rotación en elemento de fluido

Sección 22. Definición de vorticidad

Sección 23. Dinámica de vorticidad

Sección 24. Métodos numéricos para evaluar vorticidad

Sección 25. Criterio de λ_2 . Definición objetiva de vórtice

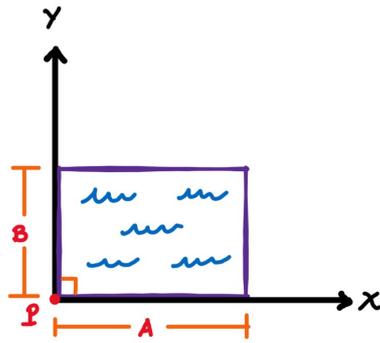


Figure 40. Flujo bidimensional.

los ejes coordenados, la línea A cambia a A' recorriendo un ángulo θ_a con respecto al eje X y la línea B cambia a la línea B' recorriendo un ángulo θ_b con respecto al eje Y , ambos cambios se dan en un tiempo $\Delta t = t_f - t_i$.

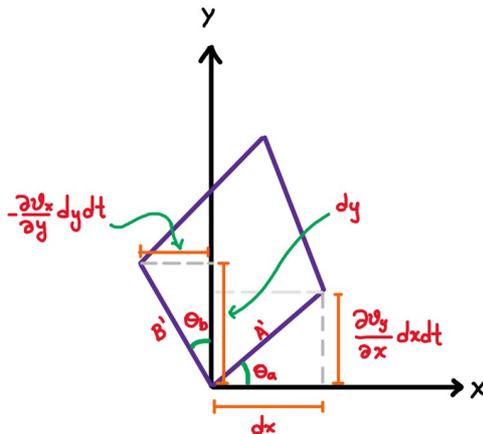


Figure 41. Flujo bidimensional después de un tiempo t .

En promedio, un elemento de ángulo el cual describe la rotación del sistema será:

$$d\theta = d\left(\frac{\theta_a + \theta_b}{2}\right), \quad (21.2)$$

y si el cambio se da cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se tendrá la velocidad angular instantánea Ω ,

$$\Omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta_a + \theta_b}{2}\right). \quad (21.3)$$

La expresión anterior se puede reescribir en términos de las componentes de la velocidad, considerando la aproximación de la tangente del ángulo y escribiendo la longitud del cateto opuesto en términos del gradiente de la velocidad, figura 41 se tiene:

$$\tan d\theta_a = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt \cong d\theta_a,$$

$$\tan d\theta_b = \frac{-\frac{\partial v_x}{\partial y} dy dt}{dy} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} dt \cong d\theta_b,$$

sustituyendo en 21.3 se tiene,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\theta_a + \theta_b}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] = \Omega_z \quad (21.4)$$

Si se considera una rotación tridimensional 21.4 corresponde a la componente z de la rotación y las componentes x y y se obtendrían análogamente.

$$\Omega_x = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]$$

Cada componente equivale a las componentes del rotacional de la velocidad multiplicadas por $1/2$, finalmente el vector velocidad angular estaría dado por

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} \quad (21.5)$$

22 Definición de vorticidad

La velocidad angular total es proporcional al rotacional de la velocidad, este ente matemático está definido físicamente como la vorticidad:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}. \quad (22.1)$$

Por lo tanto, la vorticidad es el doble de la velocidad angular de un elemento de fluido. El vector velocidad depende de su posición cuyo valor está definido en cada punto, su rotacional muestra la tendencia de cada punto a rotar, es por ello que la vorticidad es una medida local de la rotación; a una concentración de vorticidad en una misma dirección se le conoce como **vórtice** [47].

Si la vorticidad de un fluido es diferente de cero las partículas del fluido presentes en esa región rotarán sobre su eje, figura 42, se dice que el fluido en esa región es *rotacional*, esto siempre se cumple hasta que un proceso no uniforme lo altere, por ejemplo, la viscosidad, cambio de temperatura, o algún objeto en su trayectoria [31]; contrariamente un flujo es *irrotacional* si en la región las partículas de fluido no rotan ($\vec{\omega} = 0$)

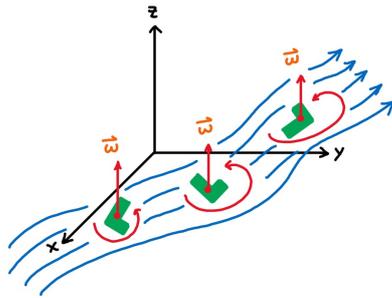


Figure 42. Objeto en presencia de un fluido con vorticidad.

23 Dinámica de vorticidad

La evolución de un flujo se puede describir en términos de la vorticidad, las ecuaciones de Navier-Stokes, que en principio están en términos de la velocidad, se simplifican cuando se escriben en términos de $\vec{\omega}$.

Para ello, se considera un fluido con $\rho = cte$, $\nu = cte$ y en presencia de fuerzas conservativas \vec{f} , tales que pueden escribirse como el gradiente de una función potencial. Al tomar el rotacional de 15.9, la definición de la derivada material 15.5 y realizar algunas manipulaciones matemáticas usando identidades vectoriales, se encuentra la ecuación que gobierna a la vorticidad:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (23.1)$$

Es notorio que la ecuación carece del término no local de la presión, eso significa que “la vorticidad puede extenderse a través de un fluido de forma incremental sólo, de hecho, mediante el movimiento material, que arrastra la vorticidad con él, o bien por difusión. Esto no es cierto para el campo de velocidad, ya que el momento lineal puede redistribuirse instantáneamente en todo el espacio por las fuerzas de presión no locales ”[48]. La vorticidad no puede generarse de la nada, se genera por superficies sólidas y viaja a través del fluido en una combinación de movimiento y difusión material [48].

24 Métodos numéricos para evaluar vorticidad

Los vórtices presentes en un fluido se pueden visualizar por su forma de remolino en un campo vectorial, en ocasiones se busca identificar a los vórtices analíticamente, para ello existen algunas herramientas matemáticas o métodos con principios físicos que evalúan la vorticidad e identifican el punto donde su valor o concentración es tal que representa a un núcleo vortical.

La secuencia de Flujo 4D permite obtener un campo de velocidades, por consiguiente se puede obtener el valor de la vorticidad en cada punto

auxiliándose de métodos numéricos. Diversos esquemas se usan para la evaluación, desde métodos simples hasta métodos optimizados que permiten una mejoría en la exactitud de la medida. En esta sección se explican cuatro métodos numéricos de diferenciación que se usarán para estimar la vorticidad.

24.1 Método 1. Método de Chapra de cuarto orden

24.1.1 Diferenciación Numérica

La derivada de una función nos dice que tanto varía dicha función, en una diferencia entre dos puntos. Si cambiamos de x a $x + dx$, entonces $f(x)$ cambiará en proporción, considerando a la derivada como un factor de proporcionalidad;

$$\begin{aligned} dx &\propto df & (24.1) \\ df &= a dx \\ a &= \frac{df}{dx}, \end{aligned}$$

donde a representa que tan rápido varía $f(x)$ cuando cambiamos x en una pequeña cantidad dx .

En otra representación, basada en diferencias, parte de tener $\Delta f(x) = f_{final}(x) - f_{inicial}(x)$ y $\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$;

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f_{final} - f_{inicial}}{x_{final} - x_{inicial}} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x_{final} - x_{inicial}}. \quad (24.2)$$

Por lo tanto, cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se tiene íntegramente la derivada $\frac{df}{dx}$. Evaluarla en un punto expresa, de manera gráfica, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Este principio de diferencias son las bases de las técnicas fundamentales para estimar y/o aproximar derivadas. La **diferencia finita dividida** es una de muchas aproximaciones de la derivada numérica usando serie de Taylor.

El teorema de Taylor esta definido como:

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \\ &+ \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n + R_n, \end{aligned} \quad (24.3)$$

donde R_n es el residuo. Si se define al tamaño de paso como $h \equiv x_{i+1} - x_i$ reescribimos;

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n, \quad (24.4)$$

con $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$.

El término residual R_n determina cuantos pasos son necesarios para una aproximación razonable de la función; se basa en tomar los pasos suficientes, hasta un punto donde entre un paso y otro no hay variaciones significativas, por consiguiente, la mejoría es mínima. Los errores de truncamiento son aquellos que resultan de usar una aproximación en lugar de un procedimiento matemático exacto [49], ya que R_n es proporcional al incremento de h , se suele escribir:

$$R_n = O(h^{n+1}), \quad (24.5)$$

entonces, $O(h^{n+1})$ nos dice que el error de truncamiento de orden h^{n+1} ;

$$\text{Error} \propto \text{Incremento de } h^{n+1}. \quad (24.6)$$

Cuando el incremento es del orden de $O(h)$ y h se reduce a la mitad, el error de truncamiento también se reduce a la mitad, si se tiene un error de orden de $O(h^2)$ y h se reduce a la mitad, el error se reducirá cuatro veces [49] y así sucesivamente. Naturalmente si se agregan términos a la serie de Taylor, el error de truncamiento disminuye (R_n disminuye).

24.1.2 Diferencia finita dividida

Diferencia finita hacia adelante

Partimos de la serie de Taylor,

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!} h^2 + \dots + R_n, \quad (24.7)$$

si se trunca se obtiene,

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + R_1, \quad (24.8)$$

despejando $f'(x_i)$,

$$f'(x_i)h = f(x_{i+1}) - f(x_i) - R_1 \quad (24.9)$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{R_1}{h}. \quad (24.10)$$

Usando la definición de R_n . Para $n = 1$ se tiene,

$$R_1 = \frac{f''(\xi)}{2!} (h^2), \quad (24.11)$$

considerando el error de truncamiento $\frac{R_1}{h}$,

$$\frac{R_1}{h} = \frac{f''(\xi)}{2!} h \Rightarrow O(h), \quad (24.12)$$

el error de truncamiento es de orden de 1.

La ecuación 24.10 es la primera diferencia finita dividida con un tamaño de paso de h ; esta forma es considerada la primer diferencia finita hacia adelante ya que usamos de x_i a x_{i+1} para estimarla (ver la figura 43).

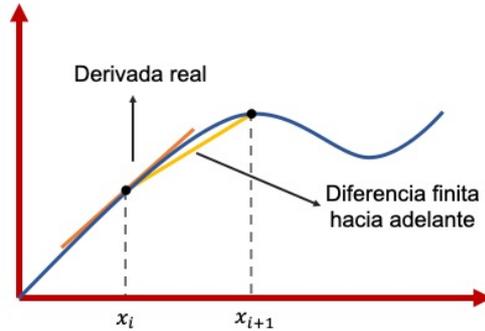


Figure 43. Diferencias finitas hacia adelante [49].

Existen dos formas más, diferencias finitas hacia atrás, que toman el paso hacia atrás y diferencias finitas centradas, donde toman valores igualmente espaciados alrededor del punto donde la derivada este estimada.

Diferencia finita hacia atrás

La primera derivada finita dividida hacia atrás (ver la figura 44) se obtiene expandiendo la serie de Taylor hacia atrás,

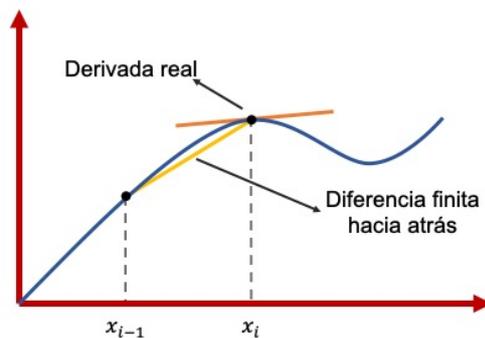


Figure 44. Diferencias finitas hacia atrás [49].

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \dots, \quad (24.13)$$

despejando $f'(x_i)$,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h). \quad (24.14)$$

De igual manera, se obtiene un error de truncamiento de orden 1.

Diferencia dividida centrada

Para obtener la primera derivada finita dividida centrada (ver la figura 45) se usan las expansiones de Taylor hacia adelante y hacia atrás, ecuación 24.7 y 24.13 respectivamente. Se restan y se obtiene,

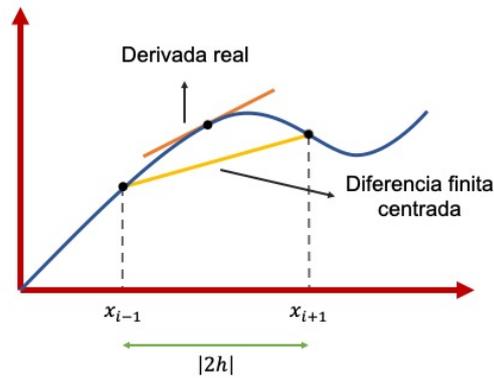


Figure 45. Diferencias finitas centradas [49].

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + \frac{2f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 - \dots, \quad (24.15)$$

despejando la primera derivada,

$$2f'(x_i)h = f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) - 2\frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 - \dots$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^2 - \dots, \quad (24.16)$$

Donde el error de truncamiento es de h^2 , lo que nos dice que para este caso, si reducimos el valor del incremento a la mitad se reducirá una cuarta parte el error. Está representación hace a la derivada más exacta. Siguiendo el mismo sentido es posible obtener aproximaciones para derivadas de orden superior.

Resulta de interés obtener formulas con alta exactitud, cuando se aumentan términos a la serie de Taylor y sustituyendo el término de la 3ra derivada es posible. Se busca aumentar la exactitud de la primera derivada finita centrada, para ello, se tomarás las series de Taylor hacia adelante y hacia atrás a dos pasos.

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)2h + \frac{f''(x_i)}{2}(2h)^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(2h)^3 + \dots, \quad (24.17)$$

$$f(x_{i-2}) = f(x_i) - f'(x_i)2h + \frac{f''(x_i)}{2}(2h)^2 - \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(2h)^3 + \dots, \quad (24.18)$$

restando,

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i-2}) = 2f'(x_i)2h + 2\frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(2h)^3 + \dots; \quad (24.19)$$

despejando el término donde está incluida la 3ra derivada,

$$\frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^2 = \frac{f(x_{i+2})}{16h} - \frac{f(x_{i-2})}{16h} - \frac{f'(x_i)}{4}, \quad (24.20)$$

sustituyendo en 24.16 se tiene,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f(x_{i+2})}{16h} + \frac{f(x_{i-2})}{16h} + \frac{f'(x_i)}{4}, \quad (24.21)$$

y simplificando

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}. \quad (24.22)$$

Es la fórmula de la primera derivada por diferencias finitas centradas con un error proporcional a h^4 . En forma de resumen, se presenta el siguiente diagrama de flujo para establecer la idea de las diferencias finitas centradas, ver la figura 46.

De esta forma si se busca obtener la vorticidad, se calculará las derivadas del rotacional de la velocidad usando la ecuación 24.22.

24.2 Método 2. Método de 8 puntos

Una estructura vortical se puede dar en un fluido en el plano bidimensional o en el espacio tridimensional, cuando se da en el plano, por ejemplo el plano $X - Y$, el cálculo de 22.1 se simplifica, ya que basta con obtener la componente fuera del plano, en este caso la componente z ,

$$\omega_z = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right), \quad (24.23)$$

donde ω_z se evalúa en cada punto en el mapa vectorial [50].

Para encontrar una relación que nos permita manipular esta definición se parte de la circulación

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l}, \quad (24.24)$$

evaluada alrededor de una curva cerrada muy cercana al punto, esto es equivalente a cuando se encierra al punto en una pequeña área Δa ; por ello se aplica el teorema de Stokes [51],

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_S (\Delta \times \vec{V}) \cdot d\vec{a}, \quad (24.25)$$

ya que la superficie es puntual; el valor promedio de $(\Delta \times \vec{V})$, en la vecindad del punto, se puede escribir como:

$$\int_S (\Delta \times \vec{V}) \cdot d\vec{a} \simeq \langle (\Delta \times \vec{V}) \cdot \hat{n} \rangle_P \Delta a. \quad (24.26)$$

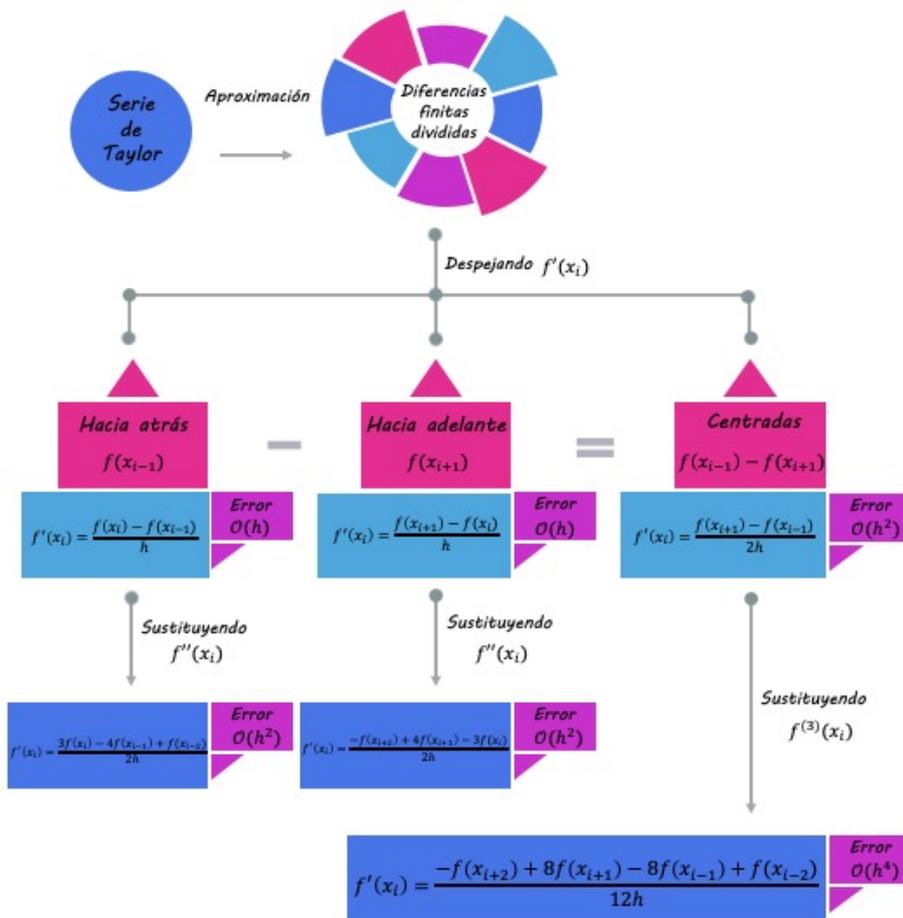


Figure 46. Diferencias finitas centradas.

como consecuencia de la igualdad de las ecuaciones 24.25 y 24.26 se obtiene,

$$\langle (\Delta \times \vec{V}) \cdot \hat{n} \rangle = \frac{1}{\Delta a} \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}. \tag{24.27}$$

Cuando se toma $\Delta a \rightarrow 0$, se obliga a que el punto quede en el centro¹ y el valor promedio prácticamente ya es el valor de $(\Delta \times \vec{V}) \cdot \hat{n}$. ¹ por ello, ya no aparece el sub-índice P en la ecuación 24.27

$$(\Delta \times \vec{V}) \cdot \hat{n} = \frac{1}{\Delta a} \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}, \tag{24.28}$$

por lo tanto, la componente del rotacional de la velocidad en la dirección normal es igual a la integral de línea de \vec{V} que rodea a una superficie normal a esta dirección; que como se vió en 24.23 corresponde a la vorticidad ω_z . Formalmente,

$$\omega_z = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}. \tag{24.29}$$

Esta expresión ayuda cuando se tiene una configuración de puntos

equidistantes distribuidos en un plano, por ejemplo 8 puntos como se muestran en la figura 47.

