Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas
e Industriales (MCMAI)

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias presenta:

Alejandro Sánchez Peralta

El Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (Teorema Fundamental de las Finanzas)

Asesor: Dr. Carlos Ibarra Valdez

Julio de 2010

Agradecimientos

Quiero primero agradecer a mis padres por su apoyo incondicional. A mis compañeros y amigos, quienes con su buen humor me dieron ánimo para continuar. A los doctores Carlos Ibarra, JulioCésar García y Carlos Gabriel Pacheco, por compartir su tiempo y sus conocimientos para realizar y enriquecer este trabajo. Por último, quiero agradecer a Gabriela por la familia tan bonita que me ha dado, pues me impulsa a seguir adelante.

El Primer Teorema Fundamental
para la Valuación de Activos
(Teorema Fundamental de las Finanzas)

ÍNDICE GENERAL

Introducción

El estudio de los mercados financieros ha cobrado gran interés por parte de los matemáticos durante las últimas tres décadas. La administración de portafolios, el manejo del riesgo, la valuación de derivados financieros y los modelos de tasas de interés son los tópicos que se abordan de manera regular en las finanzas matemáticas. De hecho, el desarrollo de la teoría para la valuación de derivados, por su importancia en las cifras que se manejan puede considerarse como la ciencia aeroespacial de las principales bolsas de valores del mundo.

Pensemos en un ejemplo sencillo para puntualizar qué es un derivado financiero: Es muy posible que al ir al mercado nos encontremos con que el valor de algún artículo de nuestro interés ha subido de precio debido a que se elevó el precio de los materiales con los que se fábrica, e. g., la tortilla, cuyo precio depende del precio del maíz, del gas LP que se usa para cocinarlas y/o de la energía eléctrica que usa la máquina en la banda transportadora de las tortillas. Pues así, de la misma manera ocurre en los mercados financieros, ya que el valor de ciertos instrumentos se modifica al subir o bajar el precio de algún otro activo del cual dependen. En este caso estaríamos hablando de un activo derivado y de sus activos subyacentes.

El problema de la determinación del precio de un derivado es interesante por varias razones, tanto teóricas como prácticas. Por una parte si el precio del subyacente cambia de manera aleatoria, en vista de que el derivado depende del valor del subyacente, se tiene que el precio del activo derivado es aleatorio también. Esto hace necesaria la introducción de técnicas matemáticas sofisticadas para describir de manera adecuada los procesos involucrados.

Por otro lado, los mercados financieros poseen sus propias reglas y varios principios económicos entran en consideración. De esta forma es necesario tener en cuenta que la descripción matemática que se plantee sea consistente con las condiciones económicas que presenta el mercado. Lo anterior dificulta la tarea de establecer una metodología para la valuación de derivados, debido a que hay que obtener resultados matemáticos consistentes con los principios económicos.

De esta manera la teoría de martingalas y la maquinaria de procesos estocásticos en general son indispensables para llevar al cabo la tarea de la valuación. Sin embargo, existen otras formas para establecer resultados satisfactorios. A partir de la década de los 80's del siglo pasado, el uso del análisis funcional ha cobrado importancia en varias áreas de la ciencia aplicada, y en finanzas permite usar la noción del hiperplano separante para la valuación de derivados financieros.

Un referente obligado para la tarea de valuación es el modelo propuesto por Fisher Black y Myron Scholes -con el apoyo de Robert C. Merton, publicado en 1973. Este modelo, aunque con algunos puntos ásperos en su demostración ha probado ser una herramienta muy útil en el proceso de valuación de cierto tipo de derivados. Este método está basado en el principio de no arbitraje propuesto por S. Ross y utiliza el movimiento browniano geométrico para modelar el comportamiento del proceso de precios del subyacente. No obstante, aunque la fórmula de Black-Scholes es reconocida alrededor del mundo, existe un resultado clave -no tan famoso- que permite justificar en parte, la validez de la fórmula antes mencionada.

Este resultado es conocido en la ciencia actuarial como el "principio de equivalencia". En matemáticas financieras es conocido como el *Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (PTFVA).*

En nuestro caso decidimos abordar la presentación y demostración del PTFVA en su versión no trivial, ya que es un resultado clásico que menciona mucha gente, aunque pocos han tenido oportunidad de estudiar y entender a fondo. La escasa literatura sobre este tema accesible pero de buen nivel dificulta el análisis del resultado y limita el acercamiento de los estudiantes e incluso el de los profesionales en finanzas a esta valiosa información.

El objetivo principal de este trabajo es dar una presentación accesible y detallada del PTFVA, abordando la demostración del mismo desde un punto de vista geométrico y del análisis funcional, mostrando un panorama claro de lo que es en sí el teorema y la importancia que tiene dentro de la teoría para la valuación de activos derivados. Particularmente nos hacemos a la tarea de establecer de manera explícita algunos de los detalles teóricos del resultado sobre espacios de Hilbert en tiempo discreto y con un horizonte temporal finito, sin omitir la correspondiente interpretación financiera y tratando de no dejar de lado el carácter aplicado del resultado.

Complementamos este trabajo con varias notas y comentarios tanto históricos como bibliográficos acerca del *PTFVA*, y hacemos mención de la relación que existe con el enfoque de la valuación vía martingalas. Además que haremos anotaciones acerca de resultados más recientes tales como el *Segundo Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (STFVA)* y la introducción del movimiento browniano fraccional para el modelado de mercados financieros.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1, damos una serie de preliminares financieros con la intención de tener un "background" que nos permita hablar en los mismos términos a aquellos lectores que apenas incursionan en esta área y a las personas con un bagaje mayor. Mencionamos conceptos tales como el de activo financiero, activo derivado (opciones), portafolios financieros y cobertura. En el capítulo 2 se presenta una versión preliminar del PTFVA, y es una versión actualizada del clásico Dybvig y Ross de 1987, en el que aprece por primera vez con su nombre el PTFVA y en un contexto finito dimensional. El capítulo 3 presenta el PTFVA en su versión de Dalang-Morton-Willinger (D-M-W), así como en la versión general de Delbaen-Schachermayer de 1994. Se hace un esfuerzo por desarrollar y explicar algunos conceptos y argumentos clave tales como la noción de arbitraje en sus varias versiones, los espacios funcionales involucrados, así como las relaciones de las varias piezas de este rompecabezas: la versión de D-M-W, el lema de Kreps-Yan, el resultado de Ansel y Stricker, etc. Finalmente, en el capítulo 4 presentamos varias extensiones y complementos, especialmente: el estatus actual del PTFVA, el STFVA

(Segundo Teorema Fundamental de Valuación de Activos) y su relación con el PTFVA; la introducción del movimiento browniano fraccional y su relación con el concepto de arbitraje. Finalizamos con una lista mínima de preguntas abiertas.

CAPÍTULO 1

Preliminares Financieros

En este primer capítulo introducimos aquellos conceptos y definiciones financieras que resultan pertinentes para entender de manera adecuada la teoría desarrollada subsecuentemente. Es necesario mencionar que esto es de vital importancia debido a que la interpretación de los resultados meramente matemáticos se da en términos de estos conceptos y definiciones propios de la teoría financiera.

Comenzamos discutiendo la definición de activo financiero, y mencionamos algunos tipos de activos que son intercambiados de manera regular en los mercados financieros. Posteriormente introduciremos el concepto de portafolio financiero y daremos una descripción de los portafolios autofinanciables. Centramos luego nuestra atención en las opciones y exploraremos algunas de sus propiedades para dar paso a la conocida paridad put-call para opciones europeas. Después consideramos el importante concepto de arbitraje financiero y explicamos algunos ejemplos. Una vez hecho lo anterior, discutiremos cierto tipo de portafolios denominados portafolios replicantes y cerramos el capítulo con algunos comentarios acerca de las funciones de utilidad en el contexto de la valuación de activos derivados. Seguiremos de cerca [23]. También pueden consultarse [6], [9] ó [38].

1.1. Activos financieros

1.1.1. Introducción

Como el mismo nombre lo indica, *activo* es algo o alguien que actúa. Sin embargo, cuando hablemos de un *activo financiero* debemos entender que se trata de un contrato que representa un derecho económico o una inversión para quien entrega cierta cantidad de un bien (dinero, parte de una compañía, un inmueble, etc.). Además, un *activo financiero* puede ser tomado al mismo tiempo como un mecanismo de financiamiento para quien lo emite, pensemos por ejemplo en las acciones de alguna compañía. En este caso quien expide las acciones está dando ciertos derechos sobre la compañía, a cambio de cierta cantidad de efectivo.

A la entidad o persona que expide un contrato de este tipo se le conoce como *el emisor*. Este sujeto adquiere una obligación de carácter económico con la persona o entidad que adquiere el título, y a la cual se le denomina *tenedor*.

1.1.2. Tipos de activos

Existen varios tipos de activos dentro del sistema económico-financiero. Algunos de los más importantes son los que mencionamos a continuación [1]

- Acciones
- Divisas
- Bonos
- Títulos de tesorería
- Pagarés
- Papeles Comerciales
- Certificados de Depósito

Algunos de estos activos son muy apreciados por los agentes económicos debido a las propiedades intrínsecas de carácter financiero que poseen. De hecho, al interior de un mercado financiero existen una oferta y una demanda de tales activos, y al igual que con otro tipo de bienes éstos son deseados por los "traders" ya sea por conveniencia o por necesidad.

Estos consumidores también muestran su deseo de adquisición en base a la cantidad de dinero que están dispuestos a pagar por tales "mercancías". De esta manera, cabe pensar en el precio que deben tener los activos más demandados con la finalidad de mantener un equilibrio en el mercado de valores. Es así que surge toda un área de estudio en economía, finanzas y matemáticas enfocada en encontrar tal precio.

1.2. Portafolios

1.2.1. Introducción

Al interior de la matemática financiera uno de los objetos de estudio más importante por su utilidad y su interpretación son los portafolios. De hecho, este concepto puede catalogarse como universal dentro de las finanzas matemáticas. En forma general podemos decir que un portafolio es un conjunto de instrumentos financieros en el que un determinado participante del mercado de valores coloca sus inversiones para su posterior intercambio. Para nosotros, un arreglo que conste de todas las deudas y posesiones de un determinado agente del mercado será un portafolio. Este concepto nos será de utilidad a la hora de trabajar no solamente con los conceptos financieros, sino que nos permitirá dar una interpretación matemática de los mercados en el contexto de álgebra lineal.

1.2.2. Portafolios financieros

En las secciones venideras consideraremos varios aspectos de los portafolios financieros. Más por el momento debemos formalizar este concepto.

[1] Para consultar algunas de las definiciones véase el glosario

Supongamos que existe un mercado que consta de n activos financieros en el cual se tiene un horizonte temporal $I \subset \mathbb{R}$. Este horizonte I puede ser cualquiera de los siguientes conjuntos

$$\{0,1\}, \{0,1,2,\ldots,T\}, \{T_0, T_1, T_2 \ldots\}, [0,T], [0,\infty).$$

Consideremos $(\Omega, \Im, (\Im)_{t\in I}, P)$ un espacio de probabilidad completo filtrado con medida de probabilidad P. Los activos tienen como proceso de precios $S(t) = (S_1(t), \ldots, S_n(t))$, donde cada una de sus componentes es un proceso estocástico, $S_i : \Omega \times I \to \mathbb{R}_+$, adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t\in I}$, donde $\Im_t$ nos representa la información disponible hasta el tiempo t. (Ver [6])

El precio para el i-ésimo activo al tiempo t está dado por $S_i(t)$, el cual debido a la positividad de los precios satisface que $S_i(t) > 0$, para cualquier $t \in I$.

Definición 1.2.1. *Si Y es un proceso estocástico a valores reales tal que $Y(t)$ es $\Im_t$-medible para cualquier $t \in I$, entonces decimos que Y es adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t\in I}$.*

Definición 1.2.2. *Un portafolio es un proceso sobre el espacio $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\in I}, P)$ de la siguiente forma*

$$q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t)),$$

donde $q_i(t) : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ es un proceso adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t\in I}$, y representa la cantidad de unidades del activo i-ésimo que hay en el portafolio al tiempo t.

Notemos que en la definición de portafolio, cualquiera de las entradas puede ser positiva, negativa o nula. Para cuando se tenga un valor positivo diremos que se tiene posesión de la cantidad de activos en cuestión. Si se da el caso de una cantidad negativa se dice que se tiene una deuda. Dentro de la jerga financiera es común decir que **"se está largo"** en el i-ésimo activo si $q_i(t) > 0$, y que **"se está corto"** en el activo i-ésimo si $q_i(t) < 0$. Una cuestión que es importante considerar es que en un portafolio se suelen introducir activos financieros que no son mercadeables, tales como los reclamos contingentes (opciones[2], bonos). Un portafolio en la vida real suele tener un gran número de entradas en las que se puede estar largo ó corto, esto con la finalidad de diversificar el riesgo, entre otras razones.

1.2.3. Valor del portafolio

Si $S(t)$ es un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t\in I}$, el cual modela el proceso de precios de los activos, entonces el valor del portafolio al tiempo t está dado por la siguiente expresión

$$(Vq)(t) = \langle q(t), S(t)\rangle = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) \cdot S_i(t). \tag{1.1}$$

Es decir, es el valor en dinero, o precio de contado (precio spot) del total de las deudas y posesiones del portafolio.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos un bono como activo libre de riesgo cuyo proceso de precios está dado por $dB(t) = B_0 re^{rt}$, y un activo con riesgo de tal manera que este último siga un movimiento browniano geométrico. Entonces el precio del activo riesgoso viene dado por

[2]El concepto de opción será tratado en la sección 1.3

$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$, y si al tiempo $t > 0$, se consideran $a(t)$ y $b(t)$ cantidades de cada uno de los activos respectivamente, entonces nuestro portafolio está conformado como $(a(t), b(t)) \sim (bono, activo)$, y su valor al tiempo t es

$$(Vq)(t) = a(t)B_0 \exp(rt) + b(t) \exp\left[(\frac{\mu - \sigma^2}{2})t + \sigma W(t)\right].$$

La introducción del movimiento browniano geométrico se debe en gran parte a que es un proceso aleatorio sencillo, que es función del MB y concuerda con la positividad de los precios.

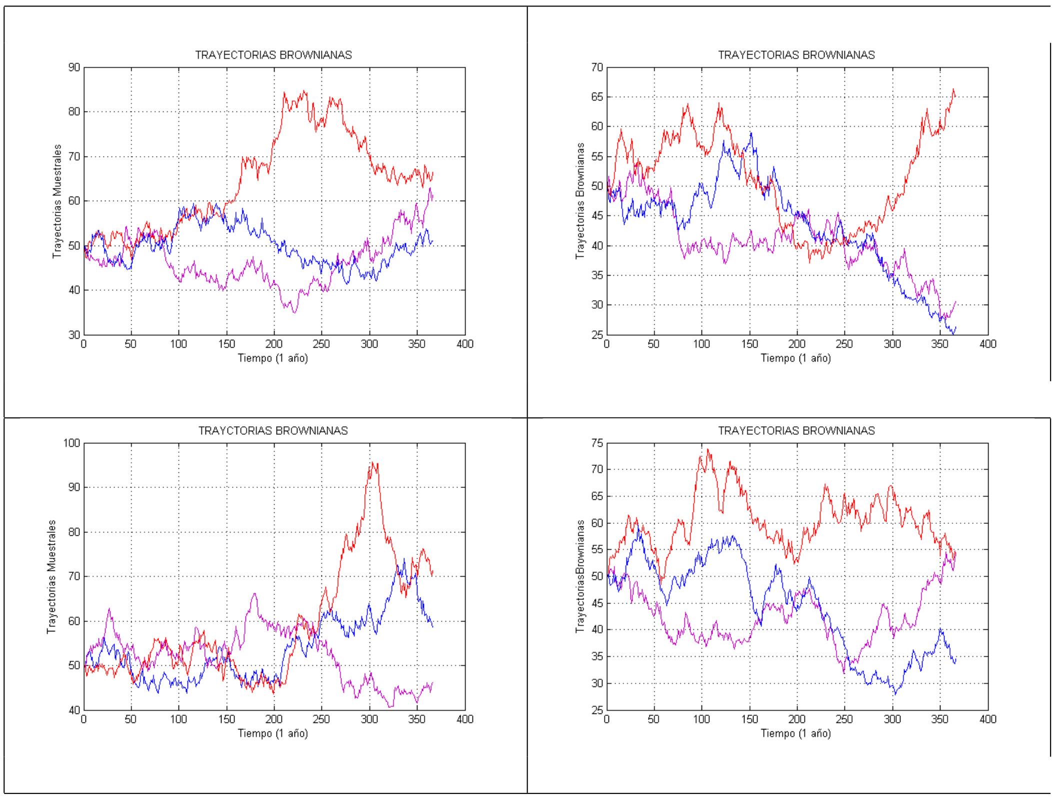

Figura 1.1: Trayectorias para el precio de un call europeo

En la Figura 1.1 podemos ver tres trayectorias para el precio del subyacente de una opción de compra, en cuatro escenarios del mercado.

Ejemplo 1.2.2. Supongamos que se colocan bonos, activos y una opción europea de compra (call) sobre el activo en un portafolio. Es decir, el portafolio es de la forma $(a(t), b(t), 1) \sim (bono, activo, \textit{opción sobre el activo})$, donde la opción es un activo no mercadeable. En general las cantidades de este tipo de activos suelen ser constantes ó cambiar en fechas determinadas. En este caso el valor del portafolio es

$$(Vq)(t) = a(t)B_0 \exp(rt) + b(t)S_0 \exp\left[(\frac{\mu - \sigma^2}{2})t + \sigma W(t)\right] + SN(d_1) - K\exp\{-r\tau\}N(d_2),$$

donde τ es el tiempo de maduración de la opción, K el precio de ejercicio del la opción y r la tasa libre de riesgo. Además de que los últimos dos sumandos corresponden a la fórmula de Black-Scholes (Ver [6]).

1.2.4. Portafolios autofinanciables

Uno de los conceptos claves dentro del contexto de portafolios es la condición de autofinanciabilidad. Podemos parafrasear ésta de la siguiente manera: *Se dice que un portafolio es autofinanciable si el cambio en el valor de dicho portafolio depende solo de los cambios en los precios de sus componentes y no en el de sus cantidades.* Es decir, que no entran ni salen flujos netos del portafolio. Otra forma de visualizarlo es decir que lo que compro/vendo, depende únicamente de lo que gané o perdí debido al cambio de los precios.

Para el caso discreto consideremos un portafolio con n entradas y $S(t)$ un vector para el proceso de precios. Si tomamos el periodo de tiempo comprendido entre t y $t+1$, entonces

$$\Delta(Vq)(t) = (Vq)(t+1) - (Vq)(t),$$

de donde se sigue que

$$\Delta(Vq)(t) = \langle q(t+1), \Delta S(t)\rangle + \langle \Delta q(t), S(t)\rangle .$$

Así, la condición de autofinanciabilidad para el caso en el que consideramos un solo periodo es

$$\Delta(Vq)(t) = \langle q(t+1), \Delta S(t)\rangle ,$$

lo que se puede reescribir como

$$\Delta(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t+1)[S_i(t+1) - S_i(t)].$$

Debido a que el cambio del valor del portafolio depende solamente de los cambios en los precios, podemos definir la condición de autofinanciabilidad en términos generales como sigue.

Definición 1.2.3. *Sea q un portafolio con n entradas, $S(t)$ un vector para el proceso de precios e $I = \{T_0, T_1, \ldots, T_N\}$ un horizonte temporal discreto finito. Diremos que el portafolio q es auto-financiable si*

$$\Delta(Vq)(T) = \langle q(T_{k+1}), \Delta S(T_k)\rangle , \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

es decir

$$\Delta(Vq)(T) = \sum_{i=1}^{n} q_i(T_{k+1})[S_i(T_{k+1}) - S_i(T_k)], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

O en forma equivalente el portafolio es autofinanciable si se satisface que

$$\sum_{i=1}^{n}[q_i(T_{k+1}) - q_i(T_k)]S_i(T_k) = 0, para \;\; k = 0, 1, \ldots N-1.$$

Para el caso a tiempo continuo consideramos dos posibles horizontes temporales, a saber $I = [0, T]$ ó $I = [0, \infty)$.

Definición 1.2.4. *Sea I un horizonte temporal continuo y $S(t)$ un vector para el proceso de precios. Un portafolio q, que conste de n entradas es auto-financiable si*

$$d(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) dS_i(t),$$

donde $S_i(t)$ es el proceso de precios para el i-ésimo activo del portafolio al tiempo t.

Ejemplo 1.2.3. El ejemplo más sencillo que podemos encontrar para un portafolio que sea autofinanciable es un portafolio que sea constante. Si $S(t)$ es un proceso para modelar el comportamiento de los precios y $q(t)$ un portafolio con n entradas, entonces el valor del portafolio está dado como

$$(Vq)(t) = \langle q(t), S(t) \rangle ,$$

de tal manera que el cambio en el valor del portafolio es

$$d(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} [q_i(t) dS_i(t) + S_i(t) dq_i(t)].$$

Debido a que $q_i(t)$ es constante para toda $i = 1, \ldots, n$, se sigue que $dq_i(t) = 0$, para toda i. Por lo que

$$d(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i dS_i(t).$$

■

Consideremos el siguiente lema que nos ayudará a dar un paso más en el manejo del valor de un portafolio en tiempo continuo.

Lema 1.2.1. *Si $X(t)$, $Y(t)$ son procesos de Itô unidimensionales, entonces el producto $X(t)Y(t)$ también es un proceso de Itô, y su diferencial estocástica está dada por*

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dX(t)dY(t).$$

Demostración. Del lema de Itô en dos dimensiones (ver [38], Cap. 4, pp.167)

$$df(t, X, Y) = f_t dt + f_x dX + f_y dY + f_{xy} dX dY + \frac{1}{2}[f_{xx} dX dX + f_{yy} dY dY].$$

Si $f(t, x, y) = xy$, entonces

$$df(t, x, y) = ydX + xdY + dXdY,$$

y así

$$d(X(t)Y(t)) = Y(t)dX(t) + X(t)dY(t) + dX(t)dY(t).$$

■

El cambio en el valor de un portafolio en tiempo continuo esta dado como

$$d(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} [q_i dS_i(t) + S_i(t) dq_i + dq_i dS_i(t)].$$

Aplicando el lema 1.2.1 a la expresión anterior se puede obtener una definición alternativa para la condición de autofinanciabilidad a tiempo continuo: *Decir que un portafolio es auto-financiable es equivalente a pedir que*

$$\sum_{i=1}^{n} [S_i(t) dq_i + q_i dS_i(t)] = 0.$$

Ejemplo 1.2.4. Sea $q(t)$ un portafolio determinístico con n entradas y $S(t)$ un vector para el proceso de precios. Tenemos entonces que

$$dq_i(t) = q_i'(t)dt$$

y

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dB_i(t).$$

El valor del portafolio es

$$(Vq)(t) = \langle q(t), S(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n} q_i(t)S_i(t),$$

por lo que

$$d(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} [q_i(t)dS_i(t) + S_i(t)dq_i(t)].$$

Así, la condición de autofinanciabilidad toma la siguiente forma

$$\sum_{i}^{n} S_i(t)q_i'(t) = 0.$$

Es decir

$$\left\langle S(t), q'(t) \right\rangle = 0.$$

■

Ejemplo 1.2.5. Un ejemplo a tiempo continuo es el modelo Black-Scholes (véase [8]). Consideremos un portafolio de la forma $q(t) = (a(t), b(t))$, donde la primera entrada representa alguna cantidad de activos con riesgo $a(t)$, y la segunda entrada cierta cantidad de bonos como activos libres de riesgo $b(t)$. Si los procesos que modelan las correspondientes dinámicas de precios están dados por las EDE's

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \quad d\beta(t) = r\beta(t),$$

donde r es la tasa libre de riesgo, entonces el portafolio $(a(t), b(t))$ es autofinanciable. De hecho los pesos para los activos que satisfacen esta condición son

$$a(t) = f_x(t, S(t)), \quad b(t) = \frac{1}{r\beta(t)} \left[f_t(t, S(t)) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S(t))\sigma^2 S^2(t) \right],$$

donde f es una función suficientemente suave y tal que $(Vq)(t) = f(t, S(t))$. La manera en la que se obtienen estos pesos se verá en detalle en el ejemplo 1.5.2.

■

1.3. Opciones

1.3.1. Introducción

Existen una gran cantidad de contratos dentro de los mercados financieros. Algunos de estos contratos son del tipo de acuerdos que están inmersos dentro de los denominados

derivados financieros. Podemos definir un derivado como un activo cuyo valor depende de los valores de uno o más **activos subyacentes**, tales como acciones, tasas de interés, productos básicos (commodities) o índices sobre el stock. Los tipos de derivados más comunes son los contratos forward, los futuros, las opciones y los swaps. Nosotros estamos particularmente interesados en las opciones.

1.3.2. Opciones europeas

Definición 1.3.1. *Una **opción de compra de tipo europeo (european call option)** es un contrato que confiere al poseedor de la opción el derecho, pero no la obligación de comprar cierta cantidad de un activo por un precio fijo acordado de antemano, conocido como precio de ejercicio X (strike price), a una fecha futura prefijada, la cual se llama tiempo de maduración T (maturity date).*

Definición 1.3.2. *Una **opción de venta de tipo europeo (european put option)** es un contrato que confiere al poseedor de la opción el derecho, pero no la obligación de vender cierta cantidad de un activo por un precio fijo acordado de antemano (el precio de ejercicio X o strike price), a una fecha futura prefijada T.*

Una opción está determinada por su perfil de pago (payoff). El siguiente perfil de pago corresponde a un call europeo

$$\Pi(T) = \begin{cases} S(T) - X, & \text{si } S(T) \geqslant X, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Aquí $S(T)$ es el precio del activo subyacente, X es el precio de ejercicio y T el tiempo de maduración. De hecho, debido a que no sabemos la manera en la que se comportará el precio del subyacente a la fecha de ejercicio, el payoff de la opción es una variable aleatoria. He aquí el origen del término "reclamo contingente". En términos más generales tenemos la siguiente

Definición 1.3.3. *Consideremos un mercado financiero con un vector para el proceso de precios $S(t) = (S_1(t), \ldots, S_n(t))$, $t \in I$. Se dice que un reclamo contingente X es simple, si es de la forma $X = \Phi(S(T))$, donde Φ es denominada la función de contrato. Además, si el reclamo en cuestión tiene fecha de ejercicio T, el reclamo debe ser $\Im_T$-medible*

Observemos entonces que una opción de compra de tipo europeo es un reclamo contingente simple, para el cual la función de contrato es el perfil de pago.

En la Figura 3.1 tenemos la gráfica del payoff para una posición larga de la opción de compra europea[3]. Notemos que el payoff es una función no negativa, esto hace necesario el pago de una prima por asumir el riesgo de pérdida. La prima viene del hecho de que el poseedor de la opción no come riesgo pero quien escribe o vende la opción sí.

Una manera un poco más corta para denotar el payoff de un call europeo es la siguiente $\Pi(T) = (S(T) - X)^+$. Por otra parte, para una opción de venta de tipo europeo el perfil de pago sería $\Pi(T) = (X - S(T))^+$.

De esta forma, si r es la tasa libre de riesgo, al tiempo de maduración la ganancia del comprador de un call europeo está dada por la expresión $(S(T) - X)^+ - C^E e^{rT}$, donde C^E es la prima pagada por la opción.

[3] Imagen tomada de wikipedia

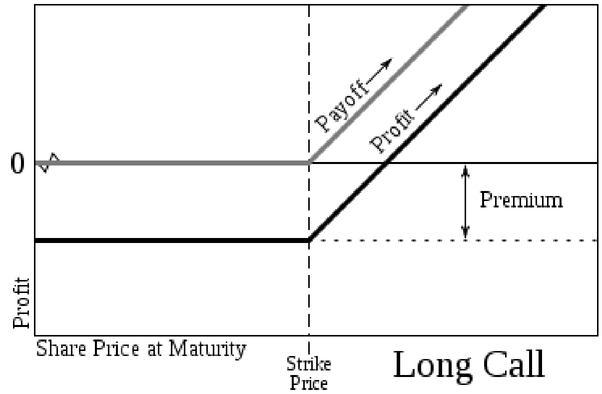

Figura 1.2: Gráfica para el payoff de un call europeo

Si por otra parte consideramos a un agente del mercado que compra una opción de venta de tipo europeo, entonces la ganancia que obtiene es $(X - S(T))^+ - P^E e^{rT}$.

En la Figura 3.2 podemos ver la gráfica del perfil de pago para una posición larga en una opción de venta de tipo europea. Es decir, para la gráfica mostrada "se está largo en el put"[4].

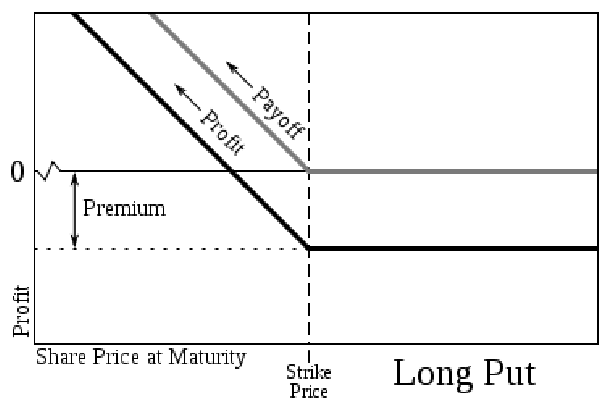

Figura 1.3: Gráfica para el payoff de un put europeo

1.3.3. Opciones Americanas

Estas opciones tienen un plus sobre las opciones de tipo europeo, esto las hace, al menos intuitivamente más caras que los contratos del primer tipo. Aunque esto se verá más claramente en las definiciones.

Definición 1.3.4. *Una* ***opción de compra de tipo americano (american call option)*** *es un contrato que confiere al poseedor de ésta el derecho, pero no la obligación de comprar cierta cantidad de activos del stock* ***en cualquier fecha comprendida entre la firma del contrato y el tiempo de maduración*** *T, por un precio acordado de antemano X, denominado precio de ejercicio (strike).*

[4]Imagen tomada de wikipedia

E igual que antes tenemos la correspondiente definición para el put americano.

Definición 1.3.5. *Una* ***opción de venta de tipo americano (american put option)*** *es un contrato que confiere al poseedor de ésta el derecho, pero no la obligación de vender cierta cantidad de activos del stock* ***en cualquier fecha comprendida entre la firma del contrato y el tiempo de maduración*** T*, por un precio acordado de antemano* X*, denominado precio de ejercicio (strike).*

Así, el plus que mencionamos ha quedado al descubierto. Éste es el hecho de que las opciones americanas admiten un ejercicio temprano, lo cual contrasta fuertemente con las opciones de tipo europeo que solo pueden ser ejercidas al tiempo de maduración. Por la forma en la que se conforman este tipo de opciones es más difícil valuarlas, aunque en principio es intuitivo que

$$C^A \geqslant C^E \quad \text{y} \quad P^A \geqslant P^E,$$

donde C^A denota al call americano y C^E al call europeo. De forma similar para las opciones de venta P^A denota al put americano y P^E al put europeo.

1.3.4. La paridad put-call para opciones europeas

Existen varias igualdades y desigualdades generales para las opciones que ayudan a la hora de determinar sus correspondientes precios. En particular, la importante relación conocida como la *paridad put-call.*

Proposición 1.3.1 (Paridad put-call). *Consideremos un put y un call europeo, ambos con los mismos precios de ejercicio* K *y fecha de maduración* T*. Si* r *es la tasa libre de riesgo, entonces*

$$C^E - P^E = S(0) - Ke^{-rT}. \tag{1.2}$$

Daremos la demostración de esta proposición basándonos en el principio de no arbitraje que veremos en la próxima sección. Así que por el momento dejamos la prueba de lado.

Como podemos observar, de la paridad put-call basta saber cómo valuar una de las opciones para conocer el precio de la otra. Algunas propiedades importantes que podemos obtener a partir de esto se enuncian a continuación.

Proposición 1.3.2. (Propiedades). *Sea* $S(t)$ *el valor del subyacente,* K *el precio de ejercicio para el call y para el put (*$C(\cdot)$ *y* $P(\cdot)$ *respectivamente) y* T *el tiempo de maduración para ambas opciones. Entonces se satisfacen las siguientes condiciones*

(1) $S(t) - Ke^{-r(T-t)} \leqslant C(t), \quad t \in [0,T]$

(2) $C(t) < S(t), \quad t \in [0,T]$

(3) *Si* $K' < K''$*, entonces* $C(K'') \geqslant C(K')$ *y* $P(K'') \leqslant P(K')$

(4) $|C(K) - C(K')|, |P(K) - P(K')| \leqslant e^{-r(T-t)}|K - K'|$

Es posible dar argumentos de arbitraje para establecer algunas otras propiedades. En particular, el sorprendente hecho de que $C^A = C^E$ (ver [9], Cap. 7, pp. 157-158).

1.4. Arbitraje financiero

1.4.1. Introducción

El proceso de comprar y vender simultáneamente (ó casi) un mismo contrato en mercados distintos, generando algún beneficio en base a los diferenciales de precio se denomina *arbitraje financiero*. Este intercambio de activos es una estrategia de inversión que nos proporciona una ganancia libre de riesgo y sin inversión alguna de por medio.

El estudio contemporáneo del arbitraje[5] se centra en el análisis de las implicaciones de la ausencia de oportunidades de arbitraje en los mercados financieros. Esto se debe al hecho de que algún agente del mercado con una actitud racional podría tomar ventaja de tales oportunidades para "hacer dinero de la nada". Por otra parte, la condición de no arbitraje es necesaria, debido a que el arbitraje es incompatible con el el concepto de equilibrio. Tal como veremos a lo largo de esta sección, es posible usar el principio de no arbitraje junto con el concepto de portafolio para probar numerosos resultados en relación a la valuación de activos derivados.

1.4.2. Dos tipos de arbitraje

Por cuestiones de lenguaje y por las situaciones que pueden presentarse al interior de un mercado financiero, se establecen dos tipos de arbitraje, para el caso a tiempo continuo: $I = [0, T]$ ó $I = [0, \infty]$. La adaptación al caso discreto es inmediata.

Definición 1.4.1. (Arbitraje) *Un arbitraje débil en un mercado financiero es un portafolio admisible y auto-financiable q, tal que existe $\tau \in I,\ \tau > 0$ con*

$$P[(Vq)(0) = 0] = 1,$$

$$P[(Vq)(\tau) \geqslant 0] = 1,$$

$$P[(Vq)(\tau) > 0] > 0.$$

Definición 1.4.2. (Arbitraje fuerte) *Un arbitraje fuerte en un mercado financiero es un portafolio admisible y auto-financiable q, tal que existe $\tau > 0,\ \tau \in I$ con*

$$P[(Vq)(0) = 0] = 1,$$

$$P[(Vq)(\tau) > 0] = 1.$$

Ejemplo 1.4.1. En el modelo binomial a 1-periodo (ver [6], Cap. 1), si no hay arbitraje fuerte se cumple que $d \leqslant (1 + r) \leqslant u$.

Consideremos $1 + r < d$, entonces se satisface $1 + r < u$, donde r es la tasa de interés libre de riesgo. Consideremos el portafolio $(S_0, -S_0) \approx (stock, bono)$, entonces

$$(Vh)(0) = S_0 - S_0 = 0.$$

[5] En la década de los setenta Stephen Ross enuncia su teoría de arbitraje la cual sostiene "que el rendimiento esperado de un activo financiero puede ser modelado como una función lineal de varios factores macroeconómicos, donde la sensibilidad a cambios en cada factor es representada por un factor específico, conocido como el factor beta"

Pero cuando llegamos al tiempo 1, se tienen dos posibilidades para el valor del portafolio dependiendo si el valor del activo sube o baja

$$S_1 = \begin{cases} S_0 u, & \textit{si el mercado sube} \\ S_0 d, & \textit{si el mercado baja.} \end{cases}$$

Entonces se tienen también dos posibilidades para el valor del portafolio,

$$(Vh)(1) = \begin{cases} S_0(u-(1+r)), & \textit{si el mercado sube,} \\ S_0(d-(1+r)), & \textit{si el mercado baja.} \end{cases}$$

Por hipótesis $1+r<d$, de donde se sigue que $P[(Vh)(1)>0]=1$, lo cual implica una contradicción al supuesto de que no hay arbitraje fuerte.

Supongamos ahora que $d<u<1+r$, y sea $h=(-1,1)\approx(\mathit{stock},\mathit{bono})$ un portafolio. Entonces $(Vh)(0)=0$, y al tiempo 1

$$(Vh)(1) = -S_1 + (1+r)S_0,$$

es decir,

$$(Vh)(1) = \begin{cases} S_0(-u+(1+r)), & \textit{si el mercado sube,} \\ S_0(-d+(1+r)), & \textit{si el mercado baja.} \end{cases}$$

En vista de que suponemos $u<1+r$, tenemos que el valor del portafolio siempre es positivo con probabilidad uno. Es decir, que se trata de un arbitraje fuerte.

