



ALGUNOS PROBLEMAS
INTEGRABLES EN N VÓRTICES
FIJOS O EN INTERACCIÓN

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:00 horas del día 31 del mes de octubre del año 2017 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. MANUEL JESUS FALCONI MAGAÑA
- DR. LUIS FRANCO PEREZ
- DR. JOSE GUADALUPE REYES VICTORIA
- DR. MARTIN CELLI




JORGE MARTINEZ VALDEZ
ALUMNO

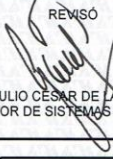
Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)


DE: JORGE MARTINEZ VALDEZ

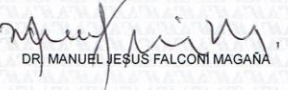
y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:


aprobat


REVISÓ

LIC. JULIO CÉSAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES


Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE

DR. MANUEL JESUS FALCONI MAGAÑA

VOCAL

DR. LUIS FRANCO PEREZ

VOCAL

DR. JOSE GUADALUPE REYES VICTORIA

SECRETARIO

DR. MARTIN CELLI



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

ALGUNOS PROBLEMAS INTEGRABLES
DE N VÓRTICES FIJOS O EN INTERACCIÓN

Tesis que presenta
Jorge Martínez Valdez
Para obtener el grado de
Maestro en ciencias (matemáticas)

Asesor: Dr. Martín Celli

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña
Secretario: Dr. Martín Celli
Vocal: Dr. José Guadalupe Reyes Victoria
Vocal: Dr. Luis Franco Pérez

Ciudad de México, 31 de Octubre de 2017

Agradecimientos

Por medio de estas breves líneas deseo expresar mi gratitud a todas aquellas personas e instituciones que hicieron posible la realización de este trabajo de investigación.

Un especial agradecimiento a mi asesor, el Dr. Martin Celli, por su invaluable conocimiento, su paciencia, la confianza que depositó en mí para emprender este proyecto y sobre todo su calidez humana, que me permitió avanzar y concluir este trabajo.

A los miembros del jurado, los doctores en ciencias matemáticas Manuel Jesús Falconi Magaña, José Guadalupe Reyes Victoria y Luis Franco Pérez, les doy las gracias por que a pesar de tener muchas actividades en sus respectivas áreas laborales tuvieron la amabilidad de revisar y realizar observaciones a mi escrito con el propósito de mejorarlo. De igual manera gracias al personal docente del departamento de matemáticas de la UAM-I por el soporte científico y humano que me brindó durante mi estancia.

Finalmente le dedico este trabajo a mi familia que siempre me ha brindado todo su apoyo incondicional, su comprensión y amor ante todo. Son el mejor motivo para continuar superandome de manera personal y profesional.

Este proyecto de maestría fue financiado por CONACYT.

Índice general

Agradecimientos	iii
Introducción	vii
Capítulo 1. Campo generado por un sistema de N vórtices en \mathbb{R}^2	1
1.1. La distribución δ de Dirac	1
1.2. Campo de velocidades cuando no hay vórtices	4
1.3. Campo de velocidades generado por $N = 1$ vórtice	7
1.4. Campo de velocidades generado por $N \geq 2$ vórtices	11
Capítulo 2. Vórtices y soluciones de las ecuaciones de Euler	13
2.1. Una partícula y N vórtices fijos	13
2.2. Conservación de la energía cinética	14
2.3. Trayectorias para $N = 1$ vórtice fijo	17
2.4. Trayectorias para $N = 2$ vórtices fijos con vorticidades iguales	18
2.4.1. Mediante coordenadas polares	19
2.4.2. Mediante el mapeo z^2	21
2.4.3. Mediante los puntos críticos de la energía	26
2.5. Dirección de recorrido de las curvas integrales para $N = 2$ vórtices	42
2.6. Trayectorias para $N \geq 3$ vórtices fijos con vorticidades iguales, formando un polígono regular	43
Capítulo 3. N vórtices en interacción	47
3.1. Energía cinética del sistema	47
3.2. Centro y vector de vorticidad	50
3.3. Momento de inercia	53
3.4. Dinámica del campo con $N = 2$ vórtices en interacción	55
3.5. Dinámica del campo con $N = 3$ vórtices en interacción	58
Conclusión	67
Bibliografía	69

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es realizar un análisis cualitativo de la dinámica de una partícula que se encuentra bajo la influencia de un campo de velocidades generado por $N \geq 1$ remolinos o vórtices fijos en el plano, y de la dinámica de un sistema de N vórtices del plano en interacción. Se puede mostrar que el campo de velocidades de un fluido plano incompresible puede ser aproximado por el campo generado por un sistema finito de vórtices. Así, la ecuación diferencial parcial de Navier-Stokes para un fluido sin viscosidad (ecuación de Euler) se convierte en un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias.

Los sistemas de vórtices tienen muchas aplicaciones en mecánica de fluidos, en particular en meteorología, donde permiten modelar la parte central de un huracán.

Los resultados que se presentan en esta tesis son considerados como clásicos en el estudio de los sistemas de vórtices. Sin embargo, no se conocen referencias que los abarquen en una teoría elemental como la que exponemos aquí, y donde se proporcionan todas sus demostraciones completas, incluyendo las pruebas de los lemas de geometría diferencial que requieren. Por lo mismo, la lectura de esta tesis puede ser de interés para cualquier matemático con conocimientos básicos en geometría diferencial, análisis real y complejo, en búsqueda de una introducción a los temas geométricos de la dinámica de vórtices, y así exponer pruebas más concisas.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias que proporcionan los movimientos de los vórtices fueron encontradas por Helmholtz en 1858 ([25]). Kirchhoff las expresó como sistema hamiltoniano por primera vez ([26]). Se considera que Gröbli ([16]) y Poincaré ([11]) fueron los primeros en resolverlas en el caso de interacciones de $N = 3$ vórtices. Más recientemente, enfoques modernos nos dieron otro entendimiento conceptual sobre la integrabilidad del problema de tres vórtices ([8], [9],[10], [13], [17], [18]). Se sabe que las ecuaciones de Helmholtz no son integrables para $N \geq 4$ vórtices.

El desarrollo de la tesis comienza demostrando de dos maneras diferentes, a saber, con la fórmula integral de Cauchy y la fórmula de

Green, que un campo de velocidades es idénticamente cero cuando no hay vórtice o bien cuando la vorticidad es nula. Esto es el prelude para demostrar la existencia y unicidad de un campo vectorial generado por uno o más vórtices y con vorticidades constantes. También lo calculamos de manera explícita. Este campo vectorial propocionará las ecuaciones de Helmholtz de un sistema de vórtices.

En el segundo capítulo se estudian las trayectorias de un punto móvil en el campo generado por uno o varios vórtices fijos, de misma vorticidad, enfatizando los casos particulares de $N = 1$ (donde las trayectorias son circunferencias concéntricas recorridas con velocidad angular constante), $N = 2$ vórtices fijos y de un polígono regular de vórtices. Estas trayectorias son las curvas de nivel de la energía cinética, logaritmo del producto H de las distancias del punto móvil a los vórtices. El trazo de las trayectorias se expone mediante varios métodos como son: coordenadas polares, mapeo z^2 y puntos críticos de la función H . Para el método de puntos críticos se requiere de herramientas del cálculo como el teorema de valores extremos y también de resultados más sofisticados como el teorema de la curva de Jordan o el teorema del flow box.

En el último capítulo se estudian los movimientos de N vórtices en interacción, enfatizando los casos integrables $N = 2$, y $N = 3$ con vorticidades iguales. Esto equivale a estudiar las intersecciones de superficies de nivel de las integrales primeras (energía cinética, momento angular), lo que requiere el cálculo de los puntos críticos de la restricción de una función a una superficie.

Capítulo 1

Campo generado por un sistema de N vórtices en \mathbb{R}^2

Recordemos que, físicamente, a la materia se le puede encontrar en los estados sólido, líquido y gaseoso. Estos dos últimos llamados fluidos y en otros casos especiales superfluidos. Un cuerpo sólido se caracteriza por tener forma y volumen constante a lo largo del tiempo. En el caso de un fluido que se desplaza se dice que es incompresible cuando su densidad permanece constante a lo largo del tiempo. Matemáticamente la divergencia de un campo vectorial que representa el flujo de un fluido es cero.

Por otra parte, en términos físicos, podemos decir que la vorticidad es una magnitud que cuantifica la rotación de un fluido. Es decir, la vorticidad está íntimamente ligada al rotacional del campo de velocidades del fluido y caracteriza a un vórtice. En los fluidos incompresibles y sin viscosidad la propagación de la vorticidad es nula y es posible hallar regiones singulares extremadamente compactas donde la vorticidad es infinitamente intensa. Para definir de manera adecuada a un vórtice en un punto en el plano se requiere hacer uso de una herramienta matemática conocida como la distribución δ de Dirac.

1.1. La distribución δ de Dirac

Consideremos una función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se define al *soporte* de φ como la cerradura topológica del conjunto $\{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \neq 0\}$. Observamos que para que el soporte de una función sea compacto es suficiente con que sea acotado. Ahora, una *función de prueba* es una función infinitamente diferenciable y con soporte compacto, un ejemplo de la gráfica de una función de prueba se muestra en la figura (1.1). Al conjunto de funciones de prueba se le denota $\text{comp}(\mathbb{R})$ y es un espacio vectorial infinitamente dimensional, con respecto a las definiciones usuales de suma y multiplicación por escalar de funciones.

Una *distribución o función generalizada* es una funcional lineal continua $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Se puede

definir la distribución F generada por f como

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)dt = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt,$$

donde el intervalo $[a, b]$ contiene al soporte de la función $\varphi \in \mathcal{T}$. La familia de todas las distribuciones, denotada por \mathcal{D} , también constituye un espacio vectorial sobre \mathbb{R} (en nuestro caso).

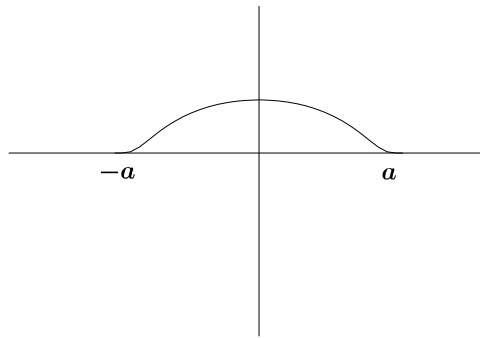


Figura 1.1. Función de prueba con soporte contenido en $[-a, a]$.

Iniciamos con una breve explicación de la construcción y las propiedades de la distribución δ de Dirac. Hay muchas sucesiones de funciones de prueba las cuales \ast convergen \ast a la δ de Dirac. Sean $a, \varrho \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ y $\varrho \geq 0$. Para fines prácticos, consideremos la sucesión de funciones

$$S_\varrho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varrho} x + a, & x \in \left[-\frac{\varrho}{2}, \frac{\varrho}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\varrho}{2}, \frac{\varrho}{2}\right] \end{cases}$$

la cual es una sucesión de funciones, como se muestra en la figura (1.2). Observemos que $S_\varrho(x)$ es derivable salvo en los valores $\frac{\varrho}{2}$ y $-\frac{\varrho}{2}$.

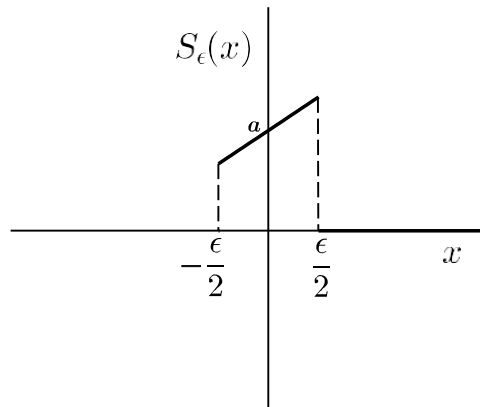


Figura 1.2

La derivada de $S_\rho(x)$ es la función

$$\Delta_\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \notin \left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right] \end{cases}$$

como se muestra en la figura (1.3) y define un área igual a la de un rectángulo de área igual a 1 unidad cuadrada.

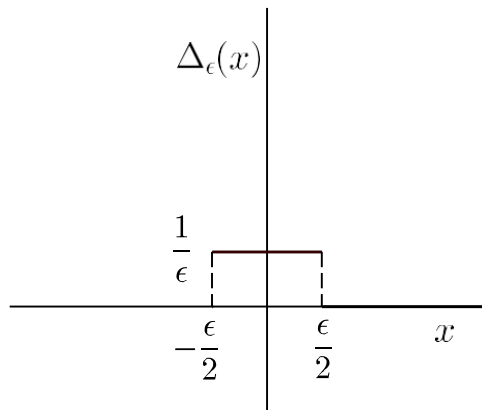


Figura 1.3

Suponga que $\rho \rightarrow 0$. Entonces $\Delta_\rho(x) \rightarrow \delta(x)$. No es posible dibujar la gráfica de esta función patológica, pero se sugiere la gráfica de la figura (1.4).

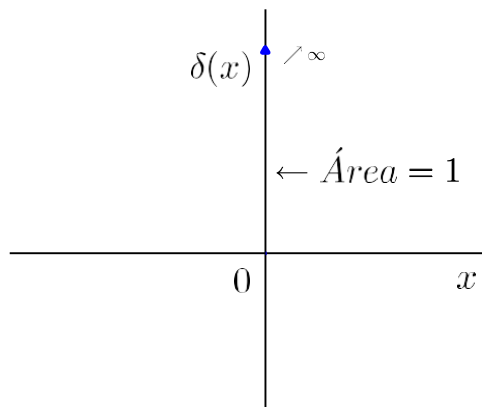


Figura 1.4

Así, $\delta(x)$ es cero en todas partes excepto en $x = 0$, donde hay una singularidad $\delta(0) = \infty$, y tal que el área bajo la curva es 1, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

Esta última ecuación realmente significa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\rho \rightarrow 0} \Delta_{\rho}(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} \frac{1}{\rho} dx = 1.$$

También tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Delta_{\rho}(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} f(x) \frac{1}{\rho} dx =$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \sum_{-\frac{\rho}{2}}^{\frac{\rho}{2}} f(x_{\rho}) \rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} f(x_{\rho}) = f(0).$$

En la última parte se utilizó el teorema del valor medio, lo que asegura la existencia de un $x_{\rho} \in \left[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right]$. Y más aún, si $\rho \rightarrow 0$, entonces $x_{\rho} \rightarrow 0$.

Así, la delta de Dirac es la *distribución* o *función generalizada* generada por δ y dada por:

$$(1.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0).$$

Y además

$$(1.2) \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0. \end{cases}$$

Considerando $f(x) = 1$ en la ecuación (1.1) tenemos

$$(1.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

La delta de Dirac no necesariamente está limitada a una dimensión. Así como también, puede ser cualquier *distribución* que satisface las tres propiedades (1.1), (1.2) y (1.3). Ver las referencias ([29], [30]).

1.2. Campo de velocidades cuando no hay vórtices

Definición 1. *Un vórtice, ubicado en $P_0 \in \mathbb{R}^2$ y de vorticidad $\Gamma \in \mathbb{R}$, es el campo de velocidades V , solución del sistema de EDP's*

$$(1.4) \quad \begin{cases} \operatorname{div} V = 0 \\ \operatorname{rot} V = \Gamma \delta_{P_0} \end{cases},$$

y que vale cero en el infinito, donde δ_{P_0} es la distribución de Dirac en P_0 .

Tenemos dos observaciones. La primera es que el campo de velocidades de la definición anterior es única, como se mostrará en los próximos teoremas. Y la segunda observación es que se está considerando que el campo de velocidades (flujo del fluido) es bidimensional, por lo que la

dirección del rotacional es siempre ortogonal a dicho plano. Es decir, si consideramos la función $V(x, y) = (F(x, y), G(x, y), 0)$ y calculamos su rotacional, se obtiene:

$$\text{rot} V = \left(0, 0, \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right),$$

y con esto, podemos prescindir del uso del símbolo vector sobre el rotacional y simplemente considerarlo como un escalar.

Es momento de caracterizar al campo de velocidades para el caso en que no hay un vórtice, para esto basta tomar la vorticidad $\Gamma = 0$.

Lema 1. *Todo campo vectorial $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 , con divergencia y rotacional igual a cero, y que vale cero en el infinito, es idénticamente cero.*

Demostración. Este lema se demostrará de dos maneras distintas.

Primera demostración. Usaremos la fórmula integral de Cauchy ([33]).

Sea $V = (F(x, y), G(x, y))$ un campo vectorial de clase C^1 , es decir, las derivadas parciales de F y G respecto a x y y existen y son continuas en todo punto (x, y) del plano. También, por hipótesis tenemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

en todo punto de \mathbb{R}^2 .

Ahora se define $\bar{V} := (F(x, y), G(x, y))$ como el campo vectorial tal que \bar{V} es el conjugado de V , es decir, $\bar{F}(x, y) = F(x, y)$ y $\bar{G}(x, y) =$

$-G(x, y)$. Observamos que \bar{V} también es de clase C^1 , ya que las derivadas parciales de $F(x, y) = F(x, y)$ y $G(x, y) = -G(x, y)$ existen y son continuas en todo punto del plano. Por otro lado, tenemos que \bar{V} cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann ([33]) como se muestra a continuación

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{G}}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial (-G)}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

y

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = \frac{\partial (-G)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = -\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) = 0.$$

Luego \forall es analítica en C .

Si consideramos $z = re^{i\theta}$, se obtiene su diferencial $dz = ire^{i\theta}d\theta$ y aplicando la fórmula integral de Cauchy a V en cualquier $w \in \mathbb{C}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \overline{V}(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{V(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{V(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-w} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{V(re^{i\theta})}{1 - we^{-i\theta}} d\theta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $r \rightarrow \infty$, ya que en este caso $V(re^{i\theta}) \rightarrow 0$ (por hipótesis), luego $V(re^{i\theta}) \rightarrow 0$. Por lo que $\overline{V}(w) = 0$, para todo $w \in \mathbb{C}$. Pero, $\overline{V}(w)$ es el conjugado de $V(w)$, para todo $w \in \mathbb{C}$. Por lo tanto $V(w) = 0$, para todo $w \in \mathbb{C}$. Y lo anterior implica que V es idénticamente cero.

Segunda demostración Mediante la fórmula de Green ([32]).

Se considera la siguiente versión de la fórmula de Green.

$$(1.5) \quad \int_D \phi \Delta \psi = - \int_D \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \phi + \int_{\partial D} \phi \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{N},$$

donde \vec{N} es el vector normal a la frontera ∂D de la región D .

Sea V un campo vectorial definido en todo el plano con divergencia y rotacional igual a cero. Como $\text{rot} V = 0$ y V está definido en todo \mathbb{R}^2 , existe un campo escalar ψ tal que $V = \vec{\nabla} \psi$ (campo gradiente). Por otra parte $0 = \text{div} V = \text{div}(\vec{\nabla} \psi) = \Delta \psi$ (Laplaciano). Si consideramos (1.5) y $\psi = \phi$, entonces

$$\begin{aligned} \int_D \psi \Delta \psi &= \int_D \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi + \int_{\partial D} \psi \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{N} \\ 0 &= \int_D \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi + \int_{\partial D} \psi \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{N} \\ \int_D \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \psi &= - \int_{\partial D} \psi \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{N} \\ \int_D \|\vec{V}\|^2 &= - \int_{\partial D} \psi \vec{V} \cdot \vec{N} \end{aligned}$$

Si ∂D es una circunferencia de radio infinito, entonces por hipótesis $V = 0$. Luego

$$\int_{\partial D} \psi \vec{V} \cdot \vec{N} = 0,$$

y por lo tanto se tienen las equivalencias siguientes:

$$\begin{aligned} \int_D \|\vec{V}\|^2 &= 0 \\ \|\vec{V}\|^2 &= 0 \\ \vec{V} &= 0. \end{aligned}$$

Con lo cual queda demostrado el lema 1.

Q

1.3. Campo de velocidades generado por $N = 1$ vórtice

Es turno de analizar el caso en el cual se tiene un único vórtice con vorticidad $\Gamma \in \mathbb{R}$. Y comenzaremos demostrando el teorema siguiente.

Teorema 1. *Existe un único campo vectorial V definido en el plano y que cumple con las EDP's (1.4) y que toma el valor de cero en el infinito.*

Demostración. Mostremos la unicidad del campo vectorial.

Sin pérdida de generalidad, consideramos $\Gamma = 1$ y el vórtice ubicado en el origen, es decir, $P_o = (0, 0)$. Supongamos V_1 y V_2 sean dos campos que satisfacen (1.4) y valen cero en el infinito. Definimos $V := V_1 - V_2$. Si hacemos uso de la linealidad de la divergencia y el rotacional, entonces se obtienen los dos resultados siguientes

$$\operatorname{div} V = \operatorname{div} (V_1 - V_2) = \operatorname{div} V_1 - \operatorname{div} V_2 = 0$$

$$\operatorname{rot} V = \operatorname{rot} (V_1 - V_2) = \operatorname{rot} V_1 - \operatorname{rot} V_2 = \delta_{P_o} - \delta_{P_o} = 0,$$

esto es válido en cualquier punto en \mathbb{R}^2 . Así, V definido como la diferencia de los campos, cumple con las hipótesis del lema 1, por lo que $V = 0$, y es equivalente a $V_1 - V_2 = 0$, ó bien, $V_1 = V_2$. Lo cual implica la unicidad del campo.