La circulación es positiva en contra de las manecillas del reloj, así al integrar se tiene

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint_C [V_x dx + V_y dy] = \int_{\alpha_1} V_x dx + \int_{\alpha_2} V_x dx + \int_{\alpha_3} V_y dy + \int_{\alpha_4} V_y dy + \int_{\alpha_5} V_x dx + \int_{\alpha_6} V_x dx + \int_{\alpha_7} V_y dy + \int_{\alpha_8} V_y dy,$$

se toma en cuenta que en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5$ y α_6 la componente y es constante, por tanto, el desplazamiento dy es cero; lo mismo para $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_7$ y α_8 en la componente x .

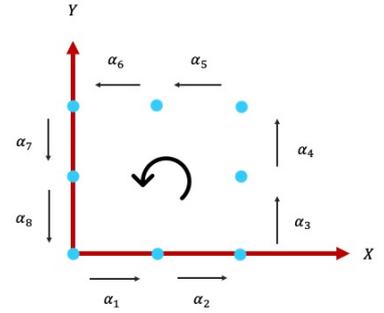


Figure 47. 8 puntos.

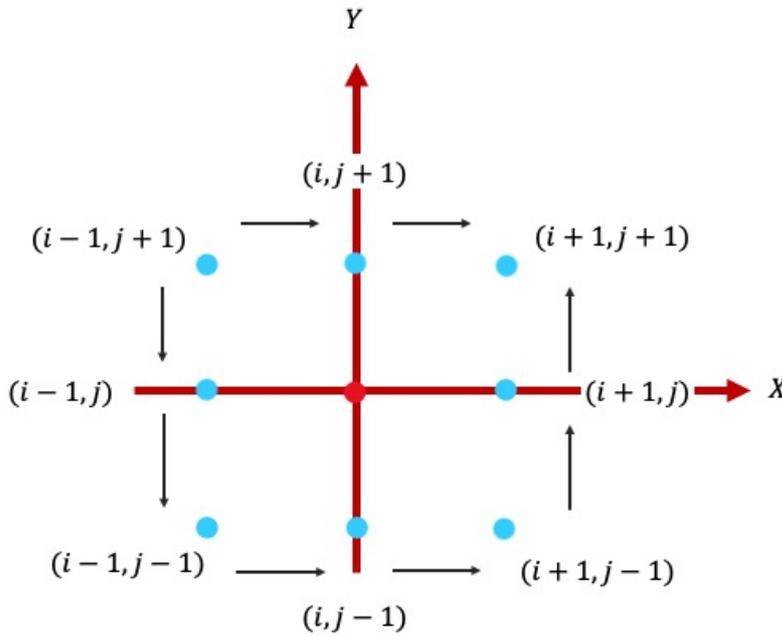


Figure 48. Localización de los 8 puntos en el plano.

Se redefinen los puntos como se muestran en la figura 48. Se usará integración numérica, propiamente el método del trapecio, el cual consiste en determinar el área bajo la curva sumando la contribución de pequeños trapecios,

$$I \simeq (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}, \tag{24.31}$$

donde a se considera el punto inicial y b el punto final. Se muestra en la figura la localización de cada punto.

Se considera Δl la distancia entre cada punto, por tanto $(b - a) = \Delta l$

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{V} \times d\vec{l} = & \Delta l \left[\frac{V_x(i-1,j-1) + V_x(i,j-1)}{2} \right] + \Delta l \left[\frac{V_x(i,j-1) + V_x(i+1,j-1)}{2} \right] \\
& + \Delta l \left[\frac{V_y(i+1,j-1) + V_y(i+1,j)}{2} \right] + \Delta l \left[\frac{V_y(i+1,j) + V_y(i+1,j+1)}{2} \right] \\
& - \Delta l \left[\frac{V_x(i+1,j+1) + V_x(i,j+1)}{2} \right] - \Delta l \left[\frac{V_x(i,j+1) + V_x(i-1,j+1)}{2} \right] \\
& - \Delta l \left[\frac{V_y(i-1,j+1) + V_y(i-1,j)}{2} \right] - \Delta l \left[\frac{V_y(i-1,j) + V_y(i-1,j-1)}{2} \right].
\end{aligned}$$

Para este caso, el elemento de área Δa es $(2\Delta l)^2$ por ser un cuadrado, al sustituir se obtiene,

$$\begin{aligned}
\omega_z = \frac{\Delta l}{2(2\Delta l)^2} [& V_x(i-1,j-1) + V_x(i,j-1) + V_x(i,j-1) + V_x(i+1,j-1) \\
& + V_y(i+1,j-1) + V_y(i+1,j) + V_y(i+1,j) + V_y(i+1,j+1) \\
& - V_x(i+1,j+1) - V_x(i,j+1) - V_x(i,j+1) - V_x(i-1,j+1) \\
& - V_y(i-1,j+1) - V_y(i-1,j) - V_y(i-1,j) - V_y(i-1,j-1)],
\end{aligned}$$

y simplificando,

$$\begin{aligned}
\omega_z = \frac{1}{8\Delta l} [& V_x(i-1,j-1) + 2V_x(i,j-1) + V_x(i+1,j-1) + V_y(i+1,j-1) \quad (24.32) \\
& + 2V_y(i+1,j) + V_y(i+1,j+1) - V_x(i+1,j+1) - 2V_x(i,j+1) \\
& - V_x(i-1,j+1) - V_y(i-1,j+1) - 2V_y(i-1,j) - V_y(i-1,j-1)].
\end{aligned}$$

La ecuación anterior ayuda a evaluar la vorticidad en cada punto dados datos de velocidad en un plano bidimensional. Este método proporciona un suavizado del campo de vorticidad consistente con la resolución dado en velocimetría de partículas [52].

24.3 Método 3. Extrapolación de Richardson

El método de extrapolación de Richardson tiene como objetivo principal mejorar la estimación de emplear diferencias finitas divididas. Se basa en usar dos estimaciones para calcular una tercera aproximación más exacta [49]. Partimos de la derivada numérica usando diferencias finitas centradas:

$$D_{real} = D_{aprox}(h) + E(h), \quad (24.33)$$

donde el valor real de la derivada consta de la suma de la aproximación más su error de truncamiento. Se tomarán dos estimaciones de la misma derivada con un tamaño de paso diferente, h_1 y h_2 respectivamente, en esta ocasión se tomará al error de truncamiento proporcional a h^2 , es decir,

$$E(h_i) \propto h_i^2 \quad i = 1, 2. \quad (24.34)$$

ya que ambos estiman la derivada real, se tiene la igualdad,

$$D_{real} = D(h_1) + E(h_1) = D(h_2) + E(h_2), \quad (24.35)$$

para cada error se tiene,

$$\begin{aligned} E(h_1) &= c_1 h_1^2 \\ E(h_2) &= c_2 h_2^2, \end{aligned}$$

con c_1 y c_2 constantes adimensionales provenientes de la proporcionalidad; al dividir las se obtiene,

$$E(h_1) = c \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 E(h_2), \quad (24.36)$$

simplificando $c = c_1/c_2$, esta expresión se sustituye en 24.35

$$D(h_1) + c \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 E(h_2) = D(h_2) + E(h_2), \quad (24.37)$$

despejando $E(h_2)$,

$$E(h_2) = \frac{D(h_2) - D(h_1)}{c \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 - 1}. \quad (24.38)$$

Por último, sustituyendo de nuevo en la ecuación 24.32 para dejar la expresión sin términos de error,

$$D_{real} = D(h_2) + \frac{D(h_2) - D(h_1)}{c \left(\frac{h_1}{h_2} \right)^2 - 1}. \quad (24.39)$$

este procedimiento “es equivalente a ajustar un polinomio de grado superior a los datos y después evaluar las diferencias finitas centradas ”[49]. Debido a que se usan dos estimaciones proporcionales a h^2 el error de estimación será proporcional a h^4 , mejorando la exactitud.

Extrapolación de Richardson de cuarto orden con coeficientes optimizados

En [53] usan la extrapolación de Richardson en su investigación para mejorar la precisión de las mediciones en Velocimetría de Imagen de Partículas (PIV), el algoritmo que proponen minimiza los errores de las estimaciones de vorticidad, es decir, ahí proponen un nuevo esquema para el cálculo de derivadas de velocidad que toma en cuenta los valores lejos del punto de medición a fin de mejorar la precisión al minimizar la amplificación de ruido [54].

“El principio de este método es tomar una combinación lineal de esquemas de diferencia centrada de segundo orden calculados con diferentes espacios de datos Δx , $2\Delta x$, $4\Delta x$ y $8\Delta x$ ”[54].

El método está definido como [11]:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{A} \sum_{k=1,2,4,8} A_k \frac{U_{i+k} - U_{i-k}}{2k\Delta x_i}. \quad (24.40)$$

Los coeficientes de la combinación lineal se adaptan para minimizar el error de truncamiento o error de ruido [54]. (Ver cuadro 1)

Desarrollando la suma, con $\Delta x = h$, se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{A} & \left[A_1 \left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} \right) + A_2 \left(\frac{U_{i+2} - U_{i-2}}{4h} \right) \right. \\ & \left. + A_4 \left(\frac{U_{i+4} - U_{i-4}}{8h} \right) + A_8 \left(\frac{U_{i+8} - U_{i-8}}{16h} \right) \right] \end{aligned} \quad (24.41)$$

Sustituyendo los valores y simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{1239h} & [136 (U_{i+1} - U_{i-1}) + 259 (U_{i+2} - U_{i-2}) \\ & + -\frac{69}{16} (U_{i+8} - U_{i-8})] \end{aligned} \quad (24.42)$$

De igual forma que en el método de Chapra, si se desea calcular la vorticidad, se calcularán las componentes del rotacional de la velocidad.

24.4 Método 4. Extrapolación de Richardson Compacta

En [11] se expone un método compacto de la extrapolación de Richardson a cuarto orden con el objetivo de mejorar la precisión de mediciones experimentales en la aplicación de Velocimetría de Imagen de Partículas Digitales (DPIV) para la estimación de la vorticidad. Tal esquema híbrido ofrece un error de truncamiento de orden superior con “menos amplificación de ruido y menos error de polarización que el esquema de diferencias finitas centradas de segundo orden en el rango de escalas de flujo relevantes para DPIV que los métodos anteriores”[11].

El método combina las características de los esquemas de orden superior con los esquemas de minimización de ruido, utilizando una suma de muestreo espacial de las derivadas. La formulación híbrida está representada por,

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{A} \sum_{k=1,2,3,8} A_k U'_{i-k-grid}. \quad (24.43)$$

donde $U'_{i-k-grid}$ es la derivada del esquema compacto para la cuadrícula k . Se implementa como sigue, si tenemos una matriz de $N \times N$ elementos, para $k = 1$ corresponde al arreglo de vectores de tamaño N tomando el espaciamiento entre ellos más pequeño. Para $k = 2$ se resuelve dos

A	1239
A_1	272
A_2	1036
A_4	0
A_8	-69

Table 1. Coeficientes optimizados

veces, con dos distintos arreglos, el primero con $1, 2, 3, 7, \dots, N$ y el segundo con $2, 4, 6, 8, \dots, N$; para $k = 4$ se resuelve cuatro veces, con cuatro diferentes arreglos: $1, 5, 9, 13, \dots, N$, $2, 6, 10, 14, \dots, N$, $3, 7, 11, 15, \dots, N$ y $4, 8, 12, 16, \dots, N$ Por último, para $k = 8$ se obtienen ocho arreglos:

- $1, 9, 17, \dots, N$
- $2, 10, 18, \dots, N$
- $3, 11, 19, \dots, N$
- $4, 12, 20, \dots, N$
- $5, 13, 21, \dots, N$
- $6, 14, 22, \dots, N$
- $7, 15, 23, \dots, N$
- $8, 16, 24, \dots, N$

“Los resultados de cada muestreo espacial se promedian de acuerdo con sus respectivos pesos y ubicación (i, j) dentro del campo de flujo. ”[11]. Los coeficientes para este método pueden intercambiarse A_4 por A_8 para reducir el tamaño de la plantilla y permitir el cálculo en cuadrículas pequeñas ($N \simeq 100$), el mismo artículo argumenta que el cambio de coeficientes no hace mucho la diferencia. (Ver cuadro 2)

La suma explícitamente quedaría como:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{(1239)^2 h} \left[\begin{aligned} &272 \left\{ 136(U_{i+1} - U_{i-1}) + 259(U_{i+2} - U_{i-2}) - \frac{69}{8}(U_{i+4} - U_{i-4}) \right\}_{1,2,3,4,\dots,N} \\ &+ 518 \left\{ 136(U_{i+1} - U_{i-1}) + 259(U_{i+2} - U_{i-2}) - \frac{69}{8}(U_{i+4} - U_{i-4}) \right\}_{1,2,3,7,\dots,N} \\ &+ 518 \left\{ 136(U_{i+1} - U_{i-1}) + 259(U_{i+2} - U_{i-2}) - \frac{69}{8}(U_{i+4} - U_{i-4}) \right\}_{2,4,6,8,\dots,N} \\ &- \frac{69}{4} \left\{ 136(U_{i+1} - U_{i-1}) + 259(U_{i+2} - U_{i-2}) - \frac{69}{8}(U_{i+4} - U_{i-4}) \right\}_{1,5,9,10,\dots,N} \\ &- \frac{69}{4} \left\{ 136(U_{i+1} - U_{i-1}) + 259(U_{i+2} - U_{i-2}) - \frac{69}{8}(U_{i+4} - U_{i-4}) \right\}_{2,6,10,14,\dots,N} \\ &- \frac{69}{4} \left\{ 136(U_{i+1} - U_{i-1}) + 259(U_{i+2} - U_{i-2}) - \frac{69}{8}(U_{i+4} - U_{i-4}) \right\}_{3,7,11,15,\dots,N} \\ &- \frac{69}{4} \left\{ 136(U_{i+1} - U_{i-1}) + 259(U_{i+2} - U_{i-2}) - \frac{69}{8}(U_{i+4} - U_{i-4}) \right\}_{4,8,12,16,\dots,N} \end{aligned} \right] \tag{24.44}$$

A	1239
A_1	272
A_2	1036
A_4	-69
A_8	0

Table 2. Coeficientes optimizados

Notesé que cada término de la suma tiene etiquetada la forma en que se tienen que considerar los datos. Este esquema híbrido "reduce con éxito la dependencia de la estimación tanto de la resolución de muestreo espacial a una escala particular del flujo como de la medición del ruido aleatorio" [11].

25 Criterio de λ_2

Se ha planteado que un núcleo vortical es la región donde se tiene valores altos de la vorticidad, como el rotacional de la velocidad, pero esta definición resulta no siempre satisfactoria ya que no identifica núcleos de vórtice en un flujo de cizallamiento, hay casos en que la magnitud de vorticidad en un cizallamiento es comparable con la magnitud de un vórtice y no exhibe un movimiento de remolino. También hay problema cercano a las paredes donde [8] encontró que los máximos y mínimos de la vorticidad se dan en la pared. Así en [55] determino que la vorticidad obtenida de 22.1 no es un criterio adecuado para la determinación de vórtices en estos casos.

25.1 Definición objetiva de vórtice

El mismo [55] propone una definición de vórtice objetiva que tenga conceptos de dinámica de fluidos tal que sirva para introducir un esquema que identifique vórtices en un fluido. Para explicar la definición parte discutiendo tres indicadores de vórtices, el mínimo de presión, las formas de las líneas de corriente y la magnitud de la vorticidad.

Físicamente un vórtice tiende a tener un mínimo local en el eje de movimiento circulatorio, es decir, el movimiento que lleva a cabo un vórtice describe un mínimo de presión en el núcleo, ya que se tiene la velocidad máxima en el centro por principio de Bernoulli ahí se produce una disminución de la presión. Los mínimos de presión pueden existir en un movimiento irrotacional no-estacionario y no necesariamente implican un remolino, por ello no es una condición suficiente, figura 49.

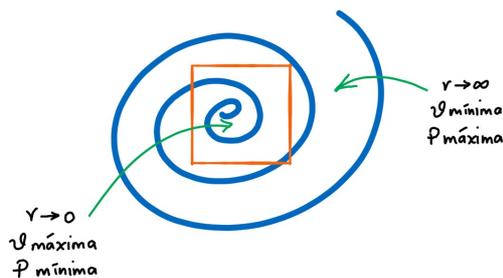


Figure 49. Mínimo local de presión.

Las líneas de corriente apoyan a la representación gráfica de un vórtice, líneas cerradas o espirales determinan un vortice pero quedan descartadas

al pensar en que si se tiene un vórtice muy grande no es probable que se logró dibujar completamente.

Como ya se menciona la magnitud de la vorticidad no siempre determina un remolino, en términos de una superficie de vorticidad, considerar un flujo tridimensional, por ejemplo en forma de lamina no es un vórtice aunque tenga una magnitud de vorticidad grande; en este sentido si se tiene un vórtice en forma de tubo el eje del vórtice determinará un máximo de $|\omega|$ a lo largo de ese eje, pero si se calcula la vorticidad en otro plano se podrían indicar vórtices separados, ver figura 50.

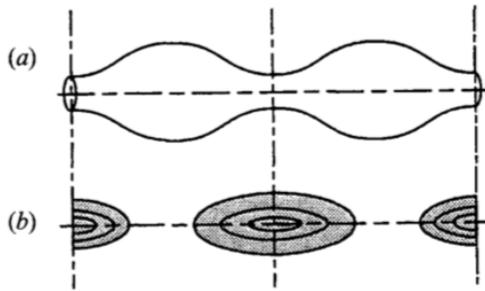


Figure 50. Vórtice axisimétrico con variación axial en la vorticidad: a) superficie del vórtice, b) superficie de vorticidad [55].

Partiendo del primer indicador para establecer la definición, un núcleo vortical como mínimo de presión. Se toma el gradiente de la ecuación de Navier-Stokes que se descompone en su parte simétrica y antisimétrica; la parte simétrica queda en términos del Hessiano de la presión; "la ocurrencia de una presión mínima en el plano requiere dos eigenvalores positivos del tensor de presión" [55]. Al no considerar el esfuerzo irrotacional inestable y los efectos viscosos, queda en términos de la parte simétrica y antisimétrica del gradiente de velocidad y del tensor de presión donde se obtiene información sobre la presión local externa, de la forma:

$$S^2 + \Omega^2 = -\frac{1}{\rho} \text{Tensor} [p]. \quad (25.1)$$

Así, si se considera la parte izquierda de la ecuación anterior para determinar un mínimo de presión local con dos eigenvalores negativos, la región que conecta a dichos eigenvalores es donde queda definido un vórtice. Ya que $S^2 + \Omega^2$ es un tensor simétrico, los eigenvalores serán reales, se requiere que al menos dos sean negativos; para un sistema 3D, al ordenar de la siguiente manera:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3. \quad (25.2)$$

“El criterio de identificación de vórtice es equivalente a la condición resultante λ_2 negativa.” [9]. Es decir,

$$\lambda_2 < 0. \quad (25.3)$$

En 2D también se basa en determinar la presión mínima local, es por ello que los eigenvalores del tensor de presión (que ahora es la matriz Hessiana de presión²) deben ser positivos, y por tanto, los eigenvalores de $S^2 + \Omega^2$ deben ser los dos negativos [56]. Se facilita aún más encontrando los mínimos locales de la presión sabiendo que:

$$\text{Hessiana}[p] = -\rho(S^2 + \Omega^2). \quad (25.4)$$

El criterio para determinar que sea un extremo mínimo, es que el determinante de la matriz Hessiana sea positivo y que la primera entrada de esa matriz sea positiva [57].