■

Observación: Un hecho importante que se tiene para ejemplo 1.4.1, es que el recíproco también es cierto. Es decir que si se satisface $d\leqslant(1+r)\leqslant u$, entonces en el modelo binomial 1-periodo no hay arbitraje fuerte.

Lema 1.4.1. *En el modelo binomial 1-periodo no hay arbitraje fuerte sii* $d\leqslant(1+r)\leqslant u$.

Ejemplo 1.4.2. Sea $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ de manera tal que $P[\{\omega_1\}],P[\{\omega_2\}],P[\{\omega_3\}]>0$, y $P_1+P_2+P_3=1$. Consideremos dos activos cuyos precios en $t=0$ son $S_1(0)=1=S_2(0)$, y la matriz de transición

$$\mathbb{S}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

donde las columnas representan los precios de los activos y los renglones los estados del mundo. Entonces el portafolio $q=(-1,1)$ representa una oportunidad de arbitraje.

El arbitraje se sigue de considerar el balance del portafolio en cada uno de los escenarios. Para ω_1 el valor del portafolio es $(Vq)(1)=0$, en ω_2 su valor es $(Vq)(1)=-2$, y en ω_3 tenemos que $(Vq)(1)=1$. Así, en el estado del mundo ω_2 el portafolio no es admisible, por lo que no se genera arbitraje alguno. Sin embargo, de los otros dos escenarios se tiene que

$$P[(Vq)(1)\geqslant 0]=1,$$

además de que

$$P[(Vq)(1)>0]=P[\omega_3]>0,$$

por lo que se tiene un arbitraje débil.

■

Demostración (de la proposición 1.3.1). Supongamos que no se tiene la igualdad en la ecuación (1.2), y que

$$C^E - P^E > S(0) - Ke^{-r(T)}, \quad \text{con probabilidad positiva.}$$

Consideremos un portafolio con las siguientes posiciones

$$q = (call, put, activo) \sim (-1, 1, 1).$$

Así que $(Vq)(0) = 0$.

Al tiempo de maduración T, se tienen los dos casos

$$S(T) < K \quad \text{ó} \quad S(T) > K.$$

Si sucede el primero se ejerce el put, y si sucede el segundo se ejerce el call. De esta manera el balance del portafolio está dado por

$$(Vq)(T) = C^E \exp(rT) - P^E \exp(rT) - S(0)\exp(rT) + X,$$

el cual por hipótesis es positivo con probabilidad positiva, lo que contradice al principio de no arbitraje. Ya que de esta manera se tiene un arbitraje fuerte.

Para el caso que $C^E - P^E < S(0) - Ke^{-r(T-t)}$ se usa un argumento similar con un portafolio de la siguiente forma

$$q = (call, put, activo) \sim (1, -1, -1).$$

■

1.4.3. Medida neutral al riesgo

Podemos rescatar un beneficio adicional del ejemplo 1.4.1, si escribimos las cantidades implicadas en una forma más sugerente. Para esto recordemos que la condición necesaria y suficiente para la ausencia de arbitraje en el modelo binomial es

$$d < 1 + r < u,$$

donde r es la tasa libre de riesgo (véase [6]). Esto último es equivalente a decir que la cantidad $1 + r$ es una combinación convexa de los factores u y d. Dado que u ocurre con probabilidad q_u, y d ocurre con probabilidad $q_d = 1 - q_u$, tenemos que

$$1 + r = uq_u + dq_d. \tag{1.3}$$

Sea Q una medida de probabilidad y Z una variable aleatoria tales que $Q(Z = u) = q_u$, y $Q(Z = d) = q_d$. Denotemos como

$$E^Q[S(1)] = q_u S(0)u + q_d S(0)d.$$

Lo cual significa que bajo la medida Q, el valor esperado para el precio del activo riesgoso al tiempo 1, es el promedio ponderado de los factores u y d junto con el precio del activo al tiempo 0.

Multiplicando la ecuación (1.3) por $S(0)$ y dividiendo por $1+r$, tenemos que

$$\frac{1}{1+r}E^Q[S(1)] = S(0). \tag{1.4}$$

Esta última es una expresión bien conocida entre los economistas, y es denominada *fórmula de valuación neutral al riesgo*. Dicha fórmula proporciona el precio de un activo del stock en el presente como el valor esperado descontado del precio del activo del stock en el siguiente periodo de tiempo.

Así, para el modelo binomial a un periodo tenemos la siguiente definición.

Definición 1.4.3. *Una medida de probabilidad Q se llama medida martingala si cumple la igualdad 1.4.*

Esta medida de probabilidad Q es una medida neutra al riesgo, para la cual las probabilidades de ocurrencia de los factores u y d están dadas por

$$q_u = \frac{1+r-d}{u-d}, \text{ y } \; q_d = \frac{u-1-r}{u-d},$$

las que son conocidas como *probabilidades neutras al riesgo*. Ambas son mayores que cero y $q_u + q_d = 1$. Los detalles de esta deducción pueden consultarse en el libro de Steven E. Shreve, Vol.1. The binomial no-arbitrage pricing model.

Con el desarrollo anterior y la definición 1.4.3, podemos establecer la condición de no arbitraje de la manera siguiente.

Teorema 1.4.1. *En el modelo binomial 1-periodo no existen oportunidades de arbitraje sii existe una medida de probabilidad neutral al riesgo Q.*

Demostración. Solamente probaremos una de las implicaciones, ya que la otra se sigue del desarrollo anterior. Supongamos que existe una medida martingala Q, tal que

$$\frac{E^Q[S_1]}{1+r} = S_0.$$

Así, existen q_u y q_d probabilidades neutras al riesgo tales que $q_u + q_d = 1$. Usando la definición de esperanza tenemos que

$$q_u S_1^u + q_d S_1^d = S_0(1+r),$$

de donde se sigue

$$\begin{aligned} q_u S_0 u + q_d S_0 d &= S_0(1+r) \\ \Rightarrow q_u u + q_d d &= 1+r. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $1+r$ es combinación convexa de u y d, lo cual implica que $d \leqslant 1+r \leqslant u$. Usando el lema 1.4.1 tenemos que no hay arbitraje fuerte.

■

Nota: Este es de hecho una primera versión del PTFVA. En los capítulos 3 y 4 generalizaremos considerablemente estos desarrollos.

1.5. Portafolios replicantes

1.5.1. Introducción

Una parte medular dentro de la valuación por arbitraje consiste en encontrar un portafolio que esté compuesto de diversos activos del mercado, de tal manera que el valor de dicho portafolio iguale el valor de algún reclamo contingente a lo largo de cierto horizonte temporal. Esto es lo que se conoce como réplica o cobertura financiera. Además, desde un punto de vista meramente financiero, el hecho de tener en nuestros haberes al portafolio replicante equivale a poseer el reclamo mismo.

1.5.2. Replicación financiera

Definición 1.5.1. *Diremos que un reclamo contingente $X = \phi(S(T))$, con fecha de maduración T es replicable, si existe un portafolio autofinanciable q tal que $(Vq)(T) = X$. (Ver [6], Cap. 8, pp. 111)*

Si suponemos que existe una medida de probabilidad Q, la cual conduce el proceso de precios $(S_1, \ldots, S_n)$, entonces la cobertura del reclamo contingente es casi-seguramente. Esto quiere decir que en la definición (1.5.1) se tendría que

$$(Vq)(T) = X, \qquad Q - c.s.$$

Por otra parte, el precio "correcto" del reclamo contingente es el que nos proporciona el balance del portafolio replicante para $t \in [0, T]$. Es decir, que si $\Pi(t; X)$ es el precio para el reclamo X, entonces este precio queda determinado como

$$\Pi(t; X) = (Vq)(t), \quad \text{para cualquier } t \in [0, T].$$

Así, para un reclamo que sea replicable tenemos un proceso de precios $\Pi(t; X) = (Vq)(t)$ que aparece de manera natural. La pregunta que surge entonces es la siguiente ¿Es posible relacionar la condición de no-arbitraje con la cobertura financiera? En este caso la respuesta es afirmativa y es lo que se establece en la siguiente proposición.

Proposición 1.5.1. *Supongamos que el reclamo X puede ser replicado usando el portafolio h. Entonces el único proceso de precios $\Pi(t; X)$ que excluye la posibilidad de oportunidades de arbitraje es $\Pi(t; X) = (Vh)(t)$. Más aún, si existe otro portafolio replicante g que cubra al reclamo X, se tiene que $(Vg)(t) = (Vh)(t)$, para toda $t \in [0, T]$ con probabilidad igual a 1.*

Demostración. Supongamos que $\Pi(t; X) \neq (Vh)(t)$, para algún tiempo $0 < t < T$, donde $\Pi(t; X)$ es el valor del reclamo contingente en el instante t. Entonces se tienen dos casos

$$(Vh)(t) > \Pi(t, X) \ \text{ y } \ (Vh)(t) < \Pi(t, X),$$

ambos con probabilidad positiva. Consideremos entonces un portafolio con la siguiente estructura

$$q(t) = \begin{cases} (h(t), -X), & \text{si } (Vh)(t) > \Pi(t; X), \text{ p.a. } t \in (0, T); \\ (-h(t), X), & \text{si } (Vh)(t) < \Pi(t; X), \text{ p.a. } t \in (0, T); \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para aplicar el principio de no arbitraje tenemos que

$$(Vq)(0) = 0.$$

Supongamos que existe un $t_0 \in (0, T)$ tal que se tiene el primer caso, i.e.,

$$(Vh)(t_0) - \Pi(t_0; X) > 0.$$

Esto quiere decir que el valor del portafolio q en el instante t_0, está dado como la diferencia entre el valor del portafolio replicante h y el precio del reclamo X, en este instante de tiempo. Lo anterior implica que el valor $q(t_0)$, cuando ocurre el primer caso está dado como

$$(Vq)(t_0) = (Vh)(t_0) - \Pi(t_0; X),$$

lo cual es positivo por hipótesis, i.e.,

$$(Vq)(t_0) > 0, \quad \text{con probabilidad 1.}$$

Esto contradice la hipótesis de no-arbitraje. El caso cuando $(Vh)(t) < \Pi(t; X)$, para algún $t \in (0, T)$ se prueba mediante un argumento similar.

Para probar la unicidad tomemos el portafolio $q(t) = (g(t), -h(t))$, donde $g(t)$ y $h(t)$ son dos portafolios que cubren al reclamo X, y supongamos que existe $t_0 \in (0, T)$, tal que $(Vg)(t_0) > (Vh)(t_0)$. Entonces, para aplicar un argumento de arbitraje suponemos que

$$(Vq)(0) = 0.$$

Así, al tiempo $t_0 > 0$ se tiene que

$$(Vq)(t_0) = (Vg)(t_0) - (Vh)(t_0)),$$

lo cual es positivo por hipótesis con probabilidad 1. De donde se tiene una oportunidad de arbitraje fuerte.

La otra desigualdad se prueba mediante un argumento similar.

■

1.5.3. Completez de mercados

Definición 1.5.2. *Si en un mercado financiero cualquier reclamo contingente es replicable decimos que el mercado es completo. (Ver [38], Cap. 5, pp. 231)*

En general suele ser difícil demostrar que un modelo de mercado es completo, debido en gran parte a la herramienta matemática que es usada para este fin. Sin embargo, para modelos de mercado sencillos es posible encontrar los pesos del portafolio replicante de forma fácil.

Ejemplo 1.5.1. Si en el modelo binomial 1-periodo suponemos que no existen oportunidades de arbitraje, entonces el mercado que representa este modelo es completo.

Supongamos que tenemos un reclamo X, arbitrario pero fijo, cuya función de contrato es Φ. Para mostrar la completez del mercado debemos encontrar un portafolio determinístico $q = (a, b)$, donde a representa cierta cantidad de activos con riesgo y b una cantidad de activos sin riesgo (bonos, por ejemplo). El portafolio es tal que al tiempo 1, su balance debe ser

$$(Vq)(1) = \begin{cases} \Phi(u), & \text{si } S(1) = uS, \\ \Phi(d), & \text{si } S(1) = dS. \end{cases}$$

Lo que sigue, es encontrar una solución al sistema de ecuaciones siguiente

$$\Phi(u) = sua + (1+r)b$$

$$\Phi(d) = sda + (1+r)b.$$

Restando la segunda ecuación de la primera llegamos a que

$$a = \frac{1}{s}\frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u - d}.$$

Sustituyendo esta cantidad en la primera ecuación llegamos a que

$$b = \frac{1}{1+r}\frac{u\Phi(d) - d\Phi(u)}{u - d}.$$

Con estos pesos para las componentes del portafolio replicante se cubre al reclamo X, el cual estamos considerando arbitrario. Esto prueba la completez del mercado para el modelo binomial.

■

Una cosa que más que podemos destacar del modelo binomial es que cuando consideramos varios periodos, el modelo de mercado sigue siendo completo. Esto es lo que mostramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.2. El modelo binomial N-periodo es completo si $d < 1 + r < u$, y las probabilidades neutras al riesgo son

$$p = \frac{1+r-d}{u-d} \quad \text{y} \quad q = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

Para este caso consideramos la ecuación de riqueza

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)\left(X_n - \Delta_n S_n\right). \tag{1.5}$$

Esta ecuación corresponde al portafolio $h_n = (\Delta_n, X_n - \Delta_n S_n)$, es decir a un portafolio de la forma $(stock, efectivo)$, donde X_n es la riqueza que se posee en el n-ésimo periodo. La idea es exhibir sucesiones de variables aleatorias $V_{N-1}, \ldots, V_0$ y $X_1, \ldots, X_N$ tales que $V_N = X_N$, para cualesquiera movimientos de subida/bajada del mercado hasta el paso N. Lo anterior indica que si X es un reclamo contingente, este reclamo es replicable en cada paso de tiempo (en cada nodo del árbol multinomial). Si definimos

$$V_n = \frac{1}{1+r}\left[pV_{n+1}(\omega_1 ... \omega_n u) + q(\omega_1 ... \omega_n d)\right], \tag{1.6}$$

entonces, entenderemos que V_n depende de los primeros $\omega_1 ... \omega_n$ movimientos de subida/bajada del mercado. Por otra parte, en vista de que $X_1, \ldots, X_N$, dependen de la cantidad de activos en cada tiempo, tenemos que definir el peso del stock para nuestro portafolio h_n en cada periodo. Así, tenemos que

$$\Delta_n(\omega_1 ... \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 ... \omega_n u) - V_{n+1}(\omega_1 ... \omega_n d)}{S_{n+1}(\omega_1 ... \omega_n u) - S_{n+1}(\omega_1 ... \omega_n d)}, \tag{1.7}$$

donde n se mueve entre 0 y $N-1$. Dado que suponemos que existen las probabilidades neutras al riesgo definimos el valor del portafolio mediante la siguiente expresión

$$V_n(\omega_1...\omega_n) = \frac{1}{1+r}\left[pV_{n+1}(\omega_1...\omega_n u) + qV_{n+1}(\omega_1...\omega_n d)\right]. \tag{1.8}$$

Usando inducción matemática podemos mostrar que si $V_0 = X_0$, entonces para cualesquiera $n+1$ movimientos de subida/bajada del mercado representados por $\omega_1...\omega_n\omega_{n+1}$, se satisface que $V_{v+1}(\omega_1...\omega_{n+1}) = X_{n+1}(\omega_1...\omega_{n+1})$. Supongamos entonces que

$$X_n(\omega_1...\omega_n) = V_n(\omega_1...\omega_n), \quad \forall\ \omega_1...\omega_n, \quad n < N.$$

Sea $\omega_1...\omega_n$ una sucesión de movimientos de subida/bajada del mercado, arbitraria pero fija y supongamos que la hipótesis de inducción es válida para esta sucesión. Debido a que el mercado puede subir ó bajar no sabemos que valor tiene w_{n+1}, de esta manera es necesario considerar los dos casos $\omega_{n+1} = u$ y $\omega_{n+1} = d$ (u si el mercado sube y d si el mercado baja). Consideremos el caso en que el mercado sube, i.e., $\omega_{n+1} = u$. A partir de la ecuación de riqueza (1.5) tenemos

$$X_{n+1}(\omega_1...\omega_n u) = \Delta_n(\omega_1...\omega_n)S_{n+1}(\omega_1...\omega_n u)+(1+r)\left[X_n(\omega_1...\omega_n) - \Delta_n(\omega_1...\omega_n)S_n(\omega_1...\omega_n)\right].$$

Como ya conocemos a $\omega_1...\omega_n$, vamos a omitirlo de nuestras ecuaciones para simplificar la notación. Así, empleando la definición de Δ_n dada por (1.7)

$$\begin{aligned} X_{n+1}(u) &= \Delta_n S_n(u-(1+r)) + (1+r)X_n \\ &= \left[\frac{V_{n+1}(u) - V_{n+1}(d)}{S_{n+1}(u) - S_{n+1}(d)}\right] S_n(u-(1+r)) + (1+r)X_n. \end{aligned}$$

Recordemos que $S_{n+1}(\omega_1...\omega_n u) = S_n(\omega_1...\omega_n)u$, y usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} X_{n+1}(u) &= \left[\frac{V_{n+1}(u) - V_{n+1}(d)}{u-d}\right](u-(1+r)) + (1+r)V_n \\ &= qV_{n+1}(u) - qV_{n+1}(d) + (1+r)V_n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

De la ecuación (1.6) se sigue que $(1+r)V_n = pV_{n+1}(u) + qV_{n+1}(d)$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1.9) y simplificando llegamos a que $X_{n+1}(u) = V_{n+1}(u)$. Es decir que

$$X_{n+1}(\omega_1...\omega_n u) = V_{n+1}(\omega_1...\omega_n u)$$

Usando un procedimiento similar se prueba el caso en el que se replica cuando el mercado cae, es decir, para el caso de $\omega_{n+1} = d$. Por lo tanto hemos demostrado que

$$X_{n+1}(\omega_1...\omega_n\omega_{n+1}) = V_{n+1}(\omega_1...\omega_n\omega_{n+1}).$$

Esto prueba que el modelo de mercado representado por el modelo binomial N-periodo es completo

$\blacksquare$

A continuación consideramos un modelo a tiempo continuo. Este es el modelo de mercado tipo Black-Scholes.

Ejemplo 1.5.3. El modelo de mercado dado por los portafolios que constan de activos con riesgo y bonos $q(t) = (S(t), \beta(t)) \approx (stock, bono)$, cuyas dinámicas de precios vienen dadas por las ecuaciones diferenciales estocásticas

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma_t S(t)dB(t) \quad y \quad d\beta(t) = r\beta(t)dt,$$

es completo.

Este modelo es aplicado a opciones de compra europeas. En este caso el portafolio satisface la condición de ser autofinanciable, debido a que la opción se ejerce (ó no) solamente al tiempo de maduración. Es decir, el portafolio satisface

$$d(Vq)(t) = a(t)dS(t) + b(t)dB(t).$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} d(Vq)(t) &= a(t)\{\mu S(t)dt + \sigma_t S(t)dB(t)\} + b(t)rB(t)dt \\ &= \{a(t)\mu S(t) + rb(t)B(t)\}\, dt + a(t)\sigma S(t)dB(t) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Necesitamos suponer que el valor del portafolio es igual a la función de pago de la opción $(Vq)(t) = C(t, S(t))$. Aplicando el lema de Itô

$$d(Vq)(t) = C_t dt + \frac{1}{2}C_{xx}dS(t)\cdot dS(t) + C_x dS(t),$$

y dado que usamos un movimiento browniano geométrico para modelar el comportamiento del precio del subyacente (activo del stock) tenemos

$$\begin{aligned} d(Vq)(t) &= C_t dt + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2 S^2(t)dt + C_x dS(t) \\ &= \left[C_t + \frac{1}{2}C_{xx}S^2(t)\sigma^2\right] dt + C_x\left[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)\right] \\ &= \left[C_t + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2 S^2(t) + C_x\mu S(t)\right] dt + \sigma C_x S(t)dB(t) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Igualando los coeficientes de las ecuaciones (1.10) y (1.11), obtenemos que

$$a(t) = C_x(t, S(t)).$$

Sustituyendo este coeficiente y despejando

$$b(t) = \frac{1}{rB(t)}\left[C_t + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2 S^2(t)\right].$$

En vista de que se tienen valores explícitos para los correspondientes pesos en nuestro portafolio, se sigue que el mercado es completo.

■

1.6. Notas y comentarios

1.7.1 En los mercados financieros se intercambia un gran número de activos. En décadas recientes, algunos de los más comerciados son los derivados financieros. La bolsa de valores de New York (NYSE), la de Tokio (TSED), la de Chicago(CBOE), entre muchas otras, intercambian cientos de miles de derivados al día. Los más comunes son las opciones, los contratos forward y los swaps (Ver [9]).

1.7.2 Hoy en día las opciones resultan ser los derivados más populares, y existe una gama enorme de este tipo de contratos. Este tipo de instrumentos financieros se comerciaban desde la edad media en Europa, o al menos cierto tipo de acuerdos que pueden ser catalogados como tales. Si bien nosotros nos centramos en las opciones europeas y en las de tipo americano, también se puede hablar de opciones asiáticas, opciones bermuda, de barrera, etc., denominadas en general "opciones exóticas". Detalles acerca de la valuación de este tipo de opciones pueden consultarse en [9] y [38].

1.7.3 Debido a la interpretación de los mercados financieros como subconjuntos de espacios vectoriales, los portafolios que son formados en tales espacios pueden adoptar formas variadas. Si se tiene un modelo de mercado que consta de n activos distintos, podemos conformar un portafolio con k activos del mismo tipo, y j activos de un tipo diferente. De esta manera, el portafolio en cuestión es un elemento de $\mathbb{R}^n$, y puede verse como un portafolio de portafolios. Existen además portafolios que cambian la cantidad de activos que contienen conforme avanza el tiempo. A tales portafolios se les denomina portafolios estocásticos, y aparecen de manera regular en la práctica. Un ejemplo de este tipo de portafolios aparece en la deducción de la fórmula de Black-Scholes (ver [39], Cap. 10). Otro tipo de portafolios que podemos encontrar son los llamados portafolios markovianos, que dependen del proceso de precios de los subyacentes y sus componentes son estocásticas (ver [6], Cap. 6).

1.7.4 El concepto de arbitraje financiero fue propuesto inicialmente por Robert C. Merton, Premio Nobel de Economía en 1997. Este principio dio paso al modelo propuesto por F. Black y M. Scholes (con asistencia de Merton) en 1973, del cual se desprende la fórmula que lleva sus nombres, y que ha sido la más usada por los financieros en las últimas décadas. Por otra parte, si en un modelo de mercado se especifica que no existe arbitraje, entonces se dice que tal mercado es eficiente. Además de que la ausencia de arbitraje equivale a la existencia de un portafolio de inversión óptimo en mercados completos (ver [6], [11] y [26] Cap. 8, pp 111). Todo esto se puede ligar con la teoría de la valuación por martingalas, debido a que la ausencia de arbitraje implica la existencia de una medida martingala para el proceso de precios de algún reclamo contingente. La existencia de tal medida es de hecho una condición necesaria y suficiente para garantizar la ausencia de arbitraje ([6], [11] y [38]). Este resultado es el contenido del PTFVA, desde el punto de vista de la valuación por martingalas que mencionamos en el párrafo anterior.

1.7.5 A lo largo de este capitulo hemos mencionado cuestiones referentes al movimiento browniano geométrico y procesos estocásticos, así como al cálculo de Itô[6]. Cabe mencionar que fue el mismo Merton quien introdujo esta herramienta en el estudio de

[6]Kiyoshi Itô (1915-2008). Una de las aportaciones principales de este destacado matemático japonés, es la integral y el cálculo que lleva su nombre

las finanzas en 1969, y actualmente, la teoría financiera no se concibe sin el apoyo de tales conceptos. Por ejemplo, el lema de Itô está presente en la deducción de la fórmula de Black-Scholes y en el desarrollo de la condición de autofinanciabilidad en tiempo continuo. Para revisar esta teoría y sus aplicaciones a finanzas pueden verse [38], [39] y [41].

CAPÍTULO 2

Ausencia de arbitraje: Una versión preliminar del Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos

En este capitulo presentamos la primera versión no trivial del PTFVA. Para esto introducimos un contexto matemático y conceptual basado en el clásico [13] y en el más reciente [26].

Si en un mercado financiero algún agente logra una posición de arbitraje[1], dicho agente puede ejecutar tal estrategia (de arbitraje) de manera ilimitada basado únicamente en el principio de que “más es mejor que menos”. Esta oportunidad brindaría a nuestro afortunado agente la posibilidad de adquirir una cantidad de dinero de manera segura y sin la necesidad de inversión alguna. Sin embargo, esta condición es incompatible dentro de un mercado en el que existan otros agentes competitivos, en vista de que no habría un portafolio de inversión óptimo para los demás agentes que también prefieren más por menos. En este capítulo nos centramos en aquellas implicaciones de la ausencia de arbitraje en mercados competitivos. Comenzamos tratando la *Ley de un Precio* junto con algunas de sus consecuencias al introducir una noción de arbitraje financiero adecuada. Comentamos la existencia del funcional de valuación que asigna a cada perfil de pago el precio del portafolio que genera tal payoff, y a partir de esto, junto con el principio de no arbitraje presentamos una version en dimensión finita del PTFVA. Para analizar el capítulo comentaremos algunas formas alternativas para representar al funcional de valuación payoff y veremos la equivalencia entre ellas.

2.1. Ley de un precio

La afirmación de que dos bienes perfectamente sustitutos deben ser intercambiados a un mismo precio resulta como una implicación de la ausencia de arbitraje y se conoce como *Ley de un Precio.* Debido a que nosotros trabajamos con portafolios, es necesario adecuar este concepto al contexto que nos atañe. Supongamos que los perfiles de pago de los activos que conforman a un portafolio están dados en términos de bienes de consumo y que existen

[1]De existir una posibilidad de arbitraje, ésta es tomada de manera inmediata debido a la gran cantidad de agentes que participan en el mercado. Así, la ventana se cierra inmediatamente y la oportunidad de arbitraje se desvanece

un número finito de activos -digamos D- con perfiles de pago dados $x_1, \ldots, x_D$, tales que $x_j \in \mathbb{R}^J$.

Sea $X \in M_{J\times D}(\mathbb{R})$ la matriz de payoffs, dada como

$$X = [x_1, \ldots, x_D]$$

donde los vectores x_j son vectores columna de $\mathbb{R}^J$. Aunque dependiendo del contexto pueden ser considerados como renglón.

Si consideramos un portafolio h conformado por D activos, su perfil de pago está dado como

$$Xh = \sum_{j=1}^{D} x_j h_j,$$

donde h_j es la j-ésima entrada del portafolio y x_j el payoff correspondiente a esta entrada.

Definición 2.1.1. *El conjunto de perfiles de pago disponibles vía intercambios en el mercado es el subespacio generado por los activos y está dado como*

$$C = \{z \in \mathbb{R}^J \ : \ z = Xh, \ \textit{para algún } h \in \mathbb{R}^D\}.$$

De esta manera tenemos que $C \subset \mathbb{R}^J$ es el subespacio generado por los payoffs de los activos del mercado. Además, tenemos que C es el subespacio renglón generado por la matriz de payoffs X.

Ejemplo 2.1.1. Sean $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, los estados del mundo. Supongamos que tenemos dos activos tales que $x_1 = (1, 1, 1, 1)$ y $x_2 = (1, 2, 1, 3)$ son los correspondientes payoffs de dichos activos. De acuerdo a la definición la matriz payoff está dada como

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Así, el subespacio generado por los activos activos es

$$C = \{z \in \mathbb{R}^4 \ : \ z = Xh, \ \text{para algún } h \in \mathbb{R}^2\},$$

de donde se sigue que

$$C = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ z_1 = z_3\}.$$

$\blacksquare$

En lo sucesivo trabajaremos bajo la hipótesis conocida como la **Ley de un Precio**. Esta afirma lo siguiente: **Si h y h' son dos portafolios tales que tienen el mismo payoff, entonces ambos portafolios tienen el mismo precio. Es decir, que si $Xh = Xh'$, entonces $ph = ph'$, donde p es un vector del estado de precios.**

Definición 2.1.2. *Un activo se llama redundante si su payoff puede ser generado como el payoff de algún otro portafolio con activos diferentes.*

Por tanto, si la ley de un mismo precio no se satisface cualquier payoff en el "span" de activos puede ser comprado a cualquier precio. Además, podemos ver que cualquier portafolio cuyo perfil de pago sea igual a cero tiene precio igual a cero, lo cual es equivalente a tener la ley de un precio.

2.2. El funcional de valuación

Sea p el vector de precios para cualesquiera activos del mercado, este es un vector renglón en $\mathbb{R}^D$. Dado que queremos definir una transformación que asigne a cada payoff el precio del portafolio que genera tal payoff, es natural pensar en un mapeo que vaya del subespacio generado por los activos en los números reales $q : C \to \mathbb{R}$. Así, de manera formal

$$q(z) = \{w : w = ph, \text{ para algún } h \in \mathbb{R}^D \text{ tal que } z = Xh\}.$$

Esta transformación nos proporciona el valor del portafolio con perfil de pago determinado. Sin embargo, debemos notar que ésta no es una transformación con un único valor, sino más bien una correspondencia. No obstante, es posible tener un único valor cuando se satisface la ley de un precio.

Teorema 2.2.1. *La ley de un precio se satisface si y solamente si q es un funcional lineal sobre el subespacio generado por los activos C.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que se satisface la ley de un precio. Para probar la linealidad de q, consideremos dos payoffs z y z' en el span de activos C, tales que $z = Xh$ y $z' = Xh'$, donde h y h' son portafolios. Así, para cualesquiera α, $\beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha z + \beta z' &= \alpha(Xh) + \beta(Xh') \\ &= X(\alpha h + \beta h'). \end{aligned}$$

Podemos ver entonces que el payoff $\alpha z + \beta z'$ es generado por el portafolio $\alpha h + \beta h'$, cuyo precio es $\alpha ph + \beta ph'$. Por la ley de un precio el portafolio en cuestión toma un único valor, de tal manera que

$$\begin{aligned} q(\alpha z + \beta z') &= \alpha ph + \beta ph' \\ &= \alpha q(z) + \beta q(z'). \end{aligned}$$

Esto prueba dos cosas: La primera de ellas es que q está bien definido y la segunda que q es lineal.

($\Leftarrow$) Supongamos que q es un funcional lineal sobre C, y sean h y h' dos portafolios con el mismo payoff. Por hipótesis $Xh = Xh'$, si fuera el caso de que estos portafolios tuviesen un precio distinto definimos el portafolio $\tilde{h} = h - h'$. Tenemos entonces

$$X\tilde{h} = 0,$$

de donde de sigue que

$$q(X\tilde{h}) = 0.$$

Así,

$$ph - ph' = 0,$$

lo que contradice el supuesto de que h y h' tienen distinto precio.

■

Cuando la ley de un precio se satisface, el funcional q recibe el nombre de **funcional de valuación payoff**. Este funcional es además estrictamente positivo cuando no hay arbitraje débil, y es positivo cuando no hay arbitraje fuerte.

En este punto es necesario establecer una definición de arbitraje acorde al contexto en el que estamos trabajando.

Definición 2.2.1. *Un arbitraje fuerte es un portafolio cuyo precio es estrictamente negativo y su payoff es positivo.*

Definición 2.2.2. *Un arbitraje es un portafolio que es un arbitraje fuerte o que tiene precio igual a cero, y un payoff positivo hoy o en algún estado en el futuro.*

De la definición 2.2.2 podemos expresar la condición del precio igual a cero en forma de desigualdades. Puesto que el costo inicial no es mayor que cero, no necesitamos riqueza alguna, pero sí podemos generar alguna. Es decir, si h es un portafolio de arbitraje

$$ph \leqslant 0,$$

y su payoff nunca es negativo,

$$Xh \geqslant 0.$$

En este caso cuando escribimos $\geqslant$ debemos entender *mayor o igual en cada componente.* Por otra parte $>$ quiere decir *mayor o igual* y *mayor en algunas componentes.* Si anotamos $>>$, entenderemos *mayor que* en todas las componentes. Notemos entonces que el arbitraje h tiene una desigualdad estricta en alguna de las expresiones anteriores, al menos en alguna componente. Así, podemos representar una oportunidad de arbitraje de la siguiente manera

$$\mathcal{X}h = \begin{bmatrix} -p \\ X \end{bmatrix} h > 0, \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{X} \in \mathcal{M}_{J+1\times D}(\mathbb{R})$. Este hecho será empleado más adelante en la demostración del teorema 2.3.1.

Definición 2.2.3. *Un funcional* $f : C \to \mathbb{R}$ *es estrictamente positivo si para cualquier* $z \in C,\ z \geqslant 0,\ z \neq 0,$ *se tiene que* $f(z) > 0$.

Lema 2.2.1. *Si no hay arbitraje entonces se satisface la ley de un precio.*

Demostración. Observemos que la ley de un mismo precio es equivalente a tener

$$\ker(X^t) \subset \ker(p^t),$$

donde X^t es la transpuesta de la matriz payoff y p^t la transpuesta del vector de precios. Supongamos entonces que no hay arbitraje y sea $h \in \ker(X^t)$ un portafolio tal que no pertenece a $\ker(p^t)$. Tenemos así dos casos para el precio del portafolio a saber: $ph > 0$ ó $ph < 0$.

Si ocurre el primer caso $-ph < 0$ y $X^t h^t = 0$. Esto satisface las condiciones de un arbitraje fuerte con el portafolio $-h$, es decir, $p(-h) < 0$ y $-hX \leqslant 0$ lo cual contradice la hipótesis de que no hay arbitraje. Por otro lado notemos que el caso $ph < 0$ no es posible, ya que la otra condición de un arbitraje es que $ph = 0$. Por lo tanto debe satisfacerse la ley de un precio.

■

Vamos a ligar ahora la ausencia de arbitraje con el funcional de valuación payoff.

Teorema 2.2.2. *El funcional de valuación payoff es estrictamente positivo sii no existe arbitraje.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que el funcional de valuación payoff q, es estrictamente positivo. Si existiera una oportunidad de arbitraje $\tilde{h}$ para un vector de precios p, entonces $\tilde{h}$ es un arbitraje fuerte ó su precio es igual a cero. Si ocurre el primer caso se tiene que $p\tilde{h} < 0$ y $\tilde{h}X \geqslant 0$. Sin embargo, en vista de que el funcional q es estrictamente positivo $p\tilde{h} >> 0$, lo cual es una contradicción.

Por otra parte supongamos que el precio de $\tilde{h}$ es igual a cero, i.e., $p\tilde{h} = 0$. Si consideramos $q(Xh) = ph$, dado que q es estrictamente positivo, si

$$\tilde{z} = X\tilde{h} \geqslant 0, \;\; \tilde{z} \neq 0,$$

entonces

$$q(\tilde{z}) = p\tilde{h} >> 0,$$

lo cual es de nueva cuenta una contradicción. Por lo tanto no hay arbitraje.

($\Leftarrow$) Supongamos que no hay oportunidades de arbitraje. De esta manera se cumple la ley de un precio por el lema 2.2.1, lo cual implica a su vez que el funcional de valuación payoff q está bien definido y es lineal sobre C. Si elegimos $z \in C$, entonces $q(z) = ph$ para algún portafolio h, tal que $z = Xh$. Además, de la hipótesis de no arbitraje se sigue que el único caso posible es $q(z) >> 0$, para toda $z \in C$, tal que $z \geqslant 0$ con $z \neq 0$. Esto quiere decir que q es estrictamente positivo.

■

Tenemos además el siguiente resultado que se sigue de cambiar la condición de no-arbitraje por la de no-arbitraje fuerte en el teorema anterior.

Teorema 2.2.3. *No hay arbitraje fuerte sii el funcional de valuación payoff es positivo.*

Demostración. La prueba de este resultado es similar a la del teorema 2.2.2.

■

Definimos a continuación las cotas superior e inferior para el valor de un reclamo contingente que está en el mercado. Estas cotas pueden ser obtenidas a partir de los precios de los perfiles de pago que pertenecen al subespacio C. La idea de esto es poder establecer una extensión del funcional de valuación payoff a todo el espacio $\mathbb{R}^J$, de tal manera que nos permita ponerle precio a todos aquellos reclamos contingentes que aún no hayan sido introducidos en el mercado.