Ahora mostremos la existencia del campo vectorial. Se afirma que el campo en cuestión es

$$V = R \cdot \Gamma \frac{\overrightarrow{PM}^\perp}{PM^2},$$

donde $P, M \in \mathbb{R}^2$, $\Gamma \in \mathbb{R}$. P es un punto en donde se localiza el vórtice, M es otro punto distinto de P en donde se ubica una partícula (móvil) sometida al campo generado por el vórtice, Γ la vorticidad constante, PM^2 es el cuadrado de la norma de \overrightarrow{PM} y R es la transformación lineal rotación de ángulo igual a 90° en sentido trigonométrico positivo. Para fines prácticos, reescribimos al campo vectorial anterior como sigue:

$$(1.6) \quad V(r, \theta) = 0 \cdot \vec{e}_r(\theta) + \frac{1}{2\pi r} e_{-\theta}(\theta) + 0 \cdot \vec{e}_z(\theta),$$

donde \vec{e}_r y \vec{e}_θ son las componentes radial y tangencial al campo V , mientras que $\vec{e}_z(\theta)$ es la componente ortogonal al plano.

Se mostrará que V cumple con el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (1.4) para todo valor de r .

Primero verificamos el caso $r = 0$. Para esto es necesario utilizar la divergencia y rotacional en coordenadas cilíndricas. Entonces tenemos que

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_r - \frac{\partial}{\partial \theta} V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r(0) - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{2\pi r} = 0,$$

y

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r V_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{1}{2\pi r} - \frac{\partial}{\partial \theta} (0) = 0.$$

Ahora, justificamos el caso $r = 0$. Es necesario considerar a γ una circunferencia de radio r y centro el punto $P_o = (0, 0)$. Además, con \vec{N} y \vec{T} los vectores normal y tangente a γ , podemos escribir $\vec{N} = \lambda \vec{e}_r$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Y en este caso como $P \in \operatorname{Int}(\gamma)$, directamente se obtiene que $\mathbf{V} \cdot \vec{N} = \frac{1}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = 0$, por la ortogonalidad de los vectores. Así,

$$0 = \int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \vec{N} = \int_{\operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{div} \mathbf{V},$$

por lo que $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ en P_o , o bien, cuando $r = 0$.

Sólo resta ver que pasa con el rotacional del campo \mathbf{V} en el punto $P_o = (0, 0)$. Se sabe que \vec{T} es tangente a γ , por lo que

$$\vec{T} = \frac{\gamma'(\theta)}{|\gamma'(\theta)|} = \vec{e}_\theta,$$

o bien

$$\gamma'(\theta) = |\gamma'(\theta)| \vec{e}_\theta,$$

pero

$$\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Derivando respecto de θ a la expresión anterior se obtiene

$$\gamma'(\theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta),$$

y más aún

$$|\gamma'(\theta)| = r.$$

Haciendo uso el teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \int_{\operatorname{Int}(\gamma)} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \vec{T} &= \int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \vec{T} = \int_0^{2\pi} \mathbf{V}(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot |\gamma'(\theta)| \vec{e}_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{e}_\theta \cdot r \vec{e}_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1. \end{aligned}$$

De igual manera, por el teorema de Stokes y el teorema del valor medio para integrales dobles ([32]), y considerando a γ como la circunferencia de centro P_o y radio r , se tienen las igualdades:

$$\int_{\text{Int}(\gamma)} \mathbf{V} \cdot \vec{\mathbf{T}} ds = \int_{\text{Int}(\gamma)} (\text{rotV}) ds = (\text{rotV})_{P_r} \cdot \pi r^2,$$

con P_r algún punto en el interior de γ , y sin olvidar que el rotV es considerado un escalar (ya que siempre es ortogonal al plano). Entonces podemos escribir lo anterior como:

$$(\text{rotV})_{P_r} = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \vec{\mathbf{T}} ds.$$

Además, si $r \rightarrow 0$, entonces $P_r \rightarrow P_o$ y resulta que

$$(\text{rotV})_{P_o} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \vec{\mathbf{T}} ds.$$

Así, la dirección de $(\text{rotV})_{P_o}$, es tal que la circulación alrededor de la frontera de un disco perpendicular a $(\text{rotV})_{P_o}$ tendrá su valor máximo como en el disco que se reduce a un punto. Anteriormente se obtuvo que

$$\int_{\text{Int}(\gamma)} \text{rotV} = \int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \vec{\mathbf{T}} = 1,$$

y también se sabe que

$$\int_{\text{Int}(\gamma)} \delta_{P_o} = 1.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\text{Int}(\gamma)} \text{rotV} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \vec{\mathbf{T}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\text{Int}(\gamma)} \delta_{P_o} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} = \infty. \end{aligned}$$

Esto último implica que el rotV y la distribución de Dirac en el punto P_o toman el mismo valor promedio en una vecindad de P_o . Así, podemos decir que

$$\text{rotV} = \delta_{P_o},$$

para todo $P \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, el campo vectorial \mathbf{V} cumple con todas las condiciones del teorema.

Observemos que todo lo anterior se mostró con γ una circunferencia de centro P_o y radio r . Resta ver la independencia de la elección de la curva. Es decir, que $\int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \vec{\mathbf{N}} = 0$ y $\int_{\gamma} \mathbf{V} \cdot \vec{\mathbf{T}} = 1$ no dependen de la elección de dicha curva cerrada γ . Sea γ una curva cerrada sin puntos dobles tal que $P_o \in \text{Int}(\gamma)$ y consideremos γ_1 la circunferencia mencionada anteriormente y tal como se muestra en la figura (1.5). Consideremos al conjunto A como la región entre las curvas γ_1 y γ , con

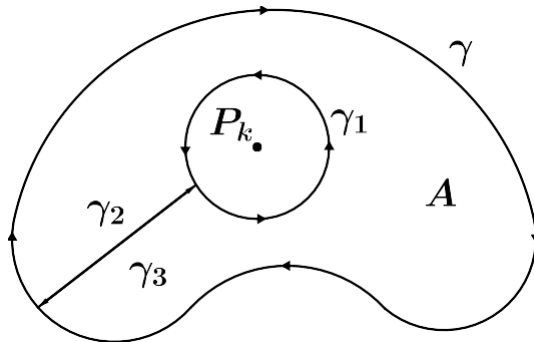


Figura 1.5

esto A no es un conjunto simplemente conexo. Ya se mostró que en regiones como A se tiene que $\text{div}V = 0$ y si $\tilde{\gamma} = \gamma^+ \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^+ \cup \gamma_3^-$, entonces

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_A \text{div}V = \int_{\tilde{\gamma}} V \cdot \vec{N} = \int_{\gamma^+ \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^+ \cup \gamma_3^-} V \cdot \vec{N} = \\
 &= \int_{\gamma^+} V \cdot \vec{N} + \int_{\gamma_1^-} V \cdot \vec{N} + \int_{\gamma_2^+} V \cdot \vec{N} + \int_{\gamma_3^-} V \cdot \vec{N} = \\
 &= \int_{\gamma^+} V \cdot \vec{N} - \int_{\gamma_1^+} V \cdot \vec{N} + \int_{\gamma_2^+} V \cdot \vec{N} - \int_{\gamma_2^+} V \cdot \vec{N} = \\
 &= \int_{\gamma^+} V \cdot \vec{N} - \int_{\gamma_1^+} V \cdot \vec{N}.
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\int_{\gamma^+} V \cdot \vec{N} = \int_{\gamma_1^+} V \cdot \vec{N} = 0.$$

De manera similar, en regiones como A se tiene que $\text{rot}V = 0$.

Luego

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_A \text{rot}V = \int_{\tilde{\gamma}} V \cdot \vec{T} = \int_{\gamma^+ \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^+ \cup \gamma_3^-} V \cdot \vec{T} \\
 &= \int_{\gamma^+} V \cdot \vec{T} + \int_{\gamma_1^-} V \cdot \vec{T} + \int_{\gamma_2^+} V \cdot \vec{T} + \int_{\gamma_3^-} V \cdot \vec{T} \\
 &= \int_{\gamma^+} V \cdot \vec{T} - \int_{\gamma_1^+} V \cdot \vec{T} + \int_{\gamma_2^+} V \cdot \vec{T} - \int_{\gamma_2^+} V \cdot \vec{T} \\
 &= \int_{\gamma^+} V \cdot \vec{T} - \int_{\gamma_1^+} V \cdot \vec{T}.
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_{\gamma^+} V \cdot \vec{T} = \int_{\gamma_1^+} V \cdot \vec{T} = 1.$$

Por tanto se tiene la independencia en la elección de la curva y así queda totalmente demostrado el teorema 1. Q

1.4. Campo de velocidades generado por $N \geq 2$ vórtices

Generalizamos la sección anterior, es decir, se trata de un problema de existencia y unicidad para el campo de velocidades pero ahora generado por N vórtices fijos y de vorticidades constantes, tal y como se enuncia en el teorema siguiente.

Teorema 2. Sean $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{R}^2$ y sean $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \in \mathbb{R}$. Existe un único campo vectorial del plano que vale cero en el infinito y satisface las siguientes condiciones:

$$(1.8) \quad \begin{cases} \square \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \\ \square \operatorname{rot} \mathbf{V} = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta_{P_k}. \end{cases}$$

Demostración. Mostremos la unicidad del campo vectorial de manera análoga como se realizó en el teorema 1.

Sean \mathbf{V}_1 y \mathbf{V}_2 dos campos que satisfacen el sistema (1.8) y valen cero en el infinito. Definimos $\mathbf{V} := \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2$, el cual también es un campo vectorial. Entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{V} &= \operatorname{div} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) = \operatorname{div} \mathbf{V}_1 - \operatorname{div} \mathbf{V}_2 = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{V} &= \operatorname{rot} (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta_{P_k} - \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta_{P_k} = 0, \end{aligned}$$

y esto es válido en cualquier punto en \mathbb{R}^2 . Así, \mathbf{V} definido como la diferencia de los campos, cumple con las hipótesis del lema 1, por lo que $\mathbf{V} = 0$. Esto pasa si y sólo si $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0$, ó bien, $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2$. Lo cual implica la unicidad del campo.

Ahora justificamos la existencia. Se afirma que el campo que satisface el sistema (1.8) es

$$\mathbf{V} = R \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{|P_k - M|^2} \vec{P_k M},$$

con $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{R}^2$ las posiciones de los vórtices, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \in \mathbb{R}$ las vorticidades constantes, $M \in \mathbb{R}^2$ es la posición de una partícula sometida al campo, $|P_k - M|^2$ es la norma al cuadrado de $\vec{P_k M}$ y R la transformación

lineal rotación por un ángulo de 90° en sentido trigonométrico positivo.

Por el teorema 1, para cada $P_k \in \{P_1, \dots, P_N\}$ existe un único campo vectorial V_k de la forma

$$V_k = R \Gamma_k \frac{\overrightarrow{P_k M}}{P_k M^2}.$$

El campo V_k está definido en el plano para todo $k \in \{1, \dots, N\}$, vale cero en el infinito y satisface su respectivo sistema:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V_k &= 0 \\ (\operatorname{rot} V_k)_{P_k} &= \Gamma_k \delta_{P_k}, \end{aligned}$$

para cada $k \in 1, \dots, N$. Con esto, se observa que $V = \sum_{k=1}^N V_k$.

La divergencia del campo V en cualquier punto de \mathbb{R}^2 es

$$\operatorname{div} V = \operatorname{div} \sum_{k=1}^N V_k = \sum_{k=1}^N \operatorname{div} V_k = 0.$$

Y para el rotacional, en cada punto $P_k \in \{P_1, \dots, P_N\}$ tenemos que

$(\operatorname{rot} V_k)_{P_k} = \Gamma_k \delta_{P_k}$ y $V = \sum_{k=1}^N V_k$, entonces

$$\operatorname{rot} V = \operatorname{rot} \sum_{k=1}^N V_k = \sum_{k=1}^N \operatorname{rot} V_k = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta_{P_k}.$$

Así, el teorema 2 queda demostrado.

Q

Capítulo 2

Vórtices y soluciones de las ecuaciones de Euler

El movimiento de un fluido sin viscosidad es solución de las ecuaciones diferenciales parciales de Euler, un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes, que no se estudian aquí. Se puede mostrar que: si el campo de velocidades de un fluido plano incompresible es de la forma anterior (generado por N vórtices) en algún instante t , entonces permanece de esta forma en cualquier instante, con el mismo valor de las vorticidades Γ_k .

En otros términos, los vórtices $P_k(t)$ se mueven a lo largo del tiempo, y su vorticidad Γ_k sigue constante. En este caso, no hay necesidad de resolver ecuaciones diferenciales parciales tan complejas como las de Euler. Basta estudiar un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, llamadas ecuaciones de Helmholtz, cuyas soluciones son los movimientos de los vórtices. Conocer la posición de los vórtices en cada instante nos permitirá deducir la expresión del campo de velocidades asociado, mediante las expresiones de la sección anterior.

En un caso más general, las ecuaciones de Helmholtz tienen la expresión siguiente:

$$P'_k = R \sum_{\substack{l \in \{1, \dots, N\} \\ l \neq k}} \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l P_k}}{2P \dot{P}}$$

donde R es la rotación vectorial de ángulo 90° . Las dos últimas partes de este trabajo están directamente relacionadas con el estudio de estas ecuaciones. En la segunda parte, estudiamos casos particulares donde todos los vórtices son fijos, excepto el punto M , lo que representa una aproximación de la realidad. En la tercera parte, estudiamos los casos particulares $N = 2, 3$ de las ecuaciones anteriores.

2.1. Una partícula y N vórtices fijos

En el capítulo anterior se mostró la existencia y unicidad de un campo de velocidades que satisface un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Ahora, se analizará el movimiento de una partícula bajo la

acción de dicho campo. La ecuación de Helmholtz

$$M'(t) = R \sum_{k=1}^N \frac{\vec{P}_k M}{PM^2},$$

donde R es la rotación vectorial de ángulo 90° , nos ayuda a describir el movimiento de una partícula ubicada en el punto $M(t)$ del plano en algún instante de tiempo t , cuando se tiene que el campo de velocidades es generado por $N \geq 1$ vórtices fijos en el plano ubicados en $P_1, \dots, P_N \in \mathbb{R}^2$ y de vorticidades $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N \in \mathbb{R}$ constantes.

En particular, vamos a mostrar que la energía cinética, logaritmo de una función $H(M)$ que se estudiará, se conserva a lo largo del tiempo. Esto nos permitirá conocer la forma de todas las posibles trayectorias.

2.2. Conservación de la energía cinética

Como primer objetivo de esta sección se hallarán $\vec{\nabla}(PM^2)$ y $\vec{\nabla} \ln(PM)$, los cuales serán de gran ayuda en la demostración de próximos resultados.

Consideramos P un punto fijo en el plano y M un punto móvil del plano distinto de P . Sea PM^2 la función cuadrado de la distancia entre los puntos P y M . Buscamos al vector $\vec{\nabla}(PM^2)$ en un punto M_o del plano tal que

$$\vec{PM}^2 = \vec{PM}_o^2 + \vec{\nabla}(PM^2) \cdot \vec{M_oM} + R(M)$$

con $\lim_{M \rightarrow M_o} \frac{R(M)}{M_oM} = 0$. Consideramos $PM^2 = \vec{PM} \cdot \vec{PM} = \vec{PM}^2$ el producto escalar. Con todo lo anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{PM}^2 - \vec{PM}_o^2 &= \vec{PM} - \vec{PM}_o \cdot \vec{PM} + \vec{PM}_o \\ &= \vec{M_oM} \cdot \vec{PM} + \vec{PM}_o \\ &= \vec{M_oM} \cdot \vec{PM}_o + \vec{M_oM} + \vec{PM}_o \\ &= 2\vec{PM}_o \cdot \vec{M_oM} + \vec{M_oM}^2. \end{aligned}$$

Lo cual es la expansión en serie de Taylor de la función PM^2 ó \vec{PM}^2 :

$$\overrightarrow{PM}^2 = \overrightarrow{PM_o}^2 + 2\overrightarrow{PM_o} \cdot \overrightarrow{M_oM} + \overrightarrow{M_oM}^2.$$

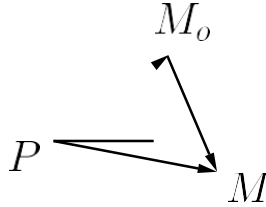


Figura 2.1

Por otro lado $d \frac{1}{PM^2} \Big|_{M_0} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 2 \overrightarrow{PM_0} \cdot \overrightarrow{M_0 M}$, con $\frac{R(M)}{MM_0} = \frac{M_0 M^2}{M_0 M} = M_0 M \rightarrow 0$, cuando $M \rightarrow M_0$. Por lo que

$$(2.1) \quad \overrightarrow{\nabla} (PM^2) \Big|_{M_0} = 2 \overrightarrow{PM_0}.$$

Ahora buscamos la expresión correspondiente a $\overrightarrow{\nabla} \ln(PM)$. Sean $P \in \mathbb{R}^2$ un punto fijo y una función $F_1 : \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \rightarrow (0, \infty)$, definida como

$$F_1(M) = PM^2.$$

Además, por (2.1) podemos escribir

$$(2.2) \quad (dF_1)_M \cdot \delta M = 2 \overrightarrow{PM} \cdot \delta M.$$

Por otro lado, consideremos a la función $F_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F_2(x) = \ln(x).$$

Y además se sabe que

$$(dF_2(x))_{x_0} \delta x = \frac{\delta x}{x_0}.$$

Por último, sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}$, la composición $f = \frac{1}{2} F_2 \circ F_1$. Así, podemos escribir $f(M) = \frac{1}{2} \ln(PM^2)$, y por regla de la cadena

$$\begin{aligned} (df)_M \cdot \delta M &= \frac{1}{2} (d(F_2 \circ F_1))_M \cdot \delta M = \frac{1}{2} (dF_2)_{F_1(M)} (dF_1)_M \cdot \delta M \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{F_1(M)} \overrightarrow{PM} \cdot \delta M = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^2} \cdot \delta M. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(2.3) \quad \overrightarrow{\nabla} (\ln(PM)) = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^2}.$$

Lema 2. Sean $M(t)$ un punto móvil y $H(M)$ un campo escalar. Suponga que $M'(t) = R \vec{\nabla}(H(M(t)))$, entonces $H(M)$ es constante.

Demostración. Sea $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $M'(t) = R \vec{\nabla}(H(M(t)))$. Observese que $(dM)_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ y

$$(dM)_t \delta t = M'(t) \delta t = \delta t M'(t).$$

Sea $H : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable tal que $(dH)_x : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ y

$$(dH)_x \vec{\delta x} = \vec{\nabla} H \cdot \vec{\delta x}.$$

Definimos $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = H \circ M$, la cual es diferenciable con $(dF)_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(dF)_t = F'(t).$$

Por regla de la cadena tenemos que

$$(dF)_t \delta t = (d(H \circ M))_t \delta t = (dH)_{M(t)} \cdot (dM)_t \delta t = \vec{\nabla} H_{M(t)} \cdot M'(t) \delta t.$$

Entonces podemos escribir

$$F'(t) = \vec{\nabla} H_{M(t)} \cdot M'(t).$$

Pero por hipótesis $M'(t) = R \vec{\nabla}(H(M(t)))$, luego

$$F'(t) = \vec{\nabla} H_{M(t)} \cdot R \vec{\nabla}(H(M(t))) = 0.$$

Por lo tanto $F(t) = (H \circ M)(t)$ es constante. Q

Teorema 3. $H(M)$ es constante a lo largo del movimiento, con

$$H(M) = \prod_{k=1}^N P_k M^{\Gamma_k}.$$

Demostración. La demostración de este teorema es una consecuencia del lema 2. Aún así mostraremos las expresiones que hacen posible la veracidad de este teorema. Primero obtenemos el logaritmo de la función H

$$\ln(H(M)) = \ln \prod_{k=1}^N P_k M^{\Gamma_k} = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln(P_k M).$$

Ahora, usando la ecuación (2.3) se obtiene el gradiente

$$\vec{\nabla} \ln(H(M)) = \vec{\nabla} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln(P_k M) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \vec{\nabla} \ln(P_k M) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \frac{\vec{P}_k \vec{M}}{P_k M^2}.$$

$k=1$

$k=1$

$k=1$

Observamos que $\vec{\nabla} \ln(H(M))$ es ortogonal al campo

$$M(t) = R \sum_{k=1}^N \frac{\vec{P}_k M}{P M^2} \cdot$$

Por el lema 2 se concluye la demostración de este teorema. Q

A la función H definida en el teorema precedente se conoce como la exponencial de la energía cinética y es de gran importancia para determinar el movimiento de una partícula tal como se muestra en las siguientes secciones.

