

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

**“ESTABILIZACIÓN GLOBAL ASINTÓTICA DE SISTEMAS CON  
CONTROL ACOTADO”**

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

QUE PRESENTA:

**M. en C. HÉCTOR ALFREDO MARTÍNEZ PÉREZ**

MATRICULA: 2181800333

CORREO: alfredomartinez78@gmail.com

Asesor de Tesis:

**Dr. Julio Ernesto Solís Daun**

**JURADO**

**PRESIDENTE:**

DR. JESUS ALVAREZ CALDERON

**SECRETARIA:**

DRA. MARTHA ALVAREZ RAMIREZ

**VOCAL:**

DR. LUIS AGUSTIN ALVAREZ ICAZA LONGORIA

**VOCAL:**

DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN

**VOCAL:**

DR. GUILLERMO FERNANDEZ ANAYA

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO A 3 DE SEPTIEMBRE DE 2024

# Agradecimientos

A mis padres:

Héctor Alfredo Martínez Escandón (Q.P.D) y Angelina Pérez Baeza por su infinito amor y apoyo a lo largo de toda mi vida, sus sabios consejos han sido mis guías en momentos difíciles y en momentos felices.

A mi esposa:

Yadira Nava Téllez tu inquebrantable fe en mí ha sido mi mayor fortaleza. Estoy profundamente agradecido por amarme, valorarme, comprenderme, caminar a mí lado, por nuestro amado hijo (Héctor) y por el aliento dado cuando más lo necesité.

A mi hermana, su esposo y mis queridos sobrinos:

Verónica, Víctor, Hugo y Scarlett por su cariño y porque siempre están en todo momento.

A los profesores sinodales:

Dra. Martha Álvarez Ramírez,  
Dr. Jesús Álvarez Calderón,  
Dr. Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria,  
Dr. Guillermo Fernández Anaya,  
Dr. Julio Ernesto Solís Daun,

Por sus valiosos comentarios y aportes a este trabajo.

Me gustaría expresar mi más profunda gratitud a mi asesor, Dr. Julio Ernesto Solís-Daun, por su inestimable orientación y apoyo a lo largo de mis estudios de doctorado. Su sabiduría, paciencia y aliento han sido fundamentales para mi crecimiento.

Finalmente, agradezco al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), por el apoyo ofrecido para este trabajo.

# Índice general

<b>Acrónimos</b>	<b>5</b>
<b>Resumen</b>	<b>6</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>7</b>
1.1 Antecedentes . . . . .	7
1.2 Contribuciones principales . . . . .	11
<b>2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior 13</b>	
2.1 CLF-Estabilización con el Zonotopo con 0 en el interior como CVS . . . . .	13
2.1.1 CLF-Estabilización de sistemas afines con control escalar acotado . . . . .	14
2.1.2 Teoría CLF . . . . .	14
2.1.3 Síntesis particular de $\rho(x)$ . . . . .	17
2.1.4 CLF-Estabilización global con respecto al zonotopo . . . . .	19
2.1.5 Síntesis general de controles respecto al Zonotopo . . . . .	21
2.1.6 Síntesis de una fórmula de control de retroalimentación explícita con respecto al zonotopo . . . . .	26
2.1.7 La CLF estabilización con respecto al Zonotopo . . . . .	27
2.1.8 Ejemplos . . . . .	31
2.2 CLF-Estabilización con el zonotopo con 0 en la frontera como CVS . . . . .	36
2.2.1 CLF-Estabilización de sistemas afines con control escalar afines acotados . . . . .	37
2.2.2 Estabilización global con el Zonotopo como CVS . . . . .	38
2.2.3 Fórmula explícita de control de retroalimentación respecto al Zo- notopo positivo . . . . .	39
2.2.4 Ejemplos . . . . .	40
<b>3 Una solución a un problema unificador de CLF</b>	<b>45</b>
<b>4 CLF-Estabilización global de dos sistemas caóticos controlados con CVS   Zonotopico</b>	<b>49</b>
4.1 Sistemas Dinámicos Disipativos . . . . .	49
4.2 Estabilización de un sistema controlado acotado basado en el sistema de Rössler . . . . .	50
4.2.1 Construcción de una bola absorbente para el sistema de Rössler . . . . .	50
4.2.2 CLF-estabilización global de un sistema controlado de Rössler . . . . .	54