Definición 2.2.4. *La cota superior $q_u = \text{mín}_h\{ph \;:\; Xh \geqslant z\}$ es el precio más bajo de un portafolio, cuyo perfil de pago domina al reclamo contingente.*

Definición 2.2.5. *La cota inferior $q_l = \text{máx}_h\{ph \;:\; Xh \leqslant z\}$ es el precio más alto de un portafolio, cuyo perfil de pago está dominado por el reclamo contingente.*

Proposición 2.2.1. *Si los precios de los activos excluyen el arbitraje fuerte, entonces $q_u(z) \geqslant q_l(z)$ para cualquier reclamo contingente en $\mathbb{R}^J$.*

Demostración. Supongamos que existe algún $z \in \mathbb{R}^J$, tal que $q_u(z) < q_l(z)$. Entonces existe $h \in \mathbb{R}^D$ tal que $Xh \leqslant z$ y $q_u(z) < ph$. Esto implica que h es cota superior y que existe $h' \in \mathbb{R}^D$ tal que

$$ph' < ph,$$

que además satisface $Xh' \geqslant z$. Entonces tenemos

$$p(h' - h) < 0,$$

lo que junto con el hecho de que $Xh' \geqslant z$ y $Xh \leqslant z$ implican que

$$X(h' - h) \geqslant 0.$$

Esto contradice la hipótesis de que no hay arbitraje fuerte.

■

Proposición 2.2.2. *Si el precio p de ciertos activos excluye la posibilidad de arbitraje fuerte, entonces $q_u(z) = q_l(z) = q(z)$, para toda $z \in C$, donde q es el funcional de valuación payoff.*

Demostración. Observemos que de la definición para la cota superior se tiene que $q_u(z) \leqslant q(z)$, lo que hay que probar es que si no hay arbitraje fuerte solo de da la igualdad. Sea p un vector de precios para un conjunto de activos, tal que excluye la posibilidad de arbitraje fuerte y supongamos que

$$q_u(z) < q(z), \text{ para algún } z \in C.$$

Existe así un portafolio h' que no es cota inferior y tal que

$$Xh' \geqslant z.$$

Tenemos además, del hecho que $q_u < q$ para algún $z \in C$ que

$$ph' < q(Xh').$$

Sea ahora h un portafolio tal que $hX = z$ y $ph = q(z)$. Si hacemos $\tilde{h} = h' - h$, entonces

$$X\tilde{h} = Xh' - Xh.$$

De esta manera

$$q(X\tilde{h}) = ph' - ph < 0,$$

de donde se sigue que $\tilde{h}$ es un arbitraje fuerte ya que $Xh' - Xh \geqslant 0$. Por lo tanto $q_u(z) = q(z)$.

Un argumento similar se emplea para probar que $q_l(z) = q(z)$.

■

Este es un resultado particularmente útil cuando se trata de verificar si los valores de algún reclamo contingente están o no en el span de activos C.

Ejemplo 2.2.1. (Leroy-Werner). Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ y supongamos que se tiene un solo activo con payoff $x = (1, 2)$, con precio $p = 1$. Entonces el subespacio de los payoffs es $C = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$, y la manera de definir al funcional payoff q es $q(\alpha, 2\alpha) = \alpha$. En particular si tomamos al perfil de pago $z = (1, 1)$ tenemos que

$$q_u(z) = \text{mín}\{h : (h; 2h) \geqslant (1, 1)\} = 1$$

$$q_l(z) = \text{máx}\{h : (h; 2h) \leqslant (1, 1)\} = \frac{1}{2}.$$

En vista de que las cotas son diferentes, los valores de este reclamo no están en el subespacio generado por los activos.

■

Una pregunta que cabe hacerse es la siguiente: ¿Qué es lo que sucede si se reemplaza la ausencia de arbitraje fuerte por la ausencia de arbitraje en la proposición 2.2.2?

Proposición 2.2.3. *Si los precios de los activos excluyen arbitraje, entonces* $q_u(z) > q_l(z)$ *para cualquier reclamo contingente en* $\mathbb{R}^J \setminus C$.

Demostración. Para probar este resultado solo debemos verificar que en efecto, para cualquier reclamo $z \notin C$, se tiene que $q_l \neq q_u$. Si fuera el caso de que $q_l(z) = q_u(z)$, para algún $z \in C$, podemos hallar portafolios h' y h'' tales que

$$Xh'' \leqslant z \leqslant Xh' \text{ y } ph' = ph'' = qu(z).$$

Ya que $z \notin C$, los perfiles de pago en las desigualdades anteriores no pueden ser generadas por ningún portafolio, es decir, no se da la igualdad. Por tanto, el portafolio $\tilde{h} = h'' - h'$ tiene un payoff estrictamente positivo, pero precio igual a 0. Así que es un arbitraje.

■

Una vez establecidas las cotas superior e inferior sobre el valor de algún reclamo contingente, nos concentramos en la manera en la que se pueden usar q_l y q_u para extender q a todo el espacio de reclamos contingentes. La estrategia a seguir es similar a la que se efectúa cuando se quiere completar un conjunto de k vectores a una base de un espacio vectorial de dimensión n. Primero vamos a fijar un payoff $\hat{z} \notin C$, y definimos el siguiente conjunto

$$L = \{z + \gamma\hat{z} : z \in C \text{ y } \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Este conjunto es un subespacio del espacio de activos $\mathbb{R}^J$, y es tal que $C, \hat{z} \in L$. Notemos además que L es el subespacio de dimensión $D+1$, generado por los activos con perfiles de pago $x_1, \dots, x_D$ y $\hat{z}$.

Vamos a definir ahora la extensión del funcional q.

Definición 2.2.6. *Un funcional de valuación es una extensión del funcional de valuación payoff a todo el espacio de reclamos contingentes* $\mathbb{R}^J$.

Nosotros vamos a denotar a tal funcional de valuación por Q. Así, tenemos que

$$Q : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R},$$

además de que

$$Q(z) = q(z), \text{ para todo } z \in C.$$

Esta extensión es el funcional de valuación payoff para mercados de activos que constan de D activos cuyos perfiles de pago son $\{x_1, \dots, x_D\}$ y precios $\{p_1, \dots, p_J\}$ y otro activo con perfil de pago $\hat{z}$ y precio π.

Observación. El funcional Q no solo valúa los payoffs pertenecientes al subespacio generado por los activos que han sido mercadeados, sino que valúa cualquier reclamo contingente aún cuando éste no haya sido introducido al mercado.

En el caso de que no exista arbitraje fuerte, podemos hallar un valor π tal que

$$q_l \leqslant \pi \leqslant q_u.$$

Si definimos $Q : L \to \mathbb{R}$ mediante

$$Q(z + \gamma\hat{z}) = q(z) + \gamma\pi,$$

podemos ver que en efecto Q es una extensión del funcional de valuación payoff con las propiedades requeridas de linealidad y positividad estricta.

Proposición 2.2.4. *Si el funcional de valuación payoff* $q : C \to \mathbb{R}$ *es positivo, entonces* $Q : L \to \mathbb{R}$ *también es positivo.*

Demostración. Sea $y \in L$. Entonces

$$y = z + \gamma \hat{z}, \quad z \in C \;\; \text{y} \;\; \gamma \in \mathbb{R},$$

por consiguiente se tienen tres posibilidades para la constante: $\gamma > 0, \gamma < 0$ y $\gamma = 0$.

Si $\gamma = 0$ tenemos que $y = z$, y como $z \in C$ se sigue que $Q(z) = q(z)$.

Como q_l es una función creciente, para $\gamma > 0$, se tiene que $y \geqslant 0$, y así $\hat{z} \geqslant -z/\gamma$.

$$\Rightarrow q_l(\hat{z}) \geqslant q_l(-\frac{z}{\gamma}).$$

Por otra parte en el subespacio de los payoffs C, el funcional de valuación payoff coincide con q si es que no hay arbitraje fuerte, entonces

$$q_l(-\frac{1}{z}) = q(-\frac{1}{z}),$$

por lo que

$$q(\hat{z}) \geqslant q(-\frac{z}{\gamma}).$$

Supongamos que existe $\pi \in \mathbb{R}$ tal que $q_u(\hat{z}) \geqslant \pi \geqslant q_l(\hat{z})$, entonces $\pi \geqslant q(-z/\gamma)$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \quad \pi & \geqslant & q(-z/\gamma) \\ \Rightarrow \quad q(z) + \gamma\pi & \geqslant & 0 \\ \Rightarrow \quad Q(y) & \geqslant & 0. \end{array}$$

Si $\gamma < 0$, podemos usar un argumento similar usando el hecho de que $\pi \leqslant q_u(\hat{z})$, para obtener de nueva cuenta que $Q(y) \geqslant 0$.

■

Observación. En la demostración de la proposición 2.2.4 usamos el hecho de que la ausencia de arbitraje fuerte implica la existencia de un valor π, tal que $q_l(\hat{z}) \leqslant \pi \leqslant q_u(\hat{z})$, para $\hat{z} \notin C$. Sin embargo, al reemplazar el arbitraje fuerte por arbitraje, se obtiene que existe π tal que $q_l(\hat{z}) < \pi < q_u(\hat{z})$. (Ver la proposición 2.2.3)

Proposición 2.2.5. *Si* $q : C \to \mathbb{R}$ *es estrictamente positivo, entonces también* $Q : L \to \mathbb{R}$ *es estrictamente positivo.*

Demostración. Este resultado se prueba empleando la misma estrategia que se usó en la demostración de la proposición 2.2.4, junto con la observación anterior.

■

2.3. El Teorema Fundamental para la Valuación de Activos a un periodo.

De la sección anterior observamos que sólo cuando se excluye la posibilidad de arbitraje fuerte (arbitraje), es que existe un funcional de valuación que es positivo (estrictamente positivo). Así, a partir de este momento ya contamos con las herramientas suficientes para dar paso a una primera versión del resultado principal de este trabajo.

Este es el *Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos,* conocido también como el *Teorema Fundamental de las Finanzas.* Tal como Philip Dybvig y Stephen Ross establecen en su artículo titulado *Arbitraje*, el funcional arriba mencionado nos permite disponer del precio de cualquier reclamo contingente, aún cuando su perfil de pago no esté en el subespacio lineal generado por los activos que componen al portafolio que genera tal perfil de pago. Algo que es importante mencionar, es que esta versión del PTFVA está dada en espacios de Hilbert, sin embargo, también existe una versión análoga vía la teoría de martingalas (ver [6], [38]), que es el contenido del próximo capítulo.

Definición 2.3.1. *Una regla de valuación consistente es un vector del estado de precios, positivo en todas sus componentes que fija precio a cualquier reclamo contingente mercadeado.*

Consideremos un espacio de probabilidad $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_J\}$, y sea e_{ω_i} un activo que llamaremos indicador. Este activo indicador es tal que su perfil de pago es 1 si $e_{\omega_i} \in \omega_i$ y 0 en otro caso. Si suponemos que q está bien definido podemos aplicarlo a cada uno de los activos indicadores para tener

$$q_{\omega_i} = q(e_{\omega_i}).$$

Si además q es lineal se tiene que

$$q(z) = \sum_{\omega_i} q_{\omega_i} x_{\omega_i},$$

donde x_i es el perfil de pago de los activos que conforman algún portafolio en el estado ω_{ω_i}.

Teorema 2.3.1. ***(PTFVA versión I).*** *No existe arbitraje si y solamente si existe una regla de valuación lineal consistente.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que tenemos una regla de valuación lineal consistente. En este caso vamos a tener un vector del estado de precios q tal que

$$ph = q(Xh). \tag{2.2}$$

Si $\overline{h}$ es una oportunidad de arbitraje, entonces

$$p\overline{h} = q(X\overline{h}).$$

Esto implica que

$$q(X\overline{h}) - p\overline{h} = 0, \;\; X\overline{h} \in C,$$

y así llegamos a que

$$[1, q] \begin{bmatrix} -p \\ X \end{bmatrix} \overline{h} = 0,$$

lo cual contradice la ecuación (2.1) ya que q es una regla de valuación consistente.

($\Leftarrow$) Supongamos que no hay arbitraje y consideremos al conjunto

$$\mathcal{S} = \{y \ : \ \text{existe h en } \mathbb{R}^D, \text{ tal que } y = \mathcal{X}h\}.$$

Si $\mathbb{R}_+^{J+1} = \{y : y \geqslant 0\}$ es el ortante positivo de $\mathbb{R}^{J+1}$, entonces de la ausencia de oportunidades de arbitraje se sigue que $\mathcal{S} \cap \mathbb{R}_+^{J+1} = \{0\}$.

Notemos que S es un subespacio de $\mathbb{R}^{J+1}$, por tanto es un cono convexo (cerrado). Además, ambos conjuntos son distintos del vacío ya que al menos contienen al cero. Así, el teorema A.6.5.4 del Apéndice 1, nos dice que existe un vector no nulo p_*, tal que para cualquier $y \in S$ y toda $z \in \mathbb{R}^{J+1}$, con $z \neq 0$ se tiene que

$$p_* z >> 0 \geqslant p_* y, \quad z \neq 0. \tag{2.3}$$

En este caso $>>$ quiere decir "mayor que" en cada componente. Esto último indica que p_* es estrictamente positivo.

Como S es un subespacio y p_* es estrictamente positivo, la desigualdad del lado derecho en (2.3) debe tenerse como igualdad para todo $y \in S$. Esto es debido a que p_* asigna un valor menor o igual a cero a todo elemento de S. En particular, como $-y \in S$, se tiene que $-p_* y \leqslant 0$. Si definimos

$$q := (\frac{p_{*2}}{p_{*1}}, \ldots, \frac{p_{*n}}{p_{*1}}),$$

en vista de que p_* es estrictamente positivo, se sigue que q es estrictamente positivo. Dividiendo la segunda desigualdad de (2.3) por p_*1 y usando la ecuación (2.1) tenemos que

$$\tilde{p_*}\mathcal{X}h = 0,$$

donde $\tilde{p_*}$ es un vector renglón de la forma $\left(1, \frac{p_{*2}}{p_{*1}}, \ldots, \frac{p_{*n}}{p_{*1}}\right)$. Esto es equivalente a tener

$$(1, q) \begin{bmatrix} -p \\ X \end{bmatrix} h = 0,$$

de donde se sigue que $-ph + qXh = 0$. Es decir $ph = qXh$, por lo que q es una regla de valuación positiva y lineal.

■

De forma similar, tenemos el

Teorema 2.3.2. (TFVA forma débil). *No existe arbitraje fuerte si y solamente si existe un funcional de valuación lineal positivo.*

Demostración. La prueba de este resultado es similar a la del teorema anterior.

■

2.4. Representaciones alternativas del funcional de valuación

Dependiendo del contexto en el que se esté trabajando pueden haber varias maneras de representar al funcional de valuación. En los modelos cuyo horizonte temporal es continuo, es claro que se usa una representación diferente a los modelos cuyo horizonte temporal es discreto y finito, o también a los modelos intertemporales. A lo largo de esta sección nos enfocamos en mostrar la equivalencia de tales representaciones en modelos a un periodo con un número de estados finito.

Teorema 2.4.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

i) Existencia de un funcional de valuación lineal positivo

ii) Existencia de probabilidades neutras al riesgo y una tasa neutral al riesgo asociada

iii) Existencia de una densidad positiva para el estado de precios.

Demostración. (i)⇒(ii) Supongamos que existe un funcional de valuación lineal positivo $q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Dado que la matriz de payoffs $X \in M_{D\times J}(\mathbb{R})$ si $h \in \mathbb{R}^J$, entonces

$$\begin{aligned} ph &= q(Xh) \\ &= q\left(\sum_{i=1}^{D}(hx)_i\right). \end{aligned}$$

En vista de que el funcional q es lineal, se tiene que

$$ph = \sum_{i=1}^{D} q(hx)_i.$$

Esto aplica para cada estado de la naturaleza (J en este caso). Así, si denotamos como $q(hx)_i = q_{\omega_{ij}}(hx)_{\omega_i}$, llegamos a que

$$ph = \sum_{\omega_{ij}} q_{\omega_{ij}}(hx)_{\omega_i}, \quad i = 1, \ldots, D, \quad j = 1, \ldots, J.$$

Por otra parte, la representación neutra al riesgo[2] establece la existencia de un vector de probabilidades artificiales que vamos a denotar por $\Pi = (\pi_1, \ldots, \pi_D)$, y una tasa asociada r tal que

$$\begin{aligned} ph &= (1+r)^{-1}\Pi X h \\ &= (1+r)^{-1}E_{\Pi}(Xh) \\ &= (1+r)^{-1}\sum \pi_i (Xh)_i. \end{aligned}$$

La implicación se sigue de elegir

$$\Pi = \frac{q}{\sum_{\omega_{ij}} q_{\omega_{ij}}},$$

donde

$$\sum_{\omega_i} q_{\omega_i} = (1+r)^{-1}, \quad i = 1\ldots, D,$$

es decir

$$\Pi = (1+r)q.$$

(ii)⇒(i) Supongamos que existen las probabilidades neutras al riesgo. Sea $\Pi \in \mathbb{R}^D$ el vector de probabilidades neutras al riesgo y r la tasa libre de riesgo, si elegimos

$$q = (1+r)^{-1}\Pi,$$

obtenemos el resultado inmediatamente.

[2]También se le conoce como representación martingala

(iii)⇒(i) Supongamos que la densidad del estado de precios es positiva y denotemosla por ρ_ω. El precio para algún portafolio h cuyo perfil de pago esté en el subespacio generado por los renglones de la matriz payoff asociada viene dado como

$$ph = \sum_{\omega_i} \pi_{\omega_i}\rho_{\omega_i}(Xh)_{\omega_i},$$

lo que es equivalente a tener

$$ph = E[\rho Xh].$$

Si ahora consideramos la densidad de cada uno de los estados como

$$\rho_{\omega_i} = q_{\omega_i}/\pi_{\omega_i},$$

se sigue que $q_{\omega_i} = \rho_{\omega_i}\pi_{\omega_i}$ es positivo para todos los activos y en cualquier escenario del mercado. De esta manera, al tomar

$$q = (\rho_{\omega_1}\pi_{\omega_1}, \ldots, \rho_{\omega_D}\pi_{\omega_D}),$$

llegamos al resultado que queríamos.

(ii)⇒(iii) Supongamos que existe un vector de probabilidades neutras al riesgo y una tasa libre de riesgo asociada. La representación martingala implica que

$$\begin{aligned} ph &= E_\Pi\left[\tfrac{Xh}{1+r}\right] \\ &= (1+r)^{-1}\Pi Xh \\ &= (1+r)^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^D \pi_i(Xh)_i. \end{aligned}$$

Si tomamos $\pi_i = (1+r)\kappa_i\rho_i$, donde π_i es la probabilidad del estado del mundo ω_i, tenemos que

$$ph = \sum_{i=1}^D \kappa_i\rho_i(Xh)_i,$$

donde κ es la medida de probabilidad de trabajo y ρ es positivo.

■

Desde luego existen ventajas y desventajas al emplear tal o cual representación para el funcional de valuación. La elección de la forma que consideremos depende sobre todo del contexto en el que estemos trabajando.

Ejemplo 2.4.1. (Dybvig-Ross). En el CAPM tenemos que

$$ra = r + \lambda cov(hx/\rho h, r_m),$$

donde r_α es la tasa de riesgo ajustado, r_m es el rendimiento aleatorio en el mercado y λ es el precio de mercado con riesgo.

Esto nos da un sistema de dos ecuaciones, el cual al ser resuelto para ph implica que

$$ph = 1 + r^{-1}E[hx\{1 - \lambda[r_m - E(r_m)]\}],$$

lo que es lineal en hx. El punto fino es saber si el precio es no positivo, y esto depende de si el rendimiento del mercado puede ser mayor que $E[r_m] + 1/h$. En cualquiera de los dos casos, la clave está en notar que la forma básica de la representación es lineal aún cuando la verificación de la positividad dependa de la forma exacta de la prima de riesgo.

■

2.5. Notas y comentarios

2.4.1 La ley de un precio es un supuesto económico útil en el desarrollo de varios modelos teóricos. Al menos intuitivamente esta ley afirma que todos los vendedores se congregarán alrededor del precio más alto vigente, y todos los compradores a los precios más bajos del mercado actual. En un mercado eficiente la convergencia en un único precio es inmediata y es este principio el que se aplica en el mercado de *commodities.*

2.4.2 El PTFVA tiene una relevancia histórica que destaca por establecer un método que permite disponer del precio de algún derivado financiero para cualquier instante en algún horizonte temporal[3]. Sin embargo, es hasta 1973 con el artículo de Black-Scholes que se tiene un auge en la valuación de opciones dentro de la matemática financiera. La heurística llamada *replicación* (Véase [6], [38], Vol. 1 y Vol. 2) se convirtió así en parte importante para la valuación de opciones. Sin embargo, en la versión del resultado que comentamos aquí la replicación financiera no se hace presente.

2.4.3 Fueron los mismos Phillip Dybvig y Stephen Ross quienes acuñaron el término *teorema fundamental de las finanzas* en un diccionario de economía en 1987 ([13]), aunque la primera afirmación y la demostración aparecieron en una publicación de Ross llamada *Return, risk and arbitrage* en 1976.

2.4.4 A. Beja en su trabajo titulado *The estructure of the cost of the capital under uncertainly*[4] fue uno de los primeros en hacer hincapié acerca de la linealidad del funcional para la valuación de activos. Sin embargo, Beja no ligó este hecho con la ausencia de arbitrage.

2.4.5 Las ideas utilizadas en la demostración del teorema 2.3.1 son muy importantes, ya que son las que se llevarán al contexto de dimensión infinita en el capítulo 3.

[3]Es a partir de la tesis doctoral de Louis Bachelier Théorie de la spéculation en el año de 1900, que se inicia el estudio de los mercados financieros. La tesis doctoral de Bachelier fue dirigida por Henri Poincaré, en ella se estudiaba el mercado de opciones en la bolsa de París con el enfoque que consideramos como contemporáneo

[4]Review of Economic Studies, **38**:359-69, 1971

CAPÍTULO 3

El Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (PTFVA)

La teoría de la valuación por arbitraje se aplica en la práctica financiera gracias a un resultado notable. Este es el teorema fundamental de las finanzas, que viene a ser la herramienta básica para tal fin. Este resultado fue denominado en 1987 con el nombre de "Fundamental Theorem of Asset Pricing", gracias al artículo de Phillip Dybvig y Stephen Ross titulado "Arbitrage", en *The new palgrave dictionary of money and finance* ([13]).

El teorema fundamental establece un vínculo entre la teoría de la valuación de activos derivados y la teoría de martingalas. Con este resultado se establece que la ausencia de oportunidades de arbitraje equivale a la existencia de un factor de descuento estocástico que puede ser empleado para valuar a todos los activos. Esto es lo que se denomina medida martingala equivalente. Esta equivalencia no es simétrica. La implicación de que la existencia de una medida martingala equivalente implica no-arbitraje es más o menos directa en todas las versiones del Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos. Lo realmente difícil es la implicación recíproca, y en ella se centran todas las herramientas desarrolladas para probar el teorema.

Michael Harrison, David Kreps y Stanley Pliska en sus artículos de 1979 y 1981 ([20] y [21]), sentaron las bases para la formulación de desarrollos más generales del PTFVA. La incorporación de series de tiempo, procesos estocásticos con saltos y modelos de equilibrio macroeconómico son esfuerzos que se han hecho para describir de manera alternativa el comportamiento de este factor de descuento estocástico.

Nosotros nos enfocamos únicamente en dos versiones del PTFVA, a saber, las versiones de Dalang-Morton-Willinger (1990) y la de Delbaen-Schachermayer (1994). A lo largo de este capítulo establecemos con suficiente detalle la prueba del primero de ellos. El segundo involucra una prueba muy larga y técnica, por lo que haremos un resumen con referencias. En la sección 3.1 haremos algunos preparativos y, en la sección 3.2 veremos la demostración de esta versión mediante inducción para el caso más sencillo (un periodo con espacio de estados finito), y usando propiedades de convexidad para el caso general. En la sección 3.3 presentamos la versión de Delbaen-Schachermayer para tiempo discreto finito pero un espacio de estados no necesariamente finito. Cerramos el capítulo con algunas aplicaciones prácticas de este importante resultado. Las referencias principales son [14] y [28]. En las secciones 3.1-3.3 seguiremos muy de cerca al primero, y en la sección 3.4, consideramos ejemplos similares a los que se presentan en el segundo.

A lo largo de todo el capítulo trabajaremos en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\in I}, P)$, donde I será $\{0,1\}, \{1,\ldots,T\}$ o bien $[0,T]$, y en la sección final $[0,\infty]$.

3.1. Preliminares

3.1.1. Álgebras y σ-álgebras

Vamos a comenzar este capítulo con un breve recordatorio de los conceptos y definiciones de procesos estocásticos que vamos a ocupar en extenso. Para el lector interesado en el estudio más a fondo de estos temas la bibliografía recomendada es [24], [31] ó [41]. Por otro lado, para aquellos lectores que estén familiarizados con la teoría de procesos estocásticos y martingalas lo mejor es pasar a las siguientes secciones.

Definición 3.1.1. *Una σ-álgebra de subconjuntos de E es una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de E, tales que $E \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{M}$ es cerrada bajo la unión numerable y la complementación.*

Definición 3.1.2. *Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de E. Denotaremos por $\sigma(\mathcal{A})$ a la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$.*

En este caso $\sigma(\mathcal{A})$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$, la cual es la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{A}$

Definición 3.1.3. *Sean $(E, \mathcal{M})$ y $(F, \mathcal{N})$ dos espacios medibles. Diremos que una función $f : E \to F$ es medible con respecto a las σ-álgebras $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ si para cualquier $A \in \mathcal{F}$, $f^{-1}(A) = \{x \in E \ : \ f(x) \in A\} \in \mathcal{M}$.*

Vamos a escribir ahora la definición precisa de filtración para tener una mejor clarificación de lo que es un espacio de probabilidad filtrado.

Definición 3.1.4. *Consideremos al espacio medible $(\Omega, \Im)$. Una filtración en el espacio $(\Omega, \Im)$ es una familia de σ-álgebras de Ω, $(\Im_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, tal que*

(i) $\Im_t \subset \Im, \ \forall t \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Si $s, t \in \mathbb{R}_+$ y $s \leqslant t$, entonces $\Im_s \subset \Im_t$

Definición 3.1.5. *Sea $(\Im_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ una filtración en el espacio $(\Omega, \Im)$. Entonces, para cada $t \geqslant 0$ se define una nueva σ-álgebra $\Im_{t+} = \bigcap_{s>t} \Im_s$.*

Definición 3.1.6. *Sea $(\Omega, \Im, (\Im_t)_t, P)$ un espacio de probabilidad filtrado. Un proceso $(X_t)_{t\geqslant 0}$, definido sobre Ω es $\Im_t$-adaptado, o adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t\geqslant 0}$, si para cada $t \geqslant 0$, la variable aleatoria X_t es $\Im_t$-medible.*

La definición que anotamos a continuación es parte fundamental para poder entrar de lleno a los desarrollos de este capítulo. En este caso tenemos que un **tiempo de paro** relativo a una filtración $(\Im_t)_{t\geqslant 0}$ es una variable aleatoria T definida en Ω con valores en el intervalo $[0,\infty]$, tal que para cada $t \geqslant 0$ se tiene que $\{T \leqslant t\} \in \Im_t$.

Definición 3.1.7. *Dados un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\geqslant 0})$ y un proceso $(X_t)_{t\geqslant 0}$ que sea $\Im_t$-adaptado,* *a)* *Diremos que X_t es martingala si*

i) $\forall t \geqslant 0,\ X_t$ *es integrable, y*

ii) *si* $0 \leqslant s < t$, *entonces* $E[X_t|\Im_s] = X_s$.

Podemos ver de (ii), que dada la información al tiempo s (lo que nos representa $\Im_s$), la mejor predicción para el proceso al tiempo t es el valor más reciente X_s.

b) *El proceso* $(X_t)_{t\geqslant 0}$ *es martingala local si existe una sucesión* $\{T_n\}_{n\geqslant 1}$, *de tiempos de paro relativos a la filtración* $(\Im_t)_{t\geqslant 0}$ *tales que*

i) $\forall \omega \in \Omega$ *y* $n \in \mathbb{N},\ T_n(\omega) \leqslant T_n + 1(\omega)$,

ii) *para casi todo* $\omega \in \Omega,\ \lim n \to \infty T_n(\omega) = \infty$,

iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, *el proceso* $I_{\{T_n>0\}}X_n^T$ *es martingala, donde*

$$(I_{\{T_n>0\}}X_n^T)_t(\omega) = I_{\{T_n>0\}}(\omega)X_t^{T_n}(\omega).$$

Las martingalas locales forman una clase muy importante de procesos en la teoría del cálculo estocástico. Esto se debe a que la propiedad martingala local es preservada por la integral estocástica, pero la propiedad martingala no. El paso de las martingalas a las martingalas locales consiste en eliminar la condición de integrabilidad, esto es una aproximación al movimiento sin tendencias preferentes.

A continuación comentamos de forma somera el concepto de integración estocástica. La intención es tener un antecedente en relación a las estrategias de compra y venta de un agente del mercado. Desde luego este acercamiento es muy técnico, por lo que recomendamos [14], [31], [24] ó [41], para consultar los detalles.

En la toma de decisiones los tiempos aleatorios T_1, T_2 pueden depender únicamente de la información pasada y por consiguiente deben ser tiempos de paro. Al corredor que sea de nuestra elección en general le podemos marcar límites, la libertad de comprar/vender a cierto tiempo puede depender de la información disponible hasta ese momento. Es por tal motivo que los activos que compramos al tiempo T_1 deben ser medibles con respecto a $\Im_{T_1}$. Al conducirse de esta manera los agentes del mercado tienen una función de precio $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ al pasar del tiempo T_1 al tiempo T_2, donde la función f es $\mathbb{R}^d$-valuada y $\Im_{T_1}$-medible. De esta manera se obtiene una ganancia o una pérdida igual a $\langle f, S_{T_2} - S_{T_1}\rangle$.

Esto es lo que da paso a la definición de proceso predecible que escribimos más abajo.

Definición 3.1.8. *Sea $\mathcal{P}$ la mínima σ-álgebra en $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ que contiene a los conjuntos $\{0\} \times A, A \in \Im_0$ y $(u, v] \times B, B \subset \Im_u, 0 \leqslant u \leqslant v$. $\mathcal{P}$ se conoce como la σ-álgebra de los conjuntos predecibles.*

Definición 3.1.9. *Un proceso estocástico $\{H_t\}_{t\geqslant 0}$ es $\Im_t$-predecible si es $\mathcal{P}$-medible.*

Definición 3.1.10. *Un proceso predecible $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$, con $H_0 = 0$ se dice que es:*

i) *una estrategia simple si existen tiempos de paro $0 \leqslant T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots \leqslant T_n < \infty$, así como variables aleatorias $f_0, \ldots, f_{n-1}$, donde cada f_k es $\Im_{T_k}$-medible, tal que*

$$H = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \boldsymbol{1}_{]T_k, T_{k+1}]};$$

ii) una estrategia simple si además $f_0, \ldots, f_{n-1}$, pertenecen a L^∞;

iii) de soporte acotado si existe $t \in R_+$ tal que $H = H\mathbf{1}_{[0,t]}$.

Obsevación. Un proceso H_t es predecible si es $\Im_{t-1}$-medible.

Cuando consideramos una estrategia simple, la ganancia final esta dada como

$$(H \cdot S)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle f_k, S_{T_{k+1}-S_k} \right\rangle,$$

y al tiempo t la ganancia de esta estrategia es

$$(H \cdot S)_t = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle f_k, S_{T_{k+1}\wedge t} - S_{T_k \wedge t} \right\rangle.$$

A $H \cdot S$ se le llama la integral estocástica de H con respecto a S, y debe ser vista como un proceso. La ganancia final está descrita por la variable aleatoria $(H \cdot S)_\infty = \lim_{t\to\infty}(H \cdot S)_t$, siempre que tal límite exista ([14]).

3.1.2. Dependencia e independencia condicional

En los mercados financieros, suele ser que existan uno o varios activos cuyo payoff pueda ser generado a partir de las funciones de pago de algunos otros activos del mercado, es decir, existen activos redundantes. La redundancia es en el sentido de que algunos de ellos son combinaciones lineales de otros. Este problema puede solucionarse si se introduce la noción de rango predecible. La idea de esta estrategia es la de describir en una forma $\Im_0$-medible, la dependencia o independencia condicional lineal de los procesos que conducen los precios del activo subyacente $S_1^1, \ldots, S_1^d$.

La introducción del rango predecible nos ayudará en la sección 3.2.3, para mostrar la cerradura del cono C, que se define ahí. Las condiciones de estabilidad que se mencionan a continuación sirven para probar la proposición 3.2.2 y el teorema 3.2.3. Sin embargo, dado que nuestro trabajo está enfocado en la prueba del PTFVA, en algunos puntos nos remitiremos a las referencias.

Lema 3.1.1. *Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $E \subset L^0(\Omega, \Im, P; \mathbb{R}^d)$ un subespacio cerrado con respecto a la convergencia en probabilidad. Supongamos que E satisface la siguiente condición de estabilidad. Si $f, g \in E$ y $A \in \Im$, entonces $f\mathbf{1}_A + g\mathbf{1}_{A^c} \in E$. Así, si $f \in E$ y h es una función real-valuada $\Im$-medible, se tiene que $hf \in E$.*

Demostración. Primero probaremos la afirmación para funciones elementales h. Sea entonces

$$h = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{1}_{A_k}, \quad \text{donde} \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

y $A_1, \ldots, A_n$ forman una partición $\Im$-medible de Ω. En vista de la hipótesis de estabilidad de E, tenemos que $f\mathbf{1}_{A_k} \in E$ para cualquier k, se sigue que $hf \in E$.

El caso general se sigue mediante aproximación. Si h es una función $\mathbb{R}$-valuada que es $\Im$-medible, tomamos una sucesión de v.a. $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ que sean $\Im$-medibles y tal que $h_n \to h$ en probabilidad. Como el conjunto E es cerrado y $h_n f \in E, \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que $hf \in E$.

$\blacksquare$

Lema 3.1.2. *Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad y $E \subset L^0(\Omega, \Im, P; \mathbb{R}^d)$ un subespacio cerrado con respecto a la convergencia en probabilidad. Supongamos que $f, g \in E$ y $A \in \Im$, entonces $f\mathbf{1}_A + g\mathbf{1}_{A^c}$.*

Bajo estas hipótesis existe una transformación $\Im$-medible, P_0 que toma valores en las proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^d$, de tal manera que $f \in E$ sii $P_0 f = f$.

Dada cualquier transformación P, que sea $\Im$-medible y proyección-valuada tal que $Pf = f, \forall f \in E$, tenemos que $P_0 = P_0 P = P P_0$, lo que significa que el rango de P_0 es un subespacio del rango de P.

Demostración. La construcción de la transformación que sea proyección-valuada P_0 será hecha a través de la construcción de vectores aleatorios ortogonales con soporte maximal. La construcción será recursiva tomando primeramente $E_1 = E$. Nos fijamos entonces en la familia de conjuntos $\Im$-medibles

$$\{\{f \neq 0\} \mid f \in E_1\}.$$

Dado que E_1 es cerrado, este conjunto es estable para uniones contables y, por lo tanto existe un elemento A_1 con probabilidad maximal $P[A_1]$ y con función correspondiente $f \in E$, lo cual quiere decir que $\{f \neq 0\} = A_1$. Por el lema 3.1.1 la función

$$\psi_1 = \frac{f}{|f|}\mathbf{1}_{A_1}$$

está aún en E_1, y tiene soporte maximal entre todos los elementos de E_1.

Nos fijamos ahora en el subespacio E_2 de E_1

$$E_2 = \{f \in E_1 \mid \langle f, \psi_1 \rangle = 0, \quad c.s.\}$$

De forma clara este conjunto E_2 satisface la misma condición de estabilidad que E_1. Por esto podemos encontrar una función $\psi_2 \in E_2$ tal que $|\psi_2| = 1$ ó 0, y tal que ψ_2 tiene soporte maximal entre todos los elementos de E_2.

Siguiendo con este procedimiento podemos encontrar variables aleatorias $\psi_1, \ldots, \psi_d$ tales que $\langle \psi_i, \psi_j \rangle = 0$, siempre que $i \neq j$, y además $|\psi_i| = 1$ ó 0, y ψ_i tiene soporte maximal entre todos los elementos de E_i. Sin embargo, es necesario que este procedimiento pare a lo más en d pasos.