2.3. Trayectorias para $N = 1$ vórtice fijo

Determinaremos el movimiento de una partícula sometida al campo de velocidades generado por un vórtice de vorticidad $\Gamma \neq 0$ constante.

Por el teorema 3 tenemos que $H(M) = P M^\Gamma$ es constante, es decir, existe $c > 0$ tal que $P M^\Gamma = c$, ó bien, $P M = c^{\frac{1}{\Gamma}} = c_o$. Así, $P M = c_o$ describe a todos los puntos M que equidistan de P en una cantidad c_o , es decir, los puntos M se mueven en circunferencias de centro P y radio c_o .

Por otra parte $P M(t) = c_o > 0$, para todo instante t . Esto es equivalente a $\frac{P M(t)}{c_o} = 1$, si y sólo si $\frac{M(t)-P}{c_o} = (\cos(\theta(t)), \text{sen}(\theta(t)))$.

Así,

$$M(t) = c_o (\cos(\theta(t)), \text{sen}(\theta(t))) + P,$$

lo cual es una parametrización de la circunferencia.

Falta encontrar $\theta(t)$ tal que cumpla con $M'(t) = R \frac{\vec{P M}(t)}{P M^2(t)}$. Derivando, respecto a t , a la parametrización anterior, se obtiene

$$(2.4a) \quad M'(t) = c_o (-\text{sen}(\theta(t))\theta'(t), \cos(\theta(t))\theta'(t)).$$

Por otro lado

$$M'(t) = R \frac{\vec{P M}(t)}{\Gamma P M^2(t)} = \frac{\Gamma}{c_o^2} R \frac{\vec{P M}(t)}{P M(t)} = \frac{\Gamma}{c_o^2} R (c_o(\cos(\theta(t)), \text{sen}(\theta(t))))$$

Así,

$$(2.4b) \quad M'(t) = \frac{\Gamma}{c_o} (-\text{sen}(\theta(t)), \cos(\theta(t))).$$

Igualando (2.4a) y (2.4b) se obtiene

$$-c_o \operatorname{sen}(\theta(t))\theta'(t) = -\frac{\Gamma}{c_o} \operatorname{sen}(\theta(t)),$$

y resulta que

$$\theta'(t) = \frac{\Gamma}{c_0^2}$$

por lo que la velocidad angular es constante. Ahora, si se integra respecto a t se obtiene

$$\theta(t) = \frac{\Gamma}{c_0^2}t + c_1.$$

Entonces la trayectoria que describe una partícula sometida a un campo de velocidades generado por un vórtice con vorticidad constante es una circunferencia y la cual se recorre en alguno de los dos sentidos siguientes:

1. si $\Gamma > 0$, entonces $\theta(t)$ gira en sentido positivo trigonométrico,
2. si $\Gamma < 0$, entonces $\theta(t)$ gira en sentido negativo trigonométrico.

2.4. Trayectorias para $N = 2$ vórtices fijos con vorticidades iguales

Se determinará el movimiento de una partícula bajo la acción de un campo generado por $N = 2$ vórtices fijos y de vorticidades $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2 \neq 0$ constantes. Esto lo podemos analizar mediante tres métodos:

1. Coordenadas polares.
2. Mapeo z^2 .
3. Puntos críticos de la función H .

Para los tres métodos es importante recordar que el flujo del fluido se considera bidimensional y, así, poder trabajar en \mathbb{C} , o bien, en el plano \mathbb{R}^2 , según el método con que se analice el problema.

Por el teorema 3 la función

$$H(M) = \sum_{k=1}^2 P_k M^{\Gamma_k},$$

es constante. Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $P_1 M^{\Gamma_1} P_2 M^{\Gamma_2} = c$, con $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ las ubicaciones de los vórtices y $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma \neq 0$. Por lo que

$$(2.5) \quad P_1 M \cdot P_2 M = R,$$

con $R = c^{\frac{1}{\Gamma}}$ una constante.

Sin pérdida de generalidad, podemos ubicar a P_1 y P_2 en los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$, o bien, en $z_1 = 1$ y $z_2 = i$ respectivamente, y con $M = z \in \mathbb{C}$, de tal manera que la ecuación (2.5) se puede reescribir como

$$(2.6) \quad |z^2 - 1| = R.$$

La justificación de esto último es: realizando una rotación, una traslación y una homotecia adecuadas del sistema de coordenadas xy , podemos considerar al eje X como la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2 , y al eje Y como la mediatriz del segmento $\overline{P_1P_2}$. Así, en el nuevo sistema XY de coordenadas se tienen los puntos $P_1(a, 0)$ y $P_2(-a, 0)$ tal como se muestra en la figura (2.2).

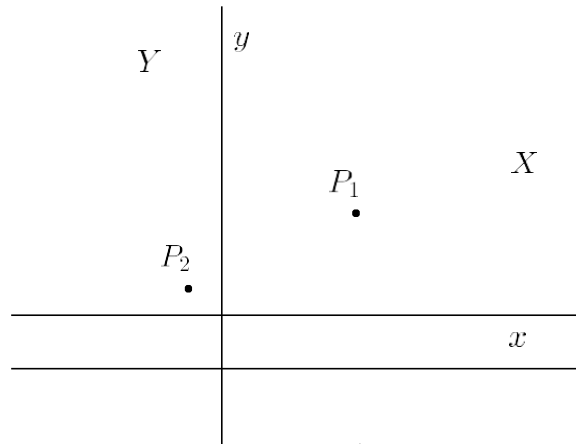


Figura 2.2

Dadas las coordenadas de P_1 y P_2 en el plano XY , tenemos

$$|z^2 - a^2| = r.$$

Pero si hacemos $\tilde{z} = z/a$, entonces $|a^2\tilde{z}^2 - a^2| = r$, o bien, $|\tilde{z}^2 - 1| = \frac{r}{a^2}$, ya que $a \neq 0$. Con esto tenemos otra vez la ecuación (2.6), por lo que la trayectoria de la partícula es el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| = R, R \geq 0\}.$$

2.4.1. Mediante coordenadas polares.

En este método sólo se mostrarán las funciones para poder hacer el trazo de las trayectorias de las partículas sometidas al campo generado por $N = 2$ vórtices fijos.

De las ecuaciones (2.5) y (2.6) podemos escribir $H(z) = z^2 - 1$, y el teorema 3 sabemos que H es constante. Entonces

$$|z^2 - 1| = h,$$

con h real no negativo.

$$z^2$$

Consideremos a todos los $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, con $r > 0$. Reescribimos a H

como sigue:

$$\begin{aligned}
 H(re^{i\theta}) &= \sqrt{(re^{i\theta})^2 - 1} = \sqrt{r^2 e^{2i\theta} - 1} = \sqrt{(r^2 e^{2i\theta} - 1)(r^2 e^{2i\theta} - 1)} \\
 &= \sqrt{(r^2 e^{2i\theta} - 1)(r^2 e^{-2i\theta} - 1)} = \sqrt{r^4 - r^2 e^{2i\theta} - r^2 e^{-2i\theta} + 1} \\
 &= \sqrt{r^4 - r^2(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 1} = \sqrt{r^4 - 2r^2 \cos(2\theta) + 1}
 \end{aligned}$$

Y como $H(re^{i\theta}) = h$, entonces

$$\sqrt{r^4 - 2r^2 \cos(2\theta) + 1} = h$$

$$r^4 - 2r^2 \cos(2\theta) = h^2 - 1$$

$$r^2 - 2 \cos(2\theta) = \frac{h^2 - 1}{r^2}$$

$$r^2 - 2 \cos(2\theta) = \frac{h^2 - 1}{r^2}$$

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1 - h^2}{r^2}$$

$$\cos(2\theta) = F_h(r),$$

$$\text{con } F_h(r) = \frac{1}{2} r^2 + \frac{1 - h^2}{r^2}.$$

Por otra parte, se sabe que la función

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

es una biyección con inversa \arccos . Y si consideramos que $0 \leq 2\theta \leq \pi$, obtenemos

$$\theta(r) = \frac{1}{2} \arccos(F_h(r)).$$

Una vez fijo el valor de $h \geq 0$, la función $\theta(r)$ nos otorga las variaciones de θ respecto a $r \in (0, \infty)$. Y de acuerdo a los valores que se le asigne a h , $F_h(r)$ adopta las formas siguientes:

1. Si $0 \leq h < 1$, entonces $F_h(r) = \sqrt{1 - h^2} \cosh \ln \frac{r^2}{1 - h^2}$.
2. Si $h = 1$, entonces $F_h(r) = \frac{1}{2} r^2$.
3. Si $1 < h$, entonces $F_h(r) = \sqrt{h^2 - 1} \sinh \ln \frac{r^2}{h^2 - 1}$.

2.4.2. Mediante el mapeo z^2 .

Sea $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con $\varphi(z) = z^2$. Por otra parte, sea C el conjunto de todas las circunferencias con centro $z_0 = 1$ y radio R , es decir,

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = R, R \geq 0\}.$$

Observamos que la imagen inversa de C bajo φ es:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(C) &= \{z \in \mathbb{C} : \varphi(z) \in C\} = \{z \in \mathbb{C} : z^2 \in C\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : |z^2 - 1| = R, R \geq 0\}, \end{aligned}$$

el cual es el conjunto que buscamos. Así, nos enfocamos en hallar la imagen inversa bajo la función φ de las circunferencias de centro $z_0 = 1$ y radio $R \geq 0$.

Dos propiedades de φ son:

1. $\varphi(z) = \varphi(-z)$.
2. $\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$.

El significado geométrico de estas dos propiedades son: reflexiones o simetrías respecto al polo o a los ejes. Esto nos ayuda a reducir el problema a un sector angular y respecto al centro $z_0 = 1$, y después obtener la gráfica completa.

Primer caso: $R=0$.

Este es el caso más sencillo de analizar, ya que

$$\varphi^{-1}(C) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 0\} = \{1, -1\},$$

y geoméricamente corresponde a los puntos $P_1(1, 0)$ y $P_2(-1, 0)$.

Segundo caso: $0 < R < 1$.

Definimos a los conjuntos C_1 y $\overline{C_1}$ como sigue:

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta}, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

y

Se observa que $\overline{C_1} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in C_1\}$ y, más aún, $\overline{C_1} = C_1 \cup C_1$.

Lema 3. $\varphi^{-1}(C_1) = \overline{\varphi^{-1}(C_1)}$

Demostración.

$$\begin{aligned} z \in \overline{\varphi^{-1}(C_1)} &\Leftrightarrow \varphi(z) \in \overline{C_1} \Leftrightarrow \overline{\varphi(z)} \in C_1 \Leftrightarrow \varphi(\bar{z}) \in C_1 \Leftrightarrow \bar{z} \in \varphi^{-1}(C_1) \\ &\Leftrightarrow z \in \overline{\varphi^{-1}(C_1)} \end{aligned} \quad \text{Q}$$

Una consecuencia inmediata de este lemma 3 es:

$$\varphi^{-1}(C) = \varphi^{-1}(C_1 \cup \overline{C_1}) = \varphi^{-1}(C_1) \cup \varphi^{-1}(\overline{C_1}) = \varphi^{-1}(C_1) \cup \overline{\varphi^{-1}(C_1)}.$$

Por lo tanto, para hallar $\varphi^{-1}(C)$ sólo basta con encontrar $\varphi^{-1}(C_1)$ y de inmediato se tendrá $\overline{\varphi^{-1}(C_1)}$. Entonces comenzamos con la búsqueda de $\varphi^{-1}(C_1)$.

Definimos a los conjuntos B y $-B$ como sigue:

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 0, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \varphi(z) \in C_1 \right\}$$

y

$$-B = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 0, \pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{4}, \varphi(z) \in C_1 \right\}.$$

Ahora mostremos que la definición de $-B$ es consistente.

Demostración. Recordemos que $\varphi(z) = \varphi(-z)$ y que $Arg(-z) = Arg(-1) + Arg(z) = \pi + Arg(z)$. Entonces

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} : -z \in B\} &= \left\{ z \in \mathbb{C} : Arg(-z) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ módulo}(2\pi), \varphi(-z) \in C_1 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \pi + Arg(z) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ módulo}(2\pi), \varphi(z) \in C_1 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : Arg(z) \in \left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \text{ módulo}(2\pi), \varphi(z) \in C_1 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : Arg(z) \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right] \text{ módulo}(2\pi), \varphi(z) \in C_1 \right\} \\ &= -B \quad \text{Q} \end{aligned}$$

Con lo anterior podemos decir que $-B$ es la reflexión de B respecto al polo (origen).

Por otro lado, hay que demostrar que

$$(2.7) \quad \varphi^{-1}(C_1) = B \cup (-B)$$

Demostración. En efecto, por construcción tanto B como $-B$ son subconjuntos de $\varphi^{-1}(C_1)$ y por lo tanto $B \cup (-B) \subseteq \varphi^{-1}(C_1)$. Para verificar que $\varphi^{-1}(C_1) \subseteq B \cup (-B)$, es suficiente mostrar que para toda $z \in \varphi^{-1}(C_1)$ se cumple $Arg(z) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Sea $z \in \varphi^{-1}(C)$. Podemos escribir $\varphi(z) = R e^{i\theta} \in C_1$, es decir, $R \geq 0$

$$\text{y } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Si } z = \rho e^{i\alpha}, \text{ entonces } \alpha \in [0, 2\pi] \text{ y } \rho \geq 0. \text{ Pero } \varphi(z) = \rho^{2\alpha} e^{2i\alpha} = R e^{i\theta}, \text{ esto implica que}$$

$\rho^{2\alpha} = R$ y $e^{2i\alpha} = e^{i\theta}$, ó bien $e^{i(2\alpha - \theta)} = 1$, por lo que $2\alpha - \theta = 2k\pi$, equivalentemente $\theta = 2\alpha - 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, lo que implica que $0 \leq 2\alpha - 2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$, y esto pasa si y sólo si $k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$, para toda $k \in \mathbb{Z}$. Pero $\alpha \in [0, 2\pi]$, luego $k = 0$ ó $k = 1$, y por lo tanto $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ó bien, $\alpha \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$, y así, $Arg(z) = \alpha$. Con esto se tiene

Demostración. Sean dos círculos concéntricos C y C' . Entonces $C \cap C' = \emptyset$ y luego $\varphi^{-1}(C) \cap \varphi^{-1}(C') = \varphi^{-1}(C \cap C') = \varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. **Q**

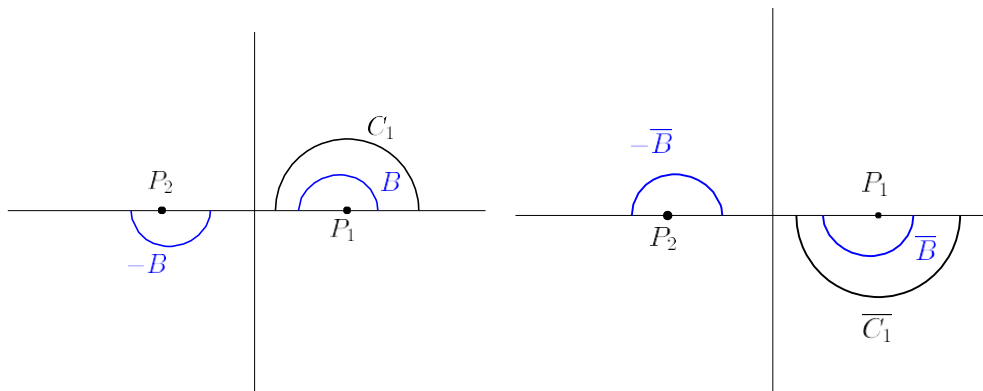


Figura 2.3

Se concluye, para el caso $0 < R < 1$, que las trayectorias de una partícula sometida a un sistema de dos vórtices son como se muestra en la figura (2.4).

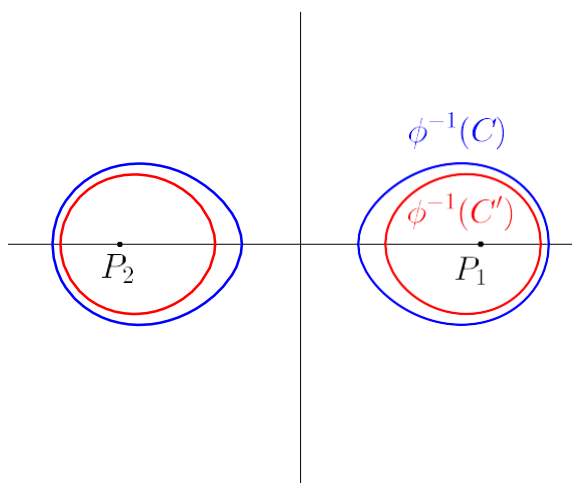


Figura 2.4

Tercer caso. $R = 1$

Todo lo que se mostró en el segundo caso es válido también aquí, excepto en el origen $(0, 0)$, ya que $(D\varphi(0, 0)) = 0$, y lo cual implica que $(D\varphi(x, y))$ no es invertible en el punto $(0, 0)$. Por lo que directamente se calculará la imagen inversa de

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}.$$

El conjunto Δ nos dará la dirección de la partícula cuando recorre la circunferencia C hasta aproximarse al origen.

Sea $z \in \varphi^{-1}(\Delta)$. Entonces $\varphi(z) \in \Delta$ es equivalente a $\operatorname{Re}(z^2) = 0$, o bien, si $z = \rho e^{-\frac{\pi}{2}i}$ tenemos la imagen inversa de Δ a las rectas $\theta = \frac{\pi}{4}$ y

$\theta = -\frac{\pi}{4}$ y las cuales dan la dirección de la partícula sobre la curva de nivel en el (0,0), tal como se muestran en las gráficas de la figura (2.5).

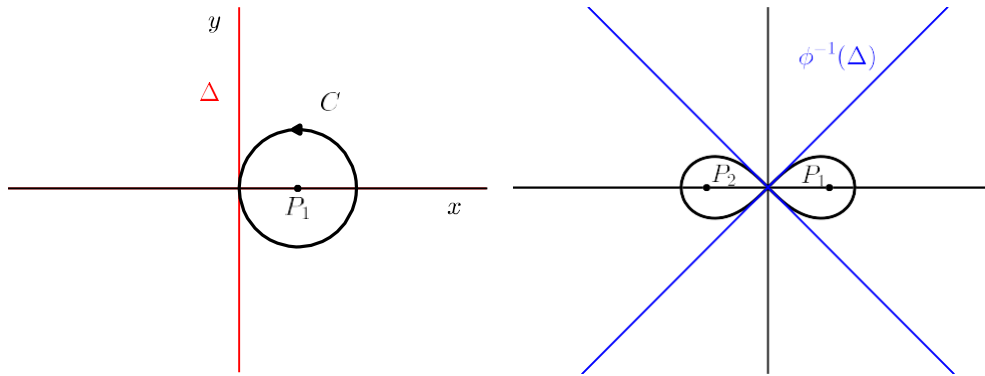


Figura 2.5

Cuarto caso. $R > 1$

Para este caso, como en el segundo, también se definen los conjuntos

$$C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = R, R \geq 0\},$$

$$C_1 = \{z \in C : z = re^{i\theta}, r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

$$\overline{C_1} = \{z \in C : z = re^{i\theta}, r \geq 0, 0 \leq -\theta \leq \pi\}.$$

Así como a los conjuntos que definen a la imagen inversa

$$B = \{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 0, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \varphi(z) \in C_1\}$$

$$-B = \{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 0, \pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}, \varphi(z) \in C_1\}.$$

Y un razonamiento análogo al segundo caso se tiene

$$\varphi^{-1}(C) = B \cup (-B) \cup \overline{B \cup (-B)}.$$

Con las respectivas gráficas para $\varphi^{-1}(C_1) = B \cup (-B)$ y $\varphi^{-1}(\overline{C_1}) = \overline{B \cup (-B)}$ en la figura (2.6).

Mediante los cuatro casos anteriores se puede describir el movimiento de una partícula sometida al campo de velocidades, cuando se tienen dos vórtices fijos y con vorticidades iguales y constantes. Así, se exponen las trayectorias en la gráfica de la figura (2.7).