² Una matriz Hessiana esta conformada por las derivadas parciales evaluadas en cada punto para encontrar máximos y mínimos de una función.

Capítulo 5.

Modelos teóricos de vórtices

26 Modelo Teórico 2D. Células vorticales

Consiste en un par de ecuaciones que definen a un campo de velocidades que simula células vorticales simétricamente distribuidos en el plano cartesiano; este modelo se ha usado en trabajos de PIV [58], [59], [7] y tiene la ventaja de simular múltiples núcleos vorticales [1] que resultarán útiles para propósitos posteriores.

A continuación se presentan las ecuaciones del modelo bidimensional, la primera ecuación representa la componente x de la velocidad y la segunda la componente y de la velocidad.

$$\begin{aligned} V_x &= V_{max} \cos\left(\frac{xN_x\pi}{L_x} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{yN_y\pi}{L_y}\right) \\ V_y &= V_{max} \sin\left(\frac{xN_x\pi}{L_x} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{yN_y\pi}{L_y}\right) \end{aligned} \quad (26.1)$$

donde V_{max} es la componente máxima de la velocidad en m/s , N_x y N_y son el número de núcleos que se muestran a lo largo del eje correspondiente (ver figura 51); L_x y L_y representan el tamaño del campo de visión [58], si se toma $L_x = 400$ habrá 400 puntos distribuidos a lo largo del eje x positivo, el mismo comportamiento lo tiene L_y . Tanto V_x como V_y tienen unidades de m/s .

A continuación se muestra el campo de velocidades con $V_{max} = 5 m/s$, $N_x = N_y = 1$, $L_x = L_y = 400$, figura 52.

26.1 Evaluación de la magnitud de la vorticidad $|\omega|$

Los cuatro esquemas de diferenciación presentados en el capítulo anterior se simularon usando el software MATLAB 2021a The MathWorks, Inc., es decir, se aplican las ecuaciones de cada método para calcular las derivadas numéricas de la vorticidad usando el modelo teórico 2D como campo de velocidades, en el programa se tomó un número de pasos igual a 400 y un tamaño de paso de $h = 1$. La magnitud de la vorticidad se midió usando 22.1, en este caso al tener un plano bidimensional la ecuación se simplifica,

Sección 26. Modelo Teórico 2D. Células vorticales

Sección 27. Modelo Teórico 3D. Vórtice de Burgers

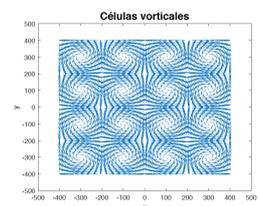


Figure 51. Núcleos vorticales $N_x = N_y = 2$.

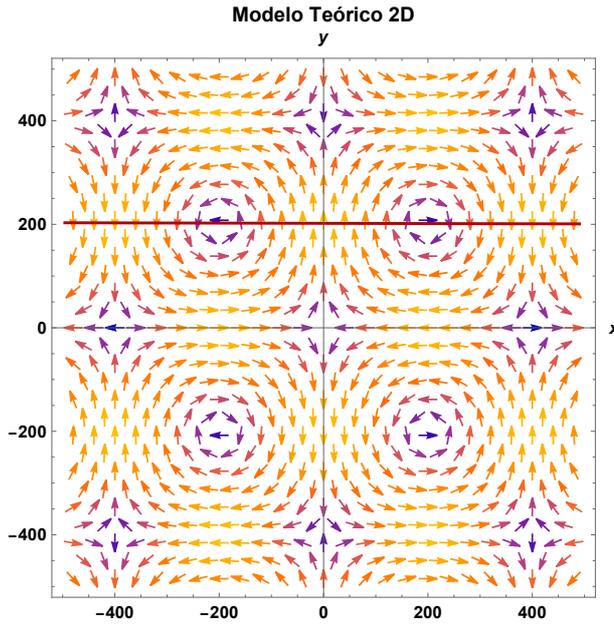


Figure 52. Modelo 2D

ya que basta con calcular la componente z del rotacional. Además, para establecer diferencias gráficas entre el uso de los métodos matemáticos se toma la vorticidad a lo largo de $y = 200$, esta línea corta por su centro a dos núcleos vorticales, vea la figura 52.

Tal simplificación, $y = cte$, conlleva calcular solo una derivada parcial para el caso del método de Chapra, el método de Richardson y el método de Richardson Compacta, en el caso del método de 8 puntos la misma definición presentada ya está simplificada para obtener la vorticidad ω_z . Debido a que se tiene las ecuaciones del campo de velocidad en 26.1 se puede calcular analíticamente la vorticidad 22.1, ya que

$$\begin{aligned}
 \omega_z &= \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(V_{max} \sin \left(\frac{x N_x \pi}{L_x} + \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{200 N_y \pi}{L_y} \right) \right) \\
 &= -V_{max} \left(\frac{N_x \pi}{L_x} \right) \sin \left(\frac{200 N_y \pi}{L_y} \right) \sin \left(\frac{x N_x \pi}{L_x} \right). \quad (26.2)
 \end{aligned}$$

Se muestra en una sola gráfica los resultados del programa, generado en MATLAB, donde se muestra el comportamiento de la vorticidad sobre la línea marcada en la figura 52 usando los 4 métodos numéricos; estos resultados se comparan con la gráfica de la derivada analítica (figura 53). Se realizó una ampliación para visualizar sus diferencias.

El método de 8 puntos (línea amarilla) se separa de los demás métodos, graficándose por debajo de las demás líneas; la línea correspondiente al método de Chapra (línea roja), la del método de Richardson (línea morada)

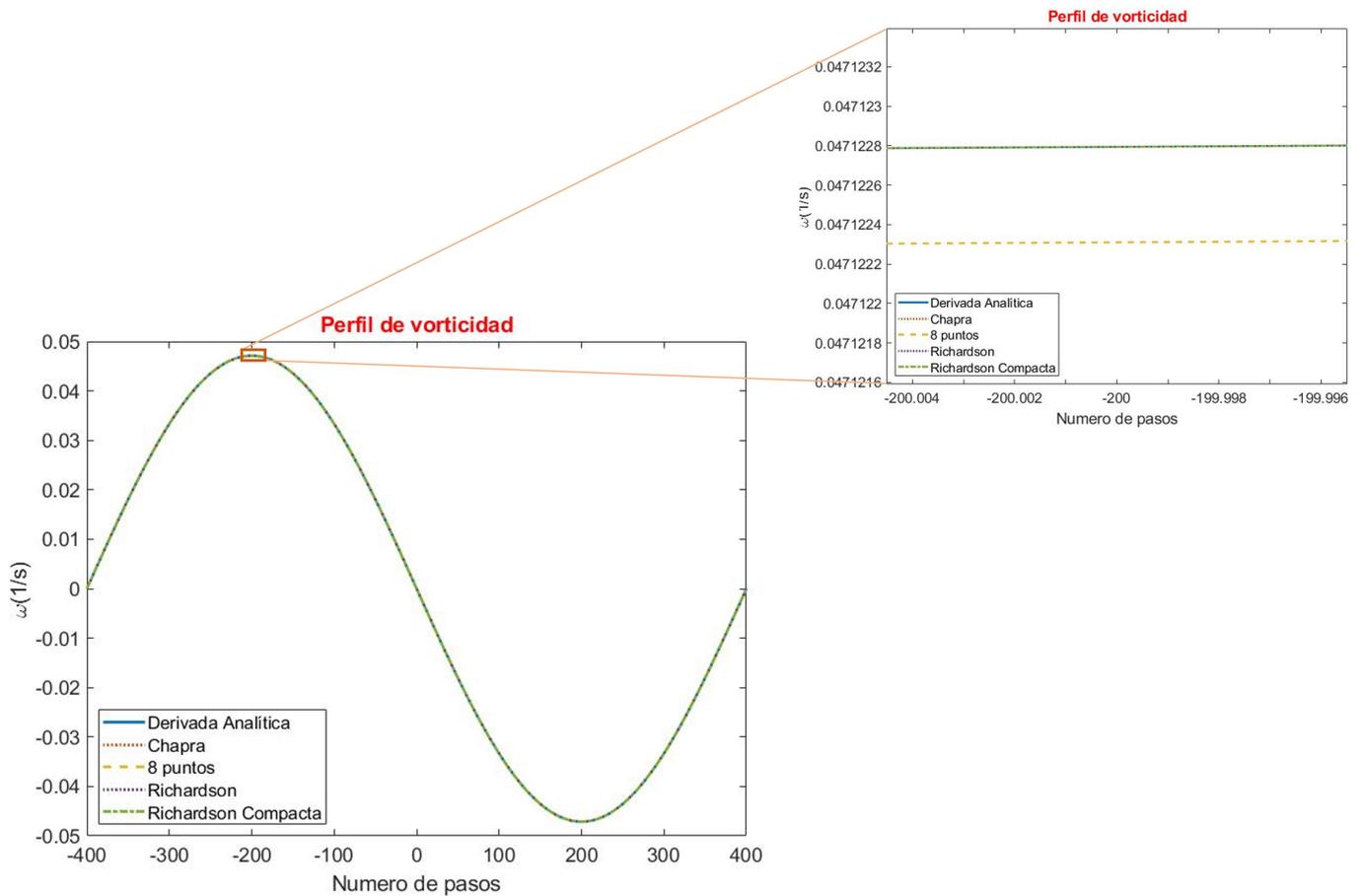


Figure 53. Perfil de vorticidad

y la del Método de Richardson Compacta (línea verde) se encuentran con- centadas junto con la gráfica de la derivada analítica (línea azul), la línea verde sobresale de todas debido a que es el último cálculo que hace el pro- grama.

El valor de vorticidad máximo se encuentra en el centro de los núcleos vorticales; la existencia de un valor positivo máximo y un valor negativo mínimo se debe a que los vórtices giran en sentidos opuestos, tomándose positivo cuando gira en contra de las manecillas del reloj, vea Figura 52.

26.1.1 Cambiando V_{max}

Uno de los parámetros representativos de este modelo es la velocidad máx- ima V_{max} , debido a que es un término múltiplo, se verá reflejado su variación en un aumento o disminución de la vorticidad; resultó de interés variar éste dato debido a que ayudará a entender el comportamiento de cada método a diferentes valores de la vorticidad. En la figura 54 se muestra los datos en una gráfica de dispersión, de los valores en el punto de inflexión máx- imo $x = -200$ donde este el primer núcleo vortical de izquierda a derecha para cada método, cuando se varía la velocidad desde $0.5 m/s$ a $1 m/s$ en incremento de $0.25 m/s$, desde $1 m/s$ a $5 m/s$ en incrementos de $0.5 m/s$, y desde $5 m/s$ hasta $10 m/s$ en incremento de $1 m/s$ para esperar un incre-

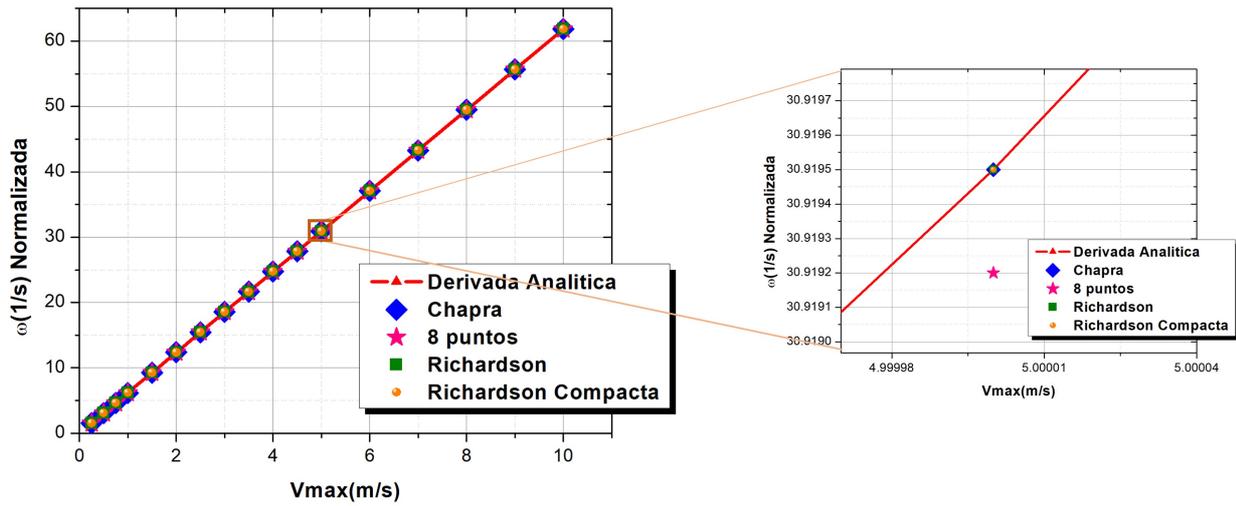


Figure 54. Variación de V_{max} en $x = 200$.

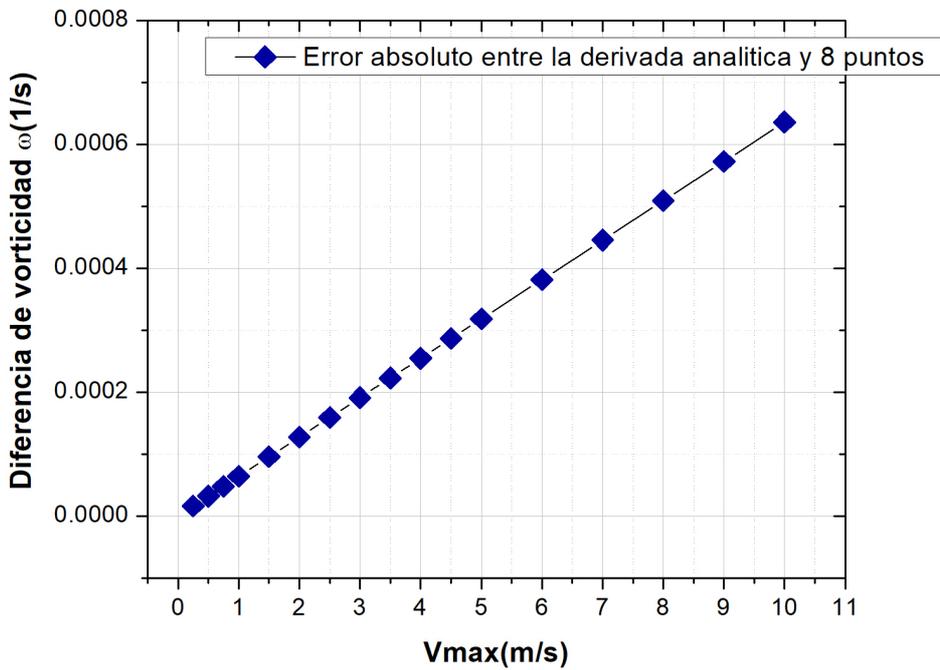


Figure 55. Error absoluto de mediciones de V_{max} .

mento lineal en estos intervalos. Se realizó un acercamiento en 5 m/s para ver la diferencia entre los métodos.

En el acercamiento se puede visualizar que el método que difiere más con la derivada analítica es el método de 8 puntos, para identificar en que momento es más notoria esa diferencia se gráfica el error absoluto entre la derivada analítica y el método de 8 puntos, ver la figura 55.

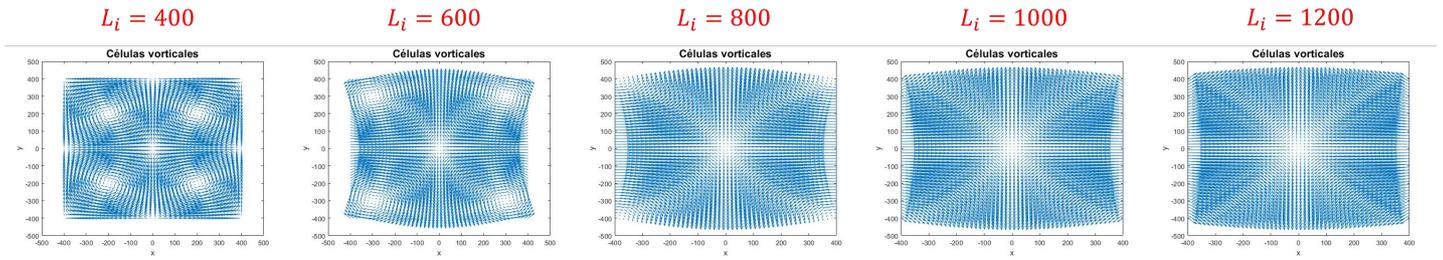


Figure 56. Cambio de L_i en el campo de velocidades

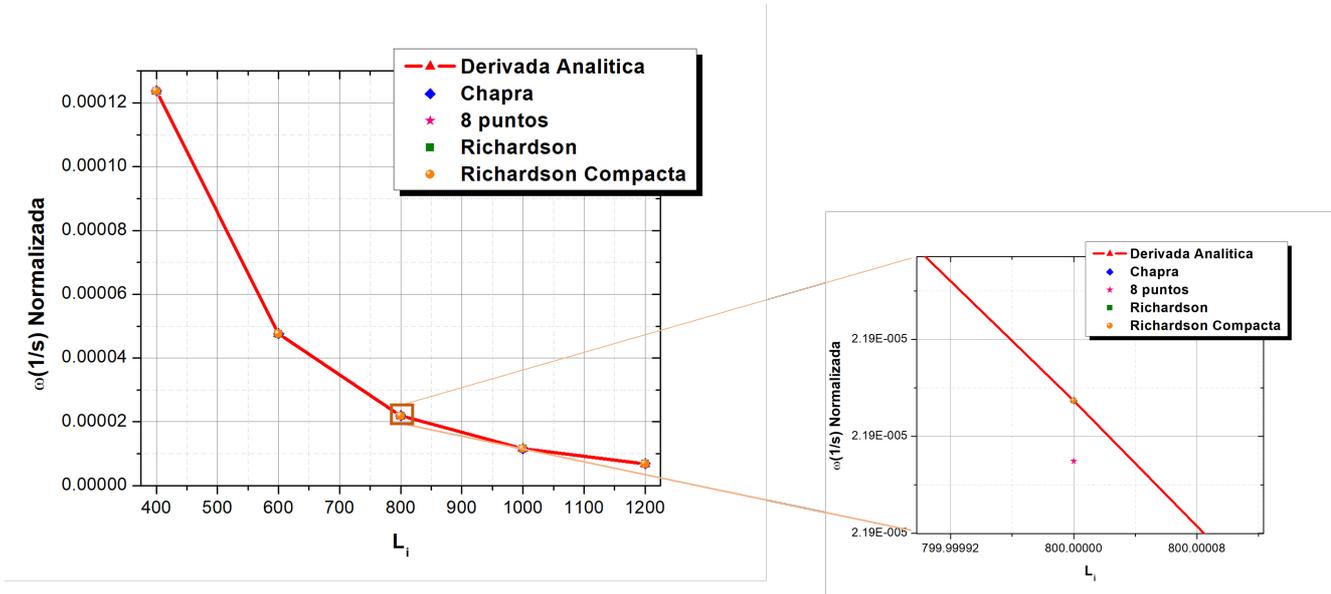


Figure 57. Variación de L_i en el punto máximo positivo.

26.1.2 Variación de L_x y L_y

El campo de visión del modelo teórico se cambia al modificar los parámetros L_x y L_y ; variar estos parámetros cambia el área mostrada en el campo de velocidades, al aumentar los datos de L_x y L_y se estaría mostrando un área menor de las células vorticales, figura 56; es decir, se disminuye el campo de visión, esto es análogo a cuando se disminuye el FOV en IRM cuya consecuencia (junto con un aumento en el número de píxeles en la matriz y considerando un grosor de corte pequeño) radica en un mejoramiento de la resolución espacial.