Así, debemos mostrar que para $g \in E$ y $\langle g, \psi_i \rangle = 0$, para todo $i = 1, \ldots, d$, tenemos que $g = 0$. Por la maximalidad de ψ_1 tenemos que $\{g \neq 0\} \subset \{\psi_1 \neq 0\}$, y mediante un procedimiento inductivo se sigue que $g \in E_i$. Además, en vista de la maximalidad de ψ_i tenemos $\{g \neq 0\} \subset \{\psi_i \neq 0\}$. Esto implica que si casi seguramente $g(\omega) \neq 0$, entonces $\psi_1(\omega), \ldots, \psi_d(\omega)$ forman una base ortogonal del espacio $\mathbb{R}^d$ y además

$$g(\omega) \not\perp \{\psi_1(\omega), \ldots, \psi_d(\omega)\}.$$

Afirmamos ahora que

$$E = \{\sum_{k=1}^{d} a_k \psi_k \mid a_1, \ldots, a_d \text{ son } \Im - \text{medibles}\}. \tag{3.1}$$

De hecho, si denotamos por F al lado derecho de (4.1), tenemos que $F \subset E$ por el lema 3.1.1. Recíprocamente si $f \in E$, comparamos f con $\sum_{k=1}^{d} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$. Dado que

$$g = f - \sum_{k=1}^{d} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k$$

satisface $g \in E$ y $\langle g, \psi_i \rangle = 0$, para cualquier $i \leqslant d$, debemos tener que $g = 0$. Definamos ahora la proyección

$$P_0 x = \sum_{i=1}^{d} \langle x, \psi_i \rangle \psi_i.$$

Es claro que si $f \in E$, entonces $P_0 f = f$. Recíprocamente tenemos que si $P_0 f = f$, entonces $f = \sum \langle x, \psi_i \rangle \psi_i$, lo que significa que $f \in E$.

Ahora únicamente falta verificar la última afirmación. Sea P una transformación proyección-valuada tal que $Pf = f$ para toda $f \in E$. Entonces $P\psi_i = \psi_i$, para toda i, por lo que $PP_0 = P_0 = P_0 P$.

■

3.2. El PTFVA en tiempo discreto y horizonte finito

Si bien Freddy Delbaen y Walter Schachermayer dieron una demostración general para el PTFVA, su trabajo está basado en el artículo de Dalang-Morton-Willinger de 1990 ([10]), en el cual se presenta una demostración de este mismo resultado en tiempo discreto y horizonte finito, aunque con un espacio de probabilidad asociado no necesariamente finito. Este es el resultado de nuestro interés, sin embargo, tenemos la intención de abordar un resultado un poco más general. Por consiguiente, siguiendo el esquema cronológico antes mencionado es que decidimos presentar primero la versión de Dalang-Morton-Willinger del PTFVA, para tener una visión más integral de la extensión hecha por Delbaen y Schachermayer.

La demostración de esta versión del PTFVA puede darse de dos maneras:

- Usando inducción matemática sobre el numero de períodos de tiempo.
- Mediante las propiedades de cerradura del conjunto de reclamos contingentes.

Sin embargo, sea cual sea la forma en la que se pruebe el resultado, la demostración gira en torno a un concepto muy especial que mencionamos a continuación.

3.2.1. La condición de no-arbitraje

La condición de no-arbitraje es la piedra angular dentro de la teoría de valuación en las finanzas modernas. Esta condición "dicta" el precio justo para un activo derivado en un mercado financiero en el que intervienen varios agentes. El principio de no-arbitraje fue propuesto por Robert Merton en la década de los 60's, y jugó un rol muy importante para que le fuera otorgado el premio nobel de economía junto con Myron Scholes en 1997. El lector deberá regresar a las definiciones y ejemplos del capítulo 1, a medida que sea necesario.

En esta parte del trabajo me di a la tarea de describir la condición de no arbitraje de manera sencilla, con la esperanza de que esto sea de ayuda para cuando trabajemos con casos más generales. También dedico atención a tratar de explicar el uso de los espacios L^0, L^1 y L^∞ en la condición de no-arbitraje que empleamos a lo largo de este capítulo.

Intuitivamente una *oportunidad de arbitraje es la posibilidad de obtener un beneficio libre de riesgo y sin inversión neta de capital.* El principio de no-arbitraje establece que en un mercado financiero no deben existir tales oportunidades de arbitraje.

Para comenzar nuestra descripción consideremos un espacio de probabilidad con dos estados $\{\omega_1, \omega_2\}$, de tal manera que $P[\omega_1], P[\omega_2] > 0$, donde $P[\omega_1] + P[\omega_2] = 1$, y un horizonte temporal $I = \{0, 1\}$. Si tomamos un portafolio $h = (y_1, y_2)$ que sea autofinanciable y $S = (S_1(t), S_2(t))$ es el vector de precios para los activos, debemos tener que

$$(Vh)(0) = y_1 S_1(0) + y_2 S_2(0) = 0$$

en cada estado del mundo. Esto se puede expresar también de la siguiente forma

$$(Vh)(0) = \langle h, S \rangle = 0.$$

Notemos que en este caso, se cumple una condición de ortogonalidad entre el portafolio y el vector de precios.

En vista de que solo tenemos dos activos podemos pensar esta situación en el plano cartesiano, donde los ejes coordenados son los pesos de cada unos de los activos. De esta manera, cada punto (y_1, y_2) en el plano corresponde a un portfolio.

Como tenemos dos escenarios al tiempo 1, los precios de los activos son $S_1^1(1), S_2^1(1)$ en el escenario ω_1, y son $S_1^2(1), S_2^2(1)$ en el escenario ω_2. Si al tiempo 1 el valor del portafolio en ω_1 se toma como la línea generada por los activos, y trazamos la perpendicular a ésta, tal como se muestra en la figura 3.1, los portafolios que se encuentran a la derecha de la línea ortogonal serán los portafolios admisibles en ese estado del mundo cuyo payoff es positivo. Notemos además que en este caso aquellos portafolios que están por debajo de la línea ortogonal son portafolios de payoff negativo.

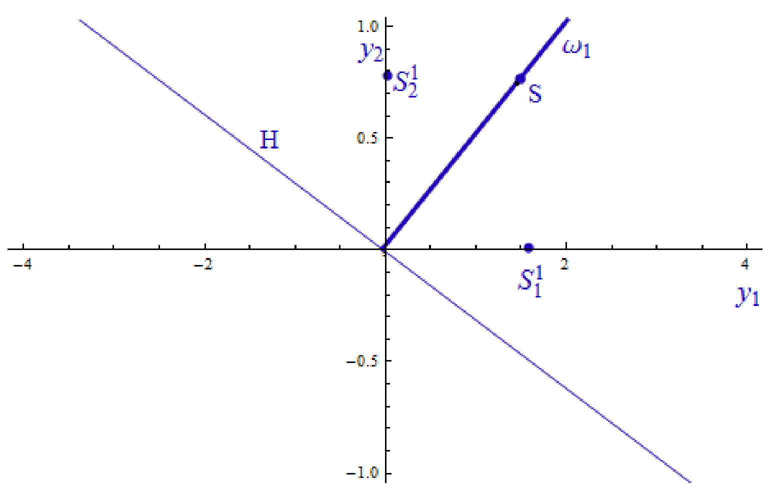

Figura 3.1: Gráfica del estado ω_1

En la gráfica, H representa el conjunto de portafolios que tienen valor igual a 0, y S es el conjunto de posibles precios para los activos del portafolio en ω_1.

Haciendo algo similar para el escenario ω_2 (y en general para los estados del mundo que se tengan), llegamos a la gráfica que se muestra en la figura 3.2. En ésta podemos ver que una vez trazados los dos escenarios, el subespacio generado por los payoffs de los portafolios cuyo precio es positivo, generan un subespacio que intersecta al conjunto de portafolios con precio negativo solamente en el origen.

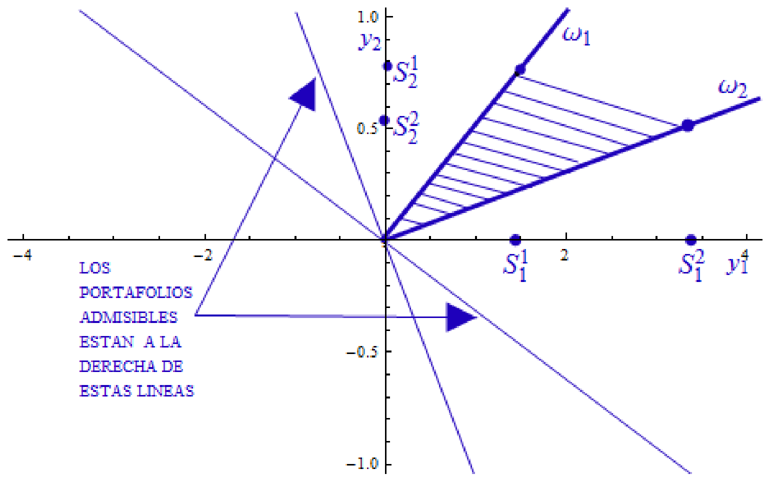

Figura 3.2: Gráfica para la condición de no-arbitraje

Esta situación es la que indica la condición de no-arbitraje. Por tanto los portafolios *libres de arbitraje* pertenecen al cono convexo que satisface estas condiciones.

De hecho, de la gráfica que mostramos en la figura 3.2, se establece la condición de no-arbitraje que anotaremos una vez formalizadas algunas ideas.

Definición 3.2.1. *El subespacio $K \subset L^0(\Omega, \Im, P)$ definido por*

$$K = \{(H \cdot S)_T \mid H \in \mathcal{H}\},$$

es el conjunto de reclamos contingentes alcanzable al tiempo T, donde $\mathcal{H}$ denota al conjunto de procesos predecibles $\mathbb{R}^d$-valuados $H = (H_t)_{t=1}^T$.

Observación. Veamos que con $(H \cdot S)_T$, puede darse la confusión con la composición de funciones que se denota por $\circ$. Sin embargo, debe entenderse que en nuestro caso se trata de integrales estocásticas, no de la composición de los procesos.

Si consideramos $f = (H \cdot S)_T$, esta variable aleatoria representa los payoffs al tiempo T que un agente del mercado puede cubrir sin inversión de por medio, a través de alguna estrategia adecuada H (mediante una estrategia predecible).

Definición 3.2.2. *El conjunto de reclamos contingentes alcanzables al precio* m *es el espacio afín $K_m = K + m$, donde K es el conjunto de reclamos contingentes alcanzables al tiempo T (al precio 0).*

En este caso los payoffs al tiempo T que algún agente puede cubrir requieren de una inversión de dinero inicial m, negociando alguna estrategia de mercado que sea predecible. Notemos que $f \in K_m$ sigue siendo una v.a. ya que $f = (H \cdot S)_T + m,\ m \in \mathbb{R}$.

Definición 3.2.3. *El cono convexo $C \subset L^\infty(\Omega, \Im, P)$, definido por*

$$C = \{g \in L^\infty(\Omega, \Im, P) \mid \exists f \in K \text{ tal que } g \leqslant f\}$$

es el conjunto de reclamos contingentes super-replicables al precio 0.

Definición 3.2.4. *En un mercado financiero M se satisface la condición de no-arbitraje si*

$$K \cap L^0_+(\Omega, \Im, P) = \{0\},$$

o en forma equivalente si

$$C \cap L^0_+(\Omega, \Im, P) = \{0\}.$$

Con los comentarios de los párrafos anteriores describimos geométricamente la condición de no-arbitraje en términos de ortogonalidad. Es por esta razón, como veremos más adelante, que podremos usar teoremas de separación del tipo Hahn-Banach para el desarrollo de la teoría.

Observación. La definición de no-arbitraje 3.2.4 funciona bien en el caso de espacios de probabilidad discretos. Sin embargo, para el caso continuo esta condición es insuficiente, por lo que David Kreps introdujo la condición de *no free-lunch*[1]. Esta condición es una generalización del principio de no-arbitraje propuesto por Merton.

Definición 3.2.5. *El proceso $(S_t)_{t=1}^\infty$ admite un free-lunch si existe una variable aleatoria f en $(\Omega, \Im, P)$ tal que $P[f > 0] > 0$ y una red* [2] *$(f_\alpha)_{\alpha \in I} = (g_\alpha - h_\alpha)_{\alpha \in I}$ tal que $g_\alpha = \int_0^T H_t^\alpha$ para alguna estrategia admisible $H^{\alpha \leqslant 0}$ y $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge a f en la topología débil-$*$ de $L(\Omega, \Im, P)$.*

La interpretación tiene desde luego un símil con la condición de no-arbitraje que se maneja en tiempo discreto. En un mercado con varios agentes, si se lograra conformar una estrategia admisible que permita hacer dinero de la nada, ésta sería como el pago de un almuerzo por parte de algún desconocido. De aquí el nombre de free-lunch. En el trabajo de Delbaen y Schachermayer de 1994, se introdujo la noción de "free lunch with vanishing risk", la cual podemos traducir como "un almuerzo gratis con riesgo evanescente". Esta otra condición se obtiene de la sustitución de la topología débil-$*$ en la definición anterior por la topología de la norma L^∞. Entonces se puede sustituir la red (f_α) por la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. Esta noción permite dar una clara interpretación económica de lo que se intenta decir al usar el término «Riesgo evanescente».

Los espacios de trabajo

En el contexto actual, dado que se trabaja con procesos estocásticos que están definidos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, se requiere de espacios suficientemente generales para desarrollar la teoría basada en la ausencia de oportunidades de arbitraje. Es por esta razón que se considera a $L^0(\Omega, \Im, P)$, el espacio de clases de equivalencia de funciones $\Im$-medibles, definidas como iguales casi dondequiera. Como P es una medida de probabilidad, éste espacio de todas las funciones medibles con la topología de la convergencia en medida[3] es un espacio lineal métrico completo y puede definirse su norma como una de las siguientes

[1] Esta definición apareció en D.M. Kreps (1981), *Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities.* J. Math. Econ., Vol. 8, pp. 15-35.

[2] Una red es una generalización del concepto de sucesión. Ver [27] ó [34]

[3] Para ver estos datos y más detalles puede consultarse la liga:
$http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/RRACEFN_1980_74_02_08.pdf$

- $\| f \| = \int_\Omega |f|(1+|f|)^{-1} dP$
- $\| f \|' = \int_\Omega \text{ínf}(1,|f|) dP$
- $\| f \|_0 = \text{ínf}\{s > 0 \ : \ \lambda_f(s) < s\}$, donde $\lambda_f(s) = P(\{x \in X \ : \ |f(x)| > s\})$ es la función de distribución de s.

Este espacio $L^0(\Omega, \Im, P)$ proporciona uno de los ejemplos más conocidos de espacio vectorial topológico cuyo dual se reduce a cero. Esto se tiene cuando la medida es finita y no atómica.

Si nos preguntamos el porqué del espacio $L^\infty(\Omega, \Im, P)$, la respuesta puede parecer obvia. Si hemos mencionado el concepto de ortogonalidad, se sigue la necesidad del dual topológico $L^\infty(\Omega, \Im, P)$, para el espacio de funciones integrables $L^1(\Omega, \Im, P)$. Puede ahondarse en este tema consultando [27]. Sin embargo, en sentido económico el uso de este espacio es más sutil: *no se puede permanecer tirando el dinero para llegar a algún payoff que haya sido replicado al precio cero.* De hecho tenemos que ésta es la interpretación económica de la definición 2.2.3. Es decir, los procesos de precios deben permanecer acotados.

Si consideramos el recorrido de las variables aleatorias que aparecen en la condición de no-arbitraje, veremos que es necesaria una condición de integrabilidad -en sentido estocástico- para el proceso de precios $(S_t)_{t=1}^T$. De hecho este es un punto bastante fino que requiere de atención, pues se necesita una condición de estabilidad para el subespacio K, y consideraciones acerca del rango de la medida de probabilidad P . Sin embargo, al suponer que se tiene esta condición el espacio de funciones integrables $\Im$-medibles $\mathbb{R}$-valuadas $L^1(\Omega, \Im, P)$ resulta adecuado para que también tengan sentido las interpretaciones económicas de los resultados matemáticos.

3.2.2. Demostración del PTFVA por inducción

Como ya comentamos, en la versión del teorema fundamental que nos interesa (la versión de Dalang-Morton-Willinger) se trabaja con una base estocástica discreta, por lo que una herramienta básica que se puede aprovechar es el principio de inducción.

No obstante necesitamos que los subespacios K y C cumplan con algunas condiciones adicionales. En la figura 3.2, los portafolios libres de arbitraje pertenecen al interior del cono generado por los payoffs de aquellos portafolios cuyo precio es positivo. Así, debemos pedir que este cono sea cerrado dado que los portafolios libres de arbitraje están en el interior.

Debemos verificar entonces que con las definiciones anteriores, en efecto los subespacios C y K son cerrados en $L^0(\Omega, \Im, P)$. Esto es lo que se establece en el teorema 3.2.1.

Definición 3.2.6. *Sea $H \in L^0(\Omega, \Im_0, P; \mathbb{R}^d)$. Diremos que H está en forma canónica para (S_0, S_1) si $H \in \mathcal{H}^X$, donde*

$$\mathcal{H}^X = \{f : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid f \text{ es } \Im_0\text{-medible y } Pf = f\}, \text{ aquí } X = S_1 - S_0.$$

Proposición 3.2.1. *Sea $S = (S_0, S_1)$ un proceso adaptado a $(\Omega, (\Im_t)_{t=0}^1, P)$ y sea $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $L^0(\Omega, \Im_0, P; \mathbb{R}^d)$ en forma canónica. Entonces*

(i) La sucesión $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ es acotada c.s. sii $\{(H \cdot \Delta S)\}_{n=1}^\infty$ es acotada.

(ii) $\{H^n\}_{n=1}^\infty$ converge c.s. sii $\{(H \cdot \Delta S)\}_{n=1}^\infty$ converge c.s.

Si suponemos además que el proceso S satisface la condición de no-arbitraje tenemos

(iii) La sucesión $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada c.s. sii $\{(H \cdot \Delta S)_-\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

(iv) $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$ converge c.s. sii $\{(H \cdot \Delta S)_-\}_{n=1}^{\infty}$ converge c.s.

Demostración. Véase [14], Cap. 6, pp. 92-93.

■

Teorema 3.2.1. *Sea $S = (S_0, S_1)$ un proceso estocástico $\mathbb{R}^d$-valuado a un paso adaptado a $(\Omega, (\Im_t)_{t=0}^1, P)$. Entonces*

(i) El espacio vectorial

$$K = \{\langle H, \Delta S\rangle \ \mid H \in L^0(\Omega, \Im_0, P; \mathbb{R}^d)\}$$

es cerrado[4] *en $L^0(\Omega, \Im_1, P)$.*

(ii) Si S satisface la condición de no-arbitraje, entonces el cono

$$C = K - L^0_+(\Omega, \Im_1, P)$$

es cerrado[5] *en $L^0(\Omega, \Im_1, P)$.*

Nota. A la parte (i) del enunciado se le conoce como el *Lema de Stricker.*

Demostración. La prueba que anotamos a continuación es la misma que aparece en [14], Cap.6, pp. 93-95.

(i) Sea $\{f_n\} = \langle H_n, \Delta S\rangle_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en K que converge a $f_0 \in L^0(\Omega, \Im_1, P)$ con respecto a la convergencia en medida. Por simplicidad podemos suponer que H^n está en forma canónica. Por otra parte, pasando a una subsucesión podemos suponer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguramente a f_0.

La proposición 3.2.1 implica que la sucesión $\{H^n\}_{n=0}^{\infty}$ converge casi seguramente a $H^0 \in L^0(\Omega, \Im_1, P; \mathbb{R}^d)$, de modo que $f_0 = \left\langle H^0, \Delta S\right\rangle$ y por lo tanto $f_0 \in K$.

(ii) Para probar esta afirmación supongamos que $f_n = g_n - h_n$, es una sucesión que converge en probabilidad a $f_0 \in L^0(\Omega, \Im_1, P)$, donde $g_n = \langle H^n, \Delta S\rangle$, para lo cual H^n es un integrando en forma canónica y $h_n \in L^0_+(\Omega, \Im_1, P)$. Tenemos que probar entonces que $f_0 \in C$, para esto de nueva cuenta podemos suponer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguramente a f_0. Como $f_n \leqslant g_n$ inferimos que $\{\langle H^n, \Delta S\rangle_-\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada c.s., de tal forma que podemos concluir de la condición de no-arbitraje y de la proposición 6.4.1 (ii) que $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$ también es acotada c.s..

Pasando a una subsucesión parametrizada medible $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$ (ver [14], pp. 90), podemos suponer que la subsucesión $g_{\tau_k} = \langle H^{\tau_k}, \Delta S\rangle$ converge casi seguramente a $\left\langle H^0, \Delta S\right\rangle$, para algún $H^0 \in E$. Obsérvese que la sucesión $\{f_{\tau_k}\}_{k=1}^{\infty}$ sigue convergiendo c.s. a f_0, de modo tal que $h_{\tau_k} = f_{\tau_k} - g_{\tau_k}$ converge casi seguramente a algún $h_0 \geqslant 0$. Por lo tanto

$$f_0 = \left\langle H^0, \Delta S\right\rangle - h_0 \in K - L^0_+(\Omega, \Im_1, P) = C$$ ■

[4]Esta parte del teorema aparece en: C. Stricker, (1990), *Arbitrage et Lois de Martingale.* Annales de l' Institute Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques, vol 26, pp. 451-460

[5]La demostración de esta afirmación es debida a Walter Schachermayer y apareció en W. Schachermayer, (1992), *A Hilbert space proof of the fundamental theorem of assets pricing in finite discrete time.* Insurance: Mathematics and Economics, vol. 11, no. 4, pp. 249-257

Pasemos al resultado más importante de este trabajo, el PTFVA en una versión no-elemental. Esta es de hecho una versión que podemos calificar como intermedia, aunque no por eso menos poderosa. En este caso el espacio de probabilidad asociado es discreto pero no necesariamente finito, lo que brinda suficiente generalidad a la hora de modelar un mercado real.

Este desarrollo nos proporciona una herramienta unificada para la valuación de derivados en el mundo real. Varias consecuencias del teorema se aprovechan en los mercados financieros (ver sección 3.4), aunque la más conocida es la existencia de probabilidades sintéticas que permiten la valuación neutral al riesgo. En este caso vamos a aprovechar el principio de inducción matemática para la demostración de este interesante resultado apegándonos a [14].

Antes de pasar a la demostración, debemos introducir algunos elementos adicionales. Sean $p, q \in [1, \infty]$, de modo tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y consideremos $E = L^p(\Omega, \Im, P), E' = L^q(\Omega, \Im, P)$. Vamos a denotar por

$$E_+ = \{f \in L^p \mid 0 \leqslant f \ c.s.\}$$

al cono de variables aleatorias no-negativas en el espacio L^p. De manera similar podemos denotar al ortante negativo como

$$E_- = \{f \in L^p \mid 0 \geqslant f \ c.s.\}$$

Lema 3.2.1. *Sea $C \subset E$ un cono convexo $\sigma(E, E')$-cerrado en la topología de E (Ver [34] ó [27]) que contiene a E_- y supongamos que $C \cap E_+ = \{0\}$. Entonces existe una medida de probabilidad Q sobre $\Im$, la cual es equivalente a P, satisface $\frac{dQ}{dP} \in E'$ y es tal que para cualquier $f \in C$, tenemos que $E_Q[f] \leqslant 0$.*

Demostración. Ver [14], Cap. 5, pp. 81-82.

Teorema 3.2.2. (PTFVA). *Sea $(\Omega, \Im_T, P)$ un espacio de probabilidad y sea $(S_t)_{t=0}^T$ un proceso estocástico $\mathbb{R}^d$-valuado adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t=0}^T$. Supongamos además que se cumple la condición de no-arbitraje, es decir que*

$$K \cap L^0_+(\Omega, \Im_T, P) = \{0\},$$

donde

$$K = \left\{ \sum_{t=1}^{T} \langle H_t, \Delta S_t \rangle \ \mid H \in \mathcal{H} \right\}.$$

Entonces existe una medida de probabilidad equivalente Q, ($Q \sim P$) tal que

(i) $S_t \in L^1(\Omega, \Im_T, Q), \quad t = 0, \ldots, T$

(ii) $(S_t)_{t=0}^T$ *es una Q martingala*

(iii) $\frac{dQ}{dP}$ *es acotada, i.e.,* $\frac{dQ}{dP} \in L^\infty(\Omega, \Im_T, Q)$.

Demostración. La demostración será por inducción sobre T. Cuando $T = 1$ tenemos que $S = (S_0, S_1)$ es un proceso $\mathbb{R}^d$-valuado, $(\Im_0, \Im_1)$-adaptado y que satisface la condición de no-arbitraje.

Consideremos una medida de probabilidad P_1 equivalente a P en $\Im_1$, de tal forma que $\frac{dP_1}{dP}$ sea acotada. Una forma de tomar esta medida es considerar

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = c\exp\{-|S_0| - |S_1|\},$$

con c una constante de normalización adecuada. De esto podemos ver que

$$\int_\Omega |S_0| d\tilde{P} = \int_\Omega |S_0| c\exp\{-|S_0| - |S_1|\} dP \leqslant cM,$$

donde $M \in \mathbb{R}_+$. Por consiguiente esta última ecuación es acotada, y así S_0 es integrable. De hecho el mismo argumento se usa para demostrar la integrabilidad de S_1. Lo anterior implica que $S_0, S_1 \in L^1(\Omega, \Im_1, P_1)$.

En segundo lugar vamos a tomar al conjunto

$$C_1 = C \cap L^1(\Omega, \Im_1, P_1),$$

donde

$$C = K - L^0_+(\Omega, \Im_1, P).$$

En vista de que C es cerrado en $L^0(\Omega, \Im_1, P)$, el conjunto C_1 es cerrado en $L^1(\Omega, \Im_1, P_1)$. Tenemos además que C_1 es un cono convexo debido a que C es un cono convexo.

Por la condición de no-arbitraje tenemos que

$$C_1 \cap L^1_+(\Omega, \Im_1, P_1) = 0.$$

Si hacemos

$$E_+ = L^1_+(\Omega, \Im_1, P_1),$$

dado que

$$C_1 \cap E_+ = \{0\},$$

al aplicar el lema (3.2.1), vemos que existe una medida de probabilidad equivalente Q en $\Im_1$ tal que $\frac{dQ}{dP_1}$ es acotada y $E_Q[f] \leqslant 0, \ \forall f \in C_1$.

Veamos que si $A \in \Im_0$, entonces $\mathbf{1}_A(S_1^j - S_0^j) \in L^1(\Omega, \Im_1, P_1)$, del hecho que $S_0, S_1 \in L^1(\Omega, \Im_1, P_1)$. Por otra parte $\mathbf{1}_A(S_1^j - S_0^j) \in C$, pues se trata de una integral estocástica por sí misma. Similarmente $-\mathbf{1}_A(S_1^j - S_0^j) \in L^1(\Omega, \Im_1, P_1)$ y $-\mathbf{1}_A(S_1^j - S_0^j) \in C$. Así, puesto que para cada coordenada $j = 1, \ldots, d$ y cada $A \in \Im_0$ tenemos que

$$\mathbf{1}_A(S_1^j - S_0^j) \in C_1 \quad \text{y} \quad -\mathbf{1}_A(S_1^j - S_0^j) \in C_1,$$

entonces

$$E_Q[\mathbf{1}_A(S_1^j - S_0^j)] \leqslant 0 \qquad \text{y} \qquad E_Q[-\mathbf{1}_A(S_1^j - S_0^j)] \leqslant 0.$$

Esto implica que $E[\mathbf{1}_A(S_1^j - S_0^j)] = 0$, con lo que queda demostrado que

$$E_Q[\mathbf{1}_A S_1^j] = E_Q[\mathbf{1}_A S_0^j].$$

Así, si usamos el hecho de que S_0^j es $\Im_0$-medible para toda j, de la definición de esperanza condicional se tiene que

$$S_0 = E_Q[S_1|\Im_0].$$

Por otra parte, dado que $P_1 \sim P$ se tiene que P_1 es absolutamente continua con respecto a P (y visceversa). Usando las propiedades de la derivada de Radon-Nikodym (ver [35]), se sigue que $\frac{dQ}{dP} = \frac{dQ}{dP_1}\frac{dP_1}{dP}$. Por hipótesis $\frac{dP_1}{dP}$ es acotada, y por el lema 3.2.1 se tiene que $\frac{dQ}{dP_1}$ también lo es. Por consiguiente tenemos que $\frac{dQ}{dP}$ es acotada.

Con lo anterior queda demostrado el primer paso de la inducción. Es decir, hemos probado que existe una medida de probabilidad equivalente Q tal que

(i) $S_0, S_1 \in L^1(\Omega, \Im_1, Q)$

(ii) $S_0 = E_Q[S_1|\Im_0]$

(iii) $\frac{dQ}{dP}$ es acotada.

Supongamos ahora que el teorema es válido para cuando hay $T-1$ periodos de tiempo y sea $(S_t)_{t=1}^T$ un proceso adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t=1}^T$. Entonces existe una medida de probabilidad $\tilde{Q} \sim P$, definida sobre $\Im_T$ y tal que

(i) $\frac{d\tilde{Q}}{dP}$ está acotada

(ii) $S_1, \ldots, S_T \in L^1(\Omega, \Im_T, \tilde{Q})$

(iii) $(S_t)_{t=1}^T$ es una $\tilde{Q}$-martingala, es decir, que para cualquier $t \geqslant 1, A \in \Im_t$, tenemos

$$\int_A S_t d\tilde{Q} = \int_A S_{t+1} d\tilde{Q}.$$

La base de la inducción aplicada a $(S_t)_{t=0}^1$, al espacio de probabilidad $(\Omega, \Im_1, \tilde{Q})$ y a la filtración $(\Im)_{t=0}^1$, nos da una función acotada f_1, que satisface las siguientes condiciones: (a) La función f_1 es $\Im_1$-medible; (b)$f_1 > 0$; (c) $E_{\tilde{Q}}[f_1] = 1$; (d) $E_{\tilde{Q}}[|S_1|f_1] < \infty$; (e) $E_{\tilde{Q}}[|S_0|f_1] < \infty$ y (f) Para cualquier $A \in \Im_0$ tenemos

$$\int_A S_0 f_1 d\tilde{Q} = \int_A S_1 f_1 d\tilde{Q}. \tag{3.2}$$

Sin embargo, queda por especificar quien es f_1. La base de la inducción nos provee de una medida Q equivalente a P en $\Im_1$, y la hipótesis de inducción de una medida $\tilde{Q}$ equivalente a P en $\Im_T$. De esta manera podemos definir $f_1 = \frac{dQ}{d\tilde{Q}}$, y es fácil entonces demostrar las propiedades mencionadas en el párrafo anterior.

Si para cualquier $A \in \Im_T$, definimos a la medida de probabilidad Q sobre la σ-álgebra $\Im_T$ mediante la regla

$$Q(A) := \int_A f_1 d\tilde{Q},$$

entonces

$$\frac{dQ}{dP} = f_1 \frac{d\tilde{Q}}{dP} \tag{3.3}$$

es una variable aleatoria acotada, por (iii) de la base de la inducción. Por (b) tenemos la positividad de f_1 y dado que $\tilde{Q} \sim P$, se sigue que $\frac{d\tilde{Q}}{dP} > 0$ $c.s.$, por lo tanto $\frac{dQ}{dP} > 0$ $c.s.$, y así $Q \sim P$.

Debemos revisar ahora las propiedades de integrabilidad y la propiedad martingala para nuestro proceso. Así, cuando $t = 1, \ldots, T$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |S_t| dQ &= \int_\Omega |S_t| \frac{dQ}{d\tilde{Q}} d\tilde{Q} \\ &= \int_\Omega |S_t| f_1 d\tilde{Q} < \infty. \end{aligned} \tag{3.4}$$

La propiedad martingala de $(S_t)_{t=0}^T$ se obtiene de la siguiente manera. De la ecuación (3.2) tenemos que

$$\int_A S_0 f_1 d\tilde{Q} = \int_A S_1 f_1 d\tilde{Q}, \quad \forall A \in \Im_0.$$

Por otra parte, si en la ecuación (3.4) usamos $t = 0$ y $t = 1$, llegamos a que

$$\int_A S_0 dQ = \int_A S_0 f_1 d\tilde{Q} = \int_A S_1 f_1 d\tilde{Q} = \int_A S_1 dQ.$$

Si ahora consideramos $A \in \Im_t$, cuando $T \geqslant 1$ tenemos que

$$\int_A S_t dQ = \int_A S_t f_1 d\tilde{Q} \tag{3.5}$$

y

$$\int_A S_{t+1} dQ = \int_A S_{t+1} f_1 d\tilde{Q}. \tag{3.6}$$

Lo que resta probar es que las dos ecuaciones anteriores son iguales. Recordemos que f_1 es $\Im_1$-medible y acotada (Lema 3.2.1). Además, dado que $\Im_1 \subset \Im_2 \subset \ldots \subset \Im_T$, se tiene que f_1 es $\Im_t$-medible para toda $t = 1, \ldots, T$. Usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\int_A S_t d\tilde{Q} = \int_A S_{t+1} d\tilde{Q}, \quad \forall A \in \Im_t, \; t = 1, \ldots, T.$$

Esto implica que

$$\int_A S_t dQ = \int_A S_t f_1 d\tilde{Q} = \int_A S_{t+1} f_1 d\tilde{Q} = \int_A S_{t+1} dQ,$$

es decir,

$$\int_A S_t dQ = \int_A S_{t+1} dQ, \quad \forall A \in \Im_t.$$

Con lo que queda demostrado que $(S_t)_{t=1}^T$ es una Q-martingala.

■

La demostración anterior servirá de plataforma a la hora de trabajar con la prueba del PTFVA, cuando apliquemos las propiedades del cono C.

3.2.3. Propiedades del cono C para $T \geqslant 1$

En la demostración del teorema anterior, cuando $T = 1$ usamos fuertemente el hecho de que el cono C fuera cerrado. No obstante, queda la pregunta de lo que sucede con C en el caso $T \geqslant 1$. Esto viene a ser una extensión del lema de Stricker (Teorema 3.2.1 (i)), y es el siguiente resultado.

Proposición 3.2.2. *Consideremos un proceso $S = (S_t)_{t=0}^T$, $\mathbb{R}^d$-valuado y $(\Im_t)_{t=0}^T$-adaptado. El espacio*

$$K = \left\{ \sum_{t=1}^{T} \langle H_t, \Delta S_t \rangle \ \mid \ \{H_t\}_{t=1}^T \ \textit{es } \mathbb{R}^d\textit{-valuada y predecible} \right\}$$

es un subespacio cerrado de $L^0(\Omega, \Im_T, P)$ en la topología fuerte.

Demostración. La demostración de este resultado es por inducción sobre el número de periodos de tiempo T. Si $T = 1$, el resultado es el lema de Stricker. Para cuando hay T periodos se puede ver la prueba en [14], Cap. 6, pp. 103-105.

■

De igual manera que cuando $T = 1$, el cono C también es cerrado bajo la condición de no-arbitraje cuando $T > 1$. En este caso decimos que un proceso predecible $\mathbb{R}^d$-valuado $(H_t)_{t=1}^T$ está en forma canónica si para cada t, H_t está en forma canónica para el incremento $\Delta S_t = S_t - S_{t-1}$. Además, los espacios $\mathcal{H}_t$ están definidos de la misma forma que $\mathcal{H}_1$. Es decir,

$$\mathcal{H}_t = \left\{ H_t \mid H_t \text{ es } \mathbb{R}^d\text{-valuado, } \Im_{t-1}\text{-medible y } P_t H_t = H_t \right\},$$

donde P_t es la proyección en $L^0(\Omega, \Im_{t-1}, P; \mathbb{R}^d)$ asociada con el rango predecible de ΔS_t.

Proposición 3.2.3. *Si $(S_t)_{t=0}^T$ es un proceso $\mathbb{R}^d$-valuado, $(\Im_t)_{t=0}^T$-adaptado que satisface la condición de no-arbitraje, etonces*

(i) *$I : \mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_T \to L^0(\Omega, \Im_t, P)$, dada por*

$$I\left((H_t)_{t=1}^T\right) = \sum_{t=1}^{T} \langle H_t, \Delta S_t \rangle = (H \cdot S)_T$$

es inyectiva.

(ii) *Si $(H^n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_T$ tal que $I(H^n)^- = (H^n \cdot S)_T^-$ es acotada casi seguramente, entonces $(H^n)_{n=1}^\infty = (H_1^n, \ldots, H_T^n)_{n=1}^\infty$ es acotada casi seguramente.*

(iii) *Si $(f^n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión en K, la cual es acotada casi seguramente, entonces existe una subsucesión parametrizada $\Im_T$ -medible σ_n tal que $f^{\sigma_n} \to f$ casi seguramente y $f \in K$.*

Demostración. Ver [14], Cap. 6, pp. 105-107.

■

Con la proposición 3.2.3 hemos terminado de recopilar las herramientas necesarias para probar la cerradura del cono C para el caso $T \geqslant 1$, cuando se satisface la condición de no-arbitraje.

Teorema 3.2.3. *Sea $(S_t)_{t=0}^T$ un proceso $\mathbb{R}^d$-valuado y adaptado a la filtración $(\Im_t)_{t=0}^T$ que satisface la condición de no-arbitraje, entonces el cono*

$$C = K - L_+^0(\Omega, \Im_T, P) = \{(H \cdot S)_T - h \mid H \textit{es predecible, } h \geqslant 0\}$$

es cerrado en $L^0(\Omega, \Im_T, P)$.