## *Índice general*

4.3	Estabilización de un sistema de control acotado basado en el sistema de Lorenz . . . . .	59
4.3.1	Una bola absorbente para el sistema de Lorenz . . . . .	59
4.3.2	Estabilización CLF global del sistema controlado de Lorenz . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>72</b>
	<b>Apéndice A</b>	<b>76</b>
A.1.	Definiciones y resultados básicos de convexidad . . . . .	76
A.2.	Geometría de la estabilización global CLF respecto a CVS politópicos . . . . .	78
	<b>Apéndice B</b>	<b>82</b>
B.1.	Deducción del modelo de Lorenz . . . . .	82
B.1.1.	Convección de Rayleigh-Bénard . . . . .	83
B.1.2.	Aproximación de Boussinesq-Oberbeck . . . . .	84
B.1.3.	Modelo de Saltzman . . . . .	85
B.1.4.	Modelo de Lorenz . . . . .	92
B.2.	Construcción de una bola absorbente para el sistema de Lorenz . . . . .	96
B.2.1.	Existencia de un elipsoide acotado en el que entran todas las trayectorias . . . . .	96
B.2.2.	Tamaño del elipsoide . . . . .	97
	<b>Bibliografía</b>	<b>98</b>

## Lista de Acrónimos (en inglés y traducidos al español)

CVS : Conjunto de Valores de Control  
GAS : Estabilidad Asintótica Global  
CLF : Función de Lyapunov de Control  
SPC : Propiedad de Control Pequeño

# Resumen

La base teórica de las funciones de Lyapunov CLF, derivada de la teoría de Lyapunov y los resultados de estabilización para sistemas de control no lineales de Zvi Artstein (1983) y Eduardo Sontag (1983), permite el estudio de problemas de estabilización para sistemas con parámetros de control restringidos a conjuntos convexos. Para abordar la síntesis correspondiente, tratamos los conjuntos convexos como conjunto de valores admisibles (CVS), donde nuestras funciones de retroalimentación permitidas son todas aquellas funciones continuas que pertenecen a estos CVS. Específicamente, nos centramos en conjuntos convexos no estrictos, como los politopos, y particularmente asumimos al zonotopo  $k$ -dimensional como el conjunto de valores admisibles. En general, proporcionamos condiciones suficientes para estabilizar un sistema afín en el control. En particular, ofrecemos una solución de síntesis explícita para el problema de estabilización cuando el zonotopo es el CVS para el control, incluido el caso extremo de controles positivos.

Esta síntesis de control es usado para estabilizar global y asintóticamente dos sistemas de gran importancia, un sistema de Rössler y el de Lorenz. Sabemos que el sistema de Lorenz es complejo, pues a partir de ciertos parámetros surge “caos”, así, con la intención de tener una mejor comprensión de este último sistema, resolvemos primero el problema de hacer GAS un sistema de Rössler, pues O. Rössler presentó en los años 70 un conjunto de ecuaciones diferenciales en espacios de fase tridimensional que tienen los mínimos ingredientes para el caos en tiempo continuo. Rössler ideó su sistema para comprender mejor el funcionamiento del sistema de Lorenz, así como otros tipos de dinámica caótica. También, dado que los atractores globales suelen ser asimétricos con respecto a los equilibrios del sistema no forzado (sin control), y que los desplazamientos de coordenadas no suelen conservar la estructura de estabilidad, usamos la “modificación” a la solución al “uniting CLF problem”, propuesta en [1], para alcanzar la GAS de (el equilibrio  $\bar{x} = 0$ ) dichos sistemas. Además, para el sistema de Lorenz, hacemos un análisis de estabilidad del sistema controlado de Lorenz (4.22) y mostramos el diagrama de bifurcación de la coordenada  $x_1$  de los puntos fijos frente a distintos valores del parámetro de control, ( $v^*$ ), finalmente, mostramos un segundo diagrama de bifurcación de las variables de estado  $x_3$  frente a distintos valores del parámetro  $v^*$ .

# 1 Introducción

## 1.1. Antecedentes

Entre las restricciones de entrada de control más comunes e importantes que se debe tener en cuenta para la síntesis de control, es que dicho control sea positivo y acotado. Son muchos los modelos donde el parámetro de control tiene restricciones. Por ejemplo, en procesos biológicos la acción de control está asociada a flujos con valores positivos. Los problemas de estabilización con control positivo han sido poco estudiados. La clase de sistemas que son estabilizables mediante funciones de control continuas que pertenecen al conjunto de valores de control (CVS)  $U = [0, r]$  es una subclase de sistemas que son estabilizables mediante controladores restringidos al conjunto  $U = [-r, r]$ . En la literatura se puede hallar una caracterización de los sistemas lineales controlables con control positivo. Para los sistemas no lineales hay pocos resultados en esta dirección.