En el caso del modelo teórico 2D, se presenta la variación de L_x y L_y iniciando con un valor de 400 ambos, después con un valor de 600, 800, 1000 y 1200 puntos, estos parámetros son adimensionales de acuerdo con el análisis dimensional de las ecuaciones, en esta ocasión se tomó una $V_{max} = 2\text{ m/s}$, de igual forma que en el caso anterior se considera el valor $x = 200$ y se comparan los resultados en una gráfica de dispersión, ver la figura 57, haciendo un acercamiento en $L_i = 800$ con $i = x, y$ para ver la diferencia de los métodos.

En $L_i = 800$ se puede ver que el método de 8 puntos difiere más con la derivada analítica, para identificar como se comporta esa diferencia en los

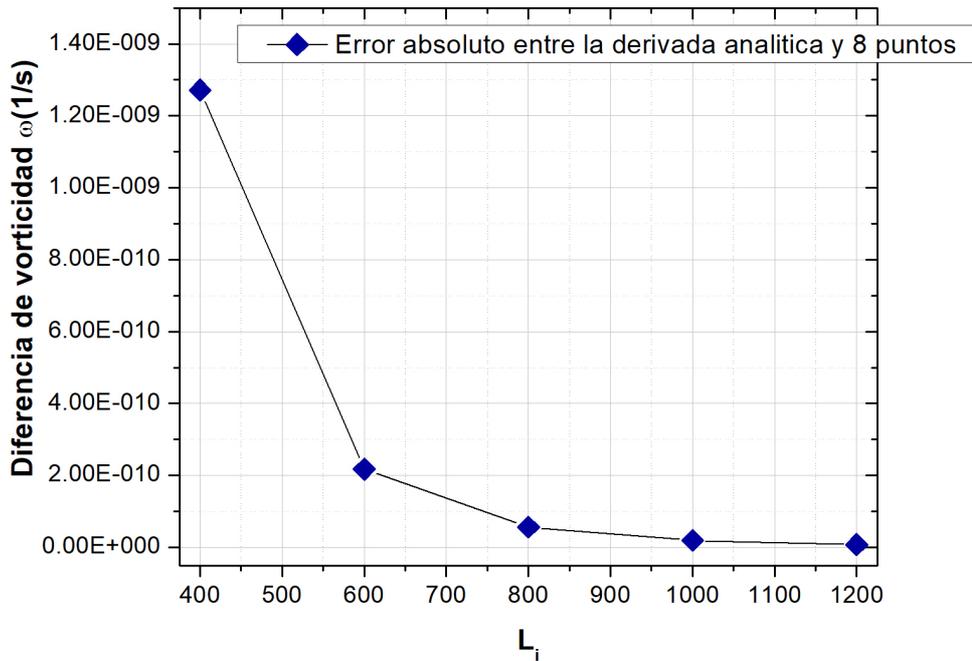


Figure 58. Error absoluto de mediciones de L_i

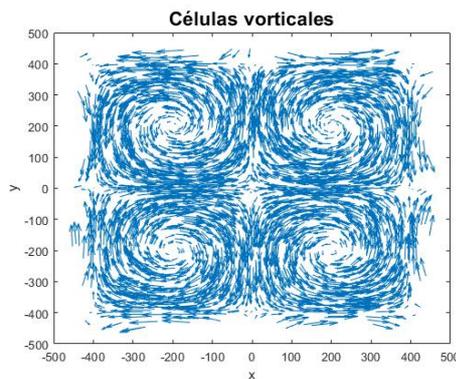


Figure 59. Ruido blanco Gaussiano.

demás valores de L_i se gráfica el error absoluto entre la derivada analítica y el método de 8 puntos, ver la figura 58.

26.1.3 Ruido

En cuanto a el comportamiento que tienen los métodos a la presencia de ruido, se introduce un *Ruido Blanco Gaussiano*, donde a cada dato se le suma o se le resta una cantidad aleatoria, tal que, no existe correlación estadística entre sus valores y su densidad de probabilidad viene dada por una curva gaussiana. Por consiguiente, al perfil de velocidad se le aplica un ruido blanco gaussiano y después se hace uso de los métodos para obtener un nuevo perfil de vorticidad, se puede ver como se modifica el campo cuando se aplica un ruido con un SNR de 20 dB, figura 59.

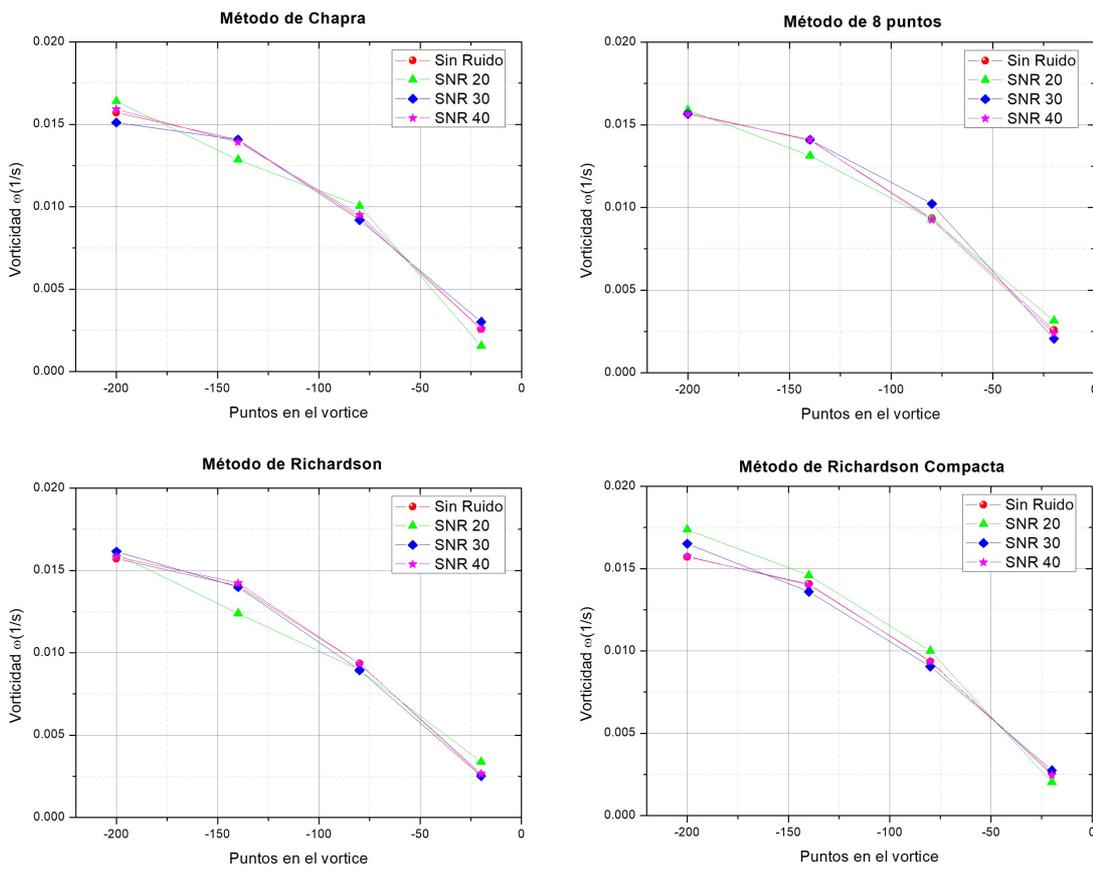


Figure 60. Vorticidad en presencia de diferentes valores de SNR

Es de utilidad ver como el ruido afecta a las mediciones que se realizan con cada método para calcular la vorticidad; primero se toman los valores de la vorticidad para diferentes puntos del perfil de vorticidad cuando no tienen ruido, después los valores en esos mismo puntos pero cuando se les agrega ruido para tres valores de SNR ($SNR = 20, 30, 40 \text{ dB}$) se presentan los gráficos de dispersión con la misión de visualizar que tan estables son los métodos en presencia de ruido y su cambio a distintos puntos de un vórtice (figura 60).

26.1.4 Filtro

Por otro lado, se le puede agregar un filtro a los datos con ruido para ver si reestablecemos los datos originales; uno de los filtros más sencillos es el *Filtro de Media Simple Movil*, filtro que reduce la cantidad de las variaciones, divide a los datos con ruido en subgrupos de n datos, a cada subgrupo le calcula su media y sustituye los datos con ese valor. Se toma $n = 2, 3, 4, 5$ y se obtiene la media absoluta de la vorticidad, ver figura 61.

26.2 Aplicación del criterio de λ_2 al modelo 2D

Se usa el modelo bidimensional de múltiples núcleos vorticales con velocidad máxima de $5m/s$; $N_x = N_y = 1$, es decir, los datos representan a cuatro

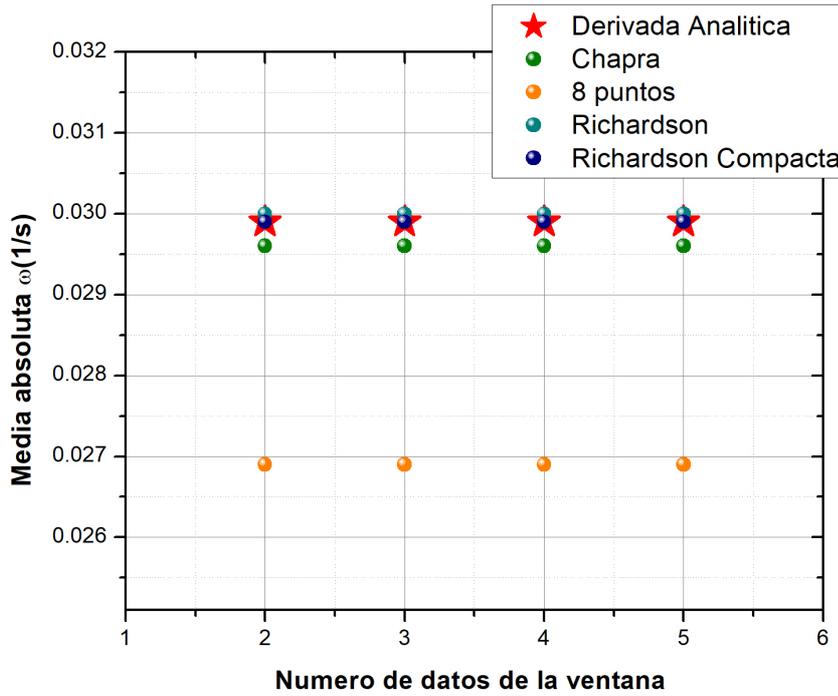


Figure 61. Filtro de media simple móvil.

celdas vorticales con una matriz de $L_x = L_y = 400$, similar a la figura 52, para aplicar el criterio de λ_2 y probar de forma analítica que encuentra la ubicación de los vórtices.

Se parte calculando el gradiente de velocidad en 2D:

$$\nabla \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \vec{u} = \frac{1}{80} \pi \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi x}{400}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{400}\right) & \sin\left(\frac{\pi x}{400}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{400}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi x}{400}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{400}\right) & \cos\left(\frac{\pi x}{400}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{400}\right) \end{pmatrix}. \quad (26.3)$$

Y se calcula la transpuesta de la matriz gradiente de velocidad para construir la parte simétrica y antisimétrica de $\nabla \vec{u}$:

$$(\nabla \vec{u})^T = \frac{1}{80} \pi \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi x}{400}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{400}\right) & -\sin\left(\frac{\pi x}{400}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{400}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi x}{400}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{400}\right) & \cos\left(\frac{\pi x}{400}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{400}\right) \end{pmatrix}. \quad (26.4)$$

La parte antisimétrica quedaría,

$$S = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T) = \frac{1}{80} \pi \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{\pi x}{400}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{400}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi x}{400}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{400}\right) \end{pmatrix}. \quad (26.5)$$

Y la parte simétrica:

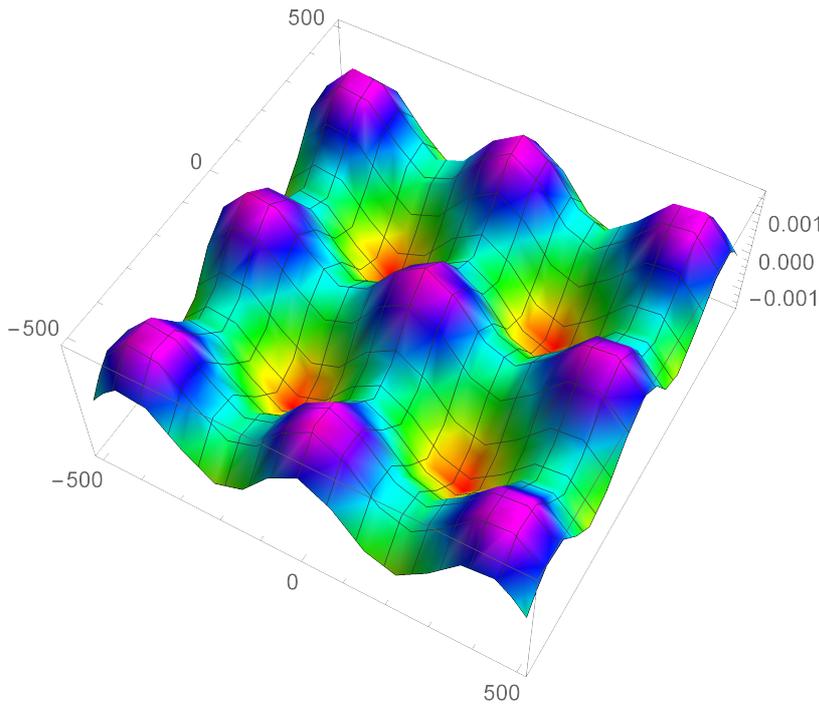


Figure 62. Eigenvalores negativos

$$\Omega = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} - (\nabla \vec{u})^T) = \frac{1}{80} \pi \begin{pmatrix} 0 & \sin\left(\frac{\pi x}{400}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{400}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi x}{400}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{400}\right) & 0 \end{pmatrix}. \tag{26.6}$$

El criterio de λ_2 resulta interesante, ya que parte de principios físicos para detectar los vórtices. En la sección de dinámica de fluidos se explica que el principio de mínima presión sirve para detectar un vórtice; este criterio se basa en analizar el comportamiento de la presión. Se busca las regiones donde el tensor $S^2 + \Omega^2$ sean negativos.

Así el tensor $S^2 + \Omega^2$ se obtiene usando las ecuaciones 26.5 y 26.6:

$$S^2 + \Omega^2 = \begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{12800} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{200}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{200}\right) \right) & 0 \\ 0 & \frac{\pi^2}{12800} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{200}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{200}\right) \right) \end{pmatrix}. \tag{26.7}$$

Al calcular los eigenvalores se obtiene,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\pi^2}{12800} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{200}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{200}\right) \right) \tag{26.8}$$

Para identificar los puntos donde sean negativos se gráfica en el plano $X - Y$, ver la zona en rojo de la figuras 62.

Analíticamente, se encuentran los mínimos locales de λ_1 (que son los mismos que λ_2) usando bases de cálculo diferencial, y se encuentra que corresponden a los puntos $(x_1, y_1) = (200, 200)$, $(x_2, y_2) = (-200, 200)$,

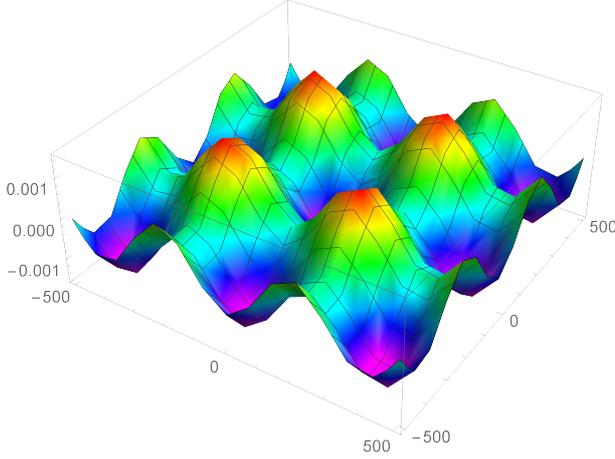


Figure 63. Primera entrada de la matriz Hessiana.

$(x_3, y_3) = (200, -200)$ y $(x_4, y_4) = (-200, -200)$.

Para este caso, hay otra manera de encontrar los mínimos locales de la presión sabiendo que:

$$\text{Hessiano}[p] = -\rho (S^2 + \Omega^2) \quad (26.9)$$

El criterio para determinar que sea un extremo mínimo, es que el determinante de la matriz Hessiana sea positivo y que la primera entrada de esa matriz sea positiva [57]. Se toma la densidad igual a 1 y se calcula el determinante de la matriz Hessiana de presión:

$$\text{Hessiano}[p] = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{12800} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{200}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{200}\right) \right) & 0 \\ 0 & -\frac{\pi^2}{12800} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{200}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{200}\right) \right) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Det}[\text{Hessiano}[p]] = \frac{\pi^4}{163840000} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{200}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{200}\right) \right)^2 \quad (26.10)$$

El determinante de la matriz Hessiana siempre es positivo, cumpliendo el primer criterio para determinar que se tratan de extremos mínimos. Ahora la primera entrada solo es positiva cuando los cosenos sean negativos, la gráfica ayuda a determinar los puntos donde es positiva y se cumpla el segundo criterio, ver la figura 63.

Por lo tanto, en los puntos $(x_1, y_1) = (200, 200)$, $(x_2, y_2) = (-200, 200)$, $(x_3, y_3) = (200, -200)$ y $(x_4, y_4) = (-200, -200)$ se encuentran las 4 células vorticales del modelo.

27 Modelo Teórico 3D. Vórtice de Burgers

El vórtice de Burgers es un modelo de un vórtice en tres dimensiones, su importancia radica en que su campo vectorial es una solución de las

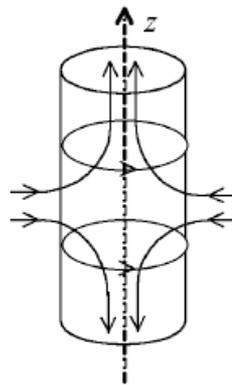


Figure 64. Vórtice de Burgers

ecuaciones de Navier-Stokes que describen a los fluidos viscosos. Creado en 1948 por el físico Holandés Johannes Burgers, lo llamo un ejemplo típico de “un modelo matemático que ilustra la turbulencia”[60]; la característica principal de dicho modelo es la descripción del balance de tubos vorticales y capas de flujo en estiramiento; este modelo “provee un excelente ejemplo de balance entre convección, intensificación y difusión de las vorticidad”[61].

El campo de velocidades presenta a un vórtice en tubo a lo largo de la dirección axial, el flujo se mueve rotacionalmente buscando escapar radialmente, pero se impone un flujo secundario en forma de laminas, que vienen de afuera para limitar ese escape, así, el flujo regresa hacia el eje, intensificando la vorticidad; ya que no hay un sumidero en el origen, el flujo escapa hacia la dirección positiva y negativa del eje axial, permaneciendo radialmente constante. (Ver Figura 64).

“La viscosidad lineal vortical se extiende por difusión viscosa cuando el tiempo pasa”[33], pero en este caso la extensión se contraresta y se obtiene un flujo estacionario. Un vórtice ideal se compone de un flujo incompresible con líneas de corriente circulares, su perfil de vorticidad tiene la forma:

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \tag{27.1}$$

donde Γ es la circulación que indica la intensidad del vórtice, es notorio que no cuenta con efectos viscosos y matemáticamente en el origen tiende a infinito, este comportamiento esta prohibido para un modelo físico, ya que la ecuación de continuidad nos pide que el centro $v_{\theta} = 0$, es ahí donde entran las fuerzas viscosas que destruyen al vórtice en el centro.