Demostración. Sea $f_n = (H^n \cdot S)_T$ y $h_n \geqslant 0$ tal que la sucesión $f_n - h_n = g_n \to g$. Podemos ver que

$$(H^n \cdot S)_T^- = f_n^- \leqslant g_n^-$$

forman una sucesión acotada. Por la proposición 3.2.3, incisos (ii) y (iii) tenemos que $\{H^n\}_{n=1}^{\infty}$ ya es acotada y además tenemos la existencia de una subsucesión parametrizada $\Im_T$-medible σ_n tal que $f_{\sigma_n} \to f$, con $f \in K$. Lo que implica que necesariamente

$$f_{\sigma_n} - g_{\sigma_n} = h_{\sigma_n} \overset{c.s.}{\to} h,$$

donde $h = f - g$, y por lo tanto $h \geqslant 0$. Por otro lado, la función $g = f - h$ está casi seguramente en C, con lo que queda demostrado el teorema.

■

3.2.4. Segunda demostración del PTFVA usando las propiedades de C, con $T \geqslant 1$

La condición de no-arbitraje en el caso más simple (Ω discreto finito y un portafolio determinístico) puede explicarse de manera geométrica. En este caso el conjunto de portafolios de no-arbitraje son aquellos que pertenecen al interior del cono generado por los payoffs de los activos de un portafolio en algún estado del mundo. Esta idea es llevada a los casos más generales (con algunas modificaciones) pues permite emplear argumentos de tipo geométrico para probar la existencia de una medida martingala equivalente cuando el espacio de probabilidad asociado es arbitrario.

Para el caso que estamos manejando, cuando se satisface la condición de no-arbitraje se tiene que C es un conjunto cerrado para $T \geqslant 1$. Esto permite continuar con una segunda demostración del PTFVA en la versión de Dalang-Morton-Willinger, ya que se imita en gran parte la estrategia que se sigue para el caso en el que $T = 1$. Este es el caso más "sencillo", y aunque se pudiese pensar que carece de importancia técnica, para nosotros es la parte seminal de la demostración[6].

Antes de pasar a la demostración, debemos introducir algunos elementos adicionales.

Definición 3.2.7. *Un proceso $S : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ es localmente acotado se existe una sucesión de tiempos de paro $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ que tiende a ∞ c.s. y una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}_+$, tal que $| S\mathbf{1}_{[0,T_n]} | \leqslant K_n$.*

Lema 3.2.2. (Teorema de Kreps-Yan). *Un proceso estocástico localmente acotado satisface la condición de no-free lunch si y solamente si existe una medida martingala local equivalente.*

Demostración. Ver [14], Cap. 5, pp. 77-78 y [24].

■

La prueba que anotamos a continuación sigue casi al pie de la letra los pasos que se llevaron al cabo para probar la base de la inducción en la demostración del teorema 3.2.2. Sin embargo, en esta demostración existe una diferencia sustancial. Esto es, el fuerte uso de las propiedades de C que se probaron anteriormente.

[6] Para el caso en el que $T = 1$, la demostración del teorema de Dalang-Morton-Willinger se puede dar usando funciones de utilidad. La idea original es debida a C. Rogers y puede consultarse la prueba en [14], Cap. 6, pp 96-102)

Teorema 3.2.4. (PTFVA). *Sea $S = (S_0, S_1)$ un proceso $(\Im_0, \Im_1)$-adaptado, $\mathbb{R}^d$-valuado que satisface la condición de no-arbitraje. Entonces existe una medida de probabilidad equivalente Q tal que*

(i) $S_0, S_1 \in L^1(Q)$

(ii) $E_Q[S_1|\Im_0] = S_0$

(iii) $\frac{dQ}{dP}$ *es acotada*

Demostración. El caso $T = 1$ ya lo hemos probado. Así, $T > 1$ es un caso que se sigue por analogía. Primero vamos a tomar una medida de probabilidad equivalente $\tilde{P}$, tal que $\frac{d\tilde{P}}{dP}$ sea acotada y $S_t \in L^1(\tilde{P})$, para cualquier $t \in [0, T]$. Una forma de tomar tal medida de probabilidad es considerar

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = c \exp\left\{-\sum_{t=0}^{T} |S_t|\right\},$$

donde c es una constante de normalización dada por

$$c = \frac{1}{E\left[\exp\{-\sum_{t=0}^{T} |S_t|\}\right]}.$$

El segundo paso es considerar al conjunto

$$C_1 = C \cap L^1(\Omega, \Im_T, \tilde{P}),$$

donde

$$C = K - L^0_+(\Omega, \Im_T, P).$$

Dado que C es cerrado en $L^0(\Omega, \Im_T, P)$, el conjunto C_1 es cerrado en $L^1(\Omega, \Im_T, \tilde{P})$. Si hacemos $E_+ = L^1_+(\Omega, \Im_1, \tilde{P})$, entonces

$$C_1 \cap E_+ = \{0\},$$

así, el lema 3.2.1 nos dice que existe una medida de probabilidad equivalente Q en $\Im_1$, tal que $\frac{dQ}{d\tilde{P}}$ es acotada y tal que para cualquier $f \in C_1$, $E_Q[f] \leqslant 0$, para toda $f \in C_1$. De manera similar que cuando $T = 1$, tenemos que $S_t \in L^1(Q)$, ya que $\frac{dQ}{d\tilde{P}}$ es acotada.

Dado que para cada coordenada $j = 1, \ldots, d$, y cada $A \in \Im_t$ tenemos que

$$\mathbf{1}_A(S^j_{t+1} - S^j_t) \in C_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{1}_A(S^j_t - S^j_{t+1}) \in C_1,$$

entonces, empleando las propiedades de la esperanza condicional.

$$E_Q[\mathbf{1}_A S^j_{t+1}] = E_Q[\mathbf{1}_A S^j_t].$$

Y dado que S_t es $\Im_t$-medible tenemos que $S_t = E_Q[S_{t+1}|\Im_t]$.

Como $\frac{dQ}{d\tilde{P}}$ y $\frac{d\tilde{P}}{d_P}$ son acotadas, usando las propiedades de la derivada de Radon-Nikodym concluimos que $\frac{dQ}{dP} = \frac{dQ}{d\tilde{P}}\frac{d\tilde{P}}{d_P}$ es acotada.

$\blacksquare$

3.3. El PTFVA en tiempo continuo y espacio de estados arbitrario

En esta sección presentamos la versión del PTFVA desarrollada por F. Delbaen y W. Schachermayer, quienes centran su atención en dar un significado preciso a la palabra "esencialmente" contenida en el enunciado del teorema: *La ausencia de oportunidades de arbitraje es esencialmente equivalente a la existencia de una medida martingala equivalente.*

A lo largo de la sección abordamos de manera esquemática la demostración de la versión general del primer teorema fundamental. En vista de la complejidad matemática que esto conlleva, introducimos algunos conceptos que nos serán de gran ayuda para captar las ideas más importantes del teorema y de su prueba. Trataremos de resumir en las siguientes cuatro cuartillas las ochenta páginas del trabajo original, apegándonos de lleno a las referencias y sobre todo a [14].

En términos generales el trabajo de Delbaen-Schachermayer viene a enriquecer enormemente las ciencias económicas y las ciencias matemáticas. Por una parte, sus desarrollos justifican uno de los métodos empleados por los actuarios desde hace varios siglos que es el llamado *principio de equivalencia* para la valuación de reclamos contingentes, en un sentido bastante amplio. Matemáticamente hablando, la demostración del teorema permite un acercamiento de primera línea a la cuestión de cuales procesos estocásticos son martingalas cuando se toma una medida de probabilidad equivalente adecuada.

Varias dificultades aparecen al considerar la extensión del teorema, pues el espacio de probabilidad asociado es general y se trabaja en tiempo continuo. Una de las dificultades principales es la manera en la que se debe reformular la condición de no-arbitraje o mejor dicho la condición de "no free lunch" para este caso. Las dos más conocidas son la condición de *No Free Lunch with Vanishing (NFLVR)* y la condición de *No Free Lunch with Bounded Risk (NFLBR)*[7]. No obstante, la idea subyacente en cualquiera de las variantes de la condición de no-arbitraje, es que no debe haber ninguna estrategia de mercado H para el proceso de precios S, de tal manera que el perfil de pago final dado por $(H \cdot S)_\infty$, sea una función no negativa, y después estrictamente positiva con probabilidad positiva.

3.3.1. Definiciones y Preliminares

A lo largo de esta sección, consideramos al proceso S como una semi-martingala (ver [38] ó [39]). Este proceso representa el precio descontado de un activo financiero. La filtración a la cual son relativos los procesos con los que trabajaremos es $(\Im_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, además de que la filtración satisface las condiciones usuales. En este caso la σ-álgebra $\Im$ está generada por $\bigcup_{t\geqslant 0}\Im_t$.

Como mencionamos en secciones anteriores, el espacio $L^0(\Omega,\Im,P)$ es el espacio de funciones medibles. Este espacio está equipado con la topología de la convergencia en medida. Se considera también al espacio de las funciones integrables que son $\Im$-medibles $L^1(\Omega,\Im,P)$. El dual de este espacio es $L^\infty(\Omega,\Im,P)$, el espacio de funciones medibles acotadas. Por último se considera en este espacio la topología débil-$*$ $\sigma(L^\infty, L^1)$.

[7]Esta condición se usa en la prueba del PTFVA, para el caso de horizonte temporal discreto infinito y para el caso de procesos acotados continuos en tiempo continuo tal como puede verse en [38] y [11] respectivamente

Definición 3.3.1. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Un proceso predecible H que sea S-integrable*[8] *es llamado α-admisible si $H_0 = 0$ y $-\alpha \leqslant (H \cdot S)$. Decimos que H es admisible si es admisible para algún $\alpha \in \mathbb{R}_+$.*

Definición 3.3.2. *Sea S una semi-martingala, entonces*

(i) El cono convexo $K_0 \in L^0(\Omega, \Im, P)$ está dado como

$$K_0 = \{(H \cdot S)_\infty \mid H \text{ es admisible y } (H \cdot S)_\infty = \lim_{t\to\infty} (H \cdot S)_t \text{ existe c.s.}\}$$

(ii) El cono que consta de las funciones dominadas por elementos de K_0 está dado como

$$C_0 = K_0 - L^0_+(\Omega, \Im, P).$$

Observación. Parte de las complicaciones que aparecen a la hora de trabajar con el cono convexo K_0 es verificar que el límite

$$(H \cdot S)_\infty = \lim_{t\to\infty} (H \cdot S)_t \tag{3.7}$$

existe y es finito casi dondequiera.

Definición 3.3.3. *Decimos que la semi-martingala S satisface*

(i) La condición de no-arbitraje si $C \cap L^\infty_+(\Omega, \Im, P) = \{0\}$

(ii) La condición de no free lunch with vanishing risk (NFLVR) si

$$\overline{C} \cap L^\infty_+(\Omega, \Im, P) = \{0\},$$

donde $\overline{C}$ es la cerradura de $C = C_0 \cap L^\infty(\Omega, \Im, P)$

El teorema que presentamos a continuación proporciona un criterio que está relacionado con la admisibilidad del proceso H. La demostración puede consultarse en el trabajo de M. Émery, (1980), *Compensation de processus à variation finie non localement intégrables* y en el de J. P. Ansel, C. Stricker, (1994), *Couverture des actifs contingents et prix maximum.*

Teorema 3.3.1. *Si M es una martingala local y H es un integrando admisible para M, entonces $H \cdot M$ es una martingala local. En consecuencia $H \cdot M$ es una super-martingala.*

El teorema 3.3.1 es una herramienta útil a nuestros propósitos, siempre y cuando podamos garantizar la admisibilidad de H junto con la existencia de una medida martingala local equivalente Q, para usarla en la parte (i) de la definición 3.3.2, ya que de esta manera podemos afirmar que se cumple la ecuación (3.4). Sin embargo, no sabemos algo acerca de la existencia de tal medida martingala equivalente, por lo que hay que trabajar solamente con la condición de NFLVR.

Proposición 3.3.1. *Si S es una semi-martingala que satisface la propiedad de NFLVR, entonces el conjunto*

$$B = \{(H \cdot S)_\infty \mid H \text{ es 1-admisible y de soporte acotado}\}$$

es acotado en $L^0(\Omega, \Im, P)$.

[8] Para integración estocástica con respecto a semi-martingalas en general, véase [31], [41]

Demostración. Supongamos que B no es acotado en $L^0(\Omega, \Im, P)$. Así, existe una sucesión H^n de integrandos 1-admisibles de soporte acotado y $\alpha > 0$ tal que

$$P[(H^n \cdot S)_\infty \geqslant n] > \alpha > 0.$$

La sucesión

$$f_n = \text{mín}\left\{\frac{1}{n}(H^n \cdot S)_\infty, 1\right\} \in C,$$

entonces

$$P[f_n = 1] > \alpha > 0 \quad \text{y} \quad \| f_n^- \|_\infty \leqslant \frac{1}{n}.$$

Sean $g : \Omega \to [0,1]$ y $g_n \in conv\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}$, de tal manera que $g_n \to g$. Por una parte $E[g_n] > \alpha$, además si $\varphi = P[g > 0]$, entonces $\varphi \geqslant \alpha > 0$. Por el teorema de Egorov tenemos que $g_n \to g$ uniformemente en un conjunto Ω' cuya medida es al menos $1 - \varphi/2$. Notemos que las funciones

$$h_n = \text{mín}(g_n, 1_{\Omega'}) \in C$$

y $h_n \to g1_{\Omega'}$ en la norma de $L^\infty(\Omega, \Im, P)$. Como

$$P[g1_{\Omega'} > 0] \geqslant \varphi > 0,$$

llegamos a una contradicción.

■

Proposición 3.3.2. *Supongamos que S es una semi-martingala que satisface la condición de NFLVR. Entonces para cada proceso admisible H, la función $(H \cdot S)^* = \sup_{0 \leqslant t} |(H \cdot S)_t|$ es finita c.d. y el conjunto $B^* = \{(H \cdot S)^* \mid H$ es 1-admisible$\}$ es acotado en $L^0(\Omega, \Im, P)$.*

Demostración. La demostración será por contradicción. Supongamos que el conjunto B^* no es acotado, de esta manera podemos encontrar una sucesión H^n de integrandos 1-admisibles, tiempos de paro T_n y $\alpha > 0$ tales que

$$P[T_n < \infty] > \alpha > 0$$

y

$$(H^n \cdot S)_{T_n} > n \quad \text{en} \quad \{T_n < \infty\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, consideramos t_n suficientemente grande de modo que

$$\alpha < P[T_n \leqslant t_n],$$

y notemos que para

$$K^n = \mathbf{1}_{[0, \text{mín}(T_n, t_n)]}$$

tenemos que K^n es de soporte acotado y

$$P[(K^n \cdot S)_\infty > n] > \alpha > 0. \tag{3.8}$$

Pero entonces los elementos de la sucesión K^n son 1-admisibles con soporte acotado y satisfacen la ecuación (3.5), lo cual contradice la proposición (3.3.1).

■

Teorema 3.3.2. *Supongamos que S es una semi-martingala que satisface la condición de NFLVR. Entonces para cada proceso admisible H, el límite de la ecuación (4.4) existe y es finito c.d.*

Demostración. Véase [14], Cap 9, pp 161-162.

3.3.2. El teorema de Delbaen y Schachermayer

Hemos llegado a la antesala de los desarrollos más generales sobre el primer teorema fundamental. A continuación presentamos la versión más general del PTFVA para el caso de procesos acotados (ver Capítulo 4 para una generalización de esto). Sigue un esquema de la prueba del teorema que se basa en varios resultados planteados anteriormente. Esta versión junto con la demostración se deben a Walter Schachermayer (Universidad de Viena) y Freddy Delbaen (Universidad de Zürich).

El esquema a seguir es sencillo, no así los métodos empleados. Primero debemos probar que el conjunto C es cerrado-débil-$*$ en $L^\infty(\Omega, \Im, P)$ y aplicar posteriormente el teorema de separación de Kreps-Yan. Se pueden revisar algunos de los argumentos aquí empleados en trabajos anteriores de los autores.

Teorema 3.3.3. *Sea S una semi-martingala $\mathbb{R}$-valuada acotada. Entonces existe una medida martingala equivalente Q para S sii S satisface la condición de NFLVR.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que S satisface la condición de NFLVR, esto implica que S satisface la condición de no-arbitraje, i.e., $C \cap L^\infty(\Omega, \Im, P) = \{0\}$. Como C es débilmente-cerrado-$*$ en $L^\infty(\Omega, \Im, P)$, el teorema de separación de Kreps-Yan nos dice que existe una medida equivalente Q de tal manera que $E_Q[f] \leqslant 0$, para cualquier función $f \in C$. Sin embargo, debemos verificar la condición de que Q, en efecto es una medida martingala equivalente.

Supongamos que para cada $s < t$, el conjunto $A \in \Im_s$. Además, si $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{1}_A(S_t - S_s)\alpha \in C.$$

Por lo tanto tenemos que S es acotada ya que

$$C = \left(K_0 - L^0_+(\Omega, \Im, P)\right) \cap L^\infty(\Omega, \Im, P),$$

además

$$E_Q[\mathbf{1}_A(S_t - S_s)] = 0,$$

de donde se tiene que Q es una medida martingala equivalente.

($\Rightarrow$) Supongamos que existe una medida martingala equivalente para S. De hecho podemos suponer que la medida P de la base estocástica es ya una medida martingala para la semi-martingala acotada S, i.e., $E_P[(H \cdot S)_0] = 0$.

Si H es un integrando admisible, el teorema 3.3.1 nos dice que el proceso $(H \cdot S)$ es una super-martingala. De aquí que

$$E_P[(H \cdot S)_\infty] \leqslant E_P[(H \cdot S)_0] = 0,$$

pues

$$(H \cdot S)_\infty = \lim_{t\to\infty} (H \cdot S)_t.$$

Si hacemos $f = (H \cdot S)_\infty$, entonces para cualquier $f \in C$ se tiene que $E[f] \leqslant 0$. De hecho si consideramos $f \in \overline{C}$, tenemos la misma consecuencia. Por lo tanto, dado que

$$f \in L^\infty_+(\Omega, \Im, P),$$

entonces

$$\overline{C} \cap L_+^\infty(\Omega, \Im, P) = \{0\}.$$

■

Notemos que el énfasis recae sobre una de las implicaciones únicamente. De hecho esta es la parte mayormente difícil del teorema, cuyo desarrollo abarca más de 50 páginas en [15].

3.4. Aplicaciones del PTFVA

En esta sección presentamos algunas aplicaciones del teorema fundamental de las finanzas, distintas de aquellas que guardan relación con la fórmula de Black-Scholes. Una de estas aplicaciones usa el método de Monte Carlo para calcular el precio de una opción de compra de tipo europeo en cierto tiempo, estimando la esperanza de la función $C(t, S_t)$ a la fecha de maduración de la opción. Otra aplicación que mencionamos es la llamada *calibración*. La calibración es de hecho un problema inverso, pues se refiere a la selección de los parámetros del modelo usando precios observados que sean libres de arbitraje en mercados líquidos. Estos ejemplos de aplicaciones están basados en los que aparecen en [28], Cap. 12.

3.4.1. Aplicación del PTFVA con un método numérico

Supongamos que $C(t, S_t)$ representa el precio de una opción de compra de tipo europeo que depende de algún subyacente cuyo precio es conducido por S_t. Si no existen posibilidades de arbitraje y elegimos de manera adecuada algún proceso de descuento B_t^{-1}, por el PTFVA podemos obtener una medida de probabilidad $\tilde{P}$ bajo la cual el precio del call europeo normalizado sea martingala. Es decir

$$\frac{C(t, S_t)}{B_t} = E_{\tilde{P}}\left[\frac{C(T, S_T)}{B_T} \mid \Im_t\right] \tag{3.9}$$

Podemos usar la ecuación (3.9) como un medio para calcular numéricamente el valor de $C(t, S_t)$ siempre y cuando dispongamos de la medida de probabilidad $\tilde{P}$ y conozcamos B_t para toda t. Tenemos dos maneras de hacer esto. La primera de ellas es tratar de llegar al valor de $C(t, S_t)$ de forma analítica, obteniendo una fórmula cerrada. Esto es, si el valor del activo normalizante al tiempo t es conocido, entonces el valor del derivado esta dado como

$$C(t, S_t) = B_t\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{C(T, S_T)}{B_T}\tilde{f}(S_T, B_T)dS_T dB_T\right\}, \tag{3.10}$$

donde $\tilde{f}$ es la función de densidad condicional conjunta (si es que existe) de S_T y B_T, en términos de la probabilidad de trabajo $\tilde{P}$.

Si elegimos de manera cuidadosa al activo normalizante al tiempo t, podemos lograr que B_T sea constante. Por ejemplo, si tomamos B_t como el valor predeterminado de un bono de cupón cuya maduración es al tiempo T. Entonces $B_T = 1$. Esta elección simplifica de manera considerable el trabajo de la valuación, ya que en este caso $\tilde{f}$ se convierte en una densidad condicional univariada. Sin embargo, aún si la función de densidad existe, en general no hay soluciones para las integrales que aparecen. Y así, una fórmula que ligue a S_t con B_t, y algunos otros parámetros no es fácil de obtener en forma explícita.

Pero aún con lo anterior no todo está perdido, ya que podemos aproximar el valor de tales integrales de forma numérica usando el método de Monte Carlo. Con éste se calcula la esperanza de alguna función o modelo especificado de antemano, primero generando una sucesión de repeticiones de una variable aleatoria del modelo, para después calcular la media muestral. La idea es la siguiente:

Supongamos que tenemos una variable aleatoria X con una distribución de probabilidad conocida, por ejemplo, $X \sim N(\mu, \sigma)$. Si $h(X)$ es una función conocida de X, tal que $E_P[h(X)] < \infty$, y queremos calcular una buena aproximación de $E_P[h(X)]$, podríamos considerar una muestra suficientemente grande de la distribución.

Empleando un generador de numeros aleatorios y la función de distribución obtenemos N repeticiones de x_i. Estas son i.i.d., además de que $E_P[h(X)] < \infty$, por lo que

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} h(x_i) \to E_P[h(X)]. \tag{3.11}$$

Ejemplo 3.4.1. Sea $C(t, S_t)$ el precio de un call europeo escrito a la tasa EUR/USD, y ésta está gobernada aproximadamente por la siguiente EEDE

$$S_{t_i}^j = [1 + (r - r^e)\delta]\, S_{t_{i-1}}^j + \sigma S_{t_{i-1}}^j \sqrt{\delta}\ \epsilon_i^j, \tag{3.12}$$

donde ϵ_i^j es el término estocástico al tiempo i en el estado j, y la deriva viene dada por la diferencia entre las tasas r y r^e. Supongamos que el precio de ejercicio del call es $K = 1.06$, $r = 2\,\%$ es la tasa doméstica, $r^e = 3\,\%$ es la tasa foránea, $T = 10$ días el tiempo de maduración, $S_{t_0} = 1.09$ y la volatilidad es $\sigma = 0.1$.

Si un agente financiero toma cinco trayectorias para poner precio a la opción y consideramos $\delta = 1$ día, entonces, usando Matlab® obtenemos los siguientes conjuntos de datos aleatorios con distribución normal estándar

$$\begin{aligned}
p_1 &= \{1.4819, 0.0327, 1.8705, -1.2090, -0.7826, -0.7673, -0.1072, -0.9771, -0.9640, -2.3792\}\\
p_2 &= \{-0.8382, 0.2573, -0.1838, -0.1676, -0.1170, 0.1685, -0.5012, -0.7051, 0.5082, -0.4209\}\\
p_3 &= \{0.2291, -0.9595, -0.1460, 0.7445, -0.8905, 0.1391, -0.2361, -0.0755, -0.3586, -2.0776\}\\
p_4 &= \{-0.1435, 1.3933, 0.6518, -0.3771, -0.6614, 0.2490, -0.3835, -0.5285, 0.0554, 1.2538\}\\
p_5 &= \{-2.5200, 0.5849, -1.0081, 0.9443, -2.4240, -0.2238, 0.0581, -0.4246, -0.2029, -1.5131\}.
\end{aligned}$$

En este caso el subíndice en $p_j, j = 1\ldots,5$, nos indica el número de la trayectoria. Así, cuando usamos la EDE (3.12) con los datos proporcionados, considerando $S_{t_i}^j = S_i^j$ tenemos que

$$S_i^j = [1 - (0.01)\delta]\, S_{i-1}^j + \sigma S_{i-1}^j \sqrt{\delta}\ \epsilon_i^j,$$

de donde se obtienen las siguientes trayectorias día a día.

trayectoria	*dia*1	*dia*2	*dia*3	*dia*4	*dia*5	*dia*6	*dia*7	*dia*8	*dia*9	*dia*10
1	1.0984	1.0986	1.1093	1.1023	1.0977	1.0933	1.0926	1.0870	1.0815	1.068
2	1.0852	1.0866	1.0855	1.0846	1.0839	1.0848	1.0819	1.0779	1.0807	1.0783
3	1.0913	1.0858	1.0849	1.0891	1.0840	1.0848	1.0834	1.0829	1.0809	1.0691
4	1.0892	1.0971	1.1008	1.0986	1.0947	1.0961	1.0939	1.0909	1.0911	1.0983
5	1.0756	1.0789	1.0731	1.0784	1.0647	1.0634	1.0637	1.0613	1.0602	1.0517

Puesto que el payoff de una opción de compra de tipo europeo está dado como

$$C(T)^j = \text{máx}\{S_T^j - K, 0\}, \quad j = 1\ldots, 5.$$

Dado que el precio de ejercicio de la opción es $K = 1.06$, podemos ver que el call *está en el dinero* para las primeras cuatro trayectorias ya que $C(T)^1 = 0.008, C(T)^2 = 0.0183, C(T)^3 = 0.0091, C(T)^4 = 0.0383$ y $C(T)^5 = -0.0083$. Un rápido vistazo nos dice que la trayectoria número cuatro es la que ofrece mayor beneficio al agente.

Si en la ecuación (3.9) elegimos al activo normalizante (factor de descuento)como

$$B_t = \exp\left\{\int_0^t r_u du\right\},$$

es decir, una cuenta de ahorro donde r_t es la tasa de interés compuesto continuamente. Entonces

$$C(t) = e^{-r(T-t)} E_t^{\tilde{P}}[C(T)], \tag{3.13}$$

de donde se sigue que

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} C(T)^j. \tag{3.14}$$

Así, dado el precio al tiempo de maduración en la cuarta trayectoria, el valor del call europeo al tiempo cero es

$$C(0) = \exp\left(-0.02(10/365)\right) \frac{1}{5}(.0654) = 0.01307.$$

■

3.4.2. Aplicación del PTFVA a un problema inverso

La calibración de un modelo se refiere a la elección de los parámetros del modelo, de tal forma que los precios de referencia observados que son libres de arbitraje sean reproducidos por el modelo. Este es un problema inverso que se puede tratar mediante ecuaciones diferenciales estocásticas y usando el método de Monte Carlo. Otra manera en el caso de modelos que involucran precios de bonos o tasas de interés, es usando el modelo de Black-Derman-Toy[9].

[9] El modelo B-D-T es un modelo para la evolución de la curva de rendimientos. Este es un modelo de un solo factor de tasa corta, es decir, un factor estocástico único que determina la evolución futura de todos los tipos de interés. Puede verse una implementación de este modelo en: **Implementation of Black, Derman and Toy Model**, Seminar Financial Engineering o.Univ.-Prof. Dr. Engelbert J. Dockner, University of Vienna, Summer Term 2003

Se pueden calibrar los parámetros en el modelo de Black-Derman-Toy para que se adapten a la estructura temporal actual de los tipos de interés (curva de rendimiento), así como a la estructura de la volatilidad implícita derivada los precios de los topes de las tasas de interés. Este modelo asume las siguientes hipótesis:

- Se conocen los precios de referencia de cierto número de bonos cupón-cero libres de arbitraje
- Se conoce un número considerable de datos acerca de la volatilidad de las cotizaciones en el mercado
- No existen costos de transacción
- El rendimiento esperado para cada uno de los activos es el mismo para cada periodo de tiempo

Ejemplo 3.4.2. Supongamos que tenemos los precios de referencia libres de arbitraje de tres bonos cupón-cero $B(t_0,t_1) = 0.97, B(t_0,t_2) = 0.89, B(t_0,t_3) = 0.81$. Sean $\sigma_1 = 15\,\%, \sigma_2 = 18\,\%$ observaciones confiables de la volatilidad en cada periodo de tiempo y cada estado.

Podemos calibrar los elementos del árbol del modelo de Black-Derman-Toy, usando los precios observados para cuando trabajamos con tasas LIBOR[10]. Para esto consideremos las siguientes ecuaciones

$$B(t_0,t_1) = \frac{1}{1+L_0} \tag{3.15}$$

$$B(t_0,t_2) = \frac{1}{2(1+L_0)(1+L_1^u)} + \frac{1}{2(1+L_0)(1+L_1^d)} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} B(t_0,t_3) = {} & \frac{1}{4(1+L_0)(1+L_1^u)(1+L_2^{uu})} + \frac{1}{4(1+L_0)(1+L_1^u)(1+L_2^{ud})} \\ & + \frac{1}{4(1+L_0)(1+L_1^d)(1+L_2^{du})} + \frac{1}{4(1+L_0)(1+L_1^d)(1+L_2^{dd})} \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\sigma_i^u = \frac{1}{2}\log\left[\frac{L_i^{uu}}{L_i^{ud}}\right] \tag{3.18}$$

$$\sigma_i^d = \frac{1}{2}\log\left[\frac{L_i^{du}}{L_i^{dd}}\right] \tag{3.19}$$

Nota. Una desventaja que acarrea este modelo es que aún con pocos periodos de tiempo aparecen ecuaciones no-lineales. Por consiguiente es necesario usar un programa adecuado para resolver los sistemas correspondientes en cada periodo.

Se deben resolver las ecuaciones (3.12)-(3.16) para L_0 al tiempo 0, para L_1^u, L_1^d en t_1, y por último para $L_2^{uu}, L_2^{du}, L_2^{dd}$ al tiempo t_2. Entonces tenemos el siguiente diagrama

[10] Ver [6]

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & L_2^{uu} = 13.81\,\% \\
 & & & \nearrow & \\
 & & L_1^{u} = 10.35\,\% & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
L_0 = 3.09\,\% & & & & L_2^{ud} = L_2^{du} = 9.64\,\% \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & L_1^{d} = 7.67\,\% & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & L_2^{dd} = 6.72\,\%
\end{array}
$$

Ahora vamos a mostrar la manera en la que se puede usar el árbol que da trayectorias libres de arbitraje para tasas LIBOR o algún otro tipo de tasas spot. Los árboles libres de arbitraje tienen varias aplicaciones:

- Se puede poner precio a una canasta de opciones escritas sobre las tasas LIBOR L_i. Estos son los llamados *caps* y *floors.*
- Se pueden usar estos árboles para valuar *swaps* y algunos otros derivados relacionados.
- Se usan estos árboles para valuar *caps forward,* floors y swaps.

Un tipo particular de cap es un caplet. Este es una opción escrita sobre una tasa LIBOR particular L_i. Se selecciona una tasa cap L_K como precio, y el comprador del caplet es compensado si la tasa LIBOR llega a estar por debajo de L_K. La fecha de maduración es al tiempo t_i, y la fecha de vigencia es t_{i+1}. El caplet cubre entonces el costo del interés del comprador. Una sucesión de caplets consecutivos sobre $L_{t_i}, L_{t_{i+1}}, \ldots, L_{t_{i+\tau}}$ conforma un τ-periodo cap. Supongamos que tenemos el siguiente caplet para ser valuado:

1. Los tiempos t_i son tales que $t_i - t_{i-1} = 12$ meses.
2. Al tiempo t_2, la tasa LIBOR L_{t_2} es observada.
3. Una cantidad de referencia N se elige al tiempo t_0. Digamos que $N = \$2.38$ millones.
4. Si la tasa LIBOR L_{t_2} sobrepasa la *tasa cap* $L_K = 6.5\,\%$, el cliente recibe el payoff

$$C(t_3) = \frac{N(L_{t_2} - L_K)}{100}$$

   al tiempo t_3, y no recibe pago alguno si ocurre cualquier otra cosa.

5. El cliente paga por este “seguro” una prima igual a $C(t_0)$.

El problema radica en como determinar un valor de no-arbitraje de la prima caplet $C(t_0)$. El PTFVA nos dice que el valor esperado del payoff a la fecha de maduración, descontado mediante la tasa libre de riesgo, será igual a C_{t_0}, si evaluamos la esperanza usando la medida neutra al riesgo. Lo que esto quiere decir es

$$C(t_0) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{C(t_3)}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}\right],$$

con payoff a la maduración

$$C(t_3) = N \max\left[\frac{L_{t_2} - L_K}{100}, 0\right]. \tag{3.20}$$

La valuación del caplet está prácticamente terminada usando el árbol calculado arriba. El árbol tiene cuatro trayectorias, cada una de ellas con probabilidad 1/4. Haciendo uso de esta información podemos obtener el precio caplet.

De acuerdo al diagrama, el caplet termina en el dinero en tres de las cuatro trayectorias. Calculando los posibles perfiles de pago en cada caso y dividiendo por los factores de descuento, tenemos el equivalente numérico de la esperanza que aparece en la ecuación (3.20). Como

$$
\begin{aligned}
C(t_3)^{uu} &= 2.38 \times 10^6 \text{ máx}\left\{\frac{13.81-6.5}{100}, 0\right\} = 173978 \\
C(t_3)^{ud} = C(t_3)^{du} &= 2.38 \times 10^6 \text{ máx}\left\{\frac{9.64-6.5}{100}, 0\right\} = 74732 \\
C(t_3)^{dd} &= 2.38 \times 10^6 \text{ máx}\left\{\frac{6.72-6.5}{100}, 0\right\} = 5236
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 0.25\left[\frac{173978}{(1.0309)(1.1035)(1.1381)}\right] + 0.25\left[\frac{74732}{(1.0309)(1.0767)(1.0964)}\right] + \\
&\quad 0.25\left[\frac{74732}{(1.0309)(1.0767)(1.0964)}\right] + 0.25\left[\frac{5236}{(1.0309)(1.0767)(1.0672)}\right] \\
&= \$65403.4
\end{aligned}
$$

■

3.5. Notas y Comentarios

3.5.1 Los preliminares para iniciar el estudio de las versiones no triviales del PTFVA requieren de antecedentes considerables de procesos estocásticos. Las referencias más útiles en este punto son: [31], [41], así como *Probability and Stochastic Processes* de Leo Breiman, Houghton Mifflin, 1969.

3.5.2 Como se comentó en la introducción del capítulo, la parte crucial del PTFVA es la implicación *no-arbitraje* $\Rightarrow$ *existencia de una medida martingala equivalente.* Además de que esta es la parte más útil desde el punto de vista aplicado, ya que es la que permite llevar a cabo valuaciones en los mercados financieros.

3.5.3 El PTFVA presenta una evolución histórica considerable, desde sus orígenes remotos en la noción de arbitraje que se manejaba en los años 60's y principios de los 70's, pasando por la teoría de valuación mediante arbitraje de la década de los 70's, debida a Ross y a otros autores, y llegando a su primer punto culminante con los trabajos de Harrison-Kreps (1979), y Harrison-Pliska (1981), en los que se presenta por primera vez la intuición de "medida martingala equivalente" y su correspondencia con el principio de no-arbitraje. El segundo punto cúspide se da en el artículo de Ross-Dybvig de 1987, desarrollado en el capítulo anterior, en el cual el PTFVA adquiere su nombre y un enunciado matemático preciso para el caso de dimensión finita (espacio de probabilidad finito y un número finito de períodos). Diversas aplicaciones infinito-dimensionales (análisis funcional) a cuestiones varias de finanzas, llevadas a cabo en los trabajos de Kreps, Anzel, Stricker, Yan y otros, y muy especialmente en los de Walter Schachermayer y después en la colaboración Delbaen-Schachermayer, a fines de los años 80's y principios de los 90's, prepararon el terreno para llegar a las versiones definitivas del PTFVA debidas a Delbaen y Schachermayer: la versión general de 1994 para procesos acotados (teorema 3.3.3), y la versión definitiva de 1998 para procesos no acotados (ver Capítulo 4). Cabe mencionar que en 1998, el gobierno austriaco otorgo a Walter Schachermayer el premio "Ludwing Wittgenstein", por sus logros en este ámbito de las ciencias. Este premio es la máxima presea científica que otorga este país.

Por último, como ya hemos comentado, hasta 1998 al PTFVA se le denominaba simplemente "Teorema fundamental de valuación de activos" ó "El teorema fundamental de las finanzas". A fines de los años 90's, varios trabajos sentaron las bases para la consideración de las relaciones generales entre la completez de un mercado, y la *unicidad* de una medida martingala para la valuación de activos. A la correspondencia entre ambos se le llamó "El segundo teorema fundamental para la valuación de activos" (o STFVA. Ver Capítulo 4), por lo tanto el resultado que nos ocupó en las capítulos 2 y 3 pasó a ser el "Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos".