Estudiar la estabilidad de un sistema no lineal autónomo  $\dot{x} = f(x)$ , donde  $x$  es el vector de estado del sistema, puede ser pensado como un sistema controlado a lazo cerrado. Si  $x = x_0$  es un punto de reposo del sistema,  $f(x_0) = 0$ , las propiedades de estabilidad de este punto de equilibrio pueden ser caracterizadas mediante la definición de *estabilidad de Lyapunov*  $V$ . Los teoremas de estabilidad de Lyapunov para los sistemas no lineales, descritos mediante el concepto *función de Lyapunov del sistema*, son no-constructivos, en el sentido que no dan sugerencia sobre cómo encontrar la función  $V$  que cumpla las condiciones para mostrar la estabilidad asintótica global (GAS). Tales teoremas de Lyapunov, y los teoremas inversos de Lyapunov (Kurzweil (1956) & Massera (1949)), establecen la equivalencia entre la estabilidad asintótica global y la existencia de una función de Lyapunov estricta global.

Una función escalar  $\mathcal{C}^1$ ,  $V(x)$ , definida positiva y radialmente no acotada, es llamada una *función de Lyapunov de control* (CLF) para  $\dot{x} = f(x, u)$  si

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot f(x, u)\} < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (1.1)$$

Es decir, dada una CLF para el sistema, podemos hallar, en principio, una ley de control globalmente estabilizante, dicha CLF debe satisfacer la *propiedad de control pequeño* (SCP), *grosso modo*, por medio de la CLF nos aseguramos que la acción de control llegue al punto de equilibrio y no orbite en una vecindad alrededor de dicho punto, a continuación definimos dicha propiedad:

**Definición 1.** La *función Lyapunov de control* tiene la *propiedad de control pequeño* (SCP) con respecto a (2.3) si para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x\| < \delta$ , entonces existe un control  $u \in U$  con  $|u| < \epsilon$ , tal que

$$a(x) - b(x) \cdot u < 0, \text{ para } x \neq 0.$$

## 1 Introducción

Así, una condición necesaria y suficiente se conoce como el teorema de Artstein.

**Teorema 1.** (de Zvi Artstein)[42] *Suponga que el CVS  $U \subset \mathbb{R}^m$  es convexo y el sistema (2.1) es tal que  $f(x)$  y  $(x, u) \mapsto \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$  son continuas. Existe un control continuo  $u : \mathbb{R}^m \rightarrow U$  tal que el sistema es GAS ssi existe una CLF  $V(x, u)$  que satisface la propiedad de control pequeño (SCP).*

Es decir, aun cuando dicho teorema garantiza la existencia de un estabilizador si se conoce una CLF para un sistema, no proporciona una forma explícita para éste. La aplicación de este resultado tiene al menos dos limitaciones principales:

1. No hay métodos universales para construir CLF, aunque existen métodos para construir CLF de clases especiales de sistemas.
2. La prueba del teorema de Artstein no es constructiva, ya que se basa en particiones de la unidad. En consecuencia, el problema de síntesis de control derivado del teorema de Artstein es muy difícil de resolver, incluso con una CLF adecuada.

Como resultado de los inconvenientes anteriores, Eduardo Sontag [4] propuso (en 1999) el siguiente problema abierto importante:

“Encontrar fórmulas universales para la CLF-estabilización de sistemas con respecto a conjuntos CVS generales (convexos)  $U$ .”

Es decir, encontrar fórmulas de control casi-suaves de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  y continuas en  $\mathbb{R}^n$  que hacen GAS al sistema  $\dot{x} = f(x, u)$  con respecto a CVS  $U$  generales.

Una primera propuesta fue hecha por el mismo Sontag en [5] con respecto a controles no acotados, CVS  $U = \mathbb{R}^m$ .

Hay dos clases importantes de conjuntos convexos compactos *acotados* para los cuales es bien conocida su estructura facial:

- I. conjuntos estrictamente convexos, y
- II. polítopos (convexos).