La estructura del vórtice de Burgers satisface la ecuación de continuidad; las ecuaciones que describen el campo de velocidades en coordenadas cilíndricas son las siguientes:

$$v_r = -Ar; \tag{27.2}$$

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{Ar^2}{2\nu}}\right); \quad (27.3)$$

$$v_z = 2Az; \quad (27.4)$$

donde A es la tasa de deformación medida en unidades de velocidad entre longitud [60], ν es la viscosidad cinemática definida como el cociente de la viscosidad dinámica entre la densidad $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ con unidades de L^2/T y Γ es la circulación, que indica la intensidad del vórtice, cuyas dimensiones son L^2/T . La ecuación 27.2 suministra la entrada radial al vórtice remolino constante y simétrico a lo largo del eje z , el flujo del vórtice escapa a lo largo de dicho eje, descrito por 27.4 y la contribución extra de la ecuación 27.3 comparada con el vórtice ideal 27.1, establece la difusión vortical viscosa, “estos procesos equilibran exactamente la tendencia de la vorticidad a difundirse radialmente hacia afuera” [48] (ver figura 65).

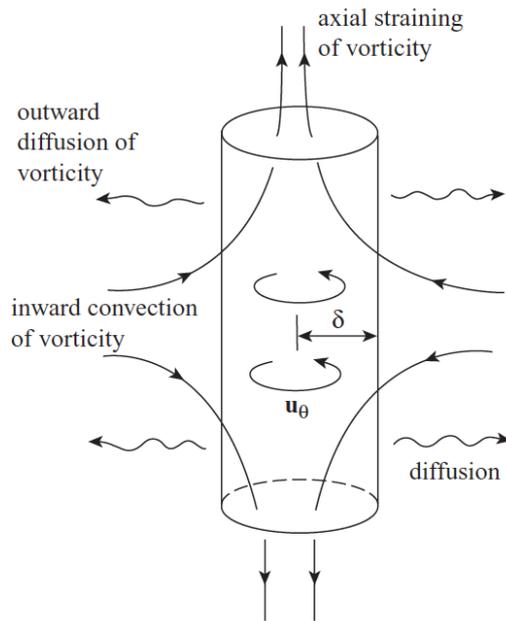


Figure 65. Difusión vortical viscosa [33]

Para facilitar el manejo de las variables físicas se hace el siguiente cambio de variable:

$$d^2 = \frac{4\nu}{A} \quad (27.5)$$

donde d corresponde a la distancia del centro a la amplitud del vórtice con dimensiones de longitud, ver la figura 66, este cambio de variable deja a las ecuaciones del campo de velocidades como,

$$v_r = -\frac{4\nu}{d^2}r; \quad (27.6)$$

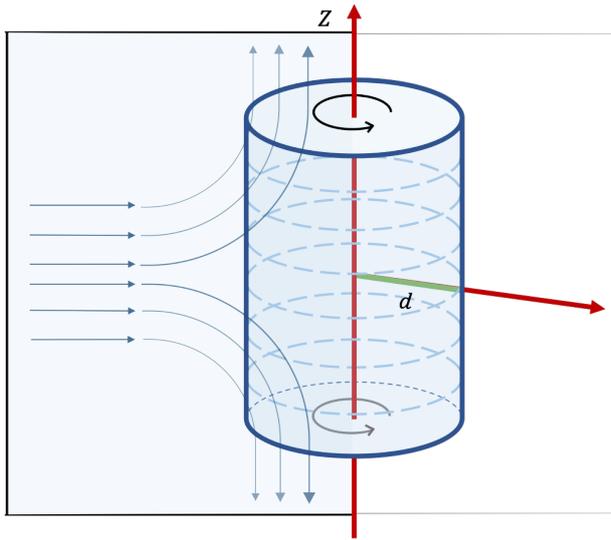


Figure 66. Flujo en el vórtice de Burgers

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{2r^2}{d^2}}\right); \quad (27.7)$$

$$v_z = \frac{8\nu}{d^2} z; \quad (27.8)$$

La gráfica del campo de velocidades en el plano $X-Z$ permite visualizar el estiramiento del campo a lo largo del eje z . (Ver figura 67)

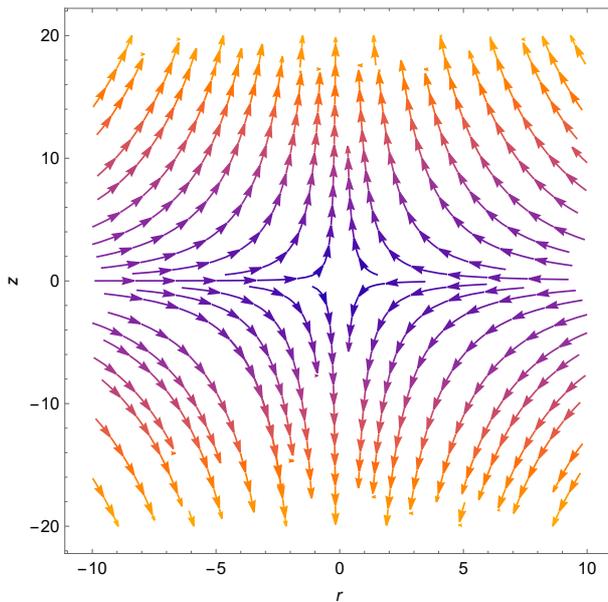


Figure 67. Plano (X-Z)

El comportamiento de la velocidad angular con respecto a la variable r nos permite visualizar el decaimiento del vórtice con forme el radio aumenta. (Ver figura 68)

Y el comportamiento del plano $X-Y$ visualiza el remolino principal, ver figura 69.

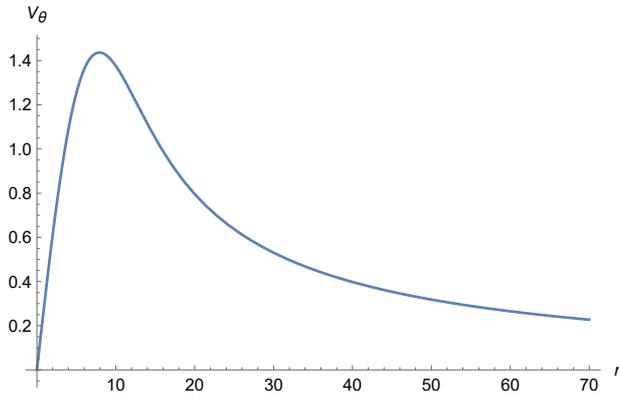


Figure 68. Decaimiento del vórtice.

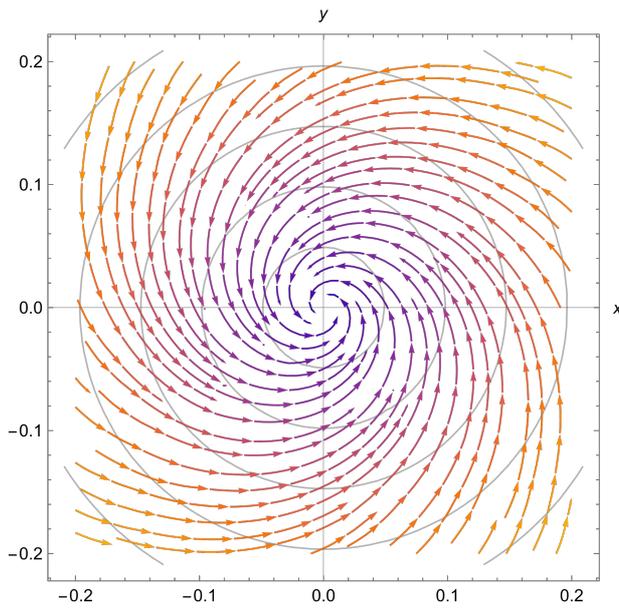


Figure 69. Plano (X-Y).

De una forma más demostrativa en la figura 70 se juntan los comportamientos.

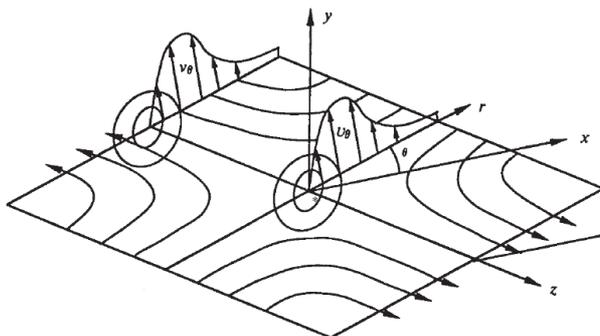


Figure 70. Comportamiento del vórtice [33].

Resulta de utilidad el uso de las ecuaciones del vórtice de Burgers en coordenadas cartesianas, para el cambio de coordenadas se utiliza las defini-

ciones de las coordenadas cilíndricas en el plano cartesiano, el uso de regla de la cadena y un elemento diferencial de distancia, quedando:

$$v_x = -\frac{4\nu}{d^2}x - \frac{\Gamma y}{2\pi(x^2 + y^2)} \left(1 - e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{d^2}}\right); \quad (27.9)$$

$$v_y = -\frac{4\nu}{d^2}y + \frac{\Gamma x}{2\pi(x^2 + y^2)} \left(1 - e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{d^2}}\right); \quad (27.10)$$

$$v_z = \frac{8\nu}{d^2}z; \quad (27.11)$$

Al graficar líneas de corriente en el plano cartesiano se puede ver el comportamiento general del modelo (Ver figura 71).

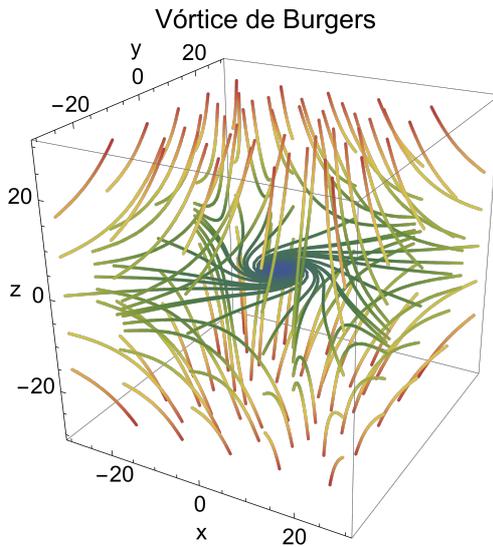


Figure 71. Líneas de corriente del vórtice de Burgers

27.1 Evaluación de la magnitud de la vorticidad $|\omega|$

Como en el caso del modelo 2D, se hace uso de los cuatro esquemas de diferenciación programados en el software MATLAB 2021a The MathWorks, Inc., para aplicarlos a las ecuaciones del campo de velocidades del vórtice de Burgers. Se calculará su vorticidad y se presentarán las diferencias presentadas en los métodos para el caso tridimensional.

En este caso la vorticidad 22.1 se simplifica de una manera análoga al modelo 2D, al tener las ecuaciones presentes es posible tomar el rotacional de la velocidad y encontrar el comportamiento de la vorticidad de forma analítica. Se usan las ecuaciones en coordenadas cilíndricas con la variable d (27.6, 27.7, 27.8), el rotacional se simplifica debido a la dependencia de las ecuaciones, dejando solo la componente z de la vorticidad,

$$\vec{\omega} = \omega_z = \frac{2\Gamma}{\pi d^2} \exp^{-\frac{2r^2}{d^2}} \quad (27.12)$$

Se puede notar la estrecha dependencia con la variable del tamaño del vórtice, lo que resultará conveniente para realizar un análisis de tal variable con los métodos numéricos.

De acuerdo a la posición del vórtice de Burgers la vorticidad máxima se encontrará en el plano $X - Y$, así se hace uso de los cuatro métodos para obtener el plano de vorticidad en $Z = 0$, usando una matriz de 60×60 , un tamaño de paso de $h = 1$, con el valor de la circulación de $\Gamma = 150 \text{ mm}^2/\text{s}$ [5], de la viscosidad cinemática de $\nu = 3.774 \text{ mm}^2/\text{s}$ correspondiente a la viscosidad cinemática de la sangre a 37°C y un tamaño de $d = 15 \text{ mm}$, que entra dentro del promedio del radio de la aorta ascendente para adultos normales [62].

Así la derivada analítica presenta un gráfico como en la figura 72.

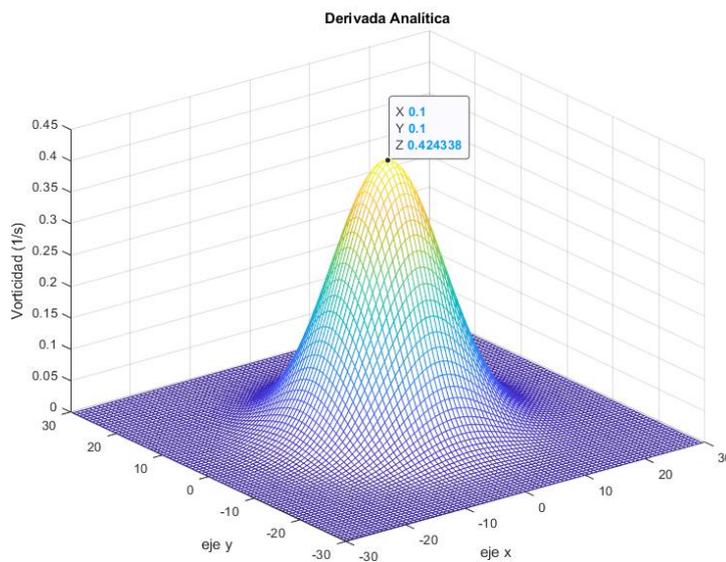


Figure 72. Plano de vorticidad de la derivada analítica del vórtice de Burgers.

El método de Chupra un plano de vorticidad como, en la figura 73.

El método de 8 puntos, presenta una vorticidad de, ver figura 74.

El método de Richardson tiene su pico de vorticidad en, ver figura 75.

Y por último el método de Richardson Compacta presenta un plano de vorticidad como en la figura 76.

27.1.1 Variando b

El tamaño del vórtice esta ligado a la variación de la vorticidad en el plano, cuando más grande sea el vórtice su máximo de vorticidad va disminuyendo si se dejan fijos los parámetros físicos del modelo; es por ello que es interesante ver como resultan afectados los métodos numéricos con la variación del parámetro b que representa el ancho del tubo vortical del vórtice de Burgers, cuando se varia b de un valor mínimo de 5 mm a un valor máximo

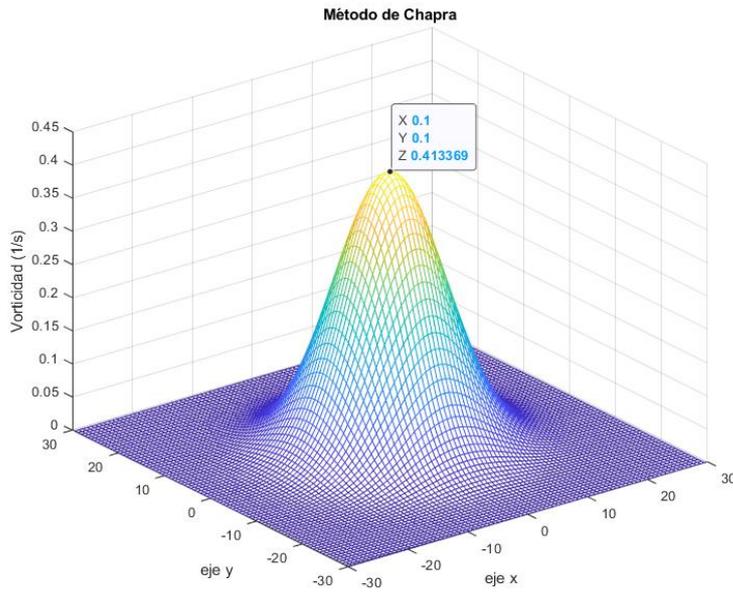


Figure 73. Plano de vorticidad usando el método de Chupra del vórtice de Burgers.

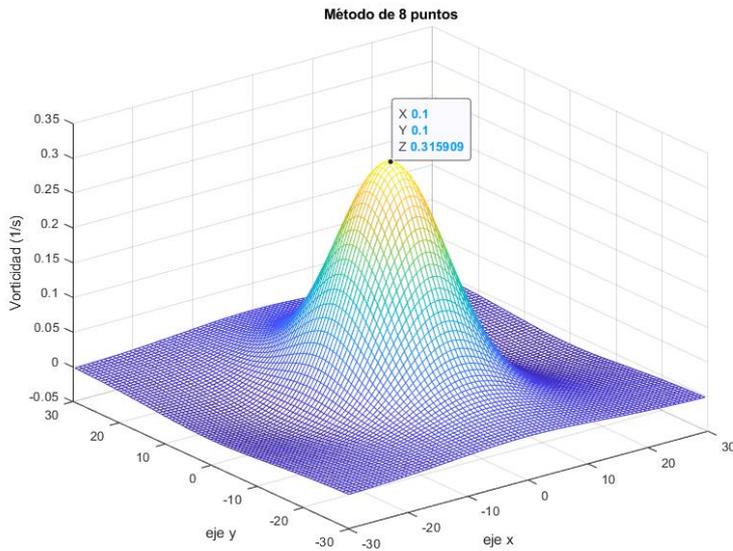


Figure 74. Plano de vorticidad usando el método de 8 puntos del vórtice de Burgers.

de 30mm se presenta los valores promedio normalizado de la vorticidad en la figura 77.

27.2 Ruido y Filtro

De la misma forma que en el modelo 2D, se le aplica un Ruido Blanco Gaussiano a los datos del modelo de vórtice de Burgers, es decir a cada dato se le suma o se le resta una cantidad aleatoria, en esta ocasión se

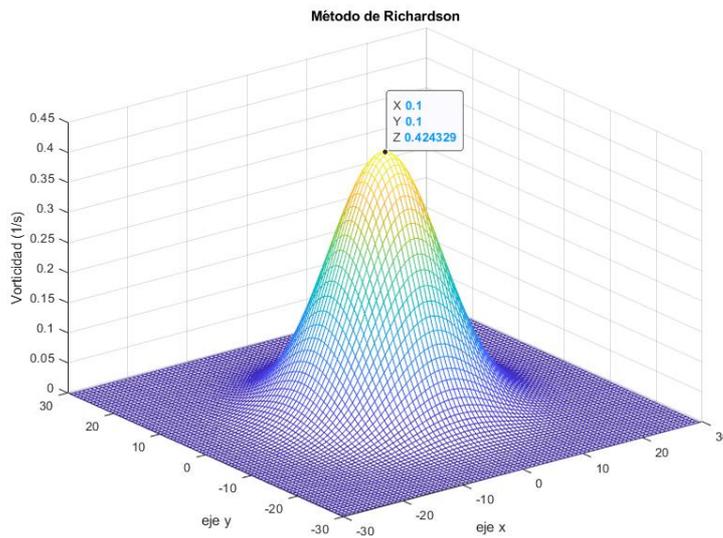


Figure 75. Plano de vorticidad usando el método de Richardson del vórtice de Burgers.