3.5.4 Un punto clave para el desarrollo concerniente a la versión del PTFVA de Dalang-Mortom-Willinger y su prueba, es el principio de selección. En cierta manera este principio generaliza el teorema de Bolzano-Weierstrass acerca de la existencia de una subsucesión convergente dada una sucesión de funciones K-valuadas que dependen de $\omega \in \Omega$ en una forma medible en el espacio $L^0(\Omega, \Im, P; K)$.

La idea de la subsucesión parametrizada medible es sencilla, sin embargo, su aplicación ayuda a establecer una condición fuerte en relación a la convergencia c. s. de un proceso que esté en forma canónica. Kabanov y Stricker aplicaron este principio en su trabajo de 2001, en el contexto del teorema fundamental.

Algo que es destacable es que para un Ω discreto, existe una prueba sencilla para $t = 1$ en términos de la maximización de utilidad. Una buena pregunta es si este enfoque puede manejarse para los demás periodos de tiempo. Al menos el trabajo disponible es el trabajo de C. Rogers de 1994, que es donde se puede consultar el desarrollo que comentamos al principio del párrafo.

3.5.5 Esta versión del teorema fundamental de Delbaen-Schachermayer es la versión previa a la más general, hasta el año de 1998. Sin embargo, presenta varias dificultades no fáciles de resolver. Por mencionar alguna tenemos la de las estrategias "doubling", que se evita restringiendo el análisis al caso de integrandos predecibles. La otra cosa que debemos mencionar es acerca de la versión del principio de no-arbitraje que se emplea. Es necesario emplear la cerradura del cono convexo en la definición tradicional, lo que deriva en la condición de no-free lunch with vanishing risk (NFLVR).

En [14], Cap. 9, sec. 7, se da un ejemplo de un proceso S que admite una medida martingala equivalente, pero existe un "no-free lunch with bounded risk". En este caso entra en juego una dificultad más, esto es, los procesos han de ser de variación acotada y debe considerarse una topología restringida.

3.5.6 Por lo que a las aplicaciones se refiere, en la práctica, la calibración de modelos es de las más interesantes. De hecho en la práctica, se buscan asiduamente las oportunidades de arbitraje, entonces, bajo la premisa de un juego justo se plantean estrategias que satisfagan una condición de no-arbitraje y se establecen escenarios factibles en base a este modelo de calibración.

La aproximación computacional es indispensable en finanzas matemáticas, por la cantidad de información que se maneja en los mercados y sobre todo por la simulación de los escenarios. De hecho el método de Monte Carlo es la aproximación más conocida para las aplicaciones. Este método numérico permite generar trayectorias brownianas y buenas aproximaciones de los precios teóricos de gran cantidad de derivados financieros.

CAPÍTULO 4

Extensiones y complementos

Conforme se desarrollan los mercados y van surgiendo nuevos conceptos y problemas es necesario modificar, extender o incluso desechar viejos modelos para establecer nuevas herramientas que sean acordes a las situaciones de actualidad. Por ejemplo, la modelación con una distribución de tipo normal simplifica la valuación de derivados. Sin embargo, en un análisis de rendimientos de las series reales, algunas distribuciones de variables presentan sesgos, mayor curtosis[1] en sus valores centrales o bien colas anchas -incluso pueden tener distribuciones diferentes de la normal. Por lo tanto, cada vez se busca utilizar modelos más sofisticados como pueden ser los procesos de Lévy o bien la teoría de valores extremos para realizar mejores valuaciones. De la misma manera se propone la utilización de distintos procesos estocásticos o teorías, como la de fractales o el movimiento browninano fraccional para buscar una mejor explicación al comportamiento de ciertos fenómenos financieros.

En la primera sección de este capítulo comentaremos acerca del estatus del primer teorema fundamental de las finanzas, así como nuevos desarrollos. En la sección 4.2 abordamos el tema del Segundo Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (STFVA) y discutiremos acerca de la relación con el primer teorema fundamental. En la sección 4.3 comentaremos acerca del movimiento browniano fraccional y la relación que guarda con el principio de no-arbitraje. En la última sección de este capítulo comentaremos algunos problemas que pueden tener relación con los temas que hemos venido manejando.

Este capítulo presenta algunos desarrollos recientes, únicamente con carácter introductorio. De manera que la exposición es en ocasiones informal, rápida o un tanto imprecisa. El objetivo es más bien abrir la puerta a trabajo futuro. Así mismo, en lugar de tratar de establecer desarrollos originales de los temas, seguiremos de cerca la presentación de las referencias mencionadas, limitándonos en algunas partes a traducir de las fuentes originales y aportar breves comentarios. Las referencias para este capítulo son [3], [6], [14], [33].

[1]En la teoría probabilidad y estadística, la *curtosis* es una medida de la forma o apuntamiento de las distribuciones. Así, las medidas de curtosis (también llamadas de apuntamiento o de concentración central) tratan de estudiar la mayor o menor concentración de frecuencias alrededor de la media y en la zona central de la distribución.

4.1. Estatus actual del PTFVA

A partir de los trabajos de Harrison, Kreps y Pliska, que se desarrollaron en la década de los 80's, el PTFVA ha sido estudiado extensivamente llegando a un punto cúspide en 1994 con el trabajo de Delbaen y Schachermayer. Sin embargo estos últimos dos autores continúan con su labor hasta 1998, año en el cual dan a conocer su trabajo en relación al PTFVA para procesos estocásticos no acotados. Esta es una versión general para semi-martingalas que no necesariamente son localmente acotadas y que satisfacen la extensión del principio de no-arbitraje.

4.1.1. Clasificación de los diversos conceptos de arbitraje

Los desarrollos del primer teorema fundamental, giran en torno a la exclusión de las oportunidades de "hacer dinero de la nada". A lo largo de los años solo con el principio de no-arbitraje han surgido resultados por demás sorprendentes. No obstante, algo que es importante considerar, es que cada resultado utiliza una versión diferente de arbitraje. Es por esto que puntualizamos la siguiente clasificación:

- **Arbitraje fuerte.** Un arbitraje fuerte en un mercado financiero es un portafolio admisible y auto-financiable q, tal que existe $\tau \in I,\ \tau > 0$ con

$$P[(Vq)(0) = 0] = 1,$$

$$P[(Vq(\tau) > 0] = 1.$$

- **Arbitraje débil.** Un arbitraje débil (a veces llamado únicamente arbitraje) en un mercado financiero es un portafolio admisible y auto-financiable q, tal que existe $\tau \in I,\ \tau > 0$ con

$$P[(Vq)(0) = 0] = 1,$$

$$P[(Vq)(\tau) \geqslant 0] = 1,$$

$$P[(Vq)(\tau) > 0] > 0.$$

- **Arbitraje fuerte (bajo la ley de un mismo precio).** Un arbitraje fuerte es un portafolio cuyo precio es estrictamente negativo y su payoff es positivo.

- **Arbitraje (bajo la ley de un mismo precio).** Un arbitraje es un portafolio que es un arbitraje fuerte o que tiene precio igual a cero, y un payoff positivo hoy o en algún estado en el futuro.

- **Arbitraje de D-M-W para subespacios.** En un mercado financiero M, se satisface la condición de no-arbitraje si $K \cap L^0_+(\Omega, \Im, P) = \{0\}$, donde el subespacio $K \subset L^0(\Omega, \Im, P)$ definido por $K = \{(H \cdot S)_T \mid H \in \mathcal{H}\}$, es el conjunto de reclamos contingentes alcanzable al precio 0, para el cual $\mathcal{H}$ denota el conjunto de procesos predecibles $\mathbb{R}^d$-valuados $H = (H_t)_{t=1}^T$.

- **Arbitraje de D-M-W para conos convexos.** En un mercado financiero M, se satisface la condición de no-arbitraje si $C \cap L^0_+(\Omega, \Im, P) = \{0\}$, donde el cono convexo $C \subset L^\infty(\Omega, \Im, P)$, definido por $C = \{g \in L^\infty(\Omega, \Im, P \mid \exists f \in K \text{ tal que } g \leqslant f)\}$ es el conjunto de reclamos contingentes super-replicables al precio 0.

- **Arbitraje de D-S.** Sea S una semi-martingala definida sobre la base $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$. Decimos que S satisface la condición de no-arbitraje si $C \cap L_+^\infty = \{0\}$.
- **No-Free Lunch (Kreps).** El proceso $(S_t)_{t=1}^\infty$ admite un free-lunch si existe una variable aleatoria $f \in (\Omega, \Im, P)$ tal que $P[f > 0] > 0$ y una red $(f_\alpha)_{\alpha\in I} = (g_\alpha - h_\alpha)_{\alpha\in I}$ tal que $g_\alpha = \int_0^T H_t^\alpha$ para alguna estrategia admisible $H^{\alpha \leqslant 0}$ y $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge a f en la topología débil-$*$ de $L(\Omega, \Im, P)$.
- **No-Free Lunch with Vanishing Risk (D-S).** Sea S una semi-martingala definida sobre la base $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$. Decimos que S satisface la condición de no-free lunch with vanishing risk si $\overline{C} \cap L_+^\infty = \{0\}$
- **No-Free Lunch with Bounded Risk (D-S).** Sea S una semi-martingala definida sobre la base $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$. Decimos que S satisface la condición de no-free lunch with bounded risk si $\tilde{C} \cap L_+^\infty = \{0\}$, donde $\tilde{C}$ denota al conjunto de sucesiones de elementos de C que convergen en una topología débil-$*$

Observemos la complejidad que van adquiriendo las definiciones de arbitraje, conforme se va complicando el espacio de trabajo. Las últimas dos versiones de la condición de no-arbitraje, son las generalizaciones con las que se trabajan las extensiones del PTFVA en su forma más amplia. Por otra parte, debemos notar que las definiciones que corresponden al contexto de la ley de un mismo precio no son equivalentes a las definiciones de arbitraje fuerte y arbitraje débil que se encuentran al principio de la lista. Esto es por que cada contexto sigue sus propias reglas y estructura.

4.1.2. La noción de σ-martingala en el teorema fundamental

La noción de σ-martingala no era empleada en el contexto de la matemática financiera hasta que los autores se percataron de las aplicaciones de este concepto. Esto en el sentido de que no estaban interesados en todo el proceso S, si no en las integrales estocásticas pertenecientes a la familia $(H \cdot S)$ sobre S, en donde H corre a través de los procesos predecibles que son S-integrables y satisfacen alguna condición de admisibilidad.

A finales de los 70's y principios de los 80's, se introdujo este concepto gracias a C. S. Chou y E. Émery. El nombre de σ-martingala no es universal, y puede encontrarse en la literatura como transformada martingala.

Definición 4.1.1. *Una semi-martingala $\mathbb{R}^d$-valuada $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ se llama σ-martingala si existe una martingala $\mathbb{R}^d$-valuada M, y un proceso predecible φ, $\mathbb{R}_+$-valuado M-integrable tal que $X = \varphi \cdot M$.*

Existen varios ejemplos que destacan la diferencia entre martingala y σ-martingala. En particular el trabajo de M. Émery (1980), *Compensation de processus à variation finie non localement intégrables*, puede dar buena idea de las diferencias ([17]).

Anotamos a continuación los enunciados de los teoremas fundamentales de Delbaen y Schachermayer de 1994 y 1998. Ambos giran en torno a la condición de la exclusión del "almuerzo gratis con evanescente". Recordemos que estos resultados son generalizaciones que están basadas en la extensión del principio de no-arbitraje, por lo que cabe anotar ambas definiciones.

Definición 4.1.2. *Sea S una semi-martingala definida sobre la base $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$. Decimos que S satisface la condición de*

(i) No-arbitraje si $C \cap L^\infty_+ = \{0\}$

(ii) No free lunch with vanishing risk si $\overline{C} \cap L^\infty_+ = \{0\}$

La diferencia parece mínima cuando se generaliza la condición de no-arbitraje a la condición de "no-free lunch with vanishing risk". Sin embargo, las consecuencias son notables por el alcance que tiene esta consideración.

Teorema 4.1.1. (PTFVA, 1994). *Sea S una semi-martingala acotada $\mathbb{R}$-valuada. Existe una medida martingala equivalente Q para S sii el proceso S satisface la condición de No Free Lunch with Vanishing Risk.*

Teorema 4.1.2. (PTFVA, 1998). *Sea $S = (S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ una semi-martingala $\mathbb{R}^d$-valuada definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P)$. Entonces S satisface la condición de No Free Lunch with Vanishing Risk sii existe una medida de probabilidad Q, equivalente a P tal que S es una σ-martingala con respecto a Q.*

Demostración La demostración de este resultado puede consultarse en [14].

■

El teorema (4.1.2) se establece reemplazando la condición de que S sea localmente acotada y en consecuencia semi-martingala, por la condición de que sea σ-martingala. En este caso estamos interesados en la clase de aquellas semi-martingalas S que admiten una medida equivalente bajo la cual S es σ-martingala.

El ejemplo 14.2.2 en [14] bosqueja el caso de una σ-martingala que no es martingala local. Por otra parte, en el ejemplo 14.2.3 se exhibe una σ-martingala que no admite una medida martingala local equivalente. es decir, que la σ-martingala no satisface el teorema fundamental.

En principio parece que con la versión del PTFVA de 1998, el tema está cerrado, pues no solo se considera un espacio de probabilidad general sino que se incluye además el caso para una semi-martingala no necesariamente acotada. Sin embargo, a últimas fechas se siguen estudiando algunos desarrollos bastante sofisticados que tienen que ver con arbitraje en un sentido estocástico diferente al que se ha considerado durante muchos años. En general para los desarrollos clásicos de la valuación por arbitraje y problemas de ruina se suele usar el movimiento browniano

$$X_t = \mu t + \sigma B_t,$$

donde B_t es el movimiento browniano estándar, y el movimiento browniano geométrico

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad \text{con } X_0 = x_0 > 0. \tag{4.1}$$

En ambos casos se considera una tasa de deriva μ constante y una varianza instantánea σ^2. Por otra parte, la ecuación diferencial estocástica (4.1) tiene como solución

$$X_t = x_0 \exp\left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\right).$$

Este último modelo es empleado en la deducción más famosa dentro de las matemáticas financieras que es la fórmula de Black-Scholes para el precio de una opción. Como veremos más adelante en la sección 4.3, a últimas fechas se ha introducido el movimiento browniano fraccional para el estudio de los mercados financieros. Este último concepto equivale a considerar al movimiento browniano cuando el coeficiente de Hurst es distinto de $1/2$ en la condición de autosimilaridad.

4.2. El Segundo Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (STFVA)

Las finanzas matemáticas contemporáneas, en general están basadas en el primero y segundo teoremas fundamentales. Es importante mencionar que mientras el PTFVA relaciona la ausencia de oportunidades de arbitraje con la existencia de una medida martingala equivalente, el STFVA liga la completez del mercado con la unicidad de la medida martingala equivalente.

De hecho son pocos los trabajos que salen a relucir en relación a la completez del mercado. Los desarrollos de Harrison y Pliska (1981), Battig (1997) y Battig y Jarrow (1999) son los mas destacables en este tema.

El STFVA fue establecido en primer lugar para una economía en la que se maneja un número finito de estados y un horizonte temporal discreto finito. En 1983 Harrison y Pliska extendieron el resultado a tiempo continuo para un número finito de activos cuyo proceso de precios es una semi-martingala. Freddy Delbaen extiende el resultado en 1992 para el caso de un número infinito de activos en tiempo continuo y cuyo proceso de precios es una semi-martingala continua.

4.2.1. Mercados completos

Hemos comentado que un reclamo contingente es la composición de una variable aleatoria no-negativa, definida sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ con un proceso de precios. Al mismo tiempo, recordemos que un reclamo contingente es replicable (alcanzable) si existe una estrategia autofinanciable (admisible) cuyo valor al tiempo de maduración T, iguala el valor del reclamo contingente en cuestión.

Definición 4.2.1. *Un mercado libre de arbitraje es completo si cualquier reclamo contingente es replicable*

Como mencionamos anteriormente, el segundo teorema fundamental es el que nos relaciona la completez del mercado con la "cantidad" de medidas martingalas equivalentes. Una vez que se conocen ciertas características en relación a la representación de los precios de algún reclamo contingente, es sencillo establecer este segundo teorema. Citaremos los siguientes resultados cuya prueba se encuentra en [15].

Lema 4.2.1. *Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad filtrado. Supongamos que X es un T-reclamo contingente y Q una medida martingala equivalente a P fija. Supongamos también que el reclamo contingente normalizado $X/S_0(T)$ es integrable. Si la Q-martingala M, definida por*

$$M(t) = E_Q\left[\frac{X}{S_0(T)} \mid \Im_t\right]$$

admite una representación integral de la forma

$$M(t) = x + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t h_i(s) dz_i(s), \tag{4.2}$$

entonces X puede ser replicado.

Demostración. La prueba de este resultado se puede consultar en [6].

■

De hecho, podemos dar una demostración sencilla del STFVA en tiempo discreto y horizonte finito usando una versión discreta de este lema.

Lema 4.2.2. *Sea $(\Omega, \Im, (\Im)_{t=1}^T, P)$ un espacio de probabilidad filtrado. Sea X es un reclamo contingente con fecha de maduración T, y Q una medida martingala equivalente a P, tal que $X/S_0(T)$ es integrable. Si la Q-martingala M, definida por*

$$M(t) = E_Q \left[\frac{X}{S_0(T)} \mid \Im_t \right]$$

admite una representación integral de la forma

$$M(T) = x + \sum_{i=1}^{N} (H \cdot \Delta Z)_t, \tag{4.3}$$

entonces X puede ser replicado.

En este caso $(H \cdot \Delta Z)_t$, es una integral estocástica para la cual H es un proceso predecible y, $Z = (Z_t)_{t=1}^T$ es un proceso $\mathbb{R}^N$-valuado y $(\Im)_{t=1}^T$-adaptado.

Teorema 4.2.1. (Jacod) *Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de medidas martingalas equivalentes. Entonces para cualquier $Q \in \mathcal{M}$ fija, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) Q es un punto extremo de $\mathcal{M}$.

(ii) Cualquier Q-martingala M tiene dinámica de la forma

$$dM(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i dZ_i(t).$$

Demostración. La prueba de este resultado se puede consultar en [6].

■

En el contexto (sencillo) desarrollado hasta ahora tenemos el

Teorema 4.2.2. (STFVA). *Un mercado libre de arbitraje es completo sii existe una única medida martingala equivalente.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que la medida martingala es única para un reclamo contingente X. Sin pérdida de generalidad podemos considerar al activo normalizado X/S_0, donde $S_0(t)$ es el numerario para el proceso de precios al tiempo t. Es decir

$$\frac{S(t)}{S_0(t)} = \left[\frac{S_0(t)}{S_0(t)}, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, \ldots, \frac{S_N(t)}{S_0(t)} \right]$$

Como suponemos que la medida martingala equivalente es única, trivialmente tenemos que Q es un punto extremo[2] de $\mathcal{M}$. Así, por el teorema de Jacod en una versión discreta

$$dM(t) = \left(H \cdot \Delta \frac{S(t)}{S_0(t)}\right)_t.$$

Si integramos sobre el tiempo tenemos que

$$M(t) = x + \sum_{i=1}^{N} \left(H \cdot \Delta \frac{S(t)}{S_0(t)}\right).$$

Si hacemos $Z(t) = S(t)/S_0(t)$, entonces

$$M(t) = x + \sum_{i=1}^{N} (H \cdot \Delta Z)_t.$$

Esto implica, usando el lema 4.2.2, que el reclamo contingente X puede ser replicado. Por lo tanto el mercado es completo.

($\Rightarrow$) Supongamos que el mercado es completo y libre de oportunidades de arbitraje. Esto último es lo que nos permite replicar al reclamo contingente a través de todo el horizonte temporal.

Si elegimos como numerario una cuenta de ahorro, tenemos entonces que

$$S_0(t) = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right).$$

En particular, debido a la completez del mercado existe un proceso para el valor del portafolio de tal manera que $V(T) = X(T)$, para alguna condición inicial $X(0)$. Supongamos ahora que Q y Q' son dos medidas martingala equivalentes, estas medidas son entonces neutras al riesgo. De esta forma

$$E_Q\left[\frac{X}{S_0(t)}|\Im_t\right] = E_Q\left[\frac{V}{S_0(t)}|\Im_t\right] = X(0),$$

y

$$E_{Q'}\left[\frac{X}{S_0(t)}|\Im_t\right] = E_{Q'}\left[\frac{V}{S_0(t)}|\Im_t\right] = X(0).$$

Esto implica que

$$E_Q\left[\frac{X}{S_0(t)}|\Im_t\right] = E_{Q'}\left[\frac{X}{S_0(t)}|\Im_t\right],$$

de donde se sigue que Q y Q' son la misma. Una idea clara de esta prueba puede verse en [30], pp.22-23 ó usando la Proposición 10.25 de[6].

■

Podemos decir algo más de la necesidad en el teorema anterior. Esto es, que dada la medida $Q \in \mathcal{M}$, la representación de la Q-martingala

$$M(t) = X(0) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t h_i(s)dz_i(s)$$

[2]En análisis funcional ([Rudin]), un punto extremo de un conjunto convexo S en un espacio vectorial real es un punto en S, que no se encuentra en ningún segmento de línea abierta que une dos puntos de S

me indica de forma explícita la manera en la que se debe replicar al reclamo X. Es decir, que dada

$$E_Q\left[\frac{X}{S_0(T)}|\Im_t\right] = X(0) + \sum_{i=1}^{N}\int_0^t h_i(s)dz_i(s),$$

el portafolio replicante $(h_0, h_1, \ldots, h_N)$, es que aparece en la expresión anterior, donde

$$h_0 = M(t) - \sum_{i=1}^{N} h_i(t)Z_i(t).$$

La consecuencia que tenemos aquí es que la medida martingala me caracteriza a los mercados completos.

4.2.2. Mercados incompletos

Existen varias situaciones que contrastan con los temas que hemos venido manejando. La más notable es en relación a aquellos mercados para los cuales la condición de no-arbitraje, resulta insuficiente para garantizar la unicidad del precio de algún reclamo contingente. Estos son los llamados mercados incompletos.

En este caso existe un continuo de medidas martingala equivalentes que pueden usarse para derivar un precio que sea acorde con la condición de no-arbitraje. En esta situación el mercado es el que dictamina la medida que hay que usar para valuar el derivado.

Otra cosa que cabe mencionar es que en un mercado incompleto la oferta y la demanda agregadas entran en juego en la determinación del precio del reclamo contingente. La actitud frente al riesgo por parte de los agentes del mercado, la liquidez y el corretaje son cuestiones que se suman a la medida martingala que dicta el mercado. Estos tipos de mercados son interesantes pero muy difíciles de manejar. Ver por ejemplo [6], [14].

4.2.3. Mercados completos con arbitraje

En 1995, Pilliph Artzner y David Heat presentaron un trabajo en el cual daban cuenta de un mercado completo, pero en el cual existían las oportunidades de arbitraje[3]. Esto desató una polémica en relación a si sus desarrollos matemáticos eran correctos o si existía alguna inconsistencia con las definiciones tradicionales de completez de mercado y arbitraje financiero.

Sin embargo en el invierno de 1999, salió a la luz el trabajo de Robert Battig y Robert Jarrow, con una *Nueva Aproximación del STFVA*. Con esta nueva aproximación tienen lugar tres importantes puntos:

1. Con la definición de completez de mercado de Battig-Jarrow ([3]) se preserva el segundo teorema fundamental. Esto sucede aún si en la economía de mercado hay una infinidad de activos (lo cual no sucede con las definiciones tradicionales)

2. Bajo la hipótesis de no-arbitraje, cuando se emplean los modelos tradicionales, la definición de completez de mercado es equivalente a la que se maneja comúnmente en el STFVA

[3]Otro trabajo que puede consultarse es *Arbitrage in Continuous Complete Markets,* Eckhard Platen, 2002.

3. Con la nueva aproximación, un mercado puede ser completo y aún así pueden existir oportunidades de arbitraje

En una economía en la que se involucra un número infinito de activos con trayectorias muestrales discontinuas el PTFVA ya no se puede extender, y el STFVA ya no es válido en general. De hecho, el contraejemplo más conocido es el trabajo de Artzner y Heat ([1]). En este trabajo manejan una economía completa, un número infinito de activos y un número infinito de medidas martingala equivalentes.

Parafraseando la definición de Battig-Jarrow tenemos lo siguiente: *Un mercado se dice completo si todos los reclamos potencialmente alcanzables pueden ser aproximados mediante estrategias de mercado.* En esta parte, el sentido de "aproximado" se refiere a la consideración de que la diferencia entre los payoffs de dos reclamamos contingentes a través de los escenarios de mercado sea muy cercana a cero. Esta idea de la proximidad concuerda con la noción de los eventos que son imposibles para los agentes del mercado (conjuntos nulos), y es la clave para la nueva formulación. El contexto matemático pone estos desarrollos lejos del alcance de este trabajo, ya que, por una parte se ahonda en la teoría de espacios vectoriales topológicos y por otra, se utilizan resultados bastante profundos como el lema de Grothendieck[4]

4.2.4. Relación entre el primero y segundo teoremas fundamentales

Los desarrollos matemáticos de Artzner-Heat están perfectamente justificados, no así su razonamiento financiero. Con la definición de mercado que mencionamos en el párrafo anterior, queda aclarada con un sentido económico consistente la disputa generada por el trabajo de Artzner-Heat. Además, esta definición es muy importante para la práctica, debido a que las oportunidades de arbitraje se suelen buscar ávidamente en los mercados completos.

En el análisis clásico de la completez de mercado, se fija primero una medida martingala equivalente[5]. Así, para el PTFVA la existencia de tal medida implica que no existen oportunidades de arbitraje, i. e., que si el mercado es completo necesariamente es libre de arbitraje.

En contraste, la definición de Battig-Jarrow es independiente de la medida de probabilidad. Bajo esta definición el mercado puede ser completo y al mismo tiempo permitir la existencia de las oportunidades de arbitraje. Por lo tanto, y gracias a la noción de "aproximado", esta definición de completez de mercado es independiente de la noción de arbitraje, y por consiguiente es independiente de cualquier medida de probabilidad particular. Lo anterior nos deja en claro una cosa: Con el enfoque de Battig-Jarrow el primer y segundo teorema fundamentales son independientes uno del otro.

Sin embargo, no todo queda separado de manera independiente. Usando las hipótesis adecuadas es posible recuperar la unicidad de la medida martingala equivalente, por lo que se tiene una demostración para el STFVA estándar aunque quizás más elegante[6].

---

[4] Alexandre Grothendieck (1928-). Este matemático alemán es uno de los que más influencia han tenido en el siglo XX por sus trabajos en teoría de números, topología algebraica, teoría de Galois, teoría de las categorias, álgebra y análisis funcional. Ganó la medalla Fields en 1966.

[5] Los trabajos que pueden ilustrar esta situación son: [Harrison-Pliska] (1981), [Ansel-Stricker] (1994), [Artzner-Heat] (1995).

[6] Para consultar los detalles véase: *The Second Fundamental Theorem of Asset Valuation: A new approximation,* $\mathbb{R}$. Battig, R. Jarrow, 1999.

4.3. Movimiento browniano fraccional y arbitraje

El movimiento browniano y el cálculo estocástico son la base sobre la que se han sentado varios de los conceptos y resultados en finanzas matemáticas y administración de riesgos en los últimos años. Con algunos supuestos en relación a las propiedades de la variables financieras, el modelo de Black-Scholes, la valuación de derivados, la estimación de curvas de tasas de interés y la medición de los diferentes tipos de riesgos han sido desarrollados con la ayuda de estas herramientas.

No obstante, con el pasar de los años los matemáticos y los financieros se han topado con errores, inconsistencias y debilidades en las hipótesis establecidas ya que no se ajustan a la realidad. Por lo que se requiere cada vez de teorías más sofisticados que expliquen estas diferencias y que incluyan como casos particulares a las ya existentes. Es así como se introduce recientemente el Movimiento Browniano Fraccional (MBF) para modelar mercados.

El movimiento browniano fraccional (MBF) fue primeramente definido por Kolmogorov en un espacio de Hilbert. Inicialmente se le llamó proceso Wienerhelix aunque Mandelbrot fue quien le dio el nombre de movimiento browniano fraccional. Mandelbrot and van Ness (1968) sugirieron al MBF como un modelo parsimonioso para la dinámica de precios en un mercado financiero que permite la dependencia de los rendimientos en el tiempo.

4.3.1. Coeficiente de Hurst

El británico Harold Edwin Hurst (1880-1978) fue quien comenzó con el estudio de la teoría fractal a principios del siglo XX. En sus estudios para la construcción de una presa para el río Nilo, basándose en la teoría de Albert Einstein acerca del movimiento browniano ideó una metodología que da pie a lo que es el MBF.

En un contexto financiero la regla de un medio[7]

$$R = T^{\frac{1}{2}},$$

donde R es la distancia y T es tiempo, se emplea para suponer que la dispersión de los rendimientos se incrementan con la raíz cuadrada del tiempo.

Hurst propuso la ecuación

$$\left(\frac{R}{S}\right)_n = cn^H, \tag{4.4}$$

donde $c \in \mathbb{R}, H$ es el coeficiente de Hurst, n es el indicador de la serie de tiempo y $\frac{R}{S}$ se conoce como el estadístico *Rango reescalado*. La ecuación (4.4) generaliza la regla de un medio, la cual aplica únicamente a movimientos brownianos.

El exponente de Hurst se determina mediante una regresión lineal de los puntos de $\ln \frac{R}{S}$ contra $\ln(n)$, como se ve a continuación

$$\ln\left(\frac{R}{S}\right) = \log(c) + H\log(n).$$

[7]Einstein encontró que la distancia que cubre una partícula errática suspendida en un fluido se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo, esto es lo que se denomina *Regla de un medio*. Esta regla es usada generalmente en estadística.

En la literatura existen varias referencias acerca de cómo hallar tal coeficiente, los trabajos más reconocidos son los de Mandelbrot y van Ness (1968).

Con sus estudios acerca del comportamiento de los afluentes del río Nilo, Hurst determinó que si el sistema tuviera la característica de independencia entonces $H = 0.50$. Sin embargo, como resultado de su investigación empírica encontró un coeficiente de $H = 0.91$. Si comparamos el ejemplo de la partícula errática de Einstein con un $H = 0.91$, entonces esta última partícula cubriría una distancia mayor que otra con un proceso aleatorio en el mismo periodo.

4.3.2. Valores para el coeficiente de Hurst

Dependiendo de los valores que tome H, se obtienen varias características para nuestros procesos.

1. Si H=0.5, se tiene un proceso independiente puramente aleatorio. Un browniano clásico.
2. Si $0.5 < H \leqslant 1$ se obtienen series de tiempo persistentes, i.e., series de tiempo caracterizadas por efectos de memoria de largo plazo[8]
3. Si $0 \leqslant H < 0.5$ tenemos la antipersistencia en la serie de tiempo. En el caso de una partícula errática, una serie que es antipersistente cubre menos distancia que una aleatoria

Cuando $H = 0.5$ se dice que se trata de ruido blanco. Si ocurre el segundo caso se considera que se tiene ruido rosa, éste está relacionado con la persistencia. Este tipo de ruido abunda en la naturaleza y se asocia a procesos de relajación (equilibrio dinámico) y turbulencia. En el caso número tres se trata de ruido negro, este ruido aparece en procesos cíclicos de largo plazo tales como los cambios de precios en las bolsas de valores[9].

4.3.3. Generalidades acerca del MBF

Vamos a denotar al movimiento browniano fraccional por B_t^H, donde H representa al parámetro de Hurst y t al tiempo. Este es un proceso gaussiano que satisface las siguientes propiedades

(i) $B^H(0) = 0$

(ii) $E[B_t^H] = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(iii) $E[B_s^H B_t^H] = \frac{1}{2}[|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}], \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

La propiedad (iii) de la definición resulta muy importante para establecer correspondencias con el movimiento browniano clásico (MBC), esta propiedad es la de covarianza del MBF.

[8] Para valores muy grandes de observaciones se esperaría que el exponente H tienda a 0.5 y que el efecto de memoria de largo plazo se disipe

[9] Puede consultarse la metodología para calcular el coeficiente de Hurts en Peters, E. , *Fractal Market Analysis(Applying Chaos Theory to Invesment an Economic),* New York: John Wiley and Sons.

Si consideramos $H = 0.5$, recuperamos las propiedades de momento del MBC cuando se toma $s > t > 0$

$$E[B_s^{0.5} B_t^{0.5}] = \frac{1}{2}[t + s - (t - s)] = s = \text{mín}(s, t).$$

Otro resultado fuerte que se sigue rápidamente de (iii) en la definición es

$$E\left[(B_t^H)^2\right] = \frac{1}{2}[|t|^{2H} + |t|^{2H} - |t - t|^{2H}] = t^{2H}$$

El MBF también posee la característica de autosimilaridad para un coeficiente de Hurst que esté entre cero y uno, con $\alpha > 0$. Es decir, tenemos que

$$B_{\alpha t}^H = \alpha^H B_t^H, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A pesar de las similitudes del MBF con el MBC, cuando elegimos $H \neq 0.5$ perdemos la propiedad fundamental de que el proceso sea una martingala, además de que el MBF no es un proceso markoviano en general. Una buena fuente bibliográfica para revisar esta situación es [30].

En nuestro caso, estamos interesados en aquellas propiedades de MBF que nos permitan obtener algún resultado "práctico" en finanzas y que se relacione con los ya conocidos del MBC. Los principales son la isometría y el lema de Itô.

- **Isometría de Itô.** El kernel fraccional es una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

  $$\varphi(s, t) = H(2H - 1)|s - t|^{2H-2}.$$

  Si se equipa al espacio de funciones determinísticas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la norma $|\cdot|_\varphi^2$, dada por

  $$|f|_\varphi^2 := \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)f(t)\varphi(s, t)dsdt,$$

  y consideramos el producto interior de las funciones f y g en el espacio de Hilbert resultante L_φ^2, tenemos

  $$\langle f, g \rangle_\varphi := \int_0^\infty \int_0^\infty f(s)g(t)\varphi(s, t)dsdt$$

  se puede llegar a que (Véase [26], Cap2, pp.18)

  $$E\left(\int_0^\infty f(s)dB_s^H \int_0^\infty g(t)dB_t^H\right) = \langle f, g \rangle_\varphi . \tag{4.5}$$

  Notemos que de esta última parte podemos llegar a una expresión similar a la isometría de Itô, en el contexto del cálculo fraccional. Si $f = g$ en la ecuación (4.5), entonces

  $$E\left(\int_{\mathbb{R}} f(t)dB_t^H\right)^2 = |f|_\varphi^2$$

- **Movimiento Browniano Geométrico Fraccional (MBGF).** Si se extiende el movimiento browniano geométrico al caso fraccional

  $$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t^H, \tag{4.6}$$

con la condición inicial $X_0 = x > 0$, llegamos a que

$$X_t = x \exp(\sigma B_t^H + \mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H}).$$

Las cuestiones técnicas, así como el sentido preciso de la ecuación (4.6) y la integral estocástica involucrada se desarrollan en [5], [9] y [30].

- **Fórmula de Itô fraccional.** Supongamos que $X_t = X_0 + \int_0^t M_u du + \int_0^t N_u dB_u^H$ es un proceso estocástico para el cual las funciones M y N satisfacen ciertas condiciones de regularidad. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable, entonces el proceso $f(t, X_t)$ satisface la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)ds + \\ & \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)F_s dB_s^H + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)F_s D^\varphi X_s ds, \end{aligned}$$

donde $D^\varphi X_s$ denota la derivada de Malliavin[10] de X_s.

Para darnos una idea (muy sencilla) de esta derivada vamos a escribir un resultado que puede consultarse en [26], Cap. 2, pp. 23, concerniente a la derivada de Malliavin fraccional de una integral fraccional con integrando determinístico $\int_0^T f(s)dB_s^H$:

$$D^\varphi \left(\int_0^T f(u)dB_u^H \right)(s) = \int_0^T \varphi(u, s)f(u)du,$$

donde φ es el kernel fraccional. φ aparece multiplicando al argumento de la integral determinística.

En el caso especial de que $X_t = B_t^H$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función que no depende del tiempo tenemos

$$f(B_t^H) = f(B_0^H) + \int_0^t f'(B_s^H)dB_s^H + H \int_0^H s^{2H-1} f''(B_s^H)ds. \tag{4.7}$$

La ecuación (4.7) es la fórmula de Itô fraccional. Observemos que de nueva cuenta, con $H = 0.5$ y con $X_t = B_t^H$, es posible recuperar la fórmula de Itô usual.

Existen además otros resultados concernientes la esperanza condicional, cuya utilidad se verá reflejada a la hora de calcular el precio de un call eurupeo en un mercado fraccional.