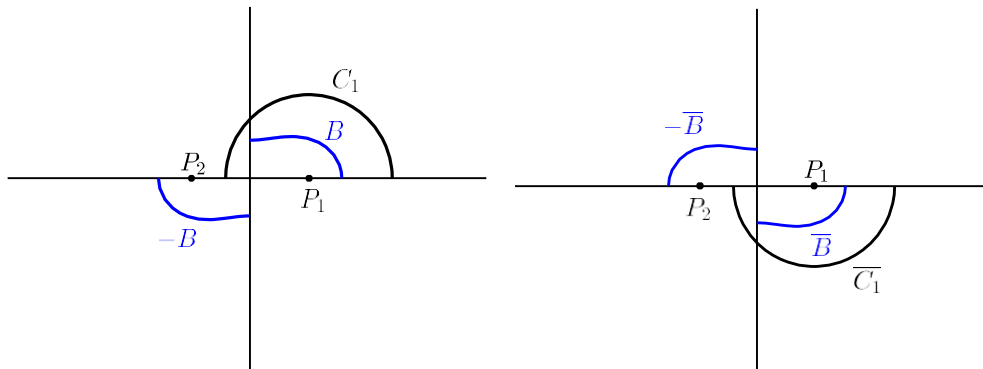


Figura 2.6

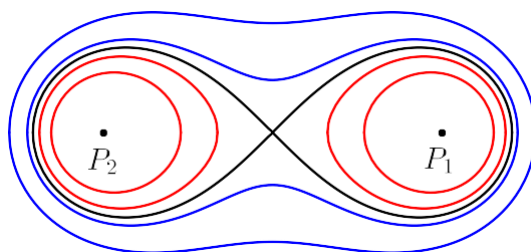


Figura 2.7

2.4.3. Mediante los puntos críticos de la energía.

Comenzamos mencionando dos teoremas importantes, el primero referente a los puntos críticos de una función y el segundo nos habla sobre las consecuencias topológicas de tener una curva cerrada simple del plano.

Lema 4. Si $U \subset \mathbb{R}^2$ es abierto y $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y $x_o \notin U$ es un extremo local, entonces $Df(x_o) = 0$; esto es, x_o es un punto crítico de f .

Demostración. Ver la demostración en ([32]). Q

Teorema 4. (Curva de Jordan). Sea C una curva simple cerrada de \mathbb{R}^2 . Entonces C separa a \mathbb{R}^2 en exactamente dos componentes W_1 y W_2 conexas y disjuntas. Cada uno de los conjuntos W_1 y W_2 tiene a C como su frontera, esto es, $C = \overline{W_1} \setminus W_2$.

Demostración. Ver demostración ([34]). Q

El teorema de la curva de Jordan nos permite hablar de un interior y un exterior a dicha curva, más aún, la componente llamada interior es acotada mientras que el exterior no lo es. A continuación se presentan algunas consecuencias del teorema de la curva de Jordan, que obviamente serán utilizados para resolver no sólo el caso $N = 2$ vórtices, sino también para el caso general cuando se tienen $N > 2$ vórtices fijos ubicados en los vértices de un polígono regular con vorticidades constantes e iguales.

Lema 5. *Sea γ una curva de nivel cerrada y sin puntos dobles. Entonces $\text{Int}(\gamma)$ es abierto.*

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de nivel cerrada y sin puntos dobles. Sabemos que $[a, b]$ es compacto en \mathbb{R} y γ es continua, entonces $\gamma([a, b])$ es compacto de \mathbb{R}^2 . En particular, $\gamma([a, b])$ es un cerrado de \mathbb{R}^2 , por lo que $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ es abierto de \mathbb{R}^2 . Por el teorema de la curva de Jordan tenemos que $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma = \text{Int}(\gamma) \cup \text{Ext}(\gamma)$, con $\text{Int}(\gamma)$ y $\text{Ext}(\gamma)$ partes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$. Así, $\text{Int}(\gamma)$ y $\text{Ext}(\gamma)$ son abiertos y cerrados de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, entonces $\text{Int}(\gamma)$ es abierto de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ y él cual a su vez es abierto de \mathbb{R}^2 . Por lo tanto $\text{Int}(\gamma) = \text{Int}(\gamma) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$ es abierto de \mathbb{R}^2 . De manera análoga se muestra que $\text{Ext}(\gamma)$ es abierto de \mathbb{R}^2 . \square

Lema 6. *Sea γ una curva de nivel cerrada y sin puntos dobles. Entonces $\text{Int}(\gamma) \cup \gamma$ es compacto.*

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de nivel cerrada y sin puntos dobles. Tenemos que $[a, b]$ es compacto en \mathbb{R} y γ es continua en $[a, b]$, entonces $\gamma([a, b])$ es compacto de \mathbb{R}^2 . Por lo que γ es cerrada y acotada.

Por otro lado, del lema 5, se tiene que $\text{Ext}(\gamma)$ es un abierto en \mathbb{R}^2 , lo que implica que $(\text{Ext}(\gamma))^c = \text{Int}(\gamma) \cup \gamma$ sea un cerrado de \mathbb{R}^2 . Además, por el teorema de la curva de Jordan, $\text{Int}(\gamma)$ es acotado y $\text{Ext}(\gamma)$ no lo es. Entonces $\text{Int}(\gamma) \cup \gamma$ es acotado en \mathbb{R}^2 . Así, $\text{Int}(\gamma) \cup \gamma$ es cerrado y acotado y por lo tanto compacto de \mathbb{R}^2 . \square

Teorema 5. *En \mathbb{R}^2 , sea F una función de clase C^1 y definida en $\text{Int}(\gamma)$, con γ una curva de nivel (de F) cerrada y sin punto doble. Entonces F tiene al menos un punto crítico en $\text{Int}(\gamma)$.*

Demostración. Consideremos a F y γ como se menciona en las hipótesis del teorema. Por el lema 6 $\text{Int}(\gamma) \cup \gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ es compacto, o bien, es cerrado y acotado. Por el teorema de valores extremos para F (que es de clase C^1 sobre $\text{Int}(\gamma) \cup \gamma$) existen $a, b \in \text{Int}(\gamma) \cup \gamma$ tales que $F(a) \leq F(x) \leq F(b)$, para toda $x \in \text{Int}(\gamma) \cup \gamma$. Por lo que a y b son mínimo y máximo locales, respectivamente, de F en $\text{Int}(\gamma) \cup \gamma$. Y se tienen los casos siguientes:

1. Si $a, b \in \gamma$.

Como γ es una curva de nivel, entonces F es constante en γ y

se tiene que $F(a) = F(b)$. Luego $F(a) = F(x) = F(b)$, para toda $x \in \text{Int}(\gamma) \cup \gamma$. Esto último implica que F es constante en $\text{Int}(\gamma) \cup \gamma$, más aún, $DF(x) = 0$, para toda $x \in \text{Int}(\gamma) \cup \gamma$. Por lo tanto todo valor de $\text{Int}(\gamma) \cup \gamma$ es punto crítico de F .

2. Si $a \in \text{Int}(\gamma)$ y $b \in \gamma$.

Como F alcanza su mínimo local en $a \in \text{Int}(\gamma)$ y $\text{Int}(\gamma)$ es abierto de \mathbb{R}^2 , entonces por el lema 4 se concluye que a es un punto crítico de F .

3. Si $b \in \text{Int}(\gamma)$ y $a \in \gamma$.

De manera análoga al caso anterior tenemos que F alcanza su máximo en $b \in \text{Int}(\gamma)$ y por lo tanto b es punto crítico de F .

4. Si $a, b \in \text{Int}(\gamma)$.

F alcanza su mínimo y máximo locales en $a, b \in \text{Int}(\gamma)$ y $\text{Int}(\gamma)$ es abierto de \mathbb{R}^2 . Luego, por el lema 4 a y b son puntos críticos de F .

Q

Regresando al problema central de esta sección, recordemos que se quiere determinar el movimiento de una partícula sometida a un campo de velocidades para $N = 2$ vórtices y $\Gamma_1 = \Gamma_2$ constantes.

Tenemos que $H(M) = (P_1M \cdot P_2M)^\Gamma$, con $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$, es constante. Consideramos a la composición de las funciones H y $\ln(x)$ como sigue:

$$\ln(H(M)) = \ln(P_1M \cdot P_2M)^\Gamma = \Gamma (\ln(P_1M) + \ln(P_2M)),$$

la cual es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$.

Lema 7. *La función H tiene como único punto crítico a M_o el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$.*

Demostración. Tanto H como $\ln(H)$ son funciones diferenciables en $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$ y además tienen el mismo punto crítico M . Para que M necesariamente sea un punto crítico de $\ln(H)$ basta tener que $\vec{\nabla} \ln(H) = \vec{0}$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \ln(H(M)) &= \Gamma \left(\vec{\nabla} \ln(P_1M) + \vec{\nabla} \ln(P_2M) \right) = \\ &= \Gamma \left(\frac{\overrightarrow{P_1M}}{P_1M^2} + \frac{\overrightarrow{P_2M}}{P_2M^2} \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

y como $\Gamma \neq 0$, entonces tenemos las siguientes equivalencias:

$$\frac{\overrightarrow{P_1M}}{P_1M^2} + \frac{\overrightarrow{P_2M}}{P_2M^2} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{P_1M}}{P_1M^2} &= -\frac{\overrightarrow{P_2M}}{P_2M^2} \\ \frac{\overrightarrow{P_1M}}{P_1M^2} &= -\frac{\overrightarrow{P_2M}}{P_2M^2} \\ \frac{P_1M}{P_1M^2} &= \frac{P_2M}{P_2M^2} \\ \frac{1}{P_1M} &= \frac{1}{P_2M} \\ P_1M &= P_2M = c, \end{aligned}$$

con $c \neq 0$ una constante. Por lo que

$$\frac{\overrightarrow{P_1M}}{P_1M^2} = -\frac{\overrightarrow{P_2M}}{P_2M^2} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{P_1M}}{c^2} = -\frac{\overrightarrow{P_2M}}{c^2} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1M} = -\overrightarrow{P_2M},$$

y esto ocurre si y sólo si M es el punto medio de $\overline{P_1P_2}$. Por lo que M_o es punto crítico de $\ln(H)$.

Recíprocamente, si M_o es el punto medio de $\overline{P_1P_2}$, es decir, $\overrightarrow{P_1M_o} = -\overrightarrow{P_2M_o}$ y $P_1M_o = P_2M_o$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{P_1M_o}{P_1M_o^2} + \frac{P_2M_o}{P_2M_o^2} &= \frac{1}{P_1M_o^2} \cdot \overrightarrow{P_1M_o} + \frac{1}{P_2M_o^2} \cdot \overrightarrow{P_2M_o} \\ &= \frac{1}{P_1M_o^2} \cdot \overrightarrow{P_1M_o} + \frac{1}{P_1M_o^2} \cdot \overrightarrow{P_2M_o} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto M_o es el único punto crítico de $\ln(H)$, y también lo es de H . Q

Lema 8. *Las curvas de nivel de H son acotadas.*

Demostración. Si $P_1M \rightarrow \infty$, ó $P_2M \rightarrow \infty$, entonces necesariamente $P_1M \cdot P_2M \rightarrow \infty$, pero esto es inconsistente con el hecho de que $P_1M \cdot P_2M$ sea constante. Así, se muestra que cada curva de nivel $P_1M \cdot P_2M = c$ es acotada. Q

Otras proposiciones importantes y necesarias para la dinámica de las partículas son los dos resultados siguientes.

Teorema 6. (Flow box). *Suponga que $\dot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. Si $p \in \mathbb{R}^2$ y $F(p) = \alpha$, entonces existen abiertos U, V en \mathbb{R}^2 con $p \in U$, $\alpha \in V$ un difeomorfismo $g : U \rightarrow V$ tal que la ecuación diferencial en las nuevas coordenadas, es decir, la ecuación diferencial*

$$\dot{y} = Dg(g^{-1}(y))f(g^{-1}(y))$$

está dado por $(\dot{y}_1, \dot{y}_2) = (1, 0)$.

Demostración. Ver la demostración en [31].

Q

Una consecuencia del teorema flow box, que se necesitará posteriormente, es el corolario siguiente.

Corolario 1. *Sea $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2, M_o\}$ la posición de una partícula en alguna curva de nivel de H . Entonces la curva no se detiene en M .*

Demostación. Sea $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2, M_o\}$. Entonces $\nabla H(M) = 0$, es decir, M es un punto regular. Por el teorema flow box existe una vecindad V de M tal que en cada curva de nivel la partícula se mueve en rectas paralelas y con rapidez constante. Así, todos los puntos de la curva que pasan por M y que están contenidos en V tienen la misma rapidez distinta de cero antes y después del punto M .

Razonando de la misma manera, M no puede ser un punto atractor. Supongamos que M es punto atractor y sea S una transversal en M . Por el teorema flow box existe una vecindad V de M tal que en cada punto de $S \cap V$ pasa una curva de nivel distinta y en rectas paralelas, lo cual contradice al hecho de tener una espiral (que intersecta infinitas veces a $S \cup V$) que converge a M . Q

Recordemos la definición de dos conjuntos de gran relevancia en los sistemas dinámicos.

Definición 2. *Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 y sea $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^r , donde $1 \leq r \leq \infty$. Por otro lado sea $\varphi(t) = \varphi(t, p) = \varphi_p(t)$ una curva integral que pasa por $p \in \Omega$. Definimos los conjuntos:*

$$\omega(p) = \{q \in \Omega : \exists \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow \infty \text{ y } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$$

y

$\alpha(p) = \{q \in \Omega : \exists \{t_n\} \text{ con } t_n \rightarrow -\infty \text{ y } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ cuando } n \rightarrow \infty\}$. A los conjuntos $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ se les conoce como ω -límite y α -límite respectivamente.

Teorema 7. *Sean $\dot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ y $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Supongamos que F admite una integral primera no constante en ningún abierto de Ω . Entonces F no tiene ningún ciclo límite.*

Demostación. Sea H una integral primera para el sistema $\dot{x} = F(x)$. Supongamos que existe un ciclo límite ψ tal que $H(\psi) = c$. Entonces existe $x \notin \psi$ tal que $\omega(x) = \psi$ y, más aún, $H(\varphi_t(x)) = c$. Por otro lado, sabemos que existe una vecindad V de x tal que para toda $y \in V$, $\omega(y) = \psi$. Lo cual implica que $H(\varphi_t(V)) = c$ y por lo tanto H es constante en el abierto V , lo cual es una contradicción ([27]). Q

Aplicando el teorema 7 en nuestro caso obtenemos el corolario siguiente.

Corolario 2. El campo vectorial

$$(2.8) \quad M'(t) = R \left[\frac{\overline{P_1 M(t)} \vec{M}(t)}{P_1 M(t)^2} + \frac{\overline{P_2 M(t)} \vec{M}(t)}{P_2 M(t)^2} \right]$$

no tiene ciclos límite.

Demostración. Se tienen todas las hipótesis del teorema 6, es decir, tenemos que $H(M) = P_1 M \cdot P_2 M$ es una integral primera del campo vectorial

$$M'(t) = R \left[\frac{\overline{P_1 M(t)} \vec{M}(t)}{P_1 M(t)^2} + \frac{\overline{P_2 M(t)} \vec{M}(t)}{P_2 M(t)^2} \right],$$

y además, H es no constante en ningún abierto de M distinto de M_o . Por lo tanto queda demostrado el corolario. \square

Ahora se hallarán las curvas de nivel de la función H mediante tres casos.

I. La curva pasa por M_o .

Definimos

$$\hat{\alpha} = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid P_1 M \cdot P_2 M = \frac{P_1 P_2}{2}\},$$

y observemos que $M_o \in \hat{\alpha}$.

Al inicio de esta sección (curvas de nivel para $N = 2$ vórtices fijos) se pudo escribir $H(z) = z^2 |1 - Y|$ con la ayuda de los lemas 14 y 15, los cuales se mostrarán más adelante, las trayectorias de una partícula en un fluido incompresible, vistas como un conjunto de 2 vórtices ubicados en $z = 1$ y $z = -1$ (que corresponden a P_1 y P_2) de vorticidades constantes y ambas iguales a 1, son las soluciones de la ecuación diferencial siguiente:

$$(2.9) \quad z' = i \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} \right],$$

o bien,

$$z' = \frac{2i\bar{z}}{z^2 - 1}.$$

Si consideramos a z en una vecindad del origen $(0, 0) = M_o$, es decir, si $z \approx 0$ entonces

$$(2.10) \quad z' \approx -2iz,$$

es la ecuación diferencial que describe la trayectoria de una partícula alrededor del origen (teorema de Hartman–Grobman ([27])), que podemos expresarlo como el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo siguiente:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Trivialmente la matriz de coeficientes tiene determinante -4 , con valores propios 2 y -2 y con vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente. Por lo que M_0 es un punto silla y, así, localmente la curva que pasa por M_0 tiene cuatro ramas las cuales quedan descritas por las rectas $y = x$ y $y = -x$, más aún, para la primera recta la partícula se aleja de M_0 ya que el valor propio es positivo y para la segunda recta la partícula se acerca a M_0 , como se muestra en la figura (2.8).

Otra manera de obtener el resultado anterior es: si z pertenece a una vncidad de M_0 , entonces de la ecuación (2.10) podemos escribir

$$\dot{z}^2 = 2z \cdot z' \approx -4iz \cdot z = -4i|z|^2 \in i\mathbb{R}.$$

Y más aún, se tiene $z^2 = ig(z)t + c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante, t una variable real y $g : \mathbb{C} \rightarrow (-\infty, 0]$ una función definida como $g(z) = -4|z|^2$. Así, geoméricamente z^2 es una familia de rectas verticales y, en particular, si consideramos $c = 0$ obtenemos al eje y y por lo tanto $ig(z)t$ (las dos raíces cuadradas de los imaginarios puros) son las rectas $y = -x$ y $y = x$, si $t \geq 0$ y $t < 0$, respectivamente.

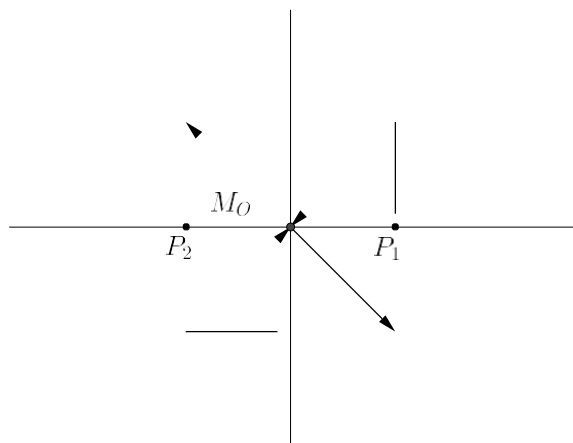


Figura 2.8

Para encontrar el resto de la curva $\hat{\alpha}$ es necesario enunciar y demostrar algunos resultados que nos serán de gran ayuda para esta tarea.

Lema 9. La curva $\hat{\alpha}$ no interseca a la mediatriz μ de $\overline{P_1P_2}$ en otro punto distinto a M_o

Demostración. Supongamos que existe M un punto distinto de M_o y de tal manera que M es la intersección entre la curva $\hat{\alpha}$ y la mediatriz μ de $\overline{P_1P_2}$, tal como se muestra en la figura (2.9).

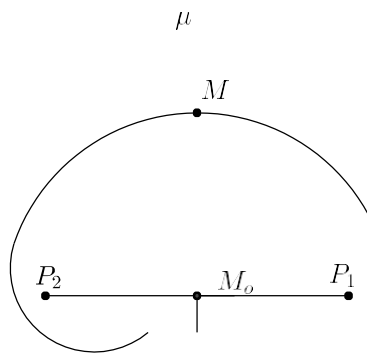


Figura 2.9

Como $M \in \hat{\alpha}$, entonces $P_1M \cdot P_2M = \frac{P_1P_2}{2} \cdot \frac{P_1P_2}{2}$ por definición de $\hat{\alpha}$.

Por otro lado, M pertenece a la mediatriz μ de P_1P_2 , con $M \neq M_o$, es decir, $P_1M = P_2M$ y $P_1M > P_1M_o$. Por lo que $P_1M \cdot P_2M > P_1M_o \cdot P_2M_o = \frac{P_1P_2}{2} \cdot \frac{P_1P_2}{2}$, y esto contradice al hecho de que M pertenezca a la curva $\hat{\alpha}$. Así, la curva $\hat{\alpha}$ sólo interseca a la mediatriz μ en M_o . \square

Lema 10. $\hat{\alpha}$ no converge o pasa por P_1 o P_2 .

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $P_1 \in \hat{\alpha}$. De la definición de $\hat{\alpha}$

$$\frac{P_1P_2}{2} \sum_2 = P_1P_1 \cdot P_2P_1 = 0.$$

Por lo que $P_1P_2 = 0$, lo cual implica que $P_1 = P_2$ y esto no puede ser posible. De manera similar si $P_2 \in \hat{\alpha}$, o en el caso de que la curva pase por ambos puntos.

Y para el caso en que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\alpha}(t) = P_1,$$

por la definición de $\hat{\alpha}$

$$P_1 \rightarrow P_2.$$

Lo cual es imposible. \square

Ahora es el momento adecuado para construir el resto de la curva $\hat{\alpha}$.

Lema 11. La curva $\hat{\alpha}$ es una *lemniscata*.

Demostración. Primero. Por el lema 8, todas las curvas de nivel son acotadas y por lo tanto no es posible tener una curva tal como se muestra en la figura (2.10).