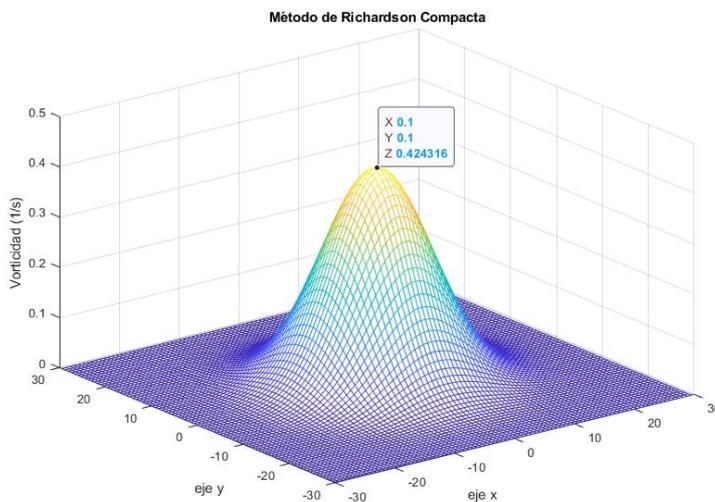


Figure 76. Plano de vorticidad usando el método de Richardson Compacta del vórtice de Burgers.

aplica un ruido de $30dB$ y se mide la vorticidad en sus máximos. A su vez, se le aplica un filtro de Media Simple Movil, para reducir la cantidad de las variaciones y ver si regresan a los valores originales, ver la figura 78.

27.3 Aplicación del criterio de λ_2 al modelo 3D

Se usa el modelo tridimensional del vórtice de Burgers para aplicar el criterio de λ_2 y probar de forma analítica que se encuentra el vórtice central, con la viscosidad cinemática de la sangre, un tamaño de vórtice de $3cm$ y una circulación $\Gamma = 10,000 \text{ mm}^2/s$. Se calcula el gradiente de la velocidad, la transpuesta de la matriz gradiente de velocidad para con-

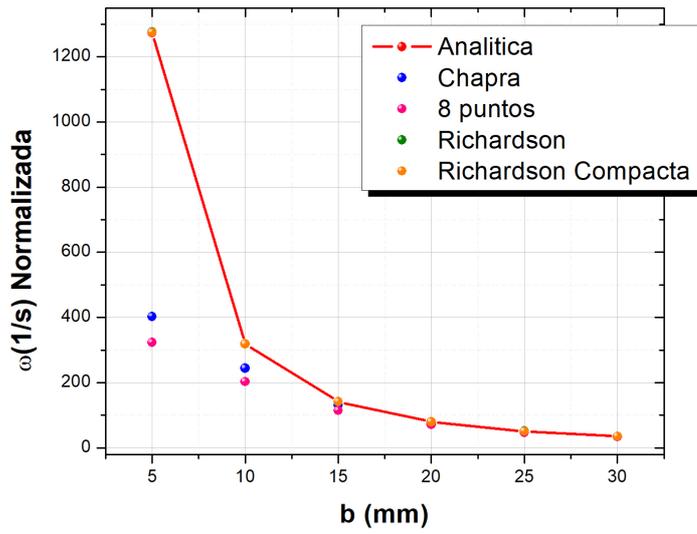


Figure 77. Vorticidad vs b

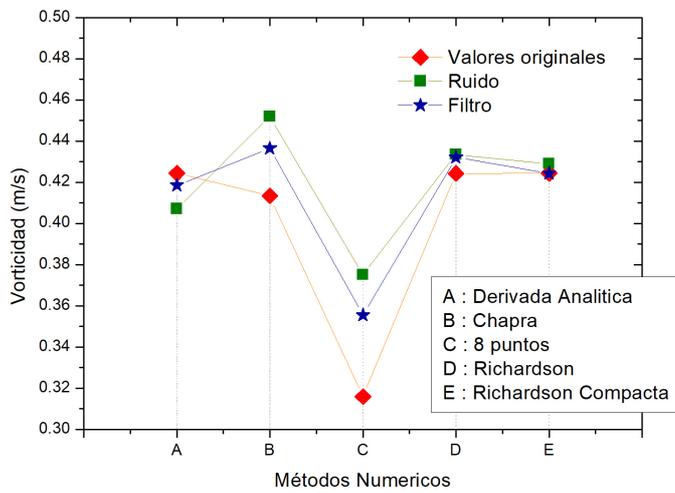


Figure 78. Ruido y filtro en el vórtice de Burgers

struir la parte simétrica y antisimétrica, para construir el tensor $S^2 + \Omega^2$; se calculan sus eigenvalores y se encuentra que el valor negativo está en $(x, y) = (0.0005, 0.0005)$.

Capítulo 6.

Aplicación con datos de Flujo4D

28 Presentación de controles

Una aplicación del uso de los métodos numéricos y el criterio de identificación de vorticidad se tiene haciendo uso de los campos de velocidades que genera la secuencia Flujo 4D. De hecho, los cambios de las variables realizados en los modelos teoricos anteriores haciendo uso de los métodos numéricos y el criterio de λ_2 permiten acercarnos a variables semejantes presentados en la técnica.

En esta sección se pretende dar respuesta a las preguntas de ¿Cuál es la mejor forma de evaluar el tamaño de los diferentes vórtices en distintas personas? ¿Cómo es el tamaño del vórtice en relación a la cavidad cardíaca? ¿Cómo cambia la vorticidad en el tiempo?

Para ello se hace uso de datos de la aorta de 8 controles sanos (edad = 21 ± 6 años, 4 mujeres y 4 hombres), ningún paciente presento tener enfermedad cardiovascular conocida. Los datos de IRM fueron tomados usando un resonador de 3T [Prisma o Skyra, Siemens, Erlangen, Germany]. Se realizaron imágenes de flujo de contraste de fase 2D a través del plano (2DPC) de la válvula aórtica, se adquirió retrospectivamente una resonancia magnética de flujo 4D activada por ECG durante la respiración libre utilizando la activación del navegador del movimiento diafragmático. Los parámetros fueron los siguientes: resolución espacial (fila x columna x corte) = $2.0-2.5 \times 2.0-2.5 \times 2.4-3.5 \text{ mm}^3$ resolución temporal 36, 24-40, 56 ms, ángulo de giro = 15; campo de visión (FOV) = $240 - 350 \times 320 - 400 \text{ mm}^2$, ancho de banda = $455 - 495 \text{ Hz/pixel}$, Venc = $150 - 550 \text{ cm/s}$, tiempo eco $2.01 - 2.35 \text{ ms}$, tiempo de repetición = $4.53 - 507 \text{ ms}$. ver la figura 79.

Se delimitará el análisis a la aorta ascendente, ya que presenta un comportamiento de vórtice de Burger. Posteriormente se buscará el valor de corte de cada paciente, lo que significa que tendremos un valor temporal donde la vorticidad sea máxima y se descubrirá si hay alguna relación entre estos valores con la finalidad de si es posible caracterizar un valor de corte general para este grupo de controles. Por último se estudiará la relación que tiene el tamaño del vórtice con la cavidad y el tiempo de vida de un vórtice con respecto al ciclo cardíaco.

Sección 28.	Pre-
	sentación de controles
Sección 29.	Seg-
	mentación de la Aorta
	Ascendente
Sección 30.	Imple-
	mentación del método
	numérico 4 y el criterio
	de λ_2
Sección 31.	Valor de
	corte
Sección 31.1.	Análisis
	estadístico
Sección 32.	Aprox-
	imación de tamaño y
	tiempo de vida de los
	vórtices usando escalas
	turbulentas

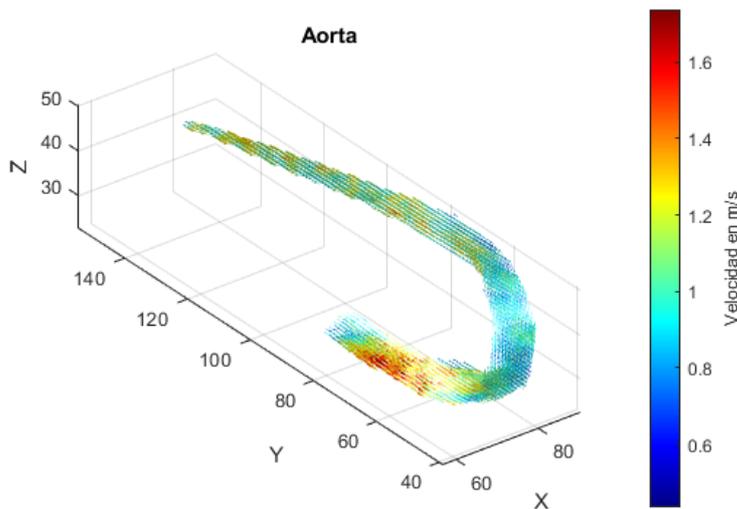


Figure 79. Campo de velocidades de la Aorta de datos de Flujo 4D a un tiempo usando Matlab [2].

29 Segmentación de la Aorta Ascendente

29.1 Aorta

La aorta es una arteria, conectada con el corazón a través de la válvula aortica con el ventrículo izquierdo. Es un conducto por el cual el ventrículo izquierdo expulsa la sangre oxigenada hacia la circulación sistémica. Su diámetro en su origen y en la porción ascendente es de aproximadamente de 3 cm en adultos , está arteria tiene propiedades viscoelásticas y de distensibilidad que le ayudan a tener una función amortiguadora ya que al estar expuesta a una grande presión pulsátil y a fuerzas de cizallamiento está predispuesta a lesiones por traumatismos mecánicos, figura 80 [63].

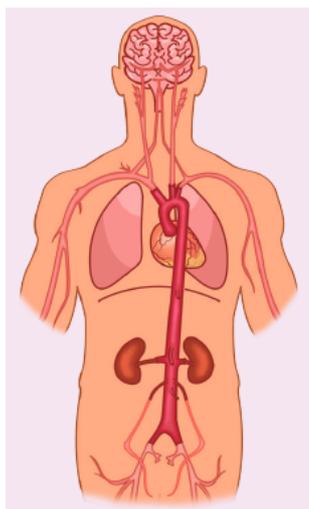


Figure 80. Aorta en el cuerpo humano.

Se compone de 3 partes, la **aorta ascendente** que comienza en la salida de la válvula hacia arriba en dirección a la cabeza, una vez que se comienza a arquear finaliza la aorta ascendente y comienza el cayado o **arco aórtico**, luego después termina la curva y comienza la **aorta descendente** que continua hacia abajo en dirección a los pies hasta dividirse en sus ramas terminales.

29.1.1 Aorta Ascendente

En vista de los datos de Flujo 4D que se tienen, surge la pregunta natural ¿dónde se puede ver un vórtice formado en la aorta?, se espera la formación de vórtices cuando la sangre sale de la válvula aortica. Teóricamente se encuentra la siguiente visualización de flujo, ver la figura 81, la imagen presenta la formación circular de la sangre cuando sale, de hecho, se confirma la aparición de un vórtice de Burger en forma toroidal, lo que resulta más interesante su estudio al conectarlo con lo revisado anteriormente.

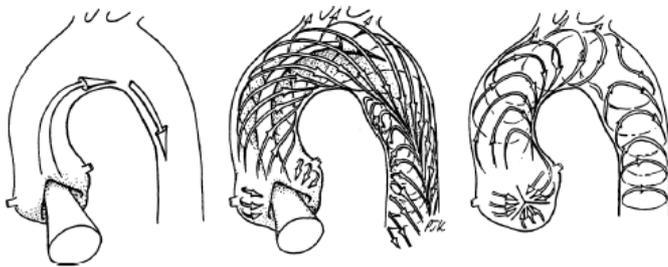


Figure 81. Visualización del flujo sanguíneo en la aorta ascendente [64]

De los datos obtenidos se secciona la aorta ascendente para cada paciente, es decir, se realizaron cortes volúmetricos usando un programa **Volume Segmenter** cargado en Matlab, figura 82.

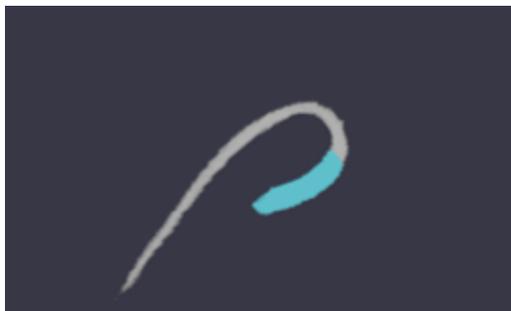


Figure 82. Segmentación de la aorta ascendente

30 Implementación del método numérico 4 y el criterio de λ_2

Al visualizar los datos de campo de velocidades es complicado ver un remolino uniformemente formado, es decir, que se elija el tiempo cuando está

en su máxima esplendor y que coincida con uno de los planos para visualizarlo completamente; lo que sí es posible visualizar son los cambios de velocidades que posibilitan el uso de métodos numéricos y criterios de vorticidad para identificar donde el comportamiento de la velocidad describe a un vórtice.

Se uso del método de Richardson Compacta ya que resulto ser el más adecuado en las mediciones presentadas en los estudios con los modelos teóricos, además reduce la transmisión aleatoria de errores con el uso de sus coeficientes optimizados [1], funcionan como un balance, intentando eliminar el ruido. Este método resulta útil para calculas las derivadas numéricas necesarias para cumplir con el criterio de λ_2 , dicho criterio es el adecuado ya que presenta bases físicas para la localización de la vorticidad y no puramente matemáticas como lo es el rotacional de la velocidad.

Los análisis de resonancia de flujo 4D se realizaron usando un programa interno desarrollado en MATLAB (2020b) reportado en [13], donde al tener el aislamiento aortico, los datos de velocidad permiten un análisis de la vorticidad haciendo uso de el método de Richardson Compacta y el criterio de λ_2 , la localización de la vorticidad se muestra en isosuperficies dentro de la aorta, ver la figura 83.

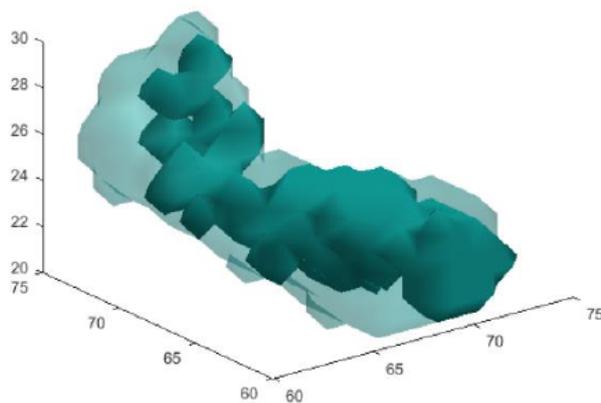


Figure 83. Isosuperficies de vorticidad.

El programa funciona de una manera secuencial, los datos de flujo 4D son matrices muy grandes que hay que manejar con sumo cuidado, propiamente son tres matrices para cada tiempo, cada una con los valores de las componentes de la velocidad. El programa toma estos datos y calcula el gradiente de la velocidad, cada entrada del tensor es una derivada numérica que hace uso del método de Richardson Compacta para posteriormente calcular su parte simétrica y antisimétrica, finalmente construye el tensor $S^2 + \Omega^2$ y calcula los eigenvalores, los valores que sean negativos son considerados los puntos donde hay vorticidad. Las isosuperficie son los puntos donde hay vorticidad.

Se presenta una gráfica de un control para comparar el comportamiento de la velocidad máxima a cada tiempo y la vorticidad presentada en ese tiempo, ver la figura 84.

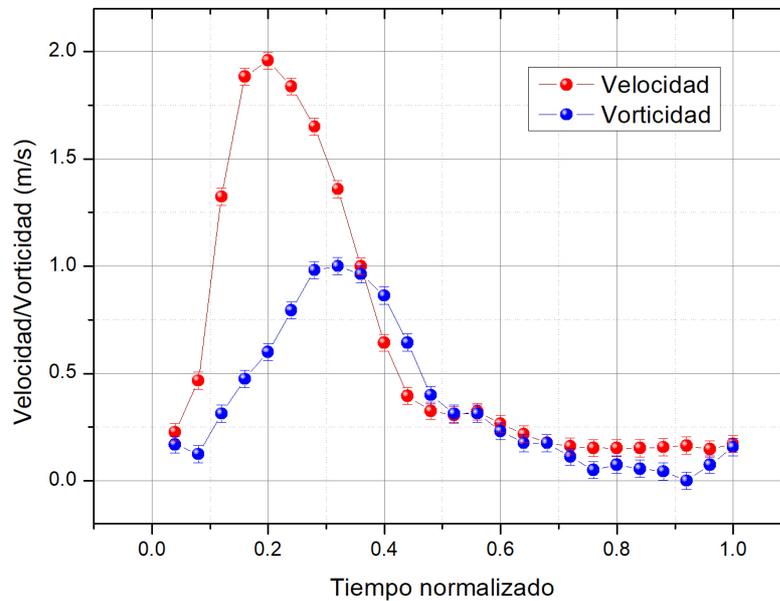


Figure 84. Velocidad vs vorticidad

31 Valor de corte

Para cada tiempo se tiene una visualización diferente como la Figura 83, por lo tanto se tienen 25 tiempos para cada control (completando el ciclo cardiaco), el tiempo donde haya más puntos con vorticidad se le llama **valor de corte local**, esto marcará el tamaño más grande de vórtice por paciente, para cada control se encuentra la distribución dominante de vorticidad normalizada en la figura 85 se presenta los valores de corte de los pacientes.

31.1 Análisis estadístico

Cada control tiene sus valores de vorticidad para uno de los 25 tiempos, al graficarlos es notoria una distribución que puede ser ajustada a una gaussiana. Para identificar un valor de corte grupal, se toma el promedio de los valores de corte locales, representados en el punto más alto de la distribución gaussiana, y se mide el valor de vorticidad sobre la gaussiana de este valor promedio para identificar las diferencias entre el valor de corte individual en términos de vorticidad contra el valor de corte derivado por todo el grupo, ver la tabla 3.

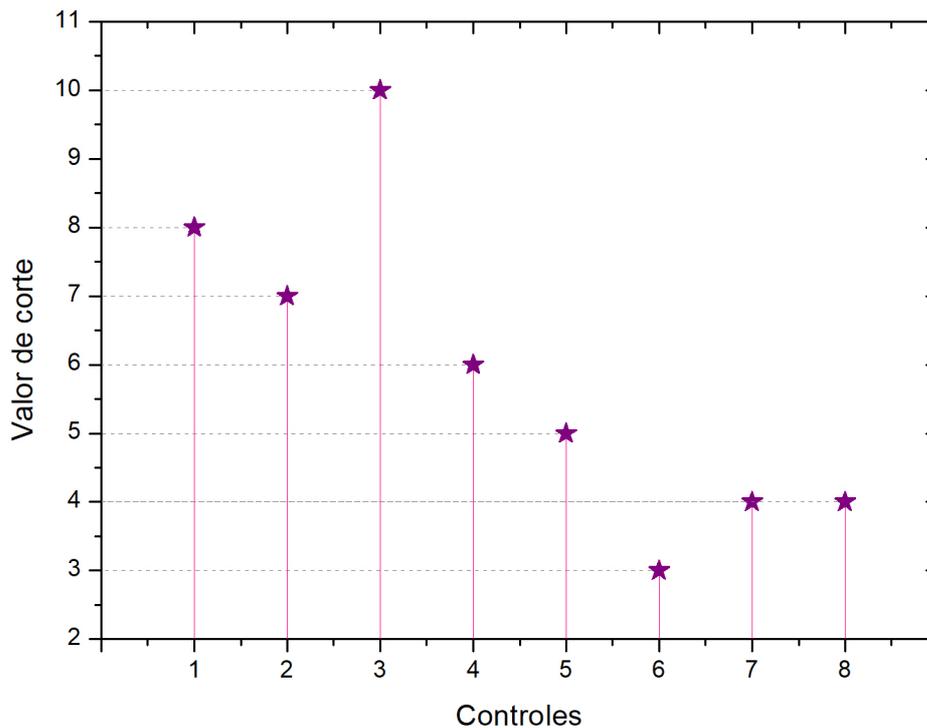


Figure 85. Valores de corte en cada control.