4.3.4. Valuación fraccional de derivados financieros

A lo largo de este trabajo hemos comentado acerca de la valuación de derivados financieros por arbitraje. En el contexto del cálculo fraccional existe una generalización del modelo que posiblemente es el más famoso para la valuación de derivados financieros, y que está basado en el principio de no-arbitraje, es decir, el modelo de Black-Scholes. En este caso el precio para el call europeo que excluye la posibilidad de arbitraje es

[10]Paul Malliavin (1925-) matemático francés que desarrollo la teoría del cálculo estocástico variacional. Para una introducción al cálculo de Malliavin pueden consultarse los trabajos de B. Øksendal de 1996.

$$C(S,t) = SN(d_1) - K\exp\{-r(T-t)\}N(d_2), \tag{4.8}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Este modelo tiene su base en las siguientes hipótesis

(i) Existe una tasa libre de riesgos y una varianza constantes

(ii) No se pagan dividendos

(iii) No hay costos de transacción

(iv) Se puede prestar y pedir prestado a la misma tasa de interés

(v) Se tiene liquidez para el subyacente y para el derivado

(vi) No hay oportunidades de arbitraje.

Utilizando los supuestos anteriores pero en un mercado en el cual el proceso de precios del activo subyacente sea conducido por un MBGF, es posible recuperar algunas características de los mercados tipo Black-Scholes clásicos. Sin embargo, con el MBF se tiene un cierto tipo de memoria para el proceso. Esta información sobre el pasado, a su vez hace que sea posible decir algo sobre el futuro, es decir, la previsibilidad entra en juego. Los primeros en trabajar sobre estos temas fueron Shiryaev (1998) y Dasgupta y Kallianpur (2000) (véase [37]).

Para ver que esta previsibilidad puede implicar posibilidades de arbitraje consideremos el siguiente

Ejemplo 4.3.1. ([33], Sección 4.1.1, pp. 59-60). Supongamos que contamos con un activo libre de riesgo y un activo riesgoso, de tal forma que se tienen las siguientes dinámicas para los procesos de precios[11]

$$\begin{aligned} dA_t &= rA_t dt \qquad (4.9)\\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t^H. \qquad (4.10)\end{aligned}$$

Supongamos un modelo de mercado para el cual el coeficiente de deriva del activo riesgoso es igual a la tasa de interés del activo libre de riesgo y la volatilidad es igual a uno. Usando la "regla de la cadena" para el MBF:

$$dF(s, B_s^H) = \frac{\partial F}{\partial s}ds + \frac{\partial F}{\partial B_s^H}dB_s^H, \tag{4.11}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} A_t &= A_0\exp(rt) \qquad (4.12)\\ S_t &= S_0\exp(rt + B_t^H). \qquad (4.13)\end{aligned}$$

[11]Dependiendo de la manera que se ocupe para integrar (por trayectorias o mediante la integración basada en el producto de Wick) varían un poco los resultados y la notación.

Consideremos el portafolio $h = (\beta_t, \gamma_t)$, donde β y γ son los pesos de cada uno de los activos. Así, el valor del portafolio al tiempo t es

$$(Vh)(t) = \beta_t A_t + \gamma_t S_t.$$

La condición de autofinanciabilidad que vimos en el capítulo 1, implica que aún y cuando el proceso de precios del activo con riesgo sea conducido por un MBF, el cambio en el valor del portafolio es

$$d(Vh)(t) = \beta_t dA_t + \gamma_t dS_t.$$

Si elegimos los siguientes pesos para los activos del portafolio

$$\beta_t = 1 - \exp(2B_t^H)$$
$$\gamma_t = 2\exp(B_t^H) - 2,$$

entonces el valor de portafolio toma la siguiente forma

$$(Vh)(t) = [1 - \exp(2B_t^H)]A_0 \exp(rt) + [2\exp(B_t^H) - 2]S_0 \exp(rt + B_t^H).$$

Para simplificar supongamos que los valores iniciales para los activos A_0 y S_0 de nuestro portafolio son uno. Además, para no tener una notación engorrosa hagamos $\exp(x) = e^x$. Esto implica que

$$(Vh)(t) = e^{rt}(1 + e^{2B_t^H} - 2e^{B_t^H}). \tag{4.14}$$

Aplicando la ecuación (4.11) al valor del portafolio tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Vh)(t)}{\partial t} &= e^{rt}\left[2(1 - e^{B_t^H})(-dB_t^H)\right] + [1 - e^{B_t^H}]^2 re^{rt} \\ \frac{\partial(Vh)(t)}{\partial B_t^H} &= 2[e^{B_t^H} - 1]e^{rt + B_t^H}, \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$d(Vh)(t) = (1 - e^{B_t^H})^2 re^{rt}dt + 2(e^{B_t^H} - 1)e^{rt + B_t^H}dB_t^H. \tag{4.15}$$

El primer término de la ecuación (4.14) puede ser escrito como

$$re^{rt}\left(e^{B_t^H} - 1\right)dt = 2re^{rt + B_t^H}dt(e^{B_t^H} - 1) + re^{rt}dt(1 - e^{2B_t^H}), \tag{4.16}$$

y el segundo término de esta misma ecuación toma la forma

$$2e^{rt + B_t^H}(e^{B_t^H} - 1)dB_H^t = \gamma_t S_t dB_t^H. \tag{4.17}$$

Sustituyendo las expresiones de las ecuaciones (5.15) y (5.16) en la ecuación (5.14) tenemos que

$$\begin{aligned} d(Vh)(t) &= \gamma S_t(rdt + dB_t^H) + \beta_t r A_t dt \\ &= \beta_t dA_t + \gamma_t S_t, \end{aligned}$$

por la condición de autofinanciabilidad.

Así podemos ver que la estrategia $h = (\beta_t, \gamma_t)$ es autofinanciable. Sin embargo, h es un portafolio de arbitraje pues de la ecuación (4.13) se observa que $(Vh)(t)$ es no-negativo. Más aún, es positivo casi seguramente. Por lo tanto, h es una estrategia de arbitraje.

■

El ejemplo anterior muestra que en un mercado fraccional es necesario reformular las hipótesis concernientes a la condición de no arbitraje. Podemos ver que con las condiciones usuales para un modelo de mercado "sencillo" como es el de Black-Scholes, cuando se trabaja con el MBF no se tiene un mercado completo.

4.3.5. Exclusión de las oportunidades de arbitraje

Varias modificaciones de la configuración del mercado fraccionario se han sugerido para evitar la existencia de arbitraje. En particular, los enfoques de Hu y Øksendal ([22]) y Elliott-van der Hoek ([16]) han iniciado un intenso debate en cuanto a la medida en la que el producto e integral de Wick son adecuados para su uso en un contexto financiero.

Los trabajos hechos por Delbaen-Schachermayer ([14]), Patrick Cheridito ([12]) y más recientemente Bender ([4]) mantienen su validez en cuanto a sus definiciones. La condición de auto financiabilidad y la admisibilidad permanecen sin cambios. En relación al movimiento browniano fraccional Elliott y van der Hoek, Hu y Øksendal establecen alternativas para la exclusión de arbitraje en un mercado fraccional del tipo Black-Scholes. En sus trabajos incorporan el producto de Wick[12], el cual es una de las bases para la construcción del movimiento browniano fraccional.

4.4. Problemas abiertos

Son varias las interrogantes que se desprenden de este trabajo. Desde luego la mayoría de ellas permanecen cercanas a la condición de no-arbitraje que hemos estudiado. El PTFVA se ha logrado extender a espacios de Hilbert y espacios vectoriales topológicos, reformulando la condición de no-arbitraje. Sin embargo no se han hecho esfuerzos por abordar esta cuestión desde el punto de vista de las funciones de utilidad. Es de aquí que surge la cuestión de si es o no posible establecer el PTFVA con un número finito de activos usando funciones de von Neumann-Morgenstern

En esta tesis abordamos sin preocupación alguna el concepto de derivado financiero. Sin embargo, también podemos hablar acerca del comportamiento intrínseco de este tipo de instrumentos financieros. Este último tema es de especial interés en vista de la gama tan amplia de derivados financieros que existen hoy en día.

Por otra parte, un tema que ha causado interés desde hace ya varios años es el concepto de equilibrio. La relación que existe entre el arbitraje y el equilibrio financiero puede estudiarse analizando algunas relaciones estructurales que se tienen para los modelos de mercados de tipo Black-Scholes mediante varias técnicas.

En resumen, las cuestiones que consideramos como problemas abiertos son las siguientes:

1. ¿Es posible obtener una versión del PTFVA para el caso de un espacio de probabilidad

[12]Detalles acerca del producto de Wick e integración fraccional en mercados es de tipo Black-Scholes pueden consultarse en: *A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model*, Tomas Björk, Henrik Hult, 1991.

discreto (no necesariamente finito) y un horizonte finito, mediante el uso de funciones de utilidad?

2. Si en un mercado libre de arbitraje se tiene un continuo de medidas martingala equivalentes, es decir, el mercado es incompleto. ¿Qué condiciones completarían el mercado si se usa la definición clásica de completez?

3. ¿Existen formas equivalentes de los principios de no arbitraje, no-free lunch with vanishing risk ó no-free lunch with bounded risk?

4. ¿Existe una relación fuerte entre el arbitraje y equilibrio financieros?

5. ¿Qué se puede decir acerca de la estabilidad en activos y derivados?

CAPÍTULO 5

Conclusiones

5.1. Discusión

El objetivo de este trabajo fue el de estudiar la forma en la que el principio de no-arbitraje puede emplearse para la valuación de derivados financieros desde el punto de vista del análisis funcional. Más específicamente, el estudio del Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (PTFVA). En años recientes la investigación de este tema ha dado como resultado extensiones de este teorema en contextos más amplios. Aunque el nivel matemático de tales desarrollos excede el de esta tesis, hemos hecho un esfuerzo por presentar esquemáticamente la versión de PTFVA de 1994 y al menos comentar en el capítulo 5, la versión aún más general de 1998 ([14]).

Dentro de la valuación de de derivados financieros el parte aguas indiscutible surge en 1973, con el trabajo de Black-Scholes sobre la valuación de opciones y obligaciones corporativas [8]. No obstante, la valuación de derivados no comenzó en este punto. Años antes varios economistas ya habían atacado este problema. Según nuestras propias consideraciones existe lo que podría llamarse un salón de la fama para los precursores del modelo de Black-Scholes, ocupando el lugar número uno Louis Bachelier. Este nombramiento se debe a dos cuestiones esenciales, la primera es debido a que Bachelier sentó varios de los aspectos de la teoría matemática del movimiento browniano cinco años antes de la aparición del artículo clásico de Albert Einstein (1905). La otra cuestión es por sus aportaciones a las finanzas matemáticas vía la teoría de los procesos estocásticos.

El mayor porcentaje de aportaciones y desarrollos dentro de la valuación de activos derivados (principalmente de opciones) comenzaron a darse durante la década de los 60's del siglo pasado. Además de Bachelier, fueron R.C. Merton, P. A. Samuelson y los ya mencionados Black y Scholes los más destacados en este rubro. Sin embargo, es Stephen A. Ross quien propicia el "boom" de la valuación de derivados con la introducción de su teoría de la valuación por arbitraje de activos financieros en 1976. Es a partir de entonces que el estudio del arbitraje financiero se efectúa de manera sistemática, aunque bien cabe mencionar que el estudio moderno del arbitraje se centra en las implicaciones de la ausencia de tales oportunidades, tal como se especifica en [6], [26], [38].

Ph. Dybvig y S. Ross [13], son quienes permiten abordar la prueba del PTFVA con el enfoque del análisis funcional que aquí nos interesa. Estos autores proporcionan un marco teórico basado en las condiciones típicas de los mercados. Cuando se establece la afirmación de que dos bienes perfectamente sustitutos deben ser intercambiados a un “solo” precio, ya se está incluyendo la condición de la ausencia de arbitraje. Esta es la conocida Ley de un Mismo Precio para un mercado competitivo, y resulta como una implicación de la condición de no-arbitraje. No es obvio que de la ausencia de oportunidades de arbitraje, cualesquiera dos bienes sustitutos deban ser vendidos a un mismo precio. Sin embargo, una vez que se relacionan la noción de satisfacción con los payoffs de los activos o portafolios en cuestión, se establece la hipótesis básica que da lugar al funcional de valuación payoff. Así, se afirma que el funcional de valuación payoff es estrictamente positivo siempre y cuando no exista arbitraje.

Es de hecho sorprendente que el funcional de valuación payoff pueda ser extendido a todo el espacio de reclamos contingentes, y que puedan extenderse las mismas características en relación a la definición de arbitraje con la que se trabaje, es decir, que si el funcional de valuación payoff es positivo (estrictamente), entonces su extensión también es positiva (estrictamente), dependiendo si usamos arbitraje fuerte o simplemente arbitraje. Otra cosa que además cabe destacar, es en relación a las formas en las que se puede representar tal funcional de valuación payoff ([6], [13]). La más conocida de las representaciones es la llamada representación martingala, pues se trabaja con una medida de probabilidad neutra al riesgo, equivalente a la medida de trabajo original.

Cuando se va más allá del trabajo de Dybvig y Ross, a partir de condiciones puramente geométricas se formula una definición de no-arbitraje, no equivalente a la que se obtiene cuando se trabaja con la ley de un mismo precio. La introducción de las técnicas propias del análisis funcional, y sobre todo de la noción de ortogonalidad nutren grandemente el alcance del principio de no-arbitraje. Por un lado es posible introducir un espacio de probabilidad asociado que es discreto, aunque no necesariamente finito. Así se logra una riqueza conceptual y práctica que es aplicada en los mercados financieros actuales ([28]), además de esto, toda la maquinaria de los teoremas de separación (tipo Hahn-Banach) permiten una interpretación de la condición de no-arbitraje como un hiperplano que separa los portafolios cuyo payoff es positivo de aquellos que pertenecen al subespacio que intersecta al conjunto de portafolios con precio negativo solamente en el origen. Notemos que esto sugiere el uso de espacios de Hilbert, debido a que la condición de autofinanciabilidad se puede interpretar en términos de un producto interior. Además de esto, el uso de los espacios de Hilbert tiene que ver con el hecho de que deseamos establecer el precio de un reclamo contingente, este precio para el reclamo depende de manera continua del valor del activo subyacente. Cabe mencionar que desde un punto de vista económico, esta dependencia es en periodos cortos de tiempo. No obstante, estos espacios nos proporcionan resultados matemáticos consistentes con la realidad económica.

La aplicación de varios conceptos de probabilidad y de procesos estocásticos, da cuenta de que la riqueza del tema será descubierta en gran parte, al incluir de manera consistente estas sofisticadas herramientas. Varios conceptos como el de proceso adaptado, martingala, espacio filtrado, semi-martingala, movimiento browniano y más recientemente el movimiento browniano fraccional, entre otros ([24], [38], [39]), destacan por la versatilidad que muestran para el modelado de los mercados de activos y derivados y de futuros. Incluso el cálculo de Itô pareciera haber sido desarrollado con la finalidad de aplicarse en las finanzas matemáticas ([29], [36], [38], [39]). En este punto ya es muy difícil el modelado y el nivel técnico de la matemática empleada requiere de un grado de especialización considerable como muestran [14], [15]. La misma condición de no-arbitraje es llevada al "no-free lunch with vanishing risk", y la versión del PTFVA es para procesos acotados pero en espacios completamente arbitrarios. Desde luego uno pudiera pensar, aparte de la complejidad matemática, en la compatibilidad de los desarrollos con la parte económica. De esta manera se tiene que, para poder llegar a resultados consistentes económicamente se debe trabajar con una topología débil en espacios vectoriales topológicos. Desafortunadamente este tipo de desarrollos no forman parte del tema central de esta tesis, pero pueden consultarse en [18], [19], [27] ó [35].

Un nuevo acercamiento al PTFVA va encaminado a la aplicación de la condición del "no-lonche gratis con riesgo acotado", en la cual se emplean procesos no acotados y la noción de σ-martingala. Esta es la versión más general del PTFVA desarrollada en 1998 ([14]). A partir de aquí se han buscado algunas alternativas que giran en torno al uso del movimiento browniano cuyo coeficiente de deriva sea diferente de un medio. En esta línea los resultados son sorprendentes. Cuando el coeficiente de Hurst se mueve de 0.5, es posible recuperar un análogo de los mercados tipo Black-Scholes, además de que se prueba que puede haber mercados completos para los cuales existen oportunidades de arbitraje. Sin embargo este camino esta siendo apenas explorado y queda como posible trabajo futuro.

Un tema que no debemos olvidar cuando hablamos de la valuación de derivados es acerca del Segundo Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (STFVA), de hecho las finanzas modernas giran en torno a estos dos resultados, es decir, el primer y segundo teoremas fundamentales. Mientras el PTFVA relaciona la ausencia de oportunidades de arbitraje con la existencia de una medida martingala equivalente, el STFVA liga la completez del mercado con la unicidad de la medida martingala equivalente. Ocupa ahora un papel principal la heurística conocida como réplica financiera, ya que un mercado libre de arbitraje es completo siempre y cuando cualquier activo del mercado pueda ser replicado. De esta manera aparecen varias situaciones que contrastan con los temas que hemos venido discutiendo. La más notable es en relación a aquellos mercados para los cuales la condición de no-arbitraje resulta insuficiente para garantizar la unicidad del precio de algún reclamo contingente. Estos son los llamados mercados incompletos. En este caso existe un continuo de medidas martingala equivalentes que pueden usarse para derivar un precio que sea acorde con la condición de no-arbitraje. En esta situación el mercado es el que dictamina la medida que hay que usar para valuar el derivado.

Puede parecer que no hay problema alguno después de leer el párrafo anterior, pero en realidad si existen complicaciones de fondo. En [1] se presenta un caso polémico de un mercado completo para el cual hay arbitraje con las definiciones usuales. Este problema desde luego resultó fuente de confrontación, aunque para nuestra fortuna en [3] se presenta una nueva aproximación del STFVA en la cual un mercado puede ser completo y aún así pueden existir oportunidades de arbitraje. ¿Qué nos deja entrever esto a la hora de querer relacionar el primero y segundo teorema fundamentales? La respuesta es algo sorprendente: Si consideramos el enfoque que aparece en el trabajo de Battig-Jarrow, se tiene que ambos teoremas son independientes. Aún así, con este enfoque, bajo la hipótesis de no-arbitraje, cuando se emplean los modelos tradicionales, la definición de completez de mercado es equivalente a la que se maneja comúnmente en el STFVA

5.2. Trabajo futuro

Al desarrollar este trabajo de tesis varios temas me causaron gran motivación. Desde luego las relaciones entre el PTFVA y el STFVA tienen un lugar importante, pero también los temas que derivan del Capítulo 3. Uno de ellos es la relación entre el arbitraje y el equilibrio financiero. De hecho los mismos F. Black y M. Scholes en [8], dieron una aproximación a su modelo basándose en las ideas del equilibrio de mercado. Esta aproximación puede desarrollarse a partir del problema de la elección del portafolio de consumo para un agente cuya función de utilidad sea de von Neumann-Morgenstern. En este desarrollo hace su aparición el Modelo para la Valuación de Activos de Capital (CAPM, por sus siglas en inglés), propuesto de forma independiente por Sharpe, Treynor, Litner y Mossin entre 1962 y 1965. El CAPM gira en torno a la noción de equilibrio general y al parecer existen relaciones estructurales (en espacios adecuados) que pueden ser interesantes.

En esta misma línea de las funciones de utilidad, al considerar un espacio de probabilidad filtrado, discreto pero no necesariamente finito, y funciones de von Neumann-Morgenstern se podría pensar en una versión discreta del PTFVA considerando algún artificio en que se incluya la intertemporalidad. Esto sigue un poco el trabajo de Merton acerca de la intertemporalidad en el CAPM y el trabajo de Rogers que aparece en [26].

Por otra parte, al considerar un modelo de mercado para el cual se tiene una cantidad no numerable de medidas martingalas equivalentes, i. e., el mercado es incompleto. ¿Será posible completar el mercado para el caso de las definiciones de completez clásicas? Si es el caso, la otra pregunta que inmediatamente viene a la mente es ¿Cuáles son las hipótesis que se deben agregar para lograr tal condición? No me es muy claro si en efecto en los mercados financieros reales, se pueda implementar alguna hipótesis matemática que sea consistente con la estructura de mercado. Pero bien podríamos tener la pauta para otra aproximación con las definiciones de [3].

APÉNDICE A

Introducción a los espacios de Hilbert y Banach

Los elementos del análisis funcional comenzaron a tener auge aproximadamente hace un siglo y emplean concepciones geométricas y algebraicas en el estudio de familias de funciones. La mencionada estructura geométrica de varias clases de funciones se hace presente en los llamados espacios de Hilbert (D. Hilbert 1912), y hoy en día los métodos propios del análisis funcional tienen diversas aplicaciones en varios campos de la ciencia aplicada. En el caso de las finanzas matemáticas es necesario introducir los conceptos de espacio de Hilbert y espacio de Banach, debido a que se abordan varios temas con un enfoque geométrico. Es posible emplear un teorema de separación del tipo Hanh-Banach, en relación al principio de no-arbitraje para probar el Teorema Fundamental. Usando algunas herramientas del análisis funcional es posible encontrar un funcional que value a todos los reclamos contingentes, aún cuando estos no hayan sido introducidos al mercado, además del uso del concepto de dualidad para espacios de funciones.

En este apéndice introducimos las propiedades básicas de espacios normados, para poder abordar los conceptos referentes a espacios de Banach y espacios con producto interior. Una vez completado este paso, damos lugar al concepto de espacio de Hilbert y haremos anotaciones en referencia al concepto de ortogonalidad por su importancia matemática y por su utilidad en varios contextos. Mencionaremos tanto la versión analítica, como la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach para espacios normados, y concluimos el capítulo con algunos comentarios acerca de convergencia, así como algunos elementos de teoría de la medida. Dejaremos de lado las demostraciones de la mayoría de los resultados, exceptuando los marcados por (*), cuyas pruebas son importantes por alguna razón específica. Las referencias para este capítulo son [2], [19], [25], [32] y [35].

Consideramos que este apéndice puede servir como un resumen mínimo de los elementos de análisis funcional que se emplean en varias partes de finanzas matemáticas.

A.1. Espacios normados

En lo que sigue, X será un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$.

Definición A.1.1. (Norma). *Una norma sobre un espacio vectorial X es una función real-valuada sobre X que satisface las siguientes propiedades*

(N1) $\parallel x \parallel \geqslant 0$

(N2) $\parallel x \parallel \Longleftrightarrow x = 0$

(N3) $\parallel \alpha x \parallel = |\alpha| \parallel x \parallel$

(N4) $\parallel x + y \parallel \leqslant \parallel x \parallel + \parallel y \parallel$

Definición A.1.2. (Espacio normado). *Un espacio normado es un espacio vectorial X con una norma definida sobre él.*

Definición A.1.3. (Espacio de Banach). *Un espacio de Banach es un espacio normado completo. La completez del espacio es tomada con respecto a la métrica definida por la norma.*

Denotamos un espacio normado por $(X, \parallel \cdot \parallel)$. Ahora bien, tanto los espacios normados como los espacios de Banach pueden ser considerados como espacios métricos.

Proposición A.1.1. *La función norma es continua.*

Demostración*. Si denotamos a la función norma como $\parallel \cdot \parallel$, entonces de la propiedad (N4) obtenemos que

$$| \parallel x \parallel - \parallel y \parallel | \leqslant \parallel x - y \parallel .$$

Si tomamos a x tan cercana como queramos a y, se sigue entonces que

$$| \parallel x \parallel - \parallel y \parallel | \to 0,$$

de donde se sigue la continuidad de la norma.

■

Son tres tipos de espacios lo que nos interesan en particular: Los espacios l^p, el espacio l^∞, y el espacio de las funciones continuas sobre $[a, b]$. Las normas correspondientes a cada uno de estos espacios son:

- $\parallel x \parallel_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\omega_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, para l^p
- $\parallel x \parallel_\infty = \sup_j |\omega_i|$, para l^∞
- $\parallel x \parallel_{\mathbb{C}} = \mathrm{m}ax_{t \in \mathbb{C}} |x(t)|, \quad$ para $\mathbb{C} = [a, b]$

Estas tres normas corresponden a espacios de Banach (ver [19], [35]). Observemos que si en la primera $p = 2$, obtenemos la norma euclidiana que conocemos bien, aunque en dimensión infinita. En el capítulo 4, consideraremos algunos espacios más sofísticados como $L^2(\Omega, \Im, P), L^0(\Omega, \Im, P)$ y $L^\infty(\Omega, \Im, P)$.

Proposición A.1.2. (Invariancia bajo traslaciones). *Sea d la métrica inducida por una norma sobre un espacio vectorial X. Entonces para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que*

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$

(ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$.

Demostración. Ver [32].

■

A.2. Propiedades de los espacios de Banach

Si recordamos la definición de subespacio que se tiene del álgebra lineal, podemos establecer de manera similar la correspondiente definición para un subespacio de un espacio de Banach.

Por otra parte, en cuanto a la completez del subespacio podemos ver que esta propiedad no se hereda de manera directa como se pudiese pensar.

Teorema A.2.1. *Sea X un espacio de Banach. Un subespacio Y de X es completo sii Y es cerrado en X.*

Demostración. Ver [25], [32].

■

En muchos casos dado un subespacio lineal S es posible que no sea cerrado, haciendo más ventajoso tomar $\overline{S}$. Pero al hacer esto debemos tener en cuenta, que la cerradura de un subespacio lineal de un espacio normado también es un subespacio lineal.

Lema A.2.1. *Si X es un espacio normado y S es un subespacio lineal de X entonces $\overline{S}$ es un subespacio lineal de X.*

Demostración. Ver [32] y [42].

■

Sabemos que si $V \subset X$ es no vacío, el span de V (o espacio lineal generado por los elementos de V) es la intersección de todos los subespacios lineales que contienen a V. Podemos dar entonces la correspondiente definición de un subespacio lineal cerrado en términos de la intersección de subespacios lineales cerrados.

Definición A.2.1. *Sea X un espacio normado y sea E un subconjunto no vacío de X. El span lineal cerrado de E, es la intersección de todos los subespacios lineales cerrados de X que contienen a E. A este subespacio lo denotamos como $clin(E)$. (Ver [42], Cap. 2, pp. 16)*

Lema A.2.2. *Sea X un espacio normado y $E \subset X$ tal que $E \neq \phi$. Entonces*

(a) *$clin(E)$ es un subespacio lineal cerrado de X que contiene a E*

(b) *$\overline{clin(E)} = clin(E)$, es decir, $clin(E)$ es la cerradura del span de E.*

Demostración. Ver [42].

■

En el siguiente teorema se ilustra la importancia de este tipo de subespacios.

Teorema A.2.2. (Lema de Riez). *Sean X un espacio normado, Y un subespacio lineal cerrado de X tal que $Y \neq X$ y α un número real tal que $0 < \alpha < 1$. Entonces existe $x_\alpha \in X$ tal que tal que $\| x_\alpha \| = 1$ y $\| x_\alpha - y \| > 0$ para toda $y \in Y$.*

Demostración*. Estamos suponiendo que $X \neq Y$, de esta manera existe un punto $x \in X$ de tal manera que x no está en Y. También, dado que Y es un conjunto cerrado,

$$d = \inf\{\| x - z \| : z \in Z\} > 0.$$

Recordando que $0 < \alpha < 1$ tenemos que $d < d\,\alpha^{-1}$, así que existe $z \in Y$ tal que se satisface la desigualdad

$$\| x - z \| < d\,\alpha^{-1}.$$

Si hacemos

$$x_\alpha = \frac{x - z}{\| x - z \|}$$

entonces $\| x_\alpha \| = 1$, y para cualquier $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
\| x_\alpha - y \| &= \| \tfrac{x-z}{\|x-z\|} - y \| \\
&= \| \tfrac{x}{\|x-z\|} - \tfrac{z}{\|x-z\|} - \tfrac{\|x-z\| y}{\|x-z\|} \| \\
&= \tfrac{1}{\|x-z\|} \| x - (z + \| x - z \| \, y) \| \\
&> (\alpha\, d^{-1}) d \\
&= \alpha,
\end{aligned}$$

ya que $z + \| x - z \| \, y \in Y$, dado que Y es un subespacio lineal.

■

Para concluir esta sección listamos algunas de las propiedades de los espacios de Banach que nos serán de utilidad.

Proposición A.2.1.

(i) *Cualquier espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach*

(ii) *Si X es un espacio métrico compacto, entonces el conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbb{K}$ con la métrica del supremo es completo*

(iii) *Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida entonces $L^p(X)$ es un espacio de Banach para $1 \leqslant p \leqslant \infty$*

(vi) *El espacio l^p es un espacio de Banach para $1 \leqslant p \leqslant \infty$*

Demostración. Ver [25], [32] ó [42].

■

A.3. Espacios con producto interior

Varias de las nociones que se tienen para sistemas físicos y en nuestro caso sistemas financieros están dadas en términos del producto interior para vectores en $\mathbb{R}^d$. Este es el caso del valor de un portafolio a cualquier tiempo dentro de algún horizonte temporal, tal como puede verse en la sección 1.2 del capítulo 1, en donde se dice que el valor del portafolio está dado por

$$Vq(t) = \langle q(t), S(t) \rangle ,$$

considerando el producto interior como una generalización del producto punto, la cual puede extenderse a espacios de dimensión infinita.

Definición A.3.1. (Producto interior) *Un producto interior sobre un espacio vectorial X es una función de $X \times X$ en el campo escalar $\mathbb{K}$ de X. Es decir, que para cualquier pareja de vectores x y y existe un escalar asociado en $\mathbb{K}$ que se escribe como $< x, y >$ y se conoce como producto interior de x y y.*

Definición A.3.2. (Espacios con producto interior) *Un espacio con un producto interior es un espacio vectorial X con un producto interior definido sobre X*

Para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha \in K$ el producto interior satisface las siguientes propiedades:

(PI1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(PI2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$

(PI3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(PI4) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ y $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Mencionamos ahora algunas de las propiedades básicas que satisfacen los espacios con producto interior.

Teorema A.3.1. *Sea X un espacio con producto interior, $x, y, z \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces*

(i) $\langle 0, y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$

(ii) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha} \langle x, y\rangle + \overline{\beta} \langle x, z\rangle$

(iii) $\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle = |\alpha|^2 \langle x, x\rangle + \alpha\overline{\beta} \langle x, y\rangle + \beta\overline{\alpha} + |\beta|^2 \langle y, y\rangle$.

(iv) *Si* $\langle x, y\rangle = 0, \forall y \in X \Rightarrow x = 0$

Demostración. La demostración de este teorema se sigue de las propiedades del producto interior.

■

Vamos a mostrar ahora que para cualquier espacio X que esté equipado con un producto interior, la fórmula $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ define una norma sobre el espacio X. Para esto necesitamos el siguiente lema.

Lema A.3.1. *Sea X un espacio con producto interior y sea $x \in X$. La función $\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}$ definida por $\| x \| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, es una norma sobre X.*

Demostración. Ver [32].

■

La norma definida en el enunciado del lema anterior es la norma inducida por el producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre el espacio X. Ahora bien, este lema nos muestra que usando la norma inducida, cualquier espacio con producto interior puede ser visto como un espacio normado.

Lema A.3.2. (Desigualdad de Cauchy-Scharwz). *Sea X un espacio con producto interior y sean $x, y \in X$. Entonces*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \| x \| \| y \| .$$

Demostración*. Incluimos aquí una demostración no muy común de este importante resultado. Notemos primero que el resultado es verdadero para cuando x ó y son cero. Supongamos entonces que tanto x como y son distintas de cero. Si en el inciso (iii) del teorema A.3.1, tomamos $\alpha = -\overline{\langle x, y\rangle} / \langle x, x\rangle$ y $\beta = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle \\
&= \left|\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\|x\|^2}\right|^2 \| x \|^2 - \frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle}{\|x\|^2} - \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\|x\|^2} + \| y \|^2 \\
&= \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|x\|^2} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|x\|^2} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|x\|^2} + \| y \|^2 \\
&= -\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|x\|^2} + \| y \|^2
\end{aligned}$$

$$\therefore | \langle x, y\rangle | \leqslant \| x \| \| y \|.$$

■

Algo que debemos resaltar de la métrica definida sobre un espacio X, es que el producto interior que induce $\langle \cdot, \cdot\rangle$ y que está definido en términos de las propiedades algebraicas es una función continua.

Teorema A.3.2. *Sea X un espacio con producto interior y sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ dos sucesiones convergentes en X. Entonces la sucesión $\langle x_n, y_n\rangle$ es convergente.*

Demostración*. Debido a que tenemos dos sucesiones convergentes, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ y } \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Así,

$$\begin{aligned}
| \langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle | &= | \langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle + \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle | \\
&\leqslant | \langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle | + | \langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle | \\
&= | \langle x_n, y_n - y\rangle | + | \langle x_n - x, y\rangle | \\
&\leqslant \| x_n \| \| y_n - y \| + \| x_n - x \| \| y \| .
\end{aligned}$$

Entonces, dado que la sucesión $\{x_n\}$ converge, $\exists M > 0$ tal que $\| x_n \| < M$

$$\Rightarrow | \langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle | < M \| y_n - y \| + \| x_n - x \| \| y \|,$$

de donde se sigue que $| \langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle | \to 0$, cuando $n \to 0$.

■

A.4. Espacios de Hilbert. Ortogonalidad

Pasamos ahora a la parte correspondiente a la geometría. El concepto de ortogonalidad que se tiene del álgebra lineal se puede extender a espacios más generales. Más aún, el concepto de conjunto ortonormal también puede ser generalizado de espacios con producto interior de dimensión finita a espacios con producto interior arbitrarios.

Definición A.4.1. *Sea X un espacio con producto interior. Sean $x, y \in X$, decimos que estos vectores son ortogonales si* $\langle x, y \rangle = 0$

Definición A.4.2. *Sea X un espacio con producto interior. Decimos que el conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset X$ es un conjunto ortonormal si*

$$\| e_k \| = 1, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad \textit{para cualesquiera } 1 \leqslant i, j \leqslant n, \ \textit{con } i \neq j.$$

Del álgebra lineal sabemos que si trabajamos en un espacio V de dimensión n, un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots v_n\} \subset V$ que sea linealmente independiente constituye una base para el espacio V (ver [25]), i.e., si $x \in V$, entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad \text{donde } a_i \in \mathbb{K}.$$

Algo similar ocurre en los espacios con producto interior. Si tenemos un conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset X$, este conjunto es linealmente independiente. Si además este espacio es de dimensión n entonces $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es una base para X, y cualquier vector $x \in X$ puede ser expresado de la siguiente manera

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k,$$

en este caso $\langle x, e_k \rangle$ son las componentes de x respecto a la base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Otra cosa que es conveniente mencionar es que si $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ es un subconjunto linealmente independiente de un espacio con producto interior X, y $S = \text{span}(v_i)$. Entonces existe una base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ para S.

Teorema A.4.1. (Teorema de Pitágoras). *Sea X un espacio con producto interior de dimensión n y sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal para X. Entonces para cualesquiera $a_k \in \mathbb{K}, \ k = 1, 2, \ldots, n$*

$$\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2.$$

Demostración. Ver [42].

■

Cuando hablamos de espacios normados completos, decimos que tales espacios son de Banach. Sin embargo la completez también se tiene en los espacios con producto interior.

Definición A.4.3. *Un espacio con producto interior que es completo con respecto a la métrica asociada a la norma inducida por el producto interior se llama espacio de Hilbert.*

De igual manera que con los espacios de Banach, los subespacios de un espacio de Hilbert no necesariamente son completos. Esto solamente ocurre cuando el subespacio en cuestión es cerrado.

Teorema A.4.2. *Sea H un espacio de Hilbert y $Y \subset H$ un subespacio lineal. Entonces Y es un espacio de Hilbert sii Y es cerrado en H.*

Demostración*. Recordemos que un subconjunto de un espacio métrico es completo sii este conjunto es cerrado. Así, en vista de la definición tenemos que Y es un espacio de Hilbert puesto que es un subespacio completo.

■

Ya que tenemos las definiciones de ortogonalidad y de espacio de Hilbert, podemos pensar en donde aplicar estos conceptos. Es decir, pensar en situaciones más generales que solamente la ortogonalidad entre dos vectores. Podría darse el caso de considerar el conjunto de vectores que es ortogonal a otro conjunto de vectores o querer dar una demostración más elegante de algún teorema.

Una de las primeras consecuencias que obtenemos en espacios de Hilbert es cuando consideramos un conjunto ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ en un espacio H. Si $x \in H$, el punto más cercano al subespacio lineal generado por $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ es

$$y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i.$$

Más aún, la distancia $d = \| x - y \|$ está dada de la siguiente manera

$$d^2 = \| x \|^2 - \sum_{i=1}^{n} | \langle x, e_n \rangle |^2,$$

tal como se puede ver en [19] ó [42].