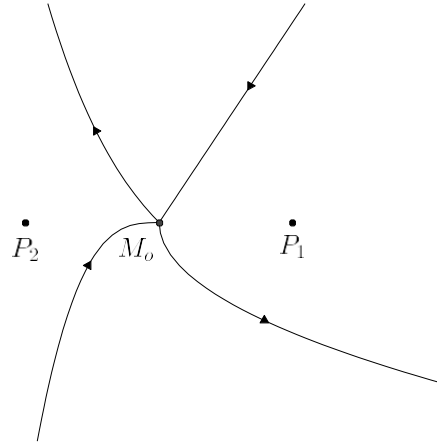


Figura 2.10

Segundo. Por el corolario 1, la curva no puede detenerse en un punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2, M_0\}$. Como en la figura (2.11).

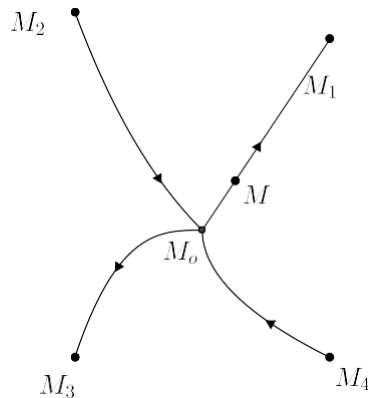


Figura 2.11

Tercero. Por el lema 10, $\hat{\alpha}$ no tiende o pasa por P_1 o P_2 . Como se muestra en la figura (2.12).

Cuarto. Por el corolario 2, $\hat{\alpha}$ no tiene un ciclo límite ψ . Como se muestra en la figura (2.13).

Por lo tanto la única opción es que la partícula en cierto instante regrese a M_0 por otra rama. Con esto podemos decir que la trayectoria de la partícula es una curva cerrada y, más aún, se tienen dos lóbulos.

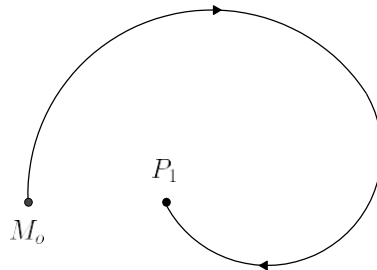


Figura 2.12

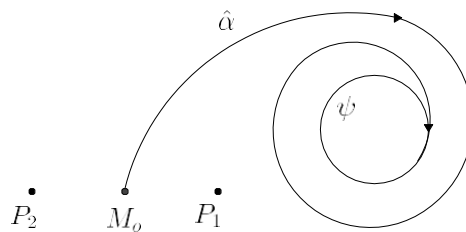


Figura 2.13

Se afirma que los lóbulos no se intersectan, tal como ocurre en la figura (2.14).

En efecto, por el lema 7, sabemos que $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2, M_0\}$ (como se muestra en la gráfica de la figura (2.14)) no es punto crítico de H , es decir, M es un punto regular. Además, $\nabla \ln(H)$ es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_2\}$. Así, en cada vecindad de M se puede contruir una flow box. Como ya se había mencionado, una descripción intuitiva de el flujo en una flow box es: en cada punto regular de H existe una vecindad de dicho punto tal que en cada curva de nivel contenida en la vecindad las partículas se mueven en «rectas paralelas» con rapidez constante. Por lo que no puede ocurrir tales intersecciones de $\hat{\alpha}$ en M . Luego la curva no se autointersecta. Por lo que los dos casos posibles se muestran en las gráficas de la figura (2.15).

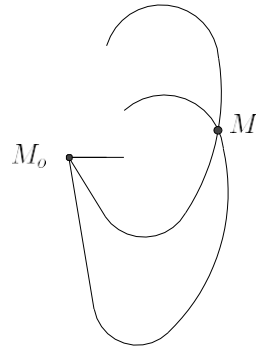


Figura 2.14

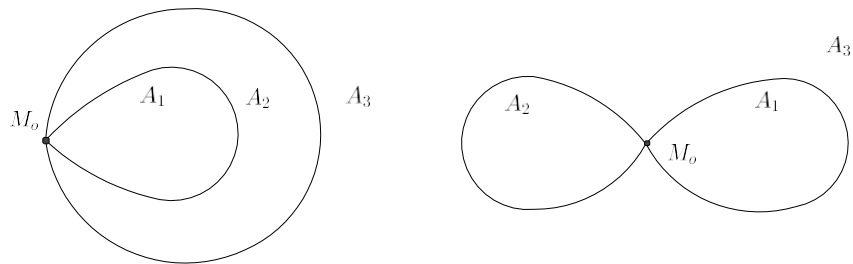


Figura 2.15

El problema se resuelve encontrando la ubicación correcta de los puntos P_1 y P_2 respecto al interior o exterior de $\hat{\alpha}$. Analizamos el caso de la primer gráfica (lado izquierdo de la figura (2.15)) en donde una curva cerrada contiene a la otra en su interior. Por construcción sólo un punto P_1 o P_2 puede estar en el interior de la curva. En este caso supongamos que P_1 pertenece al interior de la curva y sean A_1, A_2 y A_3 las regiones limitadas por los lóbulos.

1. Si $P_1 \in A_1$, entonces por el teorema 5 existe un punto crítico en A_2 y por el lema 7 esto no puede ocurrir.
2. Si $P_1 \in A_2$, entonces por el teorema 5 existe un punto crítico en A_1 y por el lema 7 esto no puede ocurrir.
3. Si $P_1 \in A_3$, entonces por el teorema 5 existe un punto crítico en $A_1 \cup A_2$ y por el lema 7 esto no puede ocurrir.

Por lo tanto el único caso factible es la "lemniscata" (gráfica de la derecha en la figura (2.15)). Y sólo resta ver la posición de los puntos P_1 y P_2 respecto a la curva $\hat{\alpha}$.

1. Por construcción los casos $P_1, P_2 \in A_1$ o $P_1, P_2 \in A_2$ no pueden ocurrir ya que M_o es punto medio del segmento que une a dichos puntos.
2. Si $P_2 \in A_3$ y $P_1 \in A_2$ entonces por el teorema 5 existe un punto crítico en A_2 y por el lema 7 esto no puede ocurrir. De manera análoga el caso $P_2 \in A_2$ y $P_1 \in A_3$, por el teorema 5 existe un punto crítico en A_1 y por el lema 7 esto no puede ocurrir.
3. Si $P_2, P_1 \in A_3$, entonces por el teorema 5 existe un punto crítico en A_1 y por el lema 7 esto no puede ocurrir.
4. El único caso posible es que $P_2 \in A_2$ y $P_1 \in A_1$, como se muestra en la figura (2.16).

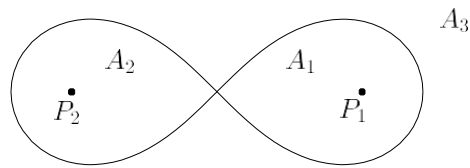


Figura 2.16

Q

Ahora se sabe que la curva $\hat{\alpha}$ es más que una curva cerrada, pero por este simple hecho se puede hablar de un interior y un exterior de dicha curva (Teorema de Jordan). Es momento de analizar como son las trayectorias de una partícula que en algún instante está situada en el interior o en el exterior de $\hat{\alpha}$.

II. Sea $M \in \text{Ext}(\hat{\alpha})$ un punto de una curva de nivel β de H .

Lema 12. β es una curva cerrada que contiene a $\hat{\alpha}$ en su interior.

Demostración. Primero. Por el lema 8, todas las curvas de nivel son acotadas y por lo tanto no es posible tener una curva tal como se muestra en las gráficas de la figura (2.17).

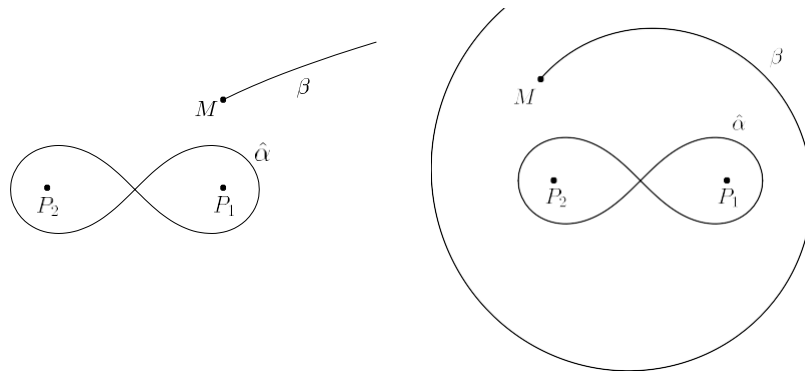


Figura 2.17

Segundo. Por el corolario 1, la curva no puede detenerse en un punto $M_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2, M_0\}$, tal como se muestra en la figura (2.18).

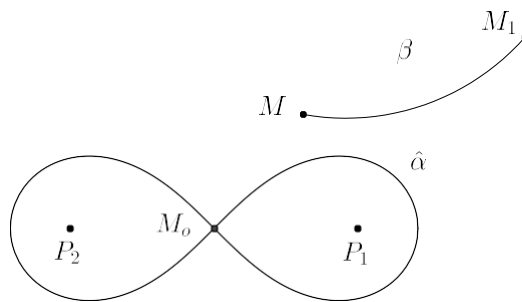


Figura 2.18

Tercero. β no converge o pasa por los puntos P_1 y P_2 , ni tiene ciclos l'ımite.

En efecto, suponiendo que β converge o pasa por los puntos P_1 y P_2 , necesariamente las curvas $\hat{\alpha}$ y β se intersectan en al menos un punto \tilde{M} . Pero esto no puede ocurrir, ya que el punto de intersecci3n es un punto regular y por el teorema flow box existir'ıa una vecindad de dicho punto para el cual las trayectorias de ambas curvas son rectas paralelas. Por otro lado, debido al teorema 7, β no puede tener ciclos l'ımite. Vea las gr'aficas de la figura (2.19).

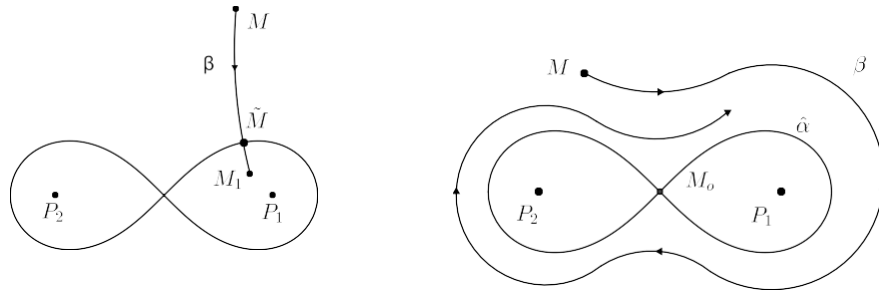


Figura 2.19

De estos tres casos anteriores no hay otra opción más que la curva β sea cerrada.

Se afirma que $\hat{\alpha} \subset \text{Int}(\beta)$. En efecto, como $\hat{\alpha} \cap \beta = \emptyset$, es suficiente con mostrar que $P_1, P_2 \in \text{Int}(\beta)$.

1. Si $P_1, P_2 \notin \text{Int}(\beta)$, entonces por el teorema 5 existe otro punto crítico de H y distinto de M_0 , y esto contradice al lema 7.
2. Si β contiene a sólo uno de los dos puntos, entonces necesariamente las curvas $\hat{\alpha}$ y β se intersectan, pero esto no puede ocurrir por el teorema flow box.

En consecuencia el único caso posible es $P_1, P_2 \in \text{Int}(\beta)$ y por lo tanto $\hat{\alpha} \subset \text{Int}(\beta)$, tal como se muestra en la figura (2.20).

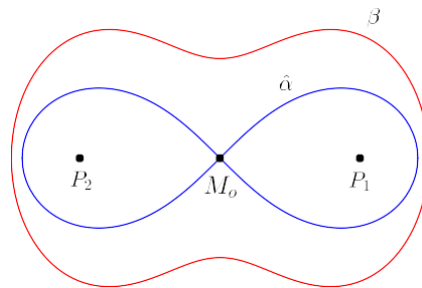


Figura 2.20

Q

Por último, falta ver como son las curvas de nivel para los puntos en el interior de la curva $\hat{\alpha}$.

III. Sea $M \in \text{Int}(\hat{\alpha})$ un punto de una curva de nivel γ de H .

Lema 13. γ es una curva cerrada que está contenida en $\text{Int}(\hat{\alpha})$.

Demostración. Primero. γ es acotada y no tiene ciclos límite. Por el lema 8, todas las curvas de nivel son acotadas. En caso contrario γ necesariamente tendría que intersectar a $\hat{\alpha}$ y esto no es posible por el teorema flow box. Por otro lado, debido al teorema 7, γ no puede tener ciclos límite. Vea la figura (2.21).

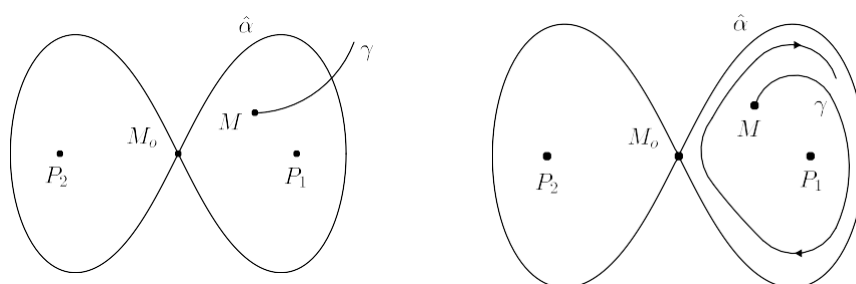


Figura 2.21

Segundo. Por el corolario 1, la curva no puede detenerse en un punto $M_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2, M_0\}$. Como se muestra en la figura (2.22).

Tercero. γ no converge o pasa por los puntos P_1 y P_2 . Supongamos que γ pasa por al menos uno de los puntos P_1 ó P_2 . Se define $\gamma = \{M \in \text{Int}(\hat{\alpha}) : P_1M \cdot P_2M = 0\}$ ya que $H(P_1) = H(P_2) = 0$. Sea $M \in \text{Int}(\hat{\alpha}) \setminus \{P_1, P_2\}$ un punto por el cual en cierto instante γ pasa por M . Entonces claramente $H(M) = 0$ lo cual es una contradicción. Por otro lado, debido al teorema 7, γ no puede tener como puntos atractores a P_1 y P_2 . Vea las gráficas de la figura (2.23).

De estos últimos tres casos se concluye que γ es cerrada, y además, como γ no interseca a $\hat{\alpha}$, entonces $\gamma \subset \text{Int}(\hat{\alpha})$. Pero aún quedan dos casos respecto a la ubicación de los puntos P_1 y P_2 , es decir, pertenecen o no al interior de γ . Por el teorema 5 y lema 7, necesariamente $P_1, P_2 \in \text{Int}(\gamma)$. Por lo tanto, el bosquejo de las curvas de nivel de H para el caso $N = 2$ vórtices fijos se muestra en la figura (2.24).

Q

Antes de concluir este capítulo mostrando las direcciones en que se mueve un punto sometido al campo generado por dos vórtices, haremos mención de otro método por el cual se puede obtener las curvas de nivel de la función H . Este método se basa en el análisis (dominio, puntos

críticos, monotonía y simetrías respecto a los ejes y al origen) de la función implícita

$$x^2 - y^2 - 1 + 4xy = R,$$

que proviene de $|z^2 - 1| = R$, expuesta al inicio de la sección 2.4.

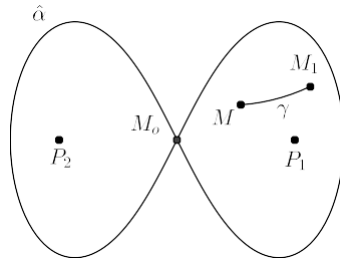


Figura 2.22

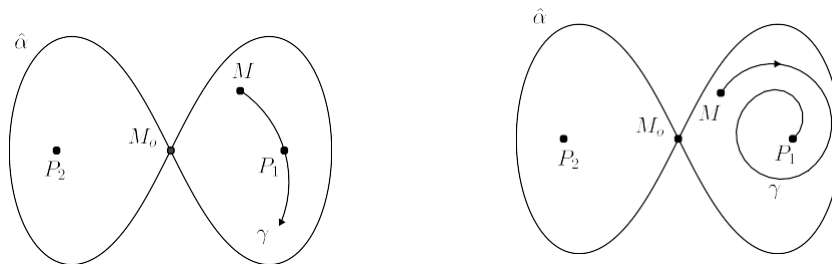


Figura 2.23

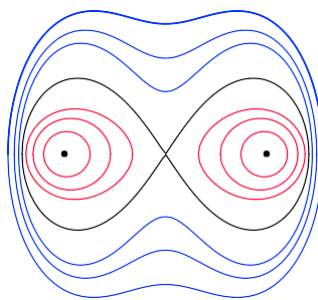


Figura 2.24

2.5. Dirección de recorrido de las curvas integrales para $N = 2$ vórtices

Ya tenemos las trayectorias que puede recorrer una partícula de acuerdo a su posición M respecto a los vórtices, como se observa en la figura (2.24). Por otra parte, con respecto a la velocidad del punto M y de acuerdo a la ecuación (2.8), se concluye que si $P_k M \rightarrow 0$, entonces la velocidad de la partícula tiende al infinito, y si $P_k M \rightarrow \infty$, entonces la velocidad de la partícula tiende a cero.

Finalmente, se requiere visualizar cual es la dirección del recorrido en cada curva. Para esto consideramos la ecuación (2.9), que mediante algunas manipulaciones algebraicas y considerando se puede reescribir como

$$(2.11) \quad z' = -\frac{2y \frac{\Sigma}{|z|^2} + 1}{|z^2 - 1|^2} + \frac{2ix \frac{\Sigma}{|z|^2} - 1}{|z^2 - 1|^2},$$

con $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ Entonces basta ver como son las direcciones de las partículas que se ubican sobre los ejes.

Para el eje horizontal se considera la componente $y = 0$ y la ecuación (2.11) se reduce a

$$z' = \frac{2ix \frac{\Sigma}{|z|^2} - 1}{|z - 1|^2},$$

y tenemos los casos:

1. Si $z = x \in (\infty, -1) \cup (0, 1)$, la dirección es hacia *abajo*.
2. Si $z = x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$, la dirección es hacia *arriba*.

Para el eje vertical, es decir, se consideran las partículas que se ubican en $z = x + iy$, con $x = 0$. Entonces la ecuación (2.11) se reduce a

$$z' = -\frac{2y \frac{\Sigma}{|z|^2} + 1}{|z^2 - 1|^2},$$

y tenemos otro dos casos:

1. Si $y \in (0, \infty)$, la dirección es hacia la *izquierda*.
2. Si $y \in (-\infty, 0)$, la dirección es hacia la *derecha*.

El sentido del recorrido obtenido de los cuatro casos anteriores es en el sentido positivo trigonométrico como se muestra en la figura (2.25). También, del análisis local del punto silla M_0 , para la *lemniscata*, se calcularon los valores y vectores propios que nos muestran la dirección de una partícula en cualquier vecindad de dicho punto, como se puede observar en la figura (2.8).

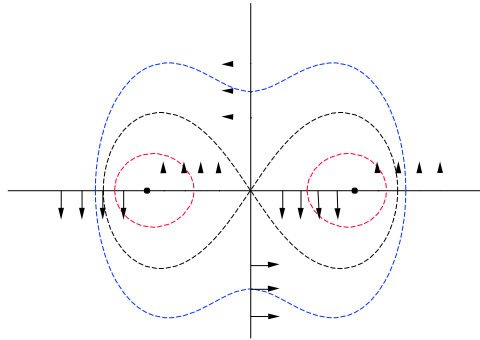


Figura 2.25

Por lo tanto se tiene toda la dinámica de un punto sometido a un campo generado por dos vórtices fijos y de vorticidades iguales y constantes. Todo lo anterior se generaliza en la siguiente sección.

2.6. Trayectorias para $N \geq 3$ vórtices fijos con vorticidades iguales, formando un polígono regular

Los argumentos de la sección anterior permiten estudiar, de modo más general, las trayectorias de una partícula en el campo de velocidades generado por un sistema de $N \geq 3$ vórtices fijos, con vorticidades iguales, formando un polígono regular. Consideremos $\Gamma_k = \Gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ constantes, $M = z$ y $P_k = \rho^k = e^{\frac{2\pi i k}{N}}$, para todo $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$. Así, los puntos P_k , donde se ubican los vórtices, corresponden a las raíces N -ésimas de la unidad y geométricamente se localizan en los vértices de un polígono regular de N lados e inscrito en la circunferencia unitaria. Recordemos la función que nos define la energía cinética del sistema:

$$H(M) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k M^{\Gamma_k}.$$

Lema 14. Para todo entero $N \geq 1$ y para todo $z \in \mathbb{C}$

$$(z-1)(z-\rho) \cdots (z-\rho^{(N-1)}) = z^N - 1,$$

donde $\rho = e^{\frac{2\pi i}{N}}$.