Control	Valor de corte local	Vorticidad en el valor de corte local	Vorticidad en 6.984
1	8.160	0.970	0.917
2	8.552	0.933	0.862
3	8.921	0.830	0.798
4	6.543	0.523	0.521
5	8.141	0.700	0.695
6	5.216	0.529	0.509
7	4.134	0.660	0.577
8	6.207	0.792	0.778
	6.984		

Table 3. Tabla de valores de corte local

Para entender si hay cambios significativos se aplica la T de Student de muestras relacionadas usando el programa SPSS, ya que tenemos dos valores del mismo grupo en diferente tiempo. Se busca saber si hay un incremento o una disminución de la vorticidad al calcular la vorticidad en el valor de corte grupal. La media cuando se tiene el máximo valor de vorticidad es de 0.7421 y cuando se mide en el valor de corte grupal, la media disminuye a 0.7071, para corroborar si esta disminución es significativa se aplica la prueba y se obtiene un p valor de 0.015, ya que el valor es menor que $p = 0.05$, nos informa que si hay diferencias significativas en las medias

entre ambos valores, es decir que si cambia el valor de la vorticidad si tomamos un valor de corte grupal.

32 Aproximación de tamaño de los vórtices

A continuación se muestra un análisis con las velocidades máximas de cada uno de los tiempos con la intención de determinar los diferentes tamaños de vórtices que se presentan en el fluido.

Son 25 tiempos por control, cada tiempo tiene un máximo de velocidad, a estos datos se acomodan de menor a mayor para separarlos por cuartiles, el primer cuartil definirá el 25% de los datos, el segundo cuartil coincidirá con la media de la distribución, el tercer cuartil ayudará a partir a la mitad la segunda parte de los datos, estos 4 rangos nos permiten separar por regiones. A los datos de velocidad se les puede calcular su número de Reynolds para identificar que clase de fluido se presenta en los cuartiles, ver la tabla 86.

Velocidad (m/s)	Re
0.14750	1173.8
0.15208	1210.2
0.15262	1214.5
0.15304	1217.8
0.15677	1247.5
0.16086	1280.1
0.16416	1306.3
0.17189	1367.8
0.17644	1404.0
0.21742	1730.1
0.22684	1805.1
0.26617	2118.0
0.30671	2440.7
0.32225	2564.3
0.32587	2593.1
0.39538	3146.2
0.46706	3716.7
0.64326	5118.8
0.99897	7949.3
1.32360	10532.6
1.35881	10812.8
1.65031	13132.4
1.83700	14618.0
1.88286	14983.0
1.95790	15580.1

Figure 86. Número de Reynolds.

El número de Reynolds diferencia estos flujos, el rango amarillo y rosa presentan flujos laminares, el rang azul flujos turbulentos y fluidos de intervalo transitorio y el rango gris tiene flujos turbulentos completamente desarrollados.

Con esta información y la teoría de Kolmogorov se pueden calcular la longitud de las microescalas tomando la longitud característica del diámetro

de la aorta ascendente (3 cm). Se calcula la energía cinética luego la tasa de energía de disipación viscosa y considerando a la viscosidad cinemática de la sangre de $3.7 \times 10^{-6} m^2/s$ se puede calcular la longitud de las microescalas η , ver la tabla 87.

Velocidad (m/s)	Energía Cinética (J)	Re	ϵ (m^2/s^3)	η (μm)
1.32360	0.876	10532.6	77.2943547	28.8548665
1.35881	0.923	10812.8	83.6292612	28.2921823
1.65031	1.362	13132.4	149.8206917	24.4547408
1.83700	1.687	14618.0	206.6356498	22.5660060
1.88286	1.773	14983.0	222.5006136	22.1525237
1.95790	1.917	15580.1	250.1786614	21.5126270

Figure 87. Longitud de las microescalas.

Capítulo 7.

Discusión de resultados y conclusiones

33 Discusión

33.1 Análisis de Resultados

Sección 33. Discusión
Sección 34. Conclusiones

Los resultados del presente trabajo comienzan en los modelos teóricos de vórtices el modelo de células vorticales y el modelo del vórtice de Burgers, posteriormente en la aplicación con uso de datos de Flujo 4D en el cálculo de vorticidad, el uso de un valor de corte grupal y terminando con las aproximaciones de longitud por medio de la teoría de Kolmogorov. Para desglosar ordenadamente la interpretación de resultados se seccionara este apartado en subsecciones que permitan delimitar la información.

33.1.1 Modelo 2D

La simulación de los cuatro esquemas de diferenciación aplicados a las ecuaciones del modelo de las células vorticales presentan diferencias para calcular la vorticidad, los resultados presentados en el perfil de vorticidad hace notorio que el método de 8 puntos estima una menor vorticidad, ver figura 53, confirmando los resultados presentados en [1].

El parámetro V_{max} provoca un aumento o disminución de la vorticidad al ser un término directamente proporcional, es por ello que la figura 54 tiene un comportamiento lineal, a su vez, la separación de la estimación de la vorticidad del método de 8 puntos con los otros métodos aumentaba cuando la V_{max} aumentaba. En la figura 55 se tiene una gráfica de como aumenta la diferencia de vorticidad del método de 8 puntos con el cálculo de la derivada analítica, en valores menores a 1 m/s su aumento no es significativo, pero en valores mayores a 5 m/s ya es más notorio su aumento. Se esperaba que la desviación se mantuviera constante a cualquier valor de la velocidad, pero no, lo que nos indica la sensibilidad del método cuando cambia la velocidad.

Hacer la variación del parámetro L_x y L_y está relacionado con un cambio en la resolución espacial cuando se tienen datos de IRM, el interés de variar estos datos en el modelo teórico 2D era mostrar que cambios se pre-

sentan en los métodos numéricos; el cambio más notorio se da en el método de 8 puntos, al calcular el error absoluto se nota que es mayor cuando se tienen una menor resolución espacial, para valores menores a $L_i = 600$ la desviación aumenta conforme el valor de L_i disminuye.

Los datos de IRM son sensibles a cualquier interferencia provocando ruido en los datos, la razón principal de agregar un ruido es presenciar que tan sensibles son los cálculos de los métodos numéricos en presencia de un ruido blanco gaussiano. Al ver los valores que toman los métodos en diferentes puntos del vórtice se nota que el método de Richardson Compacta tienen un comportamiento más estable (ver figura 60), lo que confirma que el método presenta una mejor precisión con presencia de ruido; se sabe que los coeficientes que intervienen en el método balancean el nivel de ruido, en este caso se confirma que los coeficientes tienen una estructura de un filtro gaussiano.

La aplicación de un filtro cuando se tiene el ruido anterior tiene el objetivo de retomar los datos que se tenían antes de tener un ruido. En la figura 61 se muestra como los métodos de Richardson se acercan más a los datos de la derivada analítica. Cada método tienen una precisión, en modo ascendente el método de Richardson Compacta presenta la mejor precisión, después el método de Richardson, luego el método de Chapra y por último el método de 8 puntos; esta precisión se confirma en este apartado.

Aplicar el criterio de identificación de λ_2 a este modelo resulta satisfactorio al encontrar los 4 núcleos vorticales de manera analítica.

33.1.2 Modelo 3D

El modelo del vórtice de Burgers resulta adecuado al ser un modelo con parámetros físicos de fluidos viscosos; sus ecuaciones permiten una manipulación de datos que presenta el flujo sanguíneo. Calcular la vorticidad haciendo uso de este método presenta resultados similares a los mostrados en el modelo 2D, ya que el método de 8 puntos estima una menor vorticidad que los otros métodos.

Al variar el parámetro b que representa el tamaño del vórtice, en su anchura, a partir de que el vórtice tienen un diámetro de $15mm$, con los datos de viscosidad de la sangre, todos los métodos presentan un valor muy similar al de la derivada analítica; pero cuando el vórtice es más pequeño que $15mm$ el método de Chapra y el de 8 puntos difieren notoriamente su valor de vorticidad, es decir, los métodos de Richardson resultan más adecuados cuando se tienen vórtices de ese tamaño. Ver figura 77.

En el modelo 3D se calcula el valor máximo de vorticidad con cada método, posteriormente se aplica un ruido blanco gaussiano, al volver a determinar la vorticidad varían los valores, figura 78, determinando la estabilidad del método de Richardson Compacta. Cuando se aplica el filtro

a los datos de ruido es evidente que el método de Richardson Compacta es el único que regresa al valor original.

Cuando se aplica el criterio de identificación de λ_2 de forma analítica a las ecuaciones del modelo de vórtice de Burgers se encuentran el valor en el plano $X - Y$ en el lugar específico donde se localiza el núcleo vortical, confirmando que el uso del método es adecuado para este modelo físico.

33.1.3 Aplicación con datos de Flujo 4D

En esta sección se utiliza el método de Richardson Compacta para determinar las derivadas necesarias para el uso del criterio de identificación de λ_2 usando datos de Flujo 4D para 8 controles, el programa utilizados arroja información de la vorticidad en 25 tiempos que determinan la totalidad de un ciclo cardíaco. Si bien la vorticidad es el rotacional de la velocidad, una velocidad máxima no sugiere físicamente una vorticidad máxima, ya que en promedio se puede presentar velocidades máximas de flujo a determinado tiempo sin necesidad de tener estructuras de remolinos, lo que explica la gráfica presentada en la figura 84

Al tener información de 8 controles resulta interesante identificar en que tiempo se presenta un máximo de vorticidad para cada control, a este valor se lo llamo valor de corte. A este valor de corte se le asigna el máximo tamaño de vórtice, en la figura 85 se visualizan los valores de corte de los 8 pacientes. Se tiene que se presenta entre el tiempo 3 al tiempo 10 del ciclo cardíaco, estos valores concuerdan en los tiempos en donde se dá la apertura de la válvula aórtica y el cierre, lo que tienen sentido al tener presencia de flujo sanguíneo en movimiento en la aorta ascendente.

En el análisis estadístico muestra que si hay diferencias significativas entre el valor de corte local y el valor de corte grupal, es decir, no se puede tomar un valor de corte característico del grupo para identificar el momento donde se dá la máxima vorticidad. A cada control se le tendría que identificar su valor de corte para establecer el tamaño máximo de vórtice, si se elije en el promedio del grupo no se determinaría si es o no su valor máximo de vórtice.

Se busca identificar aproximadamente el tamaño de los remolinos en la aorta ascendente, para ello se hizo uso de la teoría, primero se identifica el número de Reynolds en los 25 tiempos para establecer que clase de fluido se presenta, en 6 tiempos de los 25 se presenta flujo turbulento donde su principal característica es la presencia de vórtices. Los cuartiles sugieren una disminución de la velocidad lo que determina pérdidas de energía cinética, ver la figura 88.

La teoría de Kolmogorov aproxima el tamaño de estos vórtices en el flujo turbulento, nos informa que el vórtice más grande puede tomar el tamaño característico de la aorta ascendente que es de aproximadamente

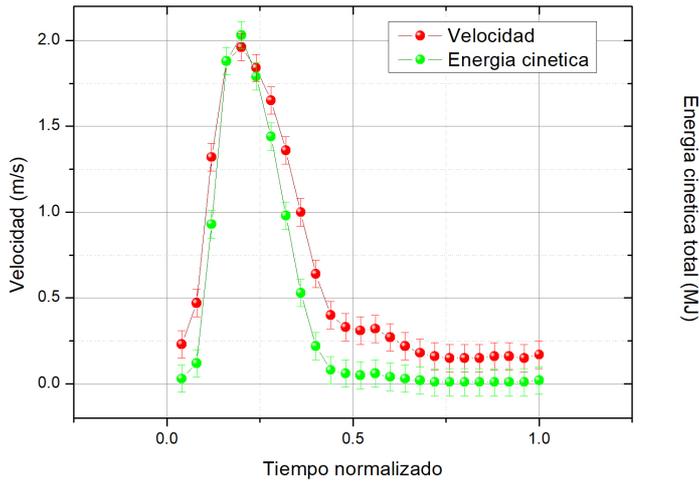


Figure 88. Velocidad y energía cinética del control 1

3 cm y los vórtices más pequeños van de 21.5 nm a 28.8 nm en ese rango turbulento.

Se analizarán las medidas obtenidas de las microescalas de Kolmogorov. De la ecuación 16.5, se parte considerando que todas las escalas deben ser resueltas, está expresión nos dice que a mayor Re menor va a ser el valor de las escalas disipativas (microescalas), aquí se tienen números de Reynolds del orden de 10^5 , para ello se tienen microescalas del orden de 10^{-5} ,

$$\frac{\eta}{L} = Re^{-3/4}; \quad \eta = Re^{-3/4}L = (10,000)^{3/4}(0.03m) = 3 \times 10^{-5}m. \quad (33.1)$$

Si se considera la distancia entre voxeles de Δx , esta distancia no puede ser mayor al tamaño de las escalas más pequeñas:

$$\Delta x \approx \eta \approx Re^{-3/4}L. \quad (33.2)$$

Se toma L como la longitud característica de la matriz de datos, es decir, el tamaño de la aorta ascendente, se calculan cuantos pixeles, en el plano, se necesitan:

$$Numero\ de\ pixeles = \frac{L}{\Delta x} \approx \frac{L}{\eta} \approx Re^{3/4}. \quad (33.3)$$

Visto en una red tridimensional, es decir, cuantos voxeles se necesitarían:

$$N_x N_y N_z \approx (Re^{3/4})^3 \approx Re^{9/4} = Numero\ de\ voxeles. \quad (33.4)$$

Por lo tanto, el número de voxeles mínimos necesarios para ver las

microescalas deben ser del orden de:

$$\text{Numero de voxeles} \approx (10,000)^{9/4} = 1,000,000,000. \quad (33.5)$$

Cuando se tienen número de Reynolds del orden de 10,000, se necesitarían 1000 millones de voxeles en la matriz de datos para poder visualizar las microescalas. En los datos de Flujo 4D se tienen poco más de 1 millón, y además el tamaño de los voxeles que se tienen son de aproximadamente 2 a 2.5 milímetros.

Por consiguiente se puede calcular en términos de la resolución temporal. Para resolver la evolución temporal de las escalas pequeñas donde el tiempo de cálculo se estima (para un equipo de computo convencional) del orden de Re^3 . Necesitaríamos 86 millones de días para calcular el tiempo de paso mínimo para describir el movimiento de las escalas pequeñas.

Al no poder visualizar un vórtice formado, lo que se muestran en los resultados son entonces las capas de separación de dichos vórtices. Una manera de interpretar tal conectividad es con la energía cinética. Se toma un campo de velocidades al azar, tal que se note el desorden y se encuentre dentro de la región de vorticidad, ver la figura 89 se identifica un plano, tal plano se muestra en la figura 90 para identificar una línea, a esa línea se le calcula la energía cinética y se gráfica en función de la distancia, ver la figura 91. Cuando se compara con una gráfica similar del modelo teórico 2D en la misma línea donde se calculo la vorticidad se tiene la figura 92. Se encuentra que la intersección entre los dos vórtices se tiene el máximo de la energía cinética, así en los picos de la energía cinética de los valores in vivo corresponderían a intersección de vórtices.

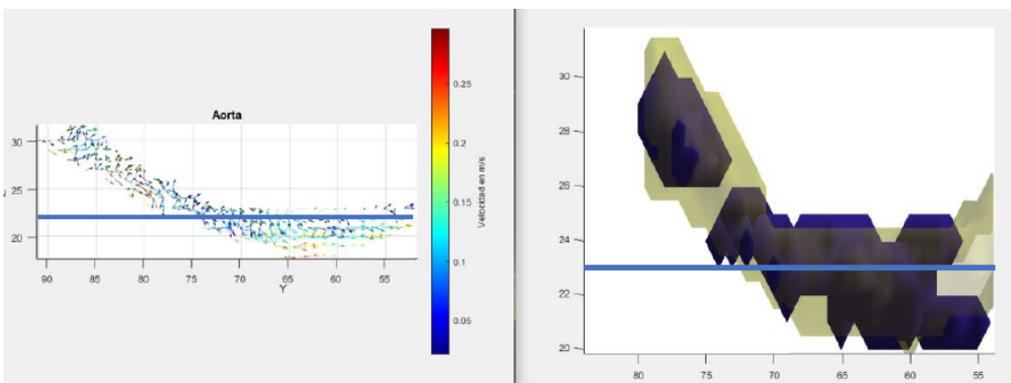


Figure 89. Identificación de un plano.

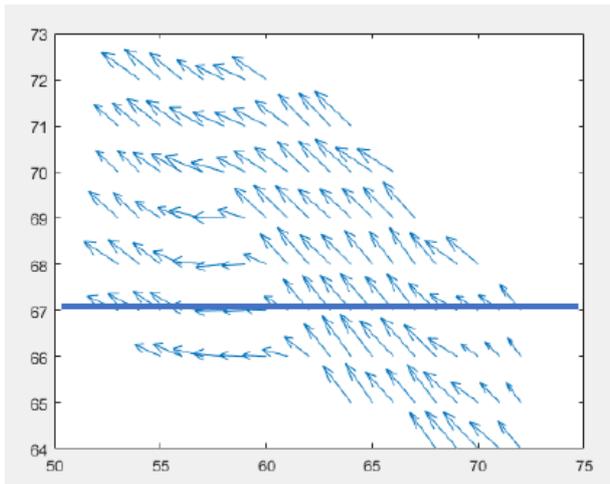


Figure 90. Identificación de una línea.

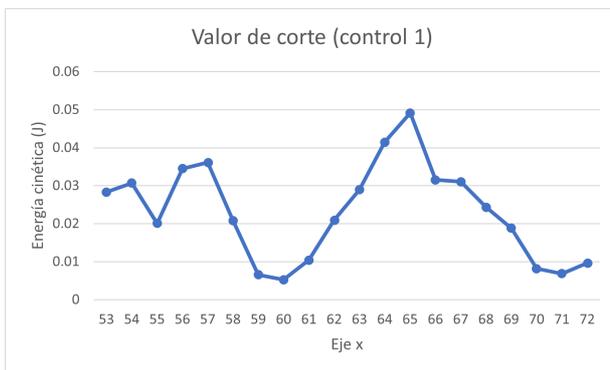


Figure 91. Energía cinética.

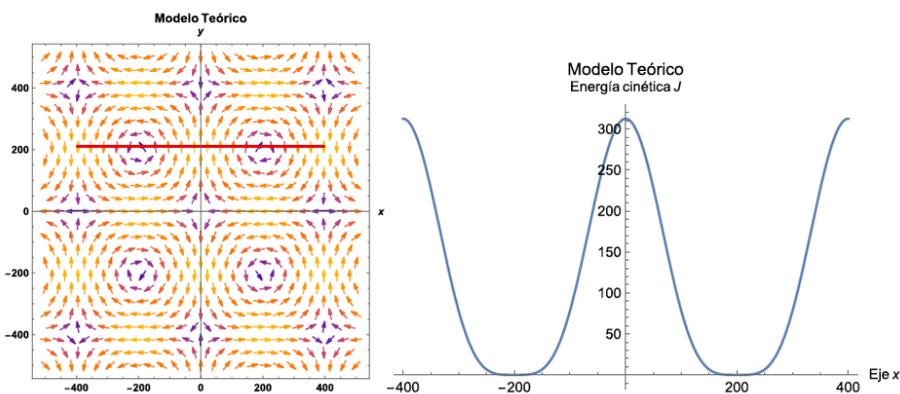


Figure 92. Energía cinética del modelo teórico.

34 Conclusiones

Los modelos teóricos permitieron un estudio del comportamiento de la vorticidad de una manera más sencilla, la ventaja de tener las ecuaciones apoyo el análisis numérico para el uso de los métodos numéricos (el método Chapra, el método de 8 puntos, el método de Richardson y el método de Richardson Compacta) y al trabajo analítico con el criterio de identificación de λ_2 .