Introducimos ahora una de las desigualdades clásicas del análisis funcional que es la llamada desigualdad de Bessel.

Teorema A.4.3. (Desigualdad de Bessel). *Si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal en un espacio con producto interior X entonces para cualquier $x \in X$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \langle x, e_n \rangle |^2 \leqslant \| x \|^2 .$$

Demostración. Ver [32], [34] ó [35].

■

En general es difícil decir cuando una serie converge en un espacio de Banach. Sin embargo, a la hora de trabajar en espacios de Hilbert una caracterización útil para la convergencia de una serie surge cuando trabajamos con vectores ortonormales como veremos a continuación.

Teorema A.4.4. *Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H, y sea $\lambda_n \in \mathbb{C}$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ converge en H sii*

$$\sum_{n=1}^{2} |\lambda_n|^2 < \infty.$$

Demostración*. ($\Leftarrow$) Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. Escribamos ahora

$$x_k = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n,$$

y tomemos $k, p \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\| x_{k+p} - x_k \|^2 = \| \sum_{n=1+p}^{k+p} \lambda_n e_n \|^2 .$$

Por el teorema de Pitágoras

$$\| x_{k+p} - x_k \|^2 = \sum_{n=k+1}^{k+p} |\lambda_n|^2,$$

lo cual tiende a cero cuando K tiende a infinito. Así hemos probado que $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy en H y por lo tanto converge en H.

($\Rightarrow$) Supongamos que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$. Para $m \geqslant k \in \mathbb{N}$,

$$< x_m, e_k >= \lambda_k.$$

Usando el teorema A.3.2, cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$< x, e_k >= \lambda_k.$$

Usando ahora la desigualdad de Bessel

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < x, e_n > |^2 \leqslant \| x \|^2 < \infty$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty.$$

■

Con los tres teoremas que mencionamos anteriormente, ya casi estamos listos para dar una representación válida en términos de una serie para cualquier $x \in H$, donde H es un espacio de Hilbert.

Definición A.4.4. *Sea H un espacio de Hilbert y supongamos que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal en H. Decimos que la sucesión es completa si el único elemento de H que es ortogonal a e_n, para toda $n \in \mathbb{N}$ es el vector cero.*

Teorema A.4.5. *Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes (ver [42], Cap. 4, pp 37)*

(i) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es completa*

(ii) $clin\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = H$

(iii) $\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle x, e_n \rangle |^2$ *para toda* $x \in H$.

Definición A.4.5. *Sea X un espacio con producto interior y $A \subset X$. El complemento ortogonal de A es el conjunto*

$$A^{\perp} = \{x \in X \ : \ \langle x, a \rangle = 0, \textit{para toda} x \in A\}.$$

De la definición podemos ver que el complemento ortogonal de A consta de aquellos vectores en X que son ortogonales a cualquier vector $a \in A$. Además A y $A^{\perp}$ están ligados vía la condición de ortogonalidad, lo que es explotado en la práctica para poder hallar de forma explícita el complemento ortogonal[1].

Lema A.4.1. *Sea M un subespacio lineal cerrado de un espacio con producto interior X y sea $x \in H$. Entonces $x \in M^{\perp}$ sii*

$$\| x - y \| \geqslant \| x \|, \quad \textit{para toda } y \in M.$$

Demostración*. ($\Rightarrow$) Para cuando $x \in M^{\perp}$, se tiene que para toda $y \in M$

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \geqslant \| x \|^2 .$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\| x - y \| \geqslant \| x \|$ para toda $y \in M$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $y \in M$ arbitrario pero fijo. Entonces $\lambda y \in M$, pero además

$$\| x - \lambda y \|^2 \geqslant \| x \|^2 .$$

Expandiendo el lado izquierdo como un producto interior y cancelando $\| x \|^2$

$$-2Re\overline{\lambda} \langle x, y \rangle + |\lambda|^2 \| y \|^2 \geqslant 0.$$

Puesto que la expresión anterior es válida para cualquier número complejo, entonces es válida para $\lambda = tz$ con $t > 0$, y $z \in \mathbb{C}$ cuyo módulo es uno y elegido de tal manera que $\overline{z} \langle x, y \rangle = | \langle x, y \rangle |$. Por lo tanto

$$-2t| \langle x, y \rangle | + t^2 \| y \|^2 \geqslant 0.$$

Como $t > 0$, reordenando términos y dividiendo por t

$$| \langle x, y \rangle | \leqslant (1/2)t \| y \|^2 .$$

Y ahora si $t \to 0$, se sigue que $\langle x, y \rangle \to 0$, por lo tanto $x \in M^{\perp}$.

■

En espacios de Hilbert tenemos la descomposición en suma directa.

Teorema A.4.6. *Sea M un subespacio lineal cerrado de un espacio de Hilbert H y sea $x \in H$. Entonces existen $y \in M$, $z \in M^{\perp}$ tal que $x = y + z$. (Ver [32], Cap. 3, pp. 70).*

Corolario A.4.1. *Si H es un espacio de Hilbert y M es un subespacio lineal cerrado. Entonces $M^{\perp\perp} = M$. (Ver [32], Cap. 3, pp. 71)*

[1] El complemento ortogonal de X es $\emptyset$

A.5. El teorema de Hahn-Banach

Uno de los teoremas más importantes y representativos del análisis funcional es el teorema de Hahn-Banach. Este teorema admite dos representaciones, una geométrica y una analítica. En nuestro caso la versión geométrica es de mayor utilidad, ya que podemos relacionarla con la condición de no-arbitraje financiero cuando usamos el teorema del hiperplano separante.

Antes de abordar en sí el teorema damos un repaso breve sobre convexidad y acerca de la caracterización de un funcional continuo con relación a su núcleo.

Definición A.5.1. *Sea E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $A \subset E$. Decimos que A es convexo si para cualesquiera $x, x' \in A$ y $t \in [0,1]$ se tiene que*

$$(1-t)x + tx' \in A.$$

Teorema A.5.1. *Sea f un funcional lineal no nulo sobre un espacio normado X y H su núcleo. Entonces f es continua sii H es cerrado.*

Demostración. Ver [35].

■

Definición A.5.2. *Si $A \subset X$, entonces la intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a A es un conjunto convexo conocido como el casco convexo[2] de A, y se denota como $\widehat{A}$. Además*

$$\widehat{A} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \mid t_i \in \mathbb{R}^+,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1,\ x_i \in A \right\}.$$

Definición A.5.3. *Una combinación afín es una combinación lineal para la cual la suma de sus coeficientes es igual a uno.*

De esta forma tenemos que en la definición de la envolvente convexa, las combinaciones lineales que se incluyen son combinaciones afines.

Definición A.5.4. *Un subespacio afín de un espacio vectorial X, es un subespacio cerrado bajo combinaciones afines de vectores en X.*

Definición A.5.5. *Sea X un espacio vectorial. Un hiperplano en X es un conjunto de la forma $H = x_0 + \ker(h)$, donde $x_0 \in X$ y h es un funcional lineal distinto de cero sobre X.*

Por consiguiente, un hiperplano afín es un hiperplano que no pasa necesariamente por el origen. Es decir, que para tener un hiperplano afín el inverso aditivo de x_0 no debe estar contenido en $ker h$.

Teorema A.5.2 (Forma geométrica del teorema de Hahn-Banach). *Sea X un espacio lineal normado y $U \subset X$, abierto y convexo no vacío. Entonces hay un hiperpalno afín H, tal que $H \bigcap U = \emptyset$.*

[2]También se le llama envolvente convexa de A

La demostración del teorema A.5.2 se basa en el lema de Zorn y, dado que éste último es equivalente al axioma de elección, en la literatura podemos encontrar la demostración del teorema usando el axioma de elección en la forma del teorema de maximalidad de Hausdorff. Puede verse la demostración completa en [2], pp. 41-42, o en [35], pp. 395-396.

Enunciamos ahora la otra versión del teorema de Hahn-Banach.

Teorema A.5.3 (**Forma analítica del teorema de Hanh-Banach**). *Sea V un espacio normado de X que no es el conjunto $\{0\}$ y f un funcional lineal continuo no nulo sobre V. Entonces existe un funcional lineal continuo $\tilde{f}$ en X tal que*

(i) $\tilde{f}|_V = f$

(ii) $\| \tilde{f} \| = \| f \|$.

Observemos que tanto la forma geométrica como la forma analítica de teorema de Hanh-Banach están dadas en espacios normados, sin embargo, es posible enunciar el teorema en espacios vectoriales topológicos. Un tratamiento más a fondo del teorema de Hahn-Bananch en este contexto puede consultarse en [18], Cap. 5.

Ahora bien, debido a que el contexto financiero en el que nos movemos contempla portafolios en $\mathbb{R}^d$, nos quedamos con una versión del teorema en espacios normados.

Definición A.5.6. *Sea H es un espacio de Hilbert sobre un campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). El espacio de funcionales lineales continuos con dominio H es llamado el espacio dual, y se denota como H^*.*

Observación. El espacio dual H^* también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Teorema A.5.4 (**Del hiperplano separante**). *Sean A, B subconjuntos convexos, ajenos y no vacíos de un espacio normado X.*

(i) *Si A es abierto, existe Λ en X^* y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que*

$$Re\Lambda x < \gamma \leqslant Re\Lambda y,$$

para cualesquiera $x \in A$ y $y \in B$.

(ii) *Si K es compacto y C es cerrado, existe $\Lambda \in X^*$ y $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$Re\Lambda x < \gamma_1 < \gamma_2 < Re\Lambda y,$$

para cualesquiera $x \in K$ y $y \in C$.

La interpretación geométrica del del enunciado del teorema anterior es que existe un hiperplano que separa dos conjuntos convexos de manera estricta, donde uno es compacto y el otro es cerrado. La demostración puede verse en [35], Cap.3, pp. 57-58.

A.6. Convergencia

En espacios de dimensión finita el concepto de convergencia es muy importante para poder efectuar pruebas en relación a la completez y la compacidad de ciertos conjuntos.

Más aún, el hecho de que los conjuntos cerrados y acotados sean compactos radica en la parte central del análisis en espacios de dimensión finita. Desafortunadamente en espacios de dimensión infinita no podemos tener esta caracterización. Sin embargo es posible obtener un resultado parcial si adoptamos una condición débil para la convergencia de una sucesión. En esta sección llevamos a cabo la mayoría de las demostraciones, puesto que ilustran parte del procedimiento a seguir en la demostración del PTFVA que consideramos en el capitulo cuatro.

A.6.1. Convergencia y convergencia débil

Definición A.6.1. *Para cualquier espacio de Banach* X, *sean* $\{x_n\}$ *y* $\{f_n\}$ *dos sucesiones en* X *y* X^* *respectivamente. Entonces*

(i) *La sucesión* $\{x_n\}$ *converge débilmente a* $x \in X$ *si*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f, \quad \textit{para toda} \;\; f \in X^*$$

(ii) *La sucesión* $\{f_n\}$ *converge *-débilmente a* $f \in X^*$ *si*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \textit{para toda} \;\; x \in X.$$

En vista de que los espacios de Hilbert son reflexivos (véase [32], Cap. 5, pp. 146) y pueden ser identificados con su dual, usando el teorema de Riez-Fréchet se tiene que la convergencia débil y la convergencia *-débil coinciden.

Lema A.6.1. *Sea* X *un espacio de Banach*

(i) *Los límites para la convergencia débil y *-débil son únicos.*

(ii) *Las sucesiones convergentes débilmente y *-débilmente son acotadas.*

Demostración*. (i) Supongamos que $x_n \to x$ débilmente y que $x_n \to y$ débilmente también. De esta manera existe un funcional $f \in X^*$ tal que $f(x-y) = \| x-y \|$. Ahora bien, dada definición de convergencia débil tenemos que

$$\begin{aligned} \| x-y \| &= f(x) - f(y) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) - \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la unicidad.

(ii) Como X es un espacio de Banach, si suponemos que $x_n \to x$ débilmente, entonces para toda $f \in X^*$ tenemos que

$$\sup\{|f(x_n)|\} < \infty,$$

de donde se sigue que

$$\sup\{\| x_n \|\} < \infty.$$

Por lo tanto la sucesión es acotada.

■

Teorema A.6.1. *Sea* X *un espacio de Banach. Entonces*

(i) *Si* $x_n \to x \Rightarrow x_n \to x$ *débilmente en* X

(ii) *Si* $f_n \to f \Rightarrow f_n \to f$ *débilmente en* X^*

Más aún, si X es de dimensión finita tenemos que (i)$\Leftrightarrow$ (ii).

Demostración*. Sea $f \in X^*$ y supongamos que x_n converge a algún $x \in X$. Así,

$$|f(x_n) - f(x)| \leqslant \| f \| \| x_n - x \| \to 0.$$

Un argumento similar se sigue para el inciso (ii).

Para cuando X es de dimensión finita procedemos por contradicción. Supongamos que $x_n \to x$ débilmente, pero $x_n \nrightarrow x$. De esta forma la sucesión $\{x_n\}$ es acotada, así que podemos tomar $\{x_{n_k}\}$ tal que $x_{n_k} \to y$. Pero esto implica que $x_n \to y$, lo cual es una contradicción a la unicidad del límite de una sucesión que converge débilmente.

■

Teorema A.6.2. *Supongamos que $M \subset X$ es cerrado y convexo. Si $\{x_n\}$ es una sucesión en M tal que $x_n \to x$ débilmente, entonces $x \in M$.*

Demostración*. Otra vez procedemos por contradicción. Supongamos que $x \notin M$, entonces usando el teorema de separación con $A = \{x\}$ y $B = M$, contradecimos la hipótesis de que $x_n \to x$ débilmente.

■

Enseguida tenemos algunas de las principales razones para introducir los conceptos de la convergencia débil.

Teorema A.6.3. *Si X es separable y $\{f_n\}$ una sucesión en X^*, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión que converge *-débilmente.*

Demostración*. Para esto necesitamos suponer que existe una sucesión $\{x_n\}$ que es densa en X. Debido a que la sucesión $\{f_n(x_1)\}$ esta en $\mathbb{K}$, se sigue que es acotada, y de esta manera tiene una subsucesión convergente, digamos $\{f_{n_{m_1}}(x_1)\}$. De manera similar, la sucesión $\{f_{n_{m_1}}(x_2)\}$ es acotada, y por lo tanto tiene un subsucesión convergente, digamos $\{f_{n_{m_2}}(x_2)\}$ y así sucesivamente. Pero de esta manera la subsucesión diagonal $\{f_{n_{m_m}}\}$ en el dual de X es acotada y $\{f_{n_{m_m}}(x_n)\}$ converge para $n \in \mathbb{N}$, y esta subsucesión converge *-débilmente.

■

Teorema A.6.4. *Si X es separable y $B = \{f \in X^* : \| x \| \leqslant 1\}$ entonces cualquier sucesión en B tiene una subsucesión que converge *-débilmente a un elemento de B.*

Lema A.6.2. *Supongamos que X es separable, y sea s_k una sucesión densa en X, con $s_k \neq 0$ para toda $k \geqslant 1$. Entonces la función $d_w : X^* \times X^* \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d_w(f, g) = \sum_{K=1}^{\infty} (1/2^k) \frac{|f(s_k) - g(s_k)|}{\| s_k \|}, \quad f, g \in X^*$$

está bien definida y es una métrica sobre X^*.

Si $\{f_n\}$ es una sucesión en el dual de X y $f \in X^*$, las siguientes condiciones son equivalentes

(i) *Existe* $C > 0$ *tal que* $\| f_n \| \leqslant C$, *y* $d_w \langle f_n, f \rangle \to 0$

(ii) $f_n(x) \to f(x)$, *para toda* $x \in X$.

Demostración* **(del Teorema A.6.1).** Supongamos que $\{fn\}$ es una sucesión en B. Entonces por el teorema A.6.3 existe $f \in X^*$ tal que $f_n \rightharpoonup^* f$, tomando una subsucesión si es que es necesario. Luego,

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant \| x \|, \quad x \in X,$$

así que $f \in B$. Además el lema A.6.2, muestra que $d_w \langle f_n, f \rangle \to 0$.

■

A.6.2. Elementos de teoría de la medida e integración de Lebesgue

A continuación mencionamos algunos conceptos de teoría de la medida que nos serán de utilidad a la hora de trabajar con sucesiones de funciones en espacios de Hilbert, para esto nos basamos en el libro de análisis real de H. L. Royden ([34]). Comenzamos mencionando el concepto de función medible, para después enunciar el lema de Fatou. Posteriormente terminamos con la definición y algunas propiedades útiles acerca de la convergencia en medida.

Definición A.6.2. *Si* X *es un conjunto,* A *es una* σ*-álgebra en* X *y* ν *es una medida en* A*, diremos que* (X, A, ν) *es un espacio de medida*[3].

Definición A.6.3. *Un espacio de medida* (X, A, ν) *es completo si cuando* $U \in A, \nu(V) = 0$ *y* $V \subset U$*, entonces* $V \in A$.

Proposición A.6.1. *Sea* f *una función real-valuada cuyo dominio es un conjunto medible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $\{x : f(x) > \alpha\}$ *es medible.*

(ii) *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $\{x : f(x) \geqslant \alpha\}$ *es medible.*

(iii) *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $\{x : f(x) < \alpha\}$ *es medible.*

(iv) *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $\{x : f(x) \leqslant \alpha\}$ *es medible.*

Estas afirmaciones implican

(v) *Para cualquier número* $\alpha \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $\{x : f(x) = \alpha\}$ *es medible.*

Demostración*. Supongamos que el dominio de f es el conjunto D. Como

$$\{x : f(x) \leqslant \alpha\} = D \setminus \{x : f(x) > \alpha\},$$

y esta diferencia es medible, entonces se tiene que (i)⇒(iv). Mediante un argumento similar se prueba que (iv)⇒(i) y (ii)⇔(iii). Es decir, tenemos que (i)⇔(iv) y (ii)⇔(iii).

[3]En ocasiones no se menciona de manera explícita la σ-álgebra A, sino que se se dice únicamente que ν es una medida en X

Probaremos ahora que (i) es equivalente a (ii). Supongamos que $\{x : f(x) > \alpha\}$ es medible. Como

$$\{x : f(x) \geqslant \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > \alpha - 1/n\},$$

y la intersección de conjuntos medibles es medible, se tiene que (i)⇒(ii).

Para la implicación recíproca supongamos que $\{x : f(x) \leqslant \alpha\}$ es medible. Dado que

$$\{x : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geqslant \alpha + 1/n\},$$

y la unión de conjuntos medibles es medible, con lo que se demuestra la implicación. Por lo tanto (i)⇔(ii). Así, hemos probado que las cuatro primeras implicaciones son equivalentes. Resta ver que las afirmaciones anteriores implican (v). Vamos a considerar dos casos, cuando $\alpha \in \mathbb{R}$ y cuando $\alpha =^{+}_{-} \infty$. Para el primer caso tenemos que

$$\{x : f(x) = \alpha\} = \{x : f(x) \geqslant \alpha\} \bigcap \{x : f(x) \leqslant \alpha\},$$

y de esta manera (ii) y (iv) implican (v).

Si $\alpha = +\infty$, usamos el hecho de que

$$\{x : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geqslant n\},$$

y entonces (ii) implica (v). Cuando $\alpha = -\infty$, usamos el mismo argumento con

$$\{x : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \leqslant -n\}.$$

De tal manera que (ii) y (iv) implican (v).

■

Definición A.6.4. *Una función real-valuada f es medible si tiene un dominio medible y si satisface alguna de las primeras cuatro afirmaciones de la proposición 2.6.2.*

Proposición A.6.2. *Sean f y g dos funciones real-valuadas, medibles con el mismo dominio y sea c una constante. Entonces las funciones $f + c, f + g, g - f,$ y fg son medibles.*

Definición A.6.5. *Se dice que una propiedad se tiene casi dondequiera (c.d.) si ésta se cumple, excepto en un conjunto de medida cero.*

En particular, si f y g son dos funciones que tienen el mismo dominio y que coinciden c.d., entonces $m\{x : f(x) \neq g(x)\} = 0$.

Teorema A.6.5. *Si f es medible y $f = g$ c.d., entonces la función g es medible.*

Demostración*. Supongamos que $E = \{x : f(x) \neq g(x)\}$. Como $f = g$ c.d., entonces $mE = 0$. Así, podemos escribir

$$\{x : g(x \geqslant \alpha)\} = \Big[\{x : f(x) > \alpha\} \bigcup \{x \in E : g(x) > \alpha\}\Big] \setminus \{x \in E : g(x) \leqslant \alpha\},$$

en vista de que los tres conjuntos del lado derecho de la igualdad son medibles se sigue que $\{x : g(x \geqslant \alpha)\}$ es medible para cualquier α. Por lo tanto g es medible.

■

Proposición A.6.3. *Sea E un conjunto medible de medida finita, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definida en E. Sea f una función real-valuada tal que para cada $x \in E$ se tiene que $f_n(x) \to f(x)$. Entonces dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, existe un conjunto $A \subset E$ con $mA > \delta$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $x \notin A$ y $n \geqslant N$,*

$$| f_n(x) - f(x) |< \epsilon.$$

Demostración*. Sea

$$G_n = \{x \in E :| f_n(x) - f(x) |\geqslant \epsilon\},$$

y hagamos

$$E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} G_n = \{x \in E :| f_n(x) - f(x) |\geqslant \epsilon \text{ para algún } n \geqslant N\}.$$

Observemos que $E_{N+1} \subset E_N$, y que para cada $x \in E$, debe haber algún E_N para el cual $x \notin E_N$, puesto que $f_n(x) \to f(x)$. Así, $\bigcap E_n = \emptyset$, y entonces $\text{lím}\, mE_N = 0$. Por lo tanto, dado $\delta > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ con $mE_n > \delta$; es decir,

$$m\{x \in E :| f_n(x) - f(x) |\geqslant \epsilon \text{ para algún } n \geqslant N\} < \delta.$$

Al escribir A para este E_n, se tiene que $mA < \delta$ y su complemento

$$\tilde{A} = \{x \in E :| f_n(x) - f(x) |< \epsilon \text{ para todo } n \geqslant N\}.$$

■

Anotamos a continuación algunos de los resultados más conocidos por su utilidad dentro de la teoría de la medida. Las demostraciones de estos resultados pueden ser consultadas en las referencias.

Teorema A.6.6. (Lema de Fatou). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no-negativas y $f_n(x) \to f(x)$ c.d. sobre un conjunto E, entonces*

$$\int_E f \leqslant \underline{\text{lím}} \int_E f_n.$$

Teorema A.6.7. (Convergencia monótona). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles no-negativas, y sea $f = \text{lím}\, f_n$ c.d. Entonces*

$$\int f = \text{lím} \int f_n.$$

Dada una función f, diremos que la parte positiva de esta función es el máximo entre el valor de la función en algún punto y cero, y se denota como

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}.$$

En forma similar se define la parte negativa de f como

$$f^- = (-f) \vee 0.$$

Entonces, si f es una función medible y tenemos f^+ y f^-,

$$f = f^+ - f^- \;\text{ y }\; |f| = f^+ + f^-.$$

Definición A.6.6. *Una función medible f es integrable sobre E si f^+ y f^- son integrables sobre E. En tal caso definimos*

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

Teorema A.6.8. (Convergencia dominada de Lebesgue). *Sea g una función integrable sobre E y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles tal que $|f_n| \leqslant g$ sobre E, y para casi toda $x \in E$ tenemos $f(x) = \lim f_n$. Entonces*

$$\int_E f = \lim \int_E f_n.$$

Si suponemos que hay una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}$ para la que se cumple $m\{x :| f_n(x) - f(x) |> \xi\} \to 0$, para cualquier $\xi > 0$. Entonces $\int | f_n | \to 0$. Esto se usa para motivar la siguiente definición.

Definición A.6.7. *Decimos que una sucesión de funciones medibles $\{f_n\}$ converge en medida a una función f si, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geqslant N$ se tiene que*

$$m\{x :| f_n(x) - f(x) |\geqslant \epsilon\} < \epsilon.$$

Entonces, de la definición y bajo las hipótesis de la proposición 2.6.4, se puede concluir que $\{f_n\}$ converge a f en medida.

Proposición A.6.4. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge en medida a f. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ que converge a f casi dondequiera.*

Demostración*. Para ν dada, existe n_ν, tal que para cualquier $n \geqslant n_\nu$

$$m\{x :| f_n(x) - f(x) |\geqslant 2^{-\nu}\} < 2^{-\nu}.$$

Sea

$$E_\nu = \{x :| f_\nu(x) - f(x) |\geqslant 2^{-\nu}\}.$$

Entonces, si $x \notin \bigcup_{\nu=k}^{\infty}$, debemos tener

$$| f_\nu(x) - f(x) |< 2^{-\nu} \text{ para } \nu \geqslant k,$$

$$\Longrightarrow f_{n_\nu}(x) \to f(x).$$

Por lo tanto $f_{n_\nu}(x) \to f(x)$ para algún $x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\nu=k}^{\infty} E_\nu$. Sin embargo

$$mA \leqslant m \left[\bigcup_{\nu=k}^{\infty} E_\nu\right] \leqslant \sum_{\nu=k}^{\infty} mE_\nu = 2^{-k+1}.$$

Por lo tanto $mA = 0$

■

Corolario A.6.1. *Sea una sucesión de funciones medibles definidas sobre un conjunto E de medida finita. Entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge en medida a f si y solamente si cualquier subsucesión de $\{f_n\}$ tiene en torno una subsucesión que converge c.d. a f.*

GLOSARIO

Activo financiero (financial asset). Nombre genérico que se da a las inversiones en títulos, valores (acciones, obligaciones, fondos públicos, bonos), ciertos derechos sobre inmuebles realizables de inmediato (opciones, títulos hipotecarios) ó bien documentos expresivos de créditos, cupones de subscripción preferentes, etc. Su precio es el valor actual de los flujos de caja operados: intereses o cupones y principal.

Activo libre de riesgo (free risk asset). Es aquel activo financiero cuyos intereses y principal serán pagados con toda certeza

Apalancamiento financiero (financial leverage). En una empresa o institución financiera, es el efecto que el endeudamiento introduce en la rentabilidad de los capitales propios, cuyos resultados pueden reforzarse por encima de lo que se derivaría de sus recursos originarios. La condición necesaria para que se produzca el apalancamiento amplificador es que la rentabilidad de las inversiones sea mayor que el tipo de interés de las deudas.

Arbitraje (arbitrage). Compraventa simultánea de títulos en dos o más plazas para aprovechar la diferencia de precios entre unas y otras.

Call europeo (european call option). A veces llamada **opción** de compra de tipo europeo, es un contrato que confiere al poseedor de la opción el derecho, pero no la obligación de comprar cierta cantidad de un activo por un precio fijo acordado de antemano, conocido como **precio de ejercicio** X (**strike price**), a una fecha futura prefijada, la cual se llama tiempo de maduración T (maturity date).

CAP. Contrato por el que el vendedor se compromete; a cambio de una prima, a pagar al comprador si un cierto tipo de interés de referencia supera el nivel acordado, la diferencia entre ambos tipos. El comprador elige el vencimiento, el tipo de interés es el tipo de referencia (**LIBOR** generalmente) los precios de comparación y la cantidad neta.

Cobertura (hedging). Con ella se pretende la reducción del riesgo que supone mantener una posición en algún tipo de activo. Puede tratarse de cubrir el riesgo de tipos de interés, de cambios de divisas, etc. Consiste en tomar una posición en algún instrumento financiero (opciones, futuros, etc.) cuyo comportamiento sea opuesto al de

Martingala (martingale). Término proveniente del francés, de las calzas utilizadas en la ciudad de Martingue en la Provenza. Se dice que un proceso estocástico es martingala si su valor esperado en el tiempo T coincide con su valor en algún tiempo inicial t.

Mercado (market). Sitio público destinado permanentemente o en días señalados para vender, comprar o permutar generos. En teoría económica, según el número de ofertantes el mercado puede ser de competencia perfecta, de duopolio, oligopolio ó monopolio. Según del tipo de bienes o servicios de que se trate cabe hablar de distintos tipos de mercados: De materias primas (cereales, soja, carnes, algodón, etc.), de metales, de crudos, de divisas, etc. Por el momento de la realización de la transacción, cabe diferenciar los mercados spot o los de futuros.

Opción (option). Es el derecho, no la obligación a comprar o vender un activo, llamado activo subyacente en una fecha futura, por un precio pactado. Atendiendo al momento en que pueden ser ejercidas, serán **opciones europeas** u **opciones americanas**. Los parámetros que definen una opción son: la prima o precio que se paga por la opción, el precio de ejercicio, la fecha de ejercicio y el activo subyacente sobre el que se adquiere la opción. El valor de una opción depende del **precio de ejercicio**, del precio del subyacente y de su volatilidad, del plazo de la opción y de los tipos de interés.

Opción americana (american option). Es la que puede ser ejercida en cualquier momento, antes de, o en la fecha de ejercicio.

Opción europea (european option). Es la que solo puede ser ejercida en la fecha de ejercicio, no antes.

Pay-off (perfil de pago). Expresión inglesa referente al periodo de amortización de una deuda o al periodo de recuperación de una inversión.

Pay-out (se maneja en inglés). Voz inglesa expresiva del porcentaje de los beneficios que se destina al pago de dividendos a los accionistas.

Precio (price). Lo que debe darse a cambio de una cosa, expresándose generalmente ese contravalor en unidades monetarias, si bien el trueque es la cantidad de otro bien o servicio. En la economía de mercado, los cambios en los precios constituyen el mecanismo básico que rige la asignación de recursos.

Precio de contado (cash price, spot price). Es el de un bien o activo financiero en el mercado spot por contraposición al que tiene en los mercados de futuros.

Precio de ejercicio (strike price). Es aquel al que puede ejercerse una opción, comprando o vendiendo un activo.

Prima de Riesgo (risk premium). Diferencia entre el rendimiento de un activo concreto y el que se obtendría con un activo libre de riesgo.

Productos financieros(financial products). Todos los que se mueven en los mercados financieros, desde la deuda pública hasta los pagarés de empresas pasando por bonos, futuros, divisas, etc.

Put europeo (european put option). También conocida como **opción** de venta de tipo europeo, es un contrato que confiere al poseedor de la opción el derecho, pero no la obligación de vender cierta cantidad de un activo por un precio fijo acordado de antemano (**precio de ejercicio**) X, a una fecha futura prefijada T.

Replicación (replication). En finanzas es la técnica que consiste en la adquisición de un portafolio conformado por activos adecuados, que tome el mismo valor que el de un activo dado en ciertos instantes de tiempo.

Riesgo (risk). En un mercado financiero es la parte atribuida al azar y que puede conducir a una pérdida de capital.

Stock (acervo). Palabra inglesa empleada comúnmente para hacer referencia al conjunto de mercancías acumuladas en un almacén, y por extensión para cualquier agregado de unidades, incluida la población.

Valor frontal (face price, nominal value). Dícese del que figura como nominal en cualquier título valor, billete o moneda. En este último caso puede quedar por debajo del valor de su contenido en metal. A veces se le denomina "valor facial" o "valor nominal".

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ph. Artzner and D. Heat (1995), *Approximate Completness with Multiple Martingale Measures.* Mathematical Finance, Vol. 5, pp. 1-11.

[2] El Kacimi Alaoui (1994), *Introducción al análisis funcional.* Barcelona: Reverté.

[3] R. J. Battig and R. A. Jarrow (1999), *The Second Fundamnetal Theorem of Asset Pricing: A New Approach.* Review of Financial Studies, Vol. 1, No. 2, pp, 1219-1235.

[4] C. Bender (2003), *An Itô formula for generalized functionals of a fractional brownian motion with arbitrary Hurst parameter.* Stochastic Processes and their Applications, Volume 104, Issue 1, pp. 81-106.

[5] N.H. Bingham, R. Kiesel (2004), *Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives.* Springer, Heidelberg, second edition.

[6] T. Björk (2005), *Arbitrage Theory in Continous Time.* Oxford Finance.

[7] T. Björk and H. Hult (2005), *A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model.* Financ Stochas, Volume 9, No. 2, pp. 197-209.

[8] F. Black and M. Scholes (1973), *The pricing of options and corporate liabilities.* Journal of Political Economy, Vol 81, No. 3, pp. 637-654.

[9] M. Capiński and T. Zastawniak (2003), *Mathematics for Finance: An Introduction to financial engineering.* Springer-Verlag, London Limited.

[10] R. C. Dalang, A. Morton, W. Willinger (1990), *Equivalent martingale measure and no-arbitrage in stochastic securities market model.* Stochastics and Stochastic Reports, Vol. 29, pp. 185-201.

[11] M. Dothan (1990), *Prices in Financial Markets.* Oxford University Press.

[12] P. Cheridito(2003), *Arbitrage in Fractional Brownian Motion Models.* Finance Stochas, Volume 7, No. 4, pp. 533-553.

[13] Ph. Dybvig and S. Ross (1987), *Arbitrage.* In: The new palgrave: a dictionary of finance, pp. 57-71, J. Eatwell, M. Milgate, P. Newman, Eds., WW Norton NYC.

[14] F. Delbaen and W. Schachermayer(2006), *The Mathematics of Arbitrage.* Springer Heidelberg New York.

[15] F. Delbaen and W. Schachermayer (1994), *A General Version of the fundamental theorem of asset pricing.* Math. Annalen, Vol. 300, No. 3, pp. 463-520.

[16] R. J. Elliot and J. Van Der Hoek(2003), *A General Fractional White Noise Theory and Applications to Finance.* Math Financ, Volume 13, No. 2, pp. 301-330.

[17] M. Émery (1981), *Compensation de Procesus à Variation Finie non Localement Intégrables.* In: J. Ázema, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilities XIV, Springer Lecture Notes in Mathematics 784, pp. 152-160.

[18] H. Fetter Nathansky y B. Gamboa de Buen (2008), *Introducción al Análisis Funcional y a la Geometría de Espacios de Banach.* CIMAT.

[19] F. Galaz Fontes (2006), *Elementos de Análisis Funcional.* CIMAT.

[20] J. M. Harrison, D. M. Kreps (1979), *Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets.* Journal of Economic Theory, Vol. 20, pp.381-408.

[21] J. M. Harrison, S. R. Pliska (1981), *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Contiunous Trading.* Stochastic Processes and their Applications, Vol. 11, pp. 215-260.

[22] Y. Hu and B. Øksendal (2000), *Fractional White Noise Calculus and Applications to Finance.* Preprint University of Oslo.

[23] C. Ibarra (2009), *La Fórmula de Black-Scholes.* Notas de Métodos Matemáticos para Finanzas II, MCMAI, UAM-I.

[24] I. Karatzas and S. Shreve (1988), *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer-Verlag, New York Heildeberg Berlin.

[25] E. Kreyszig (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley, New York.

[26] S. Leroy and J. Werner (2001), *Principles of Financial Economics.* Cambridge University Press.

[27] R. E. Megginson (1998), *An Introduction to Banach space Theory.* Springer-Verlag.

[28] S. Neftci (2004), *Principles of Financial Engineering.* San Diego Calif.: Elsevier Academic Press.

[29] B. Øksendal (1995), *Stochastic Differential Ecuations.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[30] S. Pliska (1997). *Introduction to Mathematical Models: Discrete Models.* Blackwell Publishing.

[31] D. Revuz, M. Yor, (1991), *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 293, Springer (third edition: 1999, corrected third printing: 2005).

[32] B. Rinne and M. Youngston (2008), *Linear Functional Analysis.* Springer-Verlag, London Limited.

[33] S. Rostek (2009), *Option Pricing in Fractional Brownian Markets.* Springer Dordrecht Heidelberg London New York.

[34] D. L. Royden (1998), *Real Analysis.* Prentice Hall, Inc.

[35] W. Rudin (1973), *Functional Analysis.* McGraw-Hill.

[36] W. Schachermayer (1992), *A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time.* Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 11, No. 4, pp. 249-257.

[37] A. Shiryayev (1998), *On arbitrage and replication for fractal model,* Shiryaev and Sulem editors, Workshop on mathematical finance, INRIA, Paris.

[38] S. Shreve (2004), *Stochastic Calculus for Finance II: Continous-Time Models.* Springer-Verlag New York, LLC.

[39] J. M. Steele (2000), *Stochastic Calculus and Financial Applications.* Springer-Verlag New York, Inc.

[40] R. Tamames, S. Gallego (2006), *Diccionario de Economía y Finanzas (13a ed.).* Alianza Editorial.

[41] C. Tudor (2007), *Procesos Estocasticos.* Sociedad Matemática Mexicana.

[42] N. Young (1988), An Introduction to Hilbert Space. Cambridge University Press.

Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa

Maestría en Ciencias Matemáticas Aplicadas
e Industriales (MCMAI)

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias presenta:

Alejandro Sánchez Peralta

El Primer Teorema Fundamental para la Valuación de Activos (Teorema Fundamental de las Finanzas)

Asesor: Dr. Carlos Ibarra Valdez

Julio de 2010