Demostración. Sean $f(z) = z^N - 1$ y $g(z) = (z-1)(z-\rho) \cdots (z-\rho^{(N-1)})$, con $N \geq 1$ y $z \in \mathbb{C}$. Observamos que $f(z)$ y $g(z)$ son polinomios mónicos, es decir, su coeficiente principal es 1. También se tiene que los grados de $f(z)$ y $g(z)$ son iguales ya que $\deg(f(z)) = \deg(z^N - 1) = N$ y $\deg(g(z)) = \deg[(z-1)(z-\rho) \cdots (z-\rho^{(N-1)})] = \deg(z-1) + \deg(z-\rho) + \dots + \deg(z-\rho^{(N-1)}) = N$.

Resta ver que los polinomios f y g tienen las mismas raíces con las mismas multiplicidades. Como $f(z) = z^N - 1$, entonces las raíces de f

son todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^N - 1 = 0$, es decir, las raíces de f son las raíces N -ésimas de la unidad y, por el Teorema Fundamental del Álgebra, son a lo más N raíces complejas. Así, el conjunto de todas las raíces de f es $\{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{N-1}\}$, donde $\rho = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

ya que $\rho = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, con $N \geq 1$. Consideramos la factorización de f como sigue:

$$f(z) = (z - 1)^{\alpha_0} (z - \rho)^{\alpha_1} \dots (z - \rho^{N-1})^{\alpha_{N-1}},$$

con $\alpha_r \in \mathbb{Z}$, para toda $r = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Ahora, supongamos que ρ^j es de multiplicidad $\alpha_j = m \geq 2$ para alguna $j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Entonces $\deg(f(z)) = \deg(z - 1)^{\alpha_0} + \deg(z - \rho)^{\alpha_1} + \dots + \deg(z - \rho^j)^{\alpha_j} + \dots + \deg(z - \rho^{N-1})^{\alpha_{N-1}} = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + m + \dots + \alpha_{N-1} \geq N - 1 + m \geq N + 1$. Entonces $\deg(f(z)) \geq N + 1$ lo cual no puede ocurrir ya que $\deg(f(z)) = N$. Así, $\{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{N-1}\}$ son las N raíces distintas de f y de multiplicidad 1. Y por lo tanto $f(z) = g(z)$. Q

El lema 14 nos da pauta para demostrar el siguiente lema y que es clave para el desarrollo de esta sección.

Lema 15. *La función*

$$H(M) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k M^{\Gamma_k}$$

tiene como único punto crítico a M_0 el origen del sistema de coordenadas.

Demstración. Podemos reescribir a la función H como:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{P_k}{z - \rho^k} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{P_k}{z - \rho^k},$$

y por el lema 14

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{P_k}{z - \rho^k} = \frac{z^N - 1}{z^N - 1}.$$

Sea $F(z) = (H(z))' = \frac{z^N - 1}{z^N - 1}$. Ahora hallaremos los puntos críticos de F , y para eso, consideramos a la composición $F(z) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$, con f_1, f_2, f_3 definidas a continuación.

Sea $f_1 : \mathbb{C} \setminus \{1, \rho, \dots, \rho^{N-1}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definida como $f_1(z) = z^N - 1$.

Se sabe que para cada función F holomorfa se cumple

$$(dF(z))(\delta z) = F'(z) \cdot \delta z,$$

donde del lado derecho tenemos una aplicación lineal y del lado izquierdo un producto complejo. Y como f_1 es una función holomorfa en su dominio, entonces

$$d(z^N - 1)\delta z = (z^N - 1)' \cdot \delta z,$$

donde del lado izquierdo, como ya se había mencionado, es una multiplicación de complejos. Y si $(z^N - 1)'$ es la derivada holomorfa de $z^N - 1$, es decir, $(z^N - 1)' = Nz^{N-1}$, entonces

$$(2.12) \quad d(f_1(z))\delta z = Nz^{N-1}\delta z.$$

Por otra parte, sea $f_2 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (\infty, \infty)$, definida como $f_2(z) = |z|^2$. Además

$$\begin{aligned} |z + \delta z|^2 &= (z + \delta z | z + \delta z) = (z | z) + (\delta z | z) + (z | \delta z) + (\delta z | \delta z) = \\ &= |z|^2 + 2(z | \delta z) + |\delta z|^2, \end{aligned}$$

es la expansión en serie de Taylor de f_2 . Así, f_2 es diferenciable en su dominio y entonces podemos escribir

$$(2.13) \quad d(f_2(z))\delta z = 2(z | \delta z)$$

Y por último, sea $f_3 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_3(t) = \sqrt{t}$ la cual es diferenciable en su dominio. Entonces

$$(2.14) \quad df_3(t)\delta t = f_3'(t)\delta t = \frac{\delta t}{2\sqrt{t}}.$$

Como $F : \mathbb{C} \setminus \{1, \rho, \dots, \rho^{N-1}\} \rightarrow \mathbb{R}$, con $F(z) = |z^N - 1|^2$, podemos decir que $F(z) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z)$ es diferenciable, ya que es composición de funciones diferenciables. Aplicando la regla de la cadena junto con (2.12), (2.13) y (2.14) se tiene:

$$\begin{aligned} dF(z)\delta z &= d(|z^N - 1|^2)\delta z = d(|z^N - 1|)\delta z = \frac{d(z^N - 1)\delta z}{|z^N - 1|} = \\ &= \frac{2(z^N - 1 | d(z^N - 1)\delta z)}{2|z^N - 1|} = \frac{z^N - 1 | Nz^{N-1}\delta z}{|z^N - 1|}. \end{aligned}$$

Hagamos $dF(z)\delta z = 0$, para todo $\delta z \in \mathbb{C}$. Entonces necesariamente se debe tener

$$(z^N - 1 | Nz^{N-1}\delta z) = 0,$$

para todo $\delta z \in \mathbb{C}$. Es decir, se buscan todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^N - 1$ y $Nz^{N-1}\delta z$ sean ortogonales, para todo $\delta z \in \mathbb{C}$. Se afirma que el único punto crítico de F es $z = 0$, para todo $\delta z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto

Σ
 $z = 0$ es punto crítico de F .

Supongamos que $z \neq 0$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{N-1}\}$ tal que

$z^N - 1 \mid Nz^{N-1}\delta z = 0$, para todo $\delta z \in \mathbb{C}$. En particular, sea $\delta z = \frac{z^N - 1}{Nz^{N-1}}$. Entonces son equivalentes

$$\begin{aligned} z^N - 1 \mid Nz^{N-1}\delta z &= 0 \\ z^N - 1 \mid z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^2 - 1 &= 0 \\ z^N - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$z \in \{1, \rho, \dots, \rho^{N-1}\},$$

pero esto último no puede ocurrir ya que z se encuentra en el dominio de F . Por lo tanto F tiene como único punto crítico a $z = 0$. \square

El lema 15 nos da la pauta para aplicar el mismo razonamiento que en la sección 2.4.3, la cual trata sobre el cálculo de los puntos críticos de la función H . En la gráfica (2.26) se muestran las trayectorias en el caso $N = 6$ curvas de nivel de dicha función H .

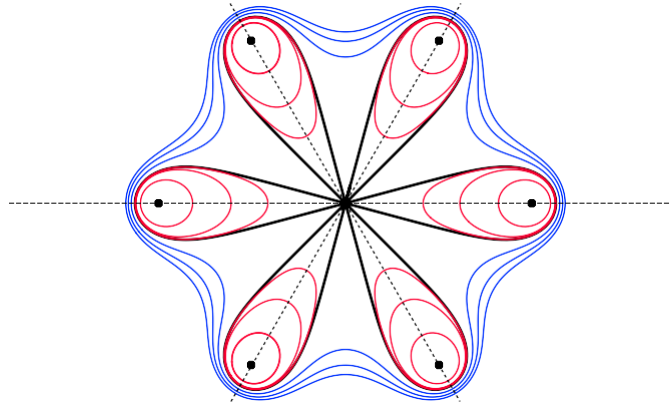


Figura 2.26

Capítulo 3

N vórtices en interacción

3.1. Energía cinética del sistema

El movimiento de un fluido plano, incompresible y sin viscosidad, formado por un sistema de $N \geq 2$ vórtices en interacción y ubicados en $P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)$, de vorticidades constantes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N$, es solución del sistema diferencial:

$$(3.1) \quad \dot{P}_k = R \sum_{\substack{l \in \{1, \dots, N\} \\ l \neq k}} \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l P_k}}{2P_l P_k},$$

donde $k \in \{1, \dots, N\}$ y R es la rotación de ángulo 90° .

Teorema 8. *La función exponencial de la energía cinética:*

$$H(P_1, \dots, P_N) = \sum_{\substack{k, l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} (P_l P_k)^{\Gamma_k \Gamma_l},$$

es constante a lo largo del movimiento.

Demostración. Sea $(P_1^0, P_2^0, \dots, P_N^0) \in (\mathbb{R}^2)^N$ con P_i en una vecindad de P_i^0 , para toda $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Entonces podemos escribir $P_i = P_i^0 + \delta P_i$ y con $(P_1, P_2, \dots, P_N), (\delta P_1, \delta P_2, \dots, \delta P_N) \in (\mathbb{R}^2)$.

Se sabe que $(\mathbb{R}^2)^N, \|\cdot\|_2$ es un espacio vectorial normado, y dicha norma definida como

$$\|u\|_2 = \max_{1 \leq i \leq N} (\|u_i\|_2),$$

con $u = (u_1, \dots, u_N) \in (\mathbb{R}^2)^N$ y $\|\cdot\|_2$ una norma de \mathbb{R}^2 .

Se afirma que

$$(3.2) \quad d^2 (P_k P_l)^2 (P_1^0, P_2^0, \dots, P_N^0) (\delta P_1, \dots, \delta P_N) = 2 \overrightarrow{P_k P_l} \cdot (\delta P_l - \delta P_k).$$

En efecto, expresaremos a $(P_k P_l)^2$ como una serie de Taylor.

$$\begin{aligned} (P_k P_l)^2 &= \|P_l - P_k\|_2^2 = \|P_l + \delta P_l - P_k + \delta P_k\|_2^2 \\ &= \|P_l - P_k + \delta P_l - \delta P_k\|_2^2 = \overrightarrow{P_k P_l} \cdot \overrightarrow{P_l P_k} + \delta P_l - \delta P_k \end{aligned}$$

$$= \sum_{k,l} \frac{P_k P_l}{P_k P_l} + \delta P_l - \delta P_k \cdot \sum_{k,l} \frac{P_k P_l}{P_k P_l} + \delta P_l - \delta P_k$$

$$= P_k P_l + 2P_k P_l \cdot (\delta P_l - \delta P_k) + (\delta P_l - \delta P_k)^2.$$

Tenemos que

$$(\delta P_1, \dots, \delta P_N) = \max_{1 \leq i \leq N} (\delta P_i)^2,$$

y consideramos

$$(\delta P_l - \delta P_k)^2 = (\delta P_1, \delta P_2, \dots, \delta P_N) \cdot \varepsilon(\delta P_1, \delta P_2, \dots, \delta P_N) \geq 0.$$

Hay que verificar que $\varepsilon(\delta P_1, \dots, \delta P_N) \rightarrow 0$, si $(\delta P_1, \dots, \delta P_N) \rightarrow 0$.

De las desigualdades

$$0 \leq \varepsilon(\delta P_1, \dots, \delta P_N) = \frac{(\delta P_l - \delta P_k)^2}{(\delta P_1, \dots, \delta P_N)} \leq \frac{(\delta P_l)^2 + (\delta P_k)^2}{\max_{1 \leq k \leq N} (\delta P_k)^2}$$

$$\leq \frac{2 \max_{1 \leq k \leq N} (\delta P_k)^2}{\max_{1 \leq k \leq N} (\delta P_k)^2} = 4 \max_{1 \leq k \leq N} (\delta P_k)^2 = 4 (\delta P_1, \dots, \delta P_N),$$

claramente, si $(\delta P_1, \dots, \delta P_N) \rightarrow 0$, entonces $\varepsilon(\delta P_1, \dots, \delta P_N) \rightarrow 0$.

Con esto queda justificada la ecuación (3.2).

Consideramos la composición:

$$\ln(H(P_1, \dots, P_N)) = \ln \prod_{\substack{k,l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} (P_l P_k)^{\Gamma_k \Gamma_l}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \ln(P_l P_k)^2,$$

y se calcula su diferencial en un punto $(P_1^0, \dots, P_N^0) \in (\mathbb{R}^2)^N$, tomando en cuenta la expresión (3.2) anterior y $(d \ln(t))_{t_0} \delta t = \frac{1}{t_0} \delta t$. Entonces

$$(d \ln(H(P_1, \dots, P_N)))_{(P_1^0, \dots, P_N^0)} (\delta P_1, \dots, \delta P_N)$$

$$= d \sum_{\substack{k,l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \ln(P_l P_k)^2 (\delta P_1, \dots, \delta P_N)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \cdot d \ln(P_l P_k)^2 (\delta P_1, \dots, \delta P_N)$$

$$= \sum_{\substack{k,l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \cdot \frac{1}{(P_l^0 P_k^0)^2} \cdot d(P_l P_k)^2 (\delta P_1^0, \dots, \delta P_N^0) (\delta P_1^1, \dots, \delta P_N^1)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k, l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{1}{(P_k^0 P_l^0)^2} \cdot \overrightarrow{P_k^0 P_l^0} \cdot (\delta P_k - \delta P_l) \\
&= \sum_{\substack{k, l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_k^0 P_l^0}}{(P_k^0 P_l^0)^2} \cdot (\delta P_k - \delta P_l).
\end{aligned}$$

Por otra parte, sea la función $P : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^N$, definida como $P(t) = (P_1(t), \dots, P_N(t))$ y su diferencial $dP(t) = (P_1'(t), \dots, P_N'(t))$. Y sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ otra función tal que $\varphi(t) = (\ln \circ H \circ P)(t)$ y con derivada

$$\varphi'(t) = (d\varphi(t))_{t_0} = (d(\ln(H(P(t))))_{t_0} = (d \ln(H))_{P(t_0)} \cdot (dP(t))_{t_0}$$

$$= (d \ln(H(P_1(t), \dots, P_N(t))))_{(P_1(t_0), \dots, P_N(t_0))} \cdot (P_1'(t), \dots, P_N'(t))_{t_0}$$

$$= \sum_{\substack{k, l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_k(t_0) P_l(t_0)}}{(P_k(t_0) P_l(t_0))^2} \cdot (P_l'(t_0) - P_k'(t_0))$$

$$= \sum_{\substack{k, l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_k(t_0) P_l(t_0)}}{(P_k(t_0) P_l(t_0))^2} \cdot P_l'(t_0) - \sum_{\substack{k, l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_k(t_0) P_l(t_0)}}{(P_k(t_0) P_l(t_0))^2} \cdot P_k'(t_0)$$

(intercambiando índices en el primer término)

$$= \sum_{\substack{k, l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t_0) P_k(t_0)}}{(P_l(t_0) P_k(t_0))^2} \cdot P_k'(t_0) + \sum_{\substack{k, l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t_0) P_k(t_0)}}{(P_l(t_0) P_k(t_0))^2} \cdot P_k'(t_0)$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{\substack{k, l \in \{1, \dots, N\} \\ k \neq l}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t_0) P_k(t_0)}}{(P_l(t_0) P_k(t_0))^2} \cdot P_k'(t_0) \\
&= 2 \sum_{k \in \{1, \dots, N\}} \Gamma_k \sum_{\substack{l \in \{1, \dots, N\} \\ l \neq k}} \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t_0) P_k(t_0)}}{(P_l(t_0) P_k(t_0))^2} \cdot P_k'(t_0)
\end{aligned}$$

(y haciendo uso de (3.1))

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{k \in \{1, \dots, N\}} (\Gamma_k(\mathbf{0})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi(t) = (\ln \circ H \circ P)(t)$ es una función constante y en con-

secuencia H también lo es.

Q

3.2. Centro y vector de vorticidad

Definición 3. Sea $O \in \mathbb{R}^2$.

1. Si la suma de las vorticidades es distinta de cero, se define, en cada instante t , el centro de vorticidad como el punto Ω tal que:

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k}.$$

2. Si la suma de las vorticidades es igual a cero, se define, en cada instante t , el vector de vorticidad como el vector \vec{U} tal que:

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k}.$$

Teorema 9. El centro y el vector de vorticidad no dependen del punto O elegido.

Demostración. Para el centro de vorticidad. Consideremos la suma de las vorticidades distinta de cero, es decir, $\sum_{k=1}^N \Gamma_k \neq 0$. Y tenemos

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k}.$$

Sea O' otro punto en el plano tal que

$$\overrightarrow{O'\Omega} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{O'P_k}.$$

Podemos escribir $\overrightarrow{O'P_k} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP_k}$, para todo $k = 1, \dots, N$. Y entonces se tienen las igualdades

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'\Omega} + \Omega'\Omega &= \overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP_k} \right) \\ &= \overrightarrow{OO'} \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k + \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k} \end{aligned}$$

$$= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'\Omega'}.$$

Por lo tanto $\overrightarrow{\Omega\Omega'} = \vec{0}$, y esto pasa si y sólo si $\Omega = \Omega'$.

Para el vector de vorticidad consideremos la suma de las vorticidades igual a cero, es decir, $\sum_{k=1}^N \Gamma_k = 0$. Y tenemos

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k}.$$

Sea O' otro punto, distinto de O , en el plano tal que

$$\vec{U}' = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{O'P_k}.$$

Además, como en el caso anterior $\overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_k}$, para todo $k = 1, \dots, N$. Entonces

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k} = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_k} \right) \\ &= \overrightarrow{OO'} \sum_{k=1}^N \Gamma_k + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{O'P_k} = \vec{0} + \vec{U}' = \vec{U}'. \end{aligned}$$

Q

Otro resultado importante de estos dos conceptos es el teorema siguiente.

Teorema 10. *El centro y el vector de vorticidad son constantes a lo largo del movimiento.*

Demostración. Demostremos el teorema para el centro de vorticidad. En este caso tenemos $\sum_{k=1}^N \Gamma_k = 0$. Sea la función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\psi(t) = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k(t)}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k'(t)} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k'(t)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k OP_k(t) \xrightarrow{\quad} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{k=1}^N \Gamma_k P'_k(t).$$

Lo que se quiere demostrar es que $\psi'(t) = \vec{0}$, entonces basta con mostrar que

$$\sum_{k=1}^N \Gamma_k P'_k(t) = \vec{0}.$$

Recordemos la ecuación (3.1)

$$P'(t) = R \sum_{l \in \{1, \dots, N\}} \frac{\overrightarrow{P_l(t)P_k(t)}}{\Gamma_l (P_l(t)P_k(t))^2},$$

para toda $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Y con esto podemos escribir

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \Gamma_k P'_k(t) &= \sum_{k=1}^N \Gamma_k R \sum_{l \in \{1, \dots, N\}} \frac{\overrightarrow{P_l(t)P_k(t)}}{\Gamma_l (P_l(t)P_k(t))^2} \\ &= \sum_{k=1}^N \Gamma_k R \sum_{l \in \{1, \dots, N\}} \frac{\overrightarrow{P_l(t)P_k(t)}}{\Gamma_l (P_l(t)P_k(t))^2} + \sum_{l \in \{1, \dots, N\}} \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t)P_k(t)}}{(P_l(t)P_k(t))^2} \end{aligned}$$

(R es una transformación lineal)

$$= R \sum_{k=1}^N \sum_{l \in \{1, \dots, N\}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t)P_k(t)}}{(P_l(t)P_k(t))^2} + \sum_{k=1}^N \sum_{l \in \{1, \dots, N\}} \Gamma_k \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t)P_k(t)}}{(P_l(t)P_k(t))^2}$$

(en el primer sumando hacemos $k = i$ y $l = j$ y en el segundo sumando $k = j$ y $l = i$)

$$= R \sum_{j \in \{1, \dots, N\}} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \frac{\overrightarrow{P_j(t)P_i(t)}}{(P_j(t)P_i(t))^2} + \sum_{j \in \{1, \dots, N\}} \sum_{i < j} \Gamma_j \Gamma_i \frac{\overrightarrow{P_i(t)P_j(t)}}{(P_i(t)P_j(t))^2}$$

$$\begin{aligned}
&= R \square - \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, N\} \\ j < i}} \Gamma_i \Gamma_j (P(t)P(t))^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ j < i}} \Gamma_j \Gamma_i (P(t)P(t))^2 \square \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, N\} \\ j < i}} \Gamma_i \Gamma_j R - \frac{P(t)P(t)}{i j} \vec{P}(t)P(t) \vec{P}(t)P(t) \rightarrow \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, N\} \\ j < i}} \Gamma_i \Gamma_j R - \frac{P(t)P(t)}{i j} + \frac{P(t)P(t)}{i j} = 0.
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j \in \{1, \dots, N\} \\ j < i}}$$

Por lo tanto el centro de vorticidad es constante a lo largo del movimiento.