El modelo teórico 2D de las células vorticales presentó la diferencia

del método de 8 puntos al calcular menores valores de vorticidad que los otros métodos; se confirma tal diferencia al variar el parámetro V_{max} y la modificación de la resolución espacial. El método de Richardson Compacta confirmó su precisión al aplicar un ruido y un filtro, esto debido a la estructura del método. El criterio de identificación de λ_2 al ser un criterio con bases físicas resultó adecuado al encontrar los núcleos vorticales de forma analítica.

El modelo 3D del vórtice de Burgers brinda los resultados similares al modelo anterior con el uso de los métodos numéricos, a su vez al variar el tamaño del vórtice, aplicar ruido y filtro verifican que el uso del método de Richardson Compacta es el más adecuado.

Lo anterior respalda que el uso del método de Richardson Compacta y el criterio de λ_2 resulta adecuado en la utilización de datos de Flujo 4D. Su utilización mostró la localización de vorticidad en el campo de velocidades que se tiene en este tipo de datos; pero no se están identificando propiamente vórtices, si no interconexiones de vórtices, ya que la teoría de microescalas de Kolmogorov nos sustenta que no es posible visualizar las escalas disipativas espaciales ni temporales.

De acuerdo a la hipótesis escritas se tienen las siguientes conclusiones, se verifica la primera hipótesis ya que el método de Richardson compacta es el de mayor precisión. La segunda hipótesis se acepta, ya que al variar algunos parámetros presentó los problemas que se tienen los programas computacionales cuando se tienen datos reales. La tercera fue satisfactoria ya que el criterio de λ_2 sí resultó preciso al identificar los vórtices en los modelos teóricos. La cuarta hipótesis se rechaza, ya que no es posible tomar un valor de corte característico por grupo, es decir, no hay un parámetro de corte generalizado para la población presentada en este trabajo. La última hipótesis es cierta, el fluido sanguíneo es tan complicado que su movimiento permitió el uso de las bases de turbulencia.

El objetivo principal del trabajo se llevo acabo al validar el método numérico adecuado para el uso de datos de Flujo 4D, si bien no es posible evaluar en su totalidad la proporción de vortices que presenta el flujo cardíaco debido a que no se identifican al cien por ciento todos los vórtices si fue posible analizar la influencia física que tienen los vórtices en el ciclo cardiaco en el movimiento de la sangre dentro de la aorta ascendente. Las interconexiones de vórtices mostradas en los datos de Flujo 4D permiten asociar un momento en el tiempo donde se da la máxima vorticidad, encontrar un rango donde se presentan flujos turbulentos en donde se les puede analizar el tamaño de las escalas disipativas asociandolas al tamaño de la cavidad, y debido al grupo aqui presentado se deberían personalizar los valores de corte, o bien, tomar el rango donde se presentan los flujos turbulentos como una caracterización de la máxima vorticidad.

35 Trabajo a futuro

Una de las conclusiones a la que se llegó en el presente trabajo fue la limitación de la resolución para identificar vórtices, incluso en escalas medias de Kolmogorov, con los datos usuales de Flujo 4D, actualmente se están trabajando con el uso de generación de datos de entrenamiento a partir de datos de flujo simulado en dinámica de fluidos computacional para crear lo que llaman superresolución.

En [65] menciona como las limitaciones físicas y de hardware provoca adquirir cortes gruesos en las imágenes de resonancia magnética 3D, dando como resultados voxels altamente anisotrópicos, disminuyendo el valor de diagnóstico de las imágenes; es por ello que proponen utilizar una red neuronal convolucional dando como resultado imágenes reconstruidas con una calidad superior. En este artículo reconstruyen vasos sanguíneos en imágenes cerebrales demostrando que tales vasos sanguíneos simulados son significativamente más precisos.

La misión de reconstruir campos vectoriales usando el método de aprendizaje profundo que toma como entrada líneas de corriente trazadas de campos originales provoca una reconstrucción de campos vectoriales de alta calidad [66]; es decir, al tener los campos vectoriales de los datos adquiridos con IRM en la secuencia Flujo 4D resultan útiles para aplicar el método de aprendizaje profundo y mejorar la calidad de la imagen.

El uso de aprendizaje automático para promover una superresolución en datos de flujo turbulento lo hacen en [67], que va íntimamente ligado con este trabajo, ellos reconstruyen un campo de flujo de alta resolución con el desarrollo de dos modelos de aprendizaje automático, red neuronal convolucional y los modelos híbridos de conexión, ambos reconstruyen flujos turbulentos a partir de imágenes de campo de flujo extremadamente gruesas con una precisión notable, lo que resulta beneficioso indagar estos modelos para ser aplicados en los campos de flujo sanguíneo.

Finalmente en [68] hace uso de simulaciones de dinámica de fluidos computacionales para generar simulaciones de flujo de fluidos y representarlas como datos de resonancia magnética de flujo 4D sintéticos, mencionan que "el éxito reciente del aprendizaje profundo en la generación de imágenes de súper resolución es prometedor para su implementación en imágenes médicas" [68]. Ellos ya contruyen su propio conjunto de datos de entrenamiento para imitar los datos de IRM de flujo 4D reales con su propio ruido siendo capaz de producir imágenes con superresolución sin ruido.

En resumen, usando este tipo de métodos para lograr una superresolución sería posible la caracterización de microescalas respondiendo de manera más eficaz los objetivos de este trabajo.

Referencias

- [1] J. Garcia, E. Larose, P. Pibarot, and L. Kadem, “On the evaluation of vorticity using cardiovascular magnetic resonance velocity measurements,” *Journal of biomechanical engineering*, vol. 135, no. 12, 2013.
- [2] J. Pineda Zapata, J. Delgado de Bedout, S. Rascovsky Ramírez, C. Bustamante, S. Mesa, and V. Calvo Betancur, “Introducción práctica al análisis hemodinámico del sistema cardiovascular mediante la técnica «4d flow»,” *Radiología*, vol. 56, no. 6, pp. 485–495, 2014.
- [3] N. Pinochet R, P. S, and Tejos, “4d flow: Una nueva herramienta de diagnóstico para cardiopatías congénitas,” *Revista chilena de radiología*, vol. 17, pp. 134 – 140, 00 2011.
- [4] M. S. Elbaz, E. Calkoen, J. Westenberg, B. Lelieveldt, A. Roest, and R. van der Geest, “Vortex flow during early and late left ventricular filling in normal subjects: Quantitative characterization using retrospectively-gated 4d flow cardiovascular magnetic resonance and three-dimensional vortex core analysis,” *Journal of cardiovascular magnetic resonance : official journal of the Society for Cardiovascular Magnetic Resonance*, vol. 16, p. 78, 09 2014.
- [5] J. Sotelo, J. Urbina, I. Valverde, J. Mura, C. Tejos, P. Irarrazaval, M. E. Andia, D. E. Hurtado, and S. Uribe, “Three-dimensional quantification of vorticity and helicity from 3d cine pc-mri using finite-element interpolations,” *Magnetic resonance in medicine*, vol. 79, no. 1, pp. 541–553, 2018.
- [6] S. Miyazaki, K. Itatani, T. Furusawa, T. Nishino, M. Sugiyama, Y. Takehara, and S. Yasukochi, “Validation of numerical simulation methods in aortic arch using 4d flow mri,” *Heart and vessels*, vol. 32, no. 8, pp. 1032–1044, 2017.
- [7] C. Young, D. Johnson, and E. Weckman, “A model-based validation framework for piv and ptv,” *Experiments in fluids*, vol. 36, no. 1, pp. 23–35, 2004.
- [8] H. J. Lugt, “The dilemma of defining a vortex,” in *Recent developments in theoretical and experimental fluid mechanics*, pp. 309–321, Springer, 1979.
- [9] V. Kolár, “Compressibility effect in vortex identification,” *AIAA journal*, vol. 47, no. 2, pp. 473–475, 2009.
- [10] J. Garcia, A. J. Barker, and M. Markl, “The role of imaging of flow patterns by 4d flow mri in aortic stenosis,” *JACC: Cardiovascular Imaging*, vol. 12, no. 2, pp. 252–266, 2019.
- [11] A. Etebari and P. P. Vlachos, “Improvements on the accuracy of derivative estimation from dpiv velocity measurements,” *Experiments in Fluids*, vol. 39, no. 6, pp. 1040–1050, 2005.
- [12] H. Ha, M. Ziegler, M. Welander, N. Bjarnegård, C.-J. Carlhäll, M. Lindenberger, T. Länne, T. Ebbens, and P. Dyverfeldt, “Age-related

- vascular changes affect turbulence in aortic blood flow,” Frontiers in physiology, vol. 9, p. 36, 2018.
- [13] P. Geeraert, F. Jamalidinan, F. Burns, K. Jarvis, M. S. Bristow, C. Lydell, S. S. H. Tobon, B. de Celis Alonso, P. W. Fedak, J. A. White, *et al.*, “Hemodynamic assessment in bicuspid aortic valve disease and aortic dilation: New insights from voxel-by-voxel analysis of reverse flow, stasis, and energetics,” Frontiers in Bioengineering and Biotechnology, vol. 9, 2021.
- [14] A. F. Hassanabad, F. Burns, M. S. Bristow, C. Lydell, A. G. Howarth, B. Heydari, X. Gao, P. W. Fedak, J. A. White, and J. Garcia, “Pressure drop mapping using 4d flow mri in patients with bicuspid aortic valve disease: a novel marker of valvular obstruction,” Magnetic resonance imaging, vol. 65, pp. 175–182, 2020.
- [15] M. Canals, “The history of magnetic resonance imaging from fourier to lauterbur and mansfield: In science nobody knows whom he works for,” Revista Chilena de Radiología, vol. 14, pp. 39–45, 01 2008.
- [16] J. Costa Subias and S. Jerez, “Resonancia magnética dirigida a técnicos superiores en imagen para el diagnóstico,” Barcelona [etc.]: Elsevier, pp. 143–149, 2015.
- [17] N. Waksman Minsky and A. Saucedo Yáñez, “Breve historia de la resonancia magnética nuclear: desde el descubrimiento hasta la aplicación en imagenología,” Educación química, vol. 30, no. 2, pp. 129–139, 2019.
- [18] S. C. Bushong and G. Clarke, Magnetic resonance imaging: physical and biological principles. Elsevier Health Sciences, 2013.
- [19] L. Oleaga and J. Lafuente, “Aprendiendo los fundamentos de la resonancia magnética,” Madrid: Buenos Aires, 2007.
- [20] C. Westbrook and J. Talbot, MRI in Practice. John Wiley & Sons, 2018.
- [21] R. Resnick, D. Halliday, and K. S. Krane, “Física, volumen ii,” Editorial Continental, 2002.
- [22] R. W. Brown, Y.-C. N. Cheng, E. M. Haacke, M. R. Thompson, and R. Venkatesan, Magnetic resonance imaging: physical principles and sequence design. John Wiley & Sons, 2014.
- [23] J. Gili, “Introducción biofísica a la resonancia magnética,” Centre Diagnòstic Pedralbes, p. 5, 1993.
- [24] D. Moratal-Pérez, J. Millet-Roig, F. Castells, L. Martí-Bonmatí, and M. E. Brummer, “Surcando el espacio-kpara mejorar la imagen por resonancia magnética,” Radiología, vol. 46, no. 3, pp. 133–150, 2004.
- [25] M. G. S. J. Sutton, M. S. J. Sutton, and J. D. Rutherford, Clinical Cardiovascular Imaging: A Companion to Braunwald’s Heart Disease. Saunders, 2004.
- [26] H. H. Schild, IRM hecha fácil (-bueno, casi). Shering, 1992.

- [27] R. A. Serway and J. W. Jewett, Física para ciencias e ingeniería con física moderna. Cengage Learning Editores, 2009.
- [28] R. M. Velasco Belmont, “Introducción a la hidrodinámica clásica/por rosa maría velasco.,” Colec. de Obras y Tecnología.
- [29] J. W. Daily, D. R. Harleman, A. F. López, and D. de la Serna Valdivia, Dinámica de los fluidos con aplicaciones en la ingeniería. Trillas, 1975.
- [30] R. L. Mott, Mecanica de Fluidos 6/e. Pearson educación, 2006.
- [31] Y. A. CEngel, J. M. Cimbala, and S. F. Sknarina, Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones. McGraw-Hill Interamericana, 2006.
- [32] A. Smits, Mecanica de Fluidos Una Introduccion a la Fisica. Marcombo, 2004.
- [33] R. L. Panton, Incompressible flow. John Wiley & Sons, 2013.
- [34] D. Rubenstein, W. Yin, and M. D. Frame, Biofluid mechanics: an introduction to fluid mechanics, macrocirculation, and microcirculation. Academic Press, 2015.
- [35] M. Rieutord, Fluid dynamics: an introduction. Springer, 2014.
- [36] E. Garza and T. de la Selva, Dinámica de fluidos. Editorial Trillas, 2018.
- [37] L. Zavala, Turbulencia. Apuntes de Oceanografía Física, 2021.
- [38] A. B. Ripoll and M. P.-S. Sánchez-Pastor, Fundamentos y Aplicaciones de la Mecánica de Fluidos. McGraw-Hill, 2005.
- [39] O. Jarrin, Descriptions déterministes de la turbulence dans les équations de Navier-Stokes. PhD thesis, Université Paris-Saclay (ComUE), 2018.
- [40] J. E. Hall, Guyton y Hall. Tratado de fisiología médica. Elsevier Health Sciences, 2011.
- [41] L. Waite and J. Fine, Applied biofluid mechanics. McGraw-Hill Education, 2017.
- [42] P. Davidovits, Physics in biology and medicine. Academic press, 2018.
- [43] J. B. Fernández, E. R. Koroutcheva, and J. M. P. Ruiz, Temas de biofísica. Editorial UNED, 2012.
- [44] H. Vélez, Fundamentos de medicina: Cardiología. Corporación para Investigaciones Biológicas, 1992.
- [45] F. Jiménez-Herrero, “Imagen cardiovascular avanzada: resonancia magnética y tomografía computerizada, francisco tardáguila montero, joaquin ferreirós domínguez, editorial mcgraw-hill, madrid (2004),” 2005.
- [46] M. A. Fogel, Principles and practice of cardiac magnetic resonance in congenital heart disease: form, function and flow. John Wiley & Sons, 2010.
- [47] P. K. Kundu, I. M. Cohen, and D. R. Dowling, Fluid mechanics. Academic press, 2015.

- [48] P. A. Davidson, Turbulence: an introduction for scientists and engineers. Oxford university press, 2015.
- [49] S. C. Chapra and R. P. Canale, Numerical methods for engineers, vol. 1221. Mcgraw-hill New York, 2011.
- [50] C. C. Landreth and R. J. Adrian, “Impingement of a low reynolds number turbulent circular jet onto a flat plate at normal incidence,” Experiments in fluids, vol. 9, no. 1, pp. 74–84, 1990.
- [51] R. K. Wangsness and R. K. Wangsness, Electromagnetic fields, vol. 2. Wiley New York, 1979.
- [52] D. L. Reuss, R. J. Adrian, C. C. Landreth, D. T. French, and T. D. Fansler, “Instantaneous planar measurements of velocity and large-scale vorticity and strain rate in an engine using particle-image velocimetry,” SAE Transactions, pp. 1116–1141, 1989.
- [53] L. Lourenco and A. Krothapalli, “On the accuracy of velocity and vorticity measurements with piv,” Experiments in fluids, vol. 18, no. 6, pp. 421–428, 1995.
- [54] J.-M. Foucaut and M. Stanislas, “Some considerations on the accuracy and frequency response of some derivative filters applied to particle image velocimetry vector fields,” Measurement Science and Technology, vol. 13, no. 7, p. 1058, 2002.
- [55] J. Jeong and F. Hussain, “On the identification of a vortex,” Journal of fluid mechanics, vol. 285, pp. 69–94, 1995.
- [56] Q. Chen, Q. Zhong, M. Qi, and X. Wang, “Comparison of vortex identification criteria for planar velocity fields in wall turbulence,” Physics of Fluids, vol. 27, no. 8, p. 085101, 2015.
- [57] T. M. Apostol, Análisis matemático. Reverté, 1976.
- [58] A. Shinneeb, J. Bugg, and R. Balachandar, “Variable threshold outlier identification in piv data,” Measurement Science and Technology, vol. 15, no. 9, p. 1722, 2004.
- [59] X. Song, F. Yamamoto, M. Iguchi, and Y. Murai, “A new tracking algorithm of piv and removal of spurious vectors using delaunay tessellation,” Experiments in fluids, vol. 26, no. 4, pp. 371–380, 1999.
- [60] J. M. Burgers, “A mathematical model illustrating the theory of turbulence,” Advances in applied mechanics, vol. 1, pp. 171–199, 1948.
- [61] H. Tryggesson, Analytical vortex solutions to Navier-Stokes equation. PhD thesis, Växjö University Press, 2007.
- [62] L. C. Maroto, J. E. Rodríguez, J. Cobiella, and J. Silva, “Delayed dislocation of a transapically implanted aortic bioprosthesis,” European journal of cardio-thoracic surgery, vol. 36, no. 5, pp. 935–937, 2009.
- [63] M. A. Creager and J. Loscalzo, “Enfermedades de la aorta,” in Harrison,

- principios de medicina interna, pp. 1917–1923, McGraw Hill Education, 2018.
- [64] R. Carnecky, T. Brunner, S. Born, J. Waser, C. Heine, and R. Peikert, “Vortex detection in 4d mri data: Using the proper orthogonal decomposition for improved noise-robustness.,” in EuroVis (Short Papers), 2014.
- [65] J. Jurek, M. Kociński, A. Materka, M. Elgalal, and A. Majos, “Cnn-based superresolution reconstruction of 3d mr images using thick-slice scans,” Biocybernetics and Biomedical Engineering, vol. 40, no. 1, pp. 111–125, 2020.
- [66] J. Han, J. Tao, H. Zheng, H. Guo, D. Z. Chen, and C. Wang, “Flow field reduction via reconstructing vector data from 3-d streamlines using deep learning,” IEEE computer graphics and applications, vol. 39, no. 4, pp. 54–67, 2019.
- [67] K. Fukami, K. Fukagata, and K. Taira, “Super-resolution reconstruction of turbulent flows with machine learning,” Journal of Fluid Mechanics, vol. 870, pp. 106–120, 2019.
- [68] E. Ferdian, A. Suinesiaputra, D. J. Dubowitz, D. Zhao, A. Wang, B. Cowan, and A. A. Young, “4dflownet: super-resolution 4d flow mri using deep learning and computational fluid dynamics,” Frontiers in Physics, vol. 8, p. 138, 2020.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00114

Matrícula: 2182800766

VALIDACIÓN DE MÉTODOS DE VORTICIDAD PARA CAVIDADES CARDÍACAS.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 15:00 horas del día 18 del mes de agosto del año 2022 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. MANUEL ARREOLA
DR. JUAN CARLOS AXAYACATL MORALES GUADARRAMA
DRA. SILVIA SANDRA HIDALGO TOBON

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (FISICA)

DE: ANGÉLICA VIRIDIANA ROMAN MARTINEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



ANGÉLICA VIRIDIANA ROMAN MARTINEZ

ALUMNA

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Roman Linares Romero
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

Manuel Arreola
DR. MANUEL ARREOLA

VOCAL

Juan Carlos Axayacatl Morales Guadarrama
DR. JUAN CARLOS AXAYACATL MORALES GUADARRAMA

SECRETARIA

Silvia Sandra Hidalgo Tobon
DRA. SILVIA SANDRA HIDALGO TOBON