Demostremos el teorema para el vector de vorticidad. En este caso tenemos $\sum_{k=1}^N \Gamma_k = 0$. Y consideramos la función $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overline{OP_k(t)}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overline{OP_k'(t)} \\ &= \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overline{OP_k'(t)} = \sum_{k=1}^N \Gamma_k P_k'(t). \end{aligned}$$

Por lo que la demostración es análoga a la del centro de vorticidad. Así, el vector de vorticidad también es constante a lo largo del movimiento. \square

3.3. Momento de inercia

Definición 4. Sean $P_1, P_2, \dots, P_N \in \mathbb{R}^2$ y O un punto fijo del plano. Se define el momento de inercia respecto a O como

$$I = \sum_{k=1}^N \Gamma_k (OP_k)^2.$$

Teorema 11. El momento de inercia es constante a lo largo del movimiento.

Demostración. Sean O un punto fijo en el plano y (P_1, \dots, P_N) , $(P_1^0, \dots, P_N^0) \in (\mathbb{R}^2)^N$, con P_k en una vecindad de P_k^0 , para toda $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Es decir, $P_k = P_k^0 + \delta P_k$, para toda $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Así, de la ecuación (2.2) y tomando en cuenta $P = O$ y $M = P_k$, tenemos

$$(3.3) \quad d \cdot \overline{OP_k}^2 = 2 \overline{OP_k} \cdot \delta P_k,$$

para toda $k \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Sea la función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la composición $\varphi(t) = (I \circ P)(t)$, con $P : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^N$, definida como $P(t) = (P_1(t), \dots, P_N(t))$ y también $I : (\mathbb{R}^2)^N \rightarrow \mathbb{R}$, definida como sigue $I(P_1, \dots, P_N) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k (OP_k)^2$.

Entonces $\varphi(t) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k (OP_k)^2$ y, más aún, $\varphi'(t)dt = (d\varphi(t))_{t_0}$.

$$\begin{aligned} \varphi'(t)dt &= (d\varphi(t))_{t_0} = (d(I \circ P)(t))_{t_0} = (dI)_{P(t_0)} \cdot (dP)_{t_0} \\ &= \sum_{k=1}^N \Gamma_k \cdot d(OP_k(t))^2 \sum_{(P_1(t_0), \dots, P_N(t_0))} (P'_1(t_0), \dots, P'_N(t_0)) \end{aligned}$$

(usando la ecuación (3.2))

$$= \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k(t_0)} \cdot P'_k(t_0)$$

(usando la ecuación (3.1))

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k(t_0)} \cdot R \sum_{l \in \{1, \dots, N\}} \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t_0)} \overrightarrow{P_k(t_0)}}{(P_l(t_0)P_k(t_0))^2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \Gamma_k \overrightarrow{OP_k(t_0)} \cdot R \sum_{\substack{l \in \{1, \dots, N\} \\ k < l}} \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t_0)} \overrightarrow{P_k(t_0)}}{(P_l(t_0)P_k(t_0))^2} + \sum_{\substack{l \in \{1, \dots, N\} \\ l < k}} \Gamma_l \frac{\overrightarrow{P_l(t_0)} \overrightarrow{P_k(t_0)}}{(P_l(t_0)P_k(t_0))^2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{l \in \{1, \dots, N\} \\ k < l}} \Gamma_k \Gamma_l \overrightarrow{OP_k(t_0)} \cdot R \frac{\overrightarrow{P_l(t_0)} \overrightarrow{P_k(t_0)}}{(P_l(t_0)P_k(t_0))^2} \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{l \in \{1, \dots, N\} \\ l < k}} \Gamma_k \Gamma_l \overrightarrow{OP_k(t_0)} \cdot R \frac{\overrightarrow{P_l(t_0)} \overrightarrow{P_k(t_0)}}{(P_l(t_0)P_k(t_0))^2} \end{aligned}$$

(en el primer sumando hacemos $k = i$ y $l = j$ y en el segundo sumando $k = j$ y $l = i$)

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ i < j}} \Gamma_i \Gamma_j \overrightarrow{OP_i(t_0)} \cdot R \frac{\overrightarrow{P_j(t_0)} \overrightarrow{P_i(t_0)}}{(P_j(t_0)P_i(t_0))^2} \\ &\quad - \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, N\} \\ i < j}} \Gamma_i \Gamma_j \overrightarrow{OP_j(t_0)} \cdot R \frac{\overrightarrow{P_i(t_0)} \overrightarrow{P_j(t_0)}}{(P_i(t_0)P_j(t_0))^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, N\} \\ i < j}} \Gamma_i \Gamma_j \frac{\overrightarrow{OP_i(t_0)} + \overrightarrow{OP_j(t_0)}}{(P_i(t_0)P_j(t_0))^2} \cdot R \frac{\overrightarrow{P_i(t_0)} \overrightarrow{P_j(t_0)}}{(P_i(t_0)P_j(t_0))^2} \\
& = 2 \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, N\} \\ i < j}} \Gamma_i \Gamma_j \frac{P_i(t_0)P_j(t_0)}{(P_i(t_0)P_j(t_0))^2} \cdot R \frac{\overrightarrow{P_i(t_0)} \overrightarrow{P_j(t_0)}}{(P_i(t_0)P_j(t_0))^2} = 0.
\end{aligned}$$

Q

3.4. Dinámica del campo con $N = 2$ vórtices en interacción

En esta sección, como en el capítulo anterior, el objetivo es determinar el movimiento de un sistema de $N = 2$ vórtices en interacción y con vorticidades constantes. Se analizará este problema en dos casos.

I. $\Gamma_1 + \Gamma_2 = 0$.

Sin pérdida de generalidad, sean $\Gamma_1 = 1$ y $\Gamma_2 = -1$. También consideremos el vector de vorticidad

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_k \overrightarrow{OP_k} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} = -\overrightarrow{P_1P_2},$$

el cual, por el teorema 10, permanece constante a lo largo del movimiento. Esto nos permite escribir $\vec{0} = \vec{U}' = -\overrightarrow{P_1'P_2'} = P_1' - P_2'$ y por lo tanto $P_1' = P_2'$. Entonces P_1 y P_2 tienen la misma velocidad constante. Además, de las ecuaciones diferenciales de Helmholtz tenemos

$$P_1' = R \frac{\Gamma_2 \overrightarrow{P_2P_1}}{(P_2P_1)^2} \Sigma = R \frac{\overrightarrow{P_2P_1}}{(P_2P_1)^2} \Sigma = R \frac{-\overrightarrow{P_1P_2}}{(P_1P_2)^2} \Sigma,$$

así

$$P_1' = -R \frac{\vec{U}}{(P_1P_2)^2}$$

De manera análoga para P_2' escribimos

$$P_2' = R \frac{\Gamma_1 \overrightarrow{P_1P_2}}{(P_1P_2)^2} \Sigma = R \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{(P_1P_2)^2} \Sigma = -R \frac{\vec{U}}{(P_1P_2)^2}$$

Ahora, si integramos a P_1' y P_2' , respecto al parámetro t , se tiene

$$P_1(t) = P_1(0) + tR \frac{\vec{U}}{(P_1P_2)^2},$$

y

$$P(t) = P(0) + tR \frac{\vec{U}}{U}$$

Por lo tanto P_1 y P_2 se mueven sobre rectas paralelas y con la misma velocidad uniforme.

II. $\Gamma_1 + \Gamma_2 f = 0$.

Consideramos el centro de vorticidad

$$(3.4) \quad \vec{O}\Omega = \frac{1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left[\Gamma_1 \vec{O}P_1 + \Gamma_2 \vec{O}P_2 \right]$$

Por el teorema 10 tenemos que

$$\Omega' = \vec{0},$$

es decir, el centro de vorticidad no se mueve. También, del teorema 9 se sabe que el centro de vorticidad no depende del punto O elegido, con esto podemos considerar $O = P_1$ en la definición del centro de vorticidad, entonces

$$\vec{P}_1\Omega = \frac{1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left[\Gamma_1 \vec{P}_1P_1 + \Gamma_2 \vec{P}_1P_2 \right] = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \vec{P}_1P_2,$$

o bien

$$(3.5) \quad \vec{\Omega}P_1 = -\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \vec{P}_1P_2.$$

De la misma manera, si $O = P_2$, también podemos escribir

$$\vec{P}_2\Omega = \frac{1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left[\Gamma_1 \vec{P}_2P_1 + \Gamma_2 \vec{P}_2P_2 \right] = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \vec{P}_2P_1,$$

es decir,

$$(3.6) \quad \vec{\Omega}P_2 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \vec{P}_2P_1.$$

Por otro lado, se afirma que las trayectorias de P_1 y P_2 son circunferencias concéntricas con Ω como centro y se recorren a una velocidad angular constante. En efecto, tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} P_1' = R \Gamma_2 \frac{\vec{P}_2P_1}{(P_2P_1)^2} \\ P_2' = R \Gamma_1 \frac{\vec{P}_1P_2}{(P_1P_2)^2} \end{cases}$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{(P_1P_2)^2} \frac{d(P_1P_2)^2}{dt} = \frac{1}{(P_1P_2)^2} \left[2(P_1P_2) \frac{d(P_1P_2)}{dt} \right] = \frac{2}{(P_1P_2)} \left[\Gamma_2 \frac{\vec{P}_2P_1}{(P_2P_1)^2} \cdot \vec{P}_1P_2 + \Gamma_1 \frac{\vec{P}_1P_2}{(P_1P_2)^2} \cdot \vec{P}_2P_1 \right]$$

$$\vec{P} = P' - P' = R \Gamma \quad \vec{P}_1 P_2 = R \Gamma \quad \vec{P}_2 P_1 = R \Gamma$$

$$= \Gamma_1 R \frac{\vec{P_1 P_2}}{(P_1 P_2)^2} + \Gamma_2 R \frac{\vec{P_1 P_2}}{(P_1 P_2)^2},$$

por lo tanto

$$(3.7) \quad \vec{P_1 P_2}' = (\Gamma_1 + \Gamma_2) R \frac{\vec{P_1 P_2}}{(P_1 P_2)^2}.$$

Si hacemos $\vec{P} = \vec{0}$, $\vec{M} = \vec{P_1 P_2}$ y $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ en la ecuación (3.7) obtenemos la ecuación diferencial

$$\vec{M}' = R \Gamma \frac{\vec{P M}}{P M^2},$$

la cual no es otra cosa más que el campo generado por un sólo vórtice. Así, con un análisis análogo al de los capítulos anteriores para el caso de un sólo vórtice se resuelve la ecuación (3.7).

Utilizando coordenadas polares para $\vec{P_1 P_2}$ obtenemos

$$\vec{P_1 P_2} = r(t) \cdot (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) = r(t) \vec{e}_r.$$

Luego, derivando respecto a t

$$\vec{P_1 P_2}' = r'(t) \cdot (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) + r(t) \theta'(t) \cdot (-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t))),$$

entonces podemos escribir

$$(3.8) \quad \vec{P_1 P_2}' = r'(t) \vec{e}_r + r(t) \theta'(t) \vec{e}_\theta.$$

Además

$$\vec{P_1 P_2}' = (\Gamma_1 + \Gamma_2) R \frac{\vec{P_1 P_2}}{(P_1 P_2)^2} = (\Gamma_1 + \Gamma_2) R \frac{r(t) \vec{e}_r}{(r(t))^2},$$

y así,

$$(3.9) \quad \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{r(t)} \frac{1}{\theta}.$$

Igualando (3.8) y (3.9)

$$r'(t) \vec{e}_r + r(t) \theta'(t) \vec{e}_\theta = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{r(t)} e_\theta$$

y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} r'(t) &= 0 \\ r(t) \theta'(t) &= \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{r(t)}. \end{aligned}$$

Pero $r'(t) = 0$ implica que el radio es constante, es decir, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $r(t) = r$. Y de la segunda ecuación

$$\theta'(t) = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{r^2},$$

por lo que $\theta'(t) = \text{constante}$, y esto nos dice que $\overrightarrow{P_1P_2}$ recorre una circunferencia de centro O y con velocidad angular constante.

Luego, $\overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = r$, y en consecuencia la distancia entre los vórtices² es constante. Este mismo resultado se obtiene con ayuda del teorema 8, ya que se sabe que la exponencial de la energía cinética $H(P_1, P_2) = P_1P_2^{\Gamma_1\Gamma_2}$ es constante. En conclusión, de las ecuaciones (3.5) y (3.6), las distancias ΩP_1 y ΩP_2 son constantes, más aún, P_1 y P_2 recorren circunferencias de centro Ω y con velocidad angular constante.

3.5. Dinámica del campo con $N = 3$ vórtices en interacción

Otra caracterización del momento de inercia se muestra en el lema siguiente.

Lema 16. *El momento de inercia, con respecto al centro de vorticidad $\Omega = O$, es igual a*

$$I = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Gamma_k} \sum_{1 \leq k < l \leq N} \Gamma_k \Gamma_l (P_k P_l)^2.$$

Demostración. La demostración se hará para $N = 3$, ya que el proceso es el mismo para la demostración en el caso $N \geq 3$. Por la definición 4, el momento de inercia es

$$I = \sum_{k=1}^3 \Gamma_k (OP_k)^2.$$

Sea O el centro de vorticidad, es decir, $O = \Omega$ en la definición 3 y tomando en cuenta que $\sum_{k=1}^3 \Gamma_k \mathbf{f} = \mathbf{0}$, entonces

$$\Gamma_1 \overrightarrow{OP_1} + \Gamma_2 \overrightarrow{OP_2} + \Gamma_3 \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{0}.$$

Luego

$$\Gamma_1 \overrightarrow{OP_1} + \Gamma_2 \overrightarrow{OP_2} + \Gamma_3 \overrightarrow{OP_3}^2 = 0,$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned} & \Gamma_1^2 (OP_1)^2 + \Gamma_2^2 (OP_2)^2 + \Gamma_3^2 (OP_3)^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2 \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} + 2\Gamma_1\Gamma_3 \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_3} \\ & \quad + 2\Gamma_2\Gamma_3 \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} = 0. \\ & \Gamma_1^2 (OP_1)^2 + \Gamma_2^2 (OP_2)^2 + \Gamma_3^2 (OP_3)^2 = \\ & -2\Gamma_1\Gamma_2 \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} - 2\Gamma_1\Gamma_3 \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_3} - 2\Gamma_2\Gamma_3 \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} & \Gamma_1^2 (OP_1)^2 + \Gamma_1\Gamma_2 (OP_1)^2 + \Gamma_1\Gamma_2 (OP_2)^2 + \\ & \Gamma_2^2 (OP_2)^2 + \Gamma_2\Gamma_3 (OP_2)^2 + \Gamma_2\Gamma_3 (OP_3)^2 + \\ & \Gamma_3^2 (OP_3)^2 + \Gamma_1\Gamma_3 (\overrightarrow{OP_1})^2 + \Gamma_1\Gamma_3 (OP_3)^2 = \\ & \Gamma_1\Gamma_2 (OP_1)^2 - 2\Gamma_1\Gamma_2 \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} + \Gamma_1\Gamma_2 (OP_2)^2 + \\ & \Gamma_1\Gamma_3 (OP_1)^2 - 2\Gamma_1\Gamma_3 \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_3} + \Gamma_1\Gamma_3 (OP_3)^2 + \\ & \Gamma_2\Gamma_3 (OP_2)^2 - 2\Gamma_2\Gamma_3 \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} + \Gamma_2\Gamma_3 (OP_3)^2. \end{aligned}$$

Reagrupando términos podemos escribir

$$\begin{aligned} & \Gamma_1 \Gamma_1 (OP_1)^2 + \Gamma_2 (OP_2)^2 \sum_{k=1}^3 \Gamma_k + \Gamma_3 (OP_3)^2 \sum_{k=1}^3 \Gamma_k + \\ & \Gamma_2 \Gamma_1 (OP_1)^2 + \Gamma_2 (OP_2)^2 + \Gamma_3 (OP_3)^2 + \\ & \Gamma_3 \Gamma_1 (OP_1)^2 + \Gamma_2 (OP_2)^2 + \Gamma_3 (OP_3)^2 = \\ & \Gamma_1\Gamma_2 \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}^2 + \Gamma_1\Gamma_3 \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}^2 + \Gamma_2\Gamma_3 \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_2}^2, \end{aligned}$$

y como $I = \Gamma_1 (OP_1)^2 + \Gamma_2 (OP_2)^2 + \Gamma_3 (OP_3)^2$, entonces

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) I = \Gamma_1\Gamma_2 (P_1P_2)^2 + \Gamma_1\Gamma_3 (P_1P_3)^2 + \Gamma_2\Gamma_3 (P_2P_3)^2.$$

Por lo tanto

$$I = \frac{1}{\sum_{k=1}^3 \Gamma_k} \sum_{k < l \leq 3} \Gamma_k \Gamma_l (P_k P_l)^2.$$

De manera análoga para $N \geq 3$. Q

En lo que resta consideramos el caso en que las vorticidades son constantes e iguales y, más aún, el caso particular donde $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$. El objetivo es proporcionar el movimiento del triángulo formado por tres vórtices sin considerar su traslación o rotación. Equivalentemente se trata de conocer la magnitud de sus tres lados P_1P_2 , P_2P_3 y P_3P_1 del triángulo, o bien, a los cuadrados de dichas distancias $P_1P_2^2$, $P_2P_3^2$ y $P_3P_1^2$, ya que el momento de inercia y el cuadrado de la exponencial de la energía cinética dependen de dichas distancias al cuadrado. Con esto, podemos visualizar al movimiento como una curva trazada en el espacio tridimensional, donde el eje \overrightarrow{Ox} corresponde a $P_1P_2^2$, eje \overrightarrow{Oy} corresponde a $P_2P_3^2$ y eje \overrightarrow{Oz} a $P_3P_1^2$. Así, cada punto de la curva tiene como coordenadas a los cuadrados de las distancias de los tres lados que forman al triángulo cuyos vértices son los vórtices P_1 , P_2 y P_3 . Y para lograr lo que se desea emplearemos un razonamiento similar al realizado para hallar las curvas de nivel para $N = 2$ vórtices fijos y esto mediante los puntos críticos de la función H .

• **Lema 17.** *El único punto crítico de la función H^2 , con restricción a el plano $I = I_0$, es el punto $I = I_0$.*

\sum
° .

Demostración. Los puntos críticos se obtendrán por medio de la técnica de los multiplicadores de Lagrange.

Sea $h(P_1P_2^2, P_2P_3^2, P_3P_1^2) = H^2(P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1)$, es decir $h(P_1P_2^2, P_2P_3^2, P_3P_1^2) = P_1P_2^2 \cdot P_2P_3^2 \cdot P_3P_1^2$. Calculamos el gradiente de h respecto a $P_1P_2^2, P_2P_3^2$ y $P_3P_1^2$. Entonces

$$\nabla h = \nabla H = (P_2P_3^2 \cdot P_3P_1^2, P_1P_2^2 \cdot P_3P_1^2, P_1P_2^2 \cdot P_2P_3^2).$$

Del lema 16 el momento de inercia, para $N = 3$, es

$$I(P_1P_2^2, P_2P_3^2, P_3P_1^2) = P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_1^2.$$

Y el gradiente de I respecto a las variables $P_1P_2^2, P_2P_3^2$ y $P_3P_1^2$ es

$$\nabla I = (1, 1, 1).$$

Aplicar el método de Lagrange es equivalente a que los gradientes de las funciones I y h sean colineales. Es decir,

$$\nabla h = \lambda \nabla I,$$

y así

$$(P_2P_3^2 \cdot P_3P_1^2, P_1P_2^2 \cdot P_3P_1^2, P_1P_2^2 \cdot P_2P_3^2) = \lambda(1, 1, 1).$$

Por lo que se tiene el sistema

$$\begin{cases} P_2P_3^2 \cdot P_3P_1^2 = \lambda \\ P_1P_2^2 \cdot P_3P_1^2 = \lambda \\ P_1P_2^2 \cdot P_2P_3^2 = \lambda. \end{cases}$$

Entonces $P_2P_3^2 \cdot P_3P_1^2 = P_1P_2^2 \cdot P_3P_1^2 = P_1P_2^2 \cdot P_2P_3^2$, lo cual implica que $P_1P_2^2 = P_2P_3^2 = P_3P_1^2$. Y como $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_1^2 = I = I_0$, se concluye que $P_1P_2^2 = P_2P_3^2 = P_3P_1^2 = \frac{I_0}{3}$. Por lo tanto el único punto crítico es $(\frac{I_0}{3}, \frac{I_0}{3}, \frac{I_0}{3})$. Q

Hay que hacer notar, en esta sección, que los teoremas 6 y 7 son necesarios salvo un difeomorfismo de \mathbb{R}^2 a el plano $I = I_0$.

Como en el lema anterior, sean I_0 y H_0 constantes reales y para los próximos lemas consideremos α una curva que satisface

$$(3.10) \quad \begin{cases} I(P_1P_2^2, P_2P_3^2, P_3P_1^2) = P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_1^2 = I_0 \\ h(P_1P_2^2, P_2P_3^2, P_3P_1^2) = P_1P_2^2 \cdot P_2P_3^2 \cdot P_3P_1^2 = H_0. \end{cases}$$

Lema 18. α es acotada.

Demostración. Supongamos que la curva no es acotada, es decir, $P_iP_j^2 \rightarrow +\infty$, para al menos un par $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i \neq j$. Entonces $P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_1^2 \rightarrow +\infty$, y esto contradice al hecho de que la función I es constante (teorema 11). Por lo tanto α es acotada.

Q

Se tiene el siguiente lema que es parecido al lema 10 y que corresponde a colisiones de los vórtices.

Lema 19. α no converge o interseca a los planos $P_1P_2 = 0$, $P_2P_3 = 0$ y $P_3P_1 = 0$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la curva converge al plano $P_3P_1 = 0$. Si $h = \text{constante} > 0$, entonces necesariamente $P_1P_2^2 \cdot P_2P_3^2 \rightarrow +\infty$, ó bien, $P_1P_2^2 \rightarrow +\infty$ ó $P_2P_3^2 \rightarrow +\infty$. Lo cual no es factible ya que α es acotada. Q

También, de manera muy similar a los corolarios 1 y 2, se tienen los dos siguientes lemas.

Lema 20. α no se detiene en otro punto distinto de I_0, I_0, I_0 .

Demostración. Por el lema 17, el único punto crítico de H , es decir, cualquier otro punto $(P_1P_2^2, P_2P_3^2, P_3P_1^2)$ en el plano $I = I_0$ y distinto del punto crítico, es punto regular de H . Ahora, por el teorema flow box el punto $(P_1P_2^2, P_2P_3^2, P_3P_1^2)$ no es un punto doble de la curva. Y, más aún, como en el corolario 1, dicho punto regular no puede ser un punto asintóticamente estable. Q

Lema 21. α no tiene ciclos límite.

Demostración. Podemos decir que α es una curva de nivel de la función H sobre el plano $I = I_0$. Además, la función H es una integral primera del sistema □

$$P' = R \sum_{k \in \{1,2,3\}} \Gamma \frac{\overrightarrow{P_l P_k}}{l^2 P P_k},$$

donde $k \in \{1, 2, 3\}$. Para cualquier punto (P_1B^2, P_2B^2, P_3B^2) del plano $I = I_0$ y distinto del punto crítico la función H no es constante en ningún abierto V (sobre el plano $I = I_0$) de dicho punto. Así, por el teorema 7 tenemos que el campo generado por el sistema P'_1, P'_2 y P'_3 (sobre el plano $I = I_0$) no posee ningún ciclo límite. Q

Por último se demostrará el siguiente teorema que nos describe la dinámica de los puntos que tienen como trayectoria a las curvas en cuestión.

Teorema 12. Todas las curvas que satisfacen momento de inercia $I = \text{constante}$ y energía cinética $H = \text{constante}$ son cerradas y tienen

· el punto $\frac{I}{3}, \frac{I_0}{3}, \Sigma$ en su interior.

Demostación. Sea α una curva que satisface las hipótesis del teorema y por el lema 18, 19, 20 y 21 se concluye que α es una curva

cerrada. Más aún, se mostrará que α es como una *circunferencia deformada*.

Se afirma que α no puede autointersectarse en un punto \tilde{P} distinto del punto crítico, es decir, α no puede ser como una *lemniscata*.

En efecto, por el lema 17, todo punto P distinto del punto crítico es un punto regular de α . Así, en cada vecindad del punto se puede construir una flow box de tal manera que para cada partícula en dicha vecindad se mueve de manera paralela a la trayectoria que pasa por \tilde{P} . Por lo que no habría autointersección. Por otra parte, supongamos que la curva se autointersecta en el punto crítico. Entonces, por el teorema 5, en el interior de la curva (que está formada por al menos dos lóbulos) existe un punto crítico, lo que implica que α tiene al menos dos puntos críticos y esto contradice al lema 17. Así, se muestra que α no se autointersecta en ningún punto y mucho menos en el punto crítico. Por lo que no hay otra opción más que tener a α cerrada y sin puntos dobles, es decir, es como una *circunferencia deformada*.

Finalmente, por el lema 6, el conjunto $D = \text{Int}(\alpha)$ es compacto. Y además, como α es una curva de nivel de $h = H^2$ restringida al plano $I = \text{constante}$ y con la función $h = H^2$ de clase C^1 en D (se tienen las hipótesis del teorema 5), entonces se concluye que el único punto crítico está en $\text{Int}(\alpha)$. Q

A continuación se enuncian algunas consecuencias inmediatas del teorema 12.

1. Debido a que las curvas son cerradas y que cada punto de la curva es un punto regular, entonces las curvas son periódicas.
2. Dos curvas distintas no pueden intersectarse y como ambas contienen al punto crítico en su interior, entonces una de las curvas contiene en su interior a la otra, en el sentido de las curvas de Jordan.

Como se mencionó con anterioridad, cada punto de las curvas descritas en el teorema 12 nos proporciona información sobre el cuadrado de la longitud de los lados de un triángulo. Con esto, es necesario omitir aquellas curvas que se formen por *triángulos imposibles*, es decir, si P_1, P_2 y P_3 son tres puntos en un plano tales que $P_1P_2 + P_2P_3 < P_1P_3$, entonces no se puede formar un triángulo ya que los vértices son colineales. Por lo que hay que descartar aquellos triángulos cuya área sea igual a cero. Consideremos que los vértices P_1, P_2 y P_3 sobre el plano $I = \text{constante}$ son los vértices del triángulo cuya área sea cero y aplicando la fórmula de Herón:

$$\frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left[(P_1P^2 + P_2P^2 + P_3P^2)^2 - 2(P_1P^4 + P_2P^4 + P_3P^4) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{I^2 - 2(P_1P_2^4 + P_2P_3^4 + P_3P_1^4)} = 0,$$

lo que equivale a

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + P_3P_1^2 = \text{constante}.$$

Y como $(P_1P_2^2, P_2P_3^2, P_3P_1^2)$ son las coordenadas de los puntos que describen a α , entonces esta curva no es otra cosa más que la intersección de una esfera con un plano, es decir, es una circunferencia sobre el plano $I = \text{constante}$, que llamaremos *curva de Herón*. Una observación importante es que la curva de Herón no es más que una cota para las curvas de los verdaderos triángulos. Mostramos tales curvas en la figura (3.1).

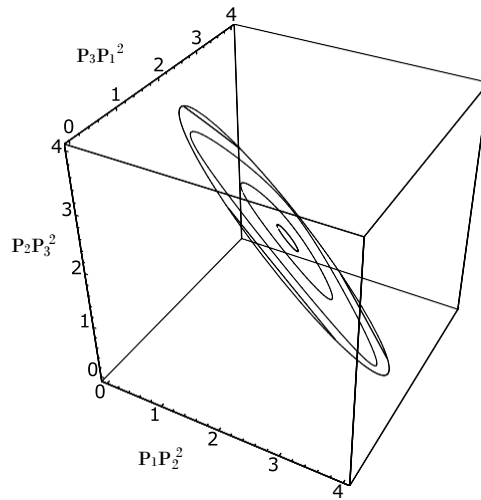


Figura 3.1

Y aplicando una rotación al plano $I = \text{constante}$ se obtiene la gráfica que se muestra en la figura (3.2).

Se puede observar que las curvas de los verdaderos triángulos son *círculos deformados* que, obviamente, son curvas periódicas y corresponden a un conjunto de configuraciones de triángulos módulo una isometría. Pero hay un problema con aquellas curvas que intersectan 3×2 veces a la curva de Herón, como se muestra en la gráfica (3.2) a una parte de este tipo de curvas que va de un punto A al punto B . Sin embargo, en base al teorema 12 esta sección de curva limitada por los puntos A y B (contenida en el interior de la curva de Herón) también es periódica. Por ejemplo y sin pérdida de generalidad, una partícula P que se mueve sobre la curva y en dirección de A a B posee una configuración $P_1P_2P_3$ y cuyo triángulo tiene un área distinta de cero. Luego al llegar al punto B su área es cero, ya que P_1, P_2 y P_3 son colineales. Y después, la partícula viajará en sentido opuesto y con

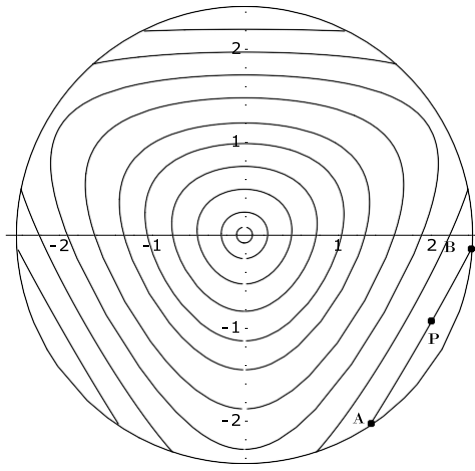


Figura 3.2

una configuración $P_1P_3P_2$ ([20]).

Entre todas las trayectorias del espacio de puntos de la forma (P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1) , el punto crítico $\frac{I_0}{3}, \frac{I_0}{3}, \frac{I_0}{3}$ corresponde a la configuración formada por un triángulo equilátero cuyos lados P_1P_2 , P_2P_3 y P_3P_1 tienen la misma longitud $\frac{I_0}{3}$. Finalmente, para esta configuración de un triángulo equilátero, se dará una descripción del movimiento de los vórtices P_1 , P_2 y P_3 respecto al centro de vorticidad Ω , ya que en este caso estamos considerando $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$.

La definición del centro de vorticidad

$$\Omega = \frac{\sum_{k=1}^3 \Gamma_k \overrightarrow{OP_k}}{\sum_{k=1}^3 \Gamma_k}$$

no depende del punto O (teorema 9). Entonces podemos asignar a O los puntos P_1 , P_2 y P_3 , y así obtener las expresiones siguientes

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{\Omega P_1} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \overrightarrow{P_k P_1} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{P_2 P_1} + \overrightarrow{P_3 P_1}) \\ \overrightarrow{\Omega P_2} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \overrightarrow{P_k P_2} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_3 P_2}) \\ \overrightarrow{\Omega P_3} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \overrightarrow{P_k P_3} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{P_2 P_3} + \overrightarrow{P_1 P_3}) \end{aligned}$$

□

3

$k=1$

Aplicando la transformación lineal R (rotación de 90° en sentido positivo trigonométrico)

$$\begin{aligned}
 \square R \overrightarrow{\Omega P_1} &= \frac{1}{3} R \overrightarrow{P_2 P_1} + \overrightarrow{P_3 P_1} \\
 \square R \overrightarrow{\Omega P_2} &= \frac{1}{3} R \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_3 P_2} \\
 \square R \overrightarrow{\Omega P_3} &= \frac{1}{3} R \overrightarrow{P_2 P_3} + \overrightarrow{P_2 P_3}
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Además, $P_1 P^2 = P_3 P^2 = P_3 P^2 = I_0$, luego

$$\begin{aligned}
 \square \frac{3}{P_1 P^2} R \overrightarrow{\Omega P_1} &= R \frac{P_2 P_1}{P_2 P^2} + \frac{P_3 P_1}{P_3 P^2} = P_1' \\
 \square \frac{3}{P_1 P^2} R \overrightarrow{\Omega P_2} &= R \frac{P_1 P_2}{P_1 P^2} + \frac{P_3 P_2}{P_3 P^2} = P_2' \\
 \square \frac{3}{P_1 P^2} R \overrightarrow{\Omega P_3} &= R \frac{P_1 P_3}{P_1 P^2} + \frac{P_2 P_3}{P_2 P^2} = P_3'
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

De la misma definición de centro de vorticidad tenemos la expresión

$$\Omega = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3),$$

que no es otra cosa más que el baricentro del triángulo de vértices P_1 , P_2 y P_3 . Pero como dicho triángulo es equilátero, entonces el baricentro coincide con el circuncentro. Por lo que $\Omega P_1 = \Omega P_2 = \Omega P_3 = \rho$, más aún, de las ecuaciones (3.11) se tiene a los vectores $\overrightarrow{\Omega P_1}$, $\overrightarrow{\Omega P_2}$ y $\overrightarrow{\Omega P_3}$ en función de los vectores $\overrightarrow{P_3 P_1}$, $\overrightarrow{P_1 P_2}$ y $\overrightarrow{P_2 P_3}$ cuyos módulos son iguales a $\frac{I_0}{3}$ a lo largo del tiempo, así ρ es constante. Con esto, se afirma que la trayectoria de P_1 , P_2 y P_3 , respecto a Ω , es una circunferencia.

En efecto, aplicando el teorema de existencia y unicidad al sistema de ecuaciones (3.13), que bajo ciertas condiciones iniciales $P_1(t_0)$, $P_2(t_0)$ y $P_3(t_0)$, e integrando respecto al parámetro t , se obtienen

$$\begin{aligned}
 \square P_1(t) &= P_1(t_0) + \frac{2t}{I_0} R \overrightarrow{\Omega P_1(t)} \\
 \square P_2(t) &= P_2(t_0) + \frac{2t}{I_0} R \overrightarrow{\Omega P_2(t)} \\
 \square P_3(t) &= P_3(t_0) + \frac{2t}{I_0} R \overrightarrow{\Omega P_3(t)}
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

que justamente nos describen las trayectorias circulares.

que justamente nos describen las trayectorias circulares.

Falta ver con que velocidad angular gira el triángulo. Para esto consideramos las tres ecuaciones (3.13), las cuales podemos reescribir

como sigue

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad & \square \quad P'_1 = \Gamma R \frac{\overrightarrow{\Omega P_1}}{\Omega P_1^2} \\
 & \square \quad P'_2 = \Gamma R \frac{\overrightarrow{\Omega P_2}}{\Omega P_2^2}, \\
 & \square \quad P'_3 = \Gamma R \frac{\overrightarrow{\Omega P_3}}{\Omega P_3^2}
 \end{aligned}$$

con $\Gamma = \frac{I_2}{9\rho_0^2}$. Podemos decir que cada una de las ecuaciones (3.15) es un caso descrito en la sección (2.3). Así, se describe el movimiento de los puntos P_1, P_2 y P_3 girando alrededor de Ω a una velocidad angular constante.

Conclusión

En este trabajo se redescubre una aplicación de la física, esto basado en teoremas clásicos de la geometría diferencial y del estudio de las ecuaciones diferenciales. Familiarizando varias técnicas geométricas, mediante el estudio de ciertas familias de curvas y superficies de nivel. De manera más específica, este escrito nos permite entender la dinámica de vórtices a partir de las ecuaciones de Helmholtz en mecánica de fluidos planos, incompresibles, sin viscosidad, como solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera. También nos ayuda a ver cómo razonamientos puramente geométricos permiten resolverlo en ciertos casos: N vórtices fijos y una partícula (cuando los vórtices tienen misma vorticidad y forman un polígono regular), 2 y 3 vórtices en interacción (con vorticidades iguales en el caso de 3 vórtices). En la resolución de cada caso se obtuvieron las trayectorias y velocidad de las partículas sometidas a dichos campos generados por el o los vórtices, y también, en el caso de los mismos vórtices en interacción respecto a un centro de vorticidad y un cambio de coordenadas.

Los resultados obtenidos sugieren el estudio de una generalización en el semiplano. Se trataría de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales del primer capítulo, con condiciones de frontera para $x = 0$ y en el infinito, para $x < 0$. Las soluciones nos proporcionarían nuevas ecuaciones de Helmholtz, cuyas soluciones, tal vez muy diferentes de las de esta tesis, describirían el movimiento de una presa hidráulica, ubicada en el eje de ecuación: $x = 0$. Tal trabajo podría representar una continuación natural de esta tesis.

Bibliografía

Referencias esenciales sobre los problemas integrables de N vórtices.

- [1] M. Celli. *Poincaré y el problema de los tres vórtices*. Misc. Matem. 57, 103 - 112 (2014).
- [2] M. Celli, J. Martínez y A. Silva . *Un paseo por algunas curvas de nivel elementales de la geometría*. ContactoS. 90, 69 - 74 (2013).
- [3] H. Aref. *Point vortex dynamics: a classical mathematics playground*. J. Math. Phys. 48, 65401.1-65401.23 (2007).
- [4] E. A. Lacomba. *Vórtices en fluidos y variable compleja*. Carta informativa de la SMM 57, 1 - 5 (2008).
- [5] P. K. Newton. *The N -vortex problem: analytical techniques*, Applied Mathematical Sciences vol. 145, Springer-Verlag, New York (2001).
- [6] H. Aref, P. K. Newton, M. A. Stremler, T. Tokeida y D. L. Vainchtein. *Vortex crystals*. Adv. Appl. Mech. vol. 39, 2002, 1-79.
- [7] M. Celli, E. Lacomba y E. Pérez-Chaveía, *On polygonal relative equilibria in the N -vortex problem*, J. Math. Phys., vol. 52, 2011, 10310.11-10310.18.
- [8] A. Hernández Garduño, *Three-point vortex dynamics as a Lie-Poisson reduced space*, arXiv:1609.05851 [math-ph] (2016).
- [9] A. Hernández Garduño y Banavara N. Shashikanth, *Reconstruction phases in the three-vortex and four-vortex problem*, arXiv:1610.01218v1 [math-ph] (2016).
- [10] J. L. Quiroz, *Geometría y dinámica en el problema de N vórtices puntuales*. Tesis de Maestría, Posgrado en Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapala (2016).
- [11] H. Poincaré, *Théorie des tourbillons* , Gauthier-Villars, Paris, 1893.
- [12] H. Aref, *Motion of the three vortices*, Phys. Fluids 22, 393-400 (1979).
- [13] H. Aref, N. Rott y H. Thomann, *Gröbli's solution of the three-vortex problem*, Annu. Res. Fluid Mech. 24, 1-20 (1992).
- [14] H. Aref y M. A. Stremler, *Four-vortex motion with zero circulation and impulse*, Phys. Fluids 11, 3704-3715 (1999).
- [15] B. Eckhardt, *Integrable four vortex motion*, Phys. Fluids 31, 2796-2801 (1988).
- [16] W. Gröbli, *Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden (Zücher and Furrer, Zurich, 1877)*, Reprinted in Vierteljahrsschr, Natforsch. Ges. Zur. 22, 37-81 (1877); ibid 22, 129-165 (1877).
- [17] J. L. Synge, *On the motion of three vortices*, Can. J. Math. Phys. 1, 257-270 (1949).
- [18] J. Tavantzis y L. Ting, *The dynamics of three vortices revisited*, Phys. Fluids 31, 1392-1409 (1988).

Otras referencias de interés sobre vórtices y problemas relacionados.

- [19] M. Celli, *Coreografías para ballet de estrellas*, Misc. Matem. 50, 1-10 (2010).
- [20] R. Montgomery, *The Three-body problem and the shape sphere*, The American Mathematical Monthly 122, 299-321 (2015).
- [21] A. García, *Euler y la mecánica celeste*, Misc. Matem. 45, 2007, 67-86.
- [22] A. Hernández Garduño y E. A. Lacomba, *Collisions and regularization for the 3-vortex problem*, J. Math. Fluid Mech. vol. 9, 75-86, 2007.
- [23] A. Hernández Garduño y E. A. Lacomba, *Collisions of four point vortices in the plane*, arXiv:math-ph/0609016 (2006).
- [24] H. Aref, P. L. Boyland y M. A. Stremler, *Topological fluid mechanics of point vortex motions*, Physica D. 175, 69-95 (2002).
- [25] H. Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*, J. Reine Angew. Math. 55, 25-55 (1858).
- [26] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische, Physik. Mechanik* (Teubner, Leipzig, 1876).

Referencias sobre resultados teóricos.

- [27] Hirsch W., Smale S. y Devaney R., *Differential Equations, Dynamical System and a Introduction to Chaos*, Academic Press, 2004.
- [28] V. I. Arnold, V. V. Kozlov y A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics, (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, volume 3: Dynamical system III)*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [29] J. A. Pérez, *Distribución Delta*, Misc. Matem. 38, 2003, 1-14.
- [30] W. Rudin, *Functional Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, 1991.
- [31] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Text in Applied Mathematics, Springer, 2006.
- [32] J. Marsden, A. Tromba, *Calculo Vectorial*, Fondo Educativo Interamericano, Ciudad de México, 1981, traducido del inglés.
- [33] J. Marsden, M. Hoffman, *Análisis Básico de Variable Compleja*, Editorial Trillas, Ciudad de México, 2008, traducido del inglés.
- [34] J. R. Munkres, *Topología*, Prentice Hall, 2a edición, 2008, traducido del inglés.