Para la primera clase de CVS estrictamente convexos, se tienen los siguientes resultados:

- En [41], Lin & Sontag obtuvieron una *fórmula universal* si el CVS en la bola unitaria euclideana abierta,  $U = \text{int}\mathcal{B}_1^m(2) = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| < 1\}$ .
- En [27], Malisoff & Sontag extienden tal resultado a CVS dados por bolas unitarias abiertas  $p$ -normadas,  $\text{int}\mathcal{B}_1^m(p) = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\|_p = \sqrt[p]{|u_1|^p + \dots + |u_m|^p} \leq 1\}$  con  $p = \frac{2r}{2r-1}$  para  $r = 1, 2, \dots$  (así,  $1 < p \leq 2$ ). Además, se probó en [41] y [27] que el control de retroalimentación es suave en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  y continuo en todas partes (función casi suave), siempre que el CLF y los campos vectoriales que definen el sistema son suaves. Tal fórmula, fue también utilizada para resolver el problema de estabilización para un CVS dado por el cuadrado abierto  $\text{int}\mathcal{B}_1^2(\infty) = (-1, 1)^2$  y un  $m$ -octaedro abierto  $\text{int}\mathcal{B}_1^m(1)$ , a un costo de “pequeños sobredisparos” en los valores de control.



## 1 Introducción

- En [26], el “problema de sobredisparos” se abordó para el CVS  $(-1, 1)^2$ .
- En [36], Suárez, Solís-Daun y Álvarez propusieron una familia  $u_\epsilon(x)$  de estabilizadores globales de controles de retroalimentación continuos tomando valores en el CVS dado por

$$\mathcal{B}_r^m(p) := \{u \in \mathbb{R}^m : \psi_{p,r}(u) \leq 1\}, \text{ donde} \quad (1.2)$$

$$\psi_{p,r}(u) := \sqrt[p]{|u_1/r_1(u_1)|^p + \cdots + |u_m/r_m(u_m)|^p},$$

para  $1 < p < \infty$ , cada  $r_j$  es una función definida por

$$r_j(\zeta) := \begin{cases} r_j^+, & \text{si } \zeta \geq 0, \\ r_j^-, & \text{si } \zeta < 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

con  $r_j^\pm > 0$ , para  $j = 1, \dots, m$ . Si  $r_j^- = r_j^+$  para toda  $j = 1, \dots, m$ , entonces  $\psi_{p,r}(\cdot) = \|\cdot\|_{p,r}$  es una norma  $p, r$ -ponderada, y así  $\mathcal{B}_r^m(p)$  es una bola simétrica  $p, r$ -ponderada cerrada. Las funciones diseñadas  $u_\epsilon(x)$  son continuas en todas partes para cualquier  $p > 1$ . Además, los controladores de retroalimentación continua se diseñaron para la hipercaja  $m$ -dimensional  $r$ -ponderado  $\mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \cdots \times [-r_m^-, r_m^+] \subset \mathbb{R}^m$ .

- En [35], Suárez, Solís-Daun y Aguirre generalizan dicha síntesis de control, proponiendo una fórmula explícita para una familia parametrizada de un control de retroalimentación continuo  $u_\epsilon(x)$  para la GAS de los sistemas con respecto a una clase de convexos compactos CVS.
- En [20], Solís-Daun, Aguirre y Suárez extienden este resultado a una clase más general de convexos compactos CVS  $U$ , y considera una forma general de estabilizadores de retroalimentación regulares ( $u(x) = \rho(x)\varpi(x)$ , donde  $\rho(x)$  es una función de reescalamiento y  $\varpi(x)$  es un control óptimo) que comprende muchas de las fórmulas de control existentes en la literatura.
- En [15], Solís-Daun extendió el resultado anterior a una clase genérica de CVS con  $0 \in \text{int}U$ : CVS compactos y estrictamente convexos.

En cuanto a la segunda clase de CVS, existen conjuntos compactos que no son *estrictamente convexos*, pero que surgen de manera natural en las aplicaciones: polítopos (*e.g.* hipercajas).

- En [14], Curtis introduce un método para usar algorítmicamente leyes de control con entradas politópicas, dada una CLF conocida.
- En [10], Leyva & Solís-Daun diseñaron una fórmula explícita de un control de retroalimentación continuo tomando valores en el intervalo  $[-r^-, r^+]$ , que hace GAS a un sistema afín.
- En [11], estos resultados se extendieron hallando una fórmula explícita para un control de retroalimentación regular tomando valores en la hipercaja  $m$ -dimensional  $r$ -ponderada  $\mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \cdots \times [-r_m^-, r_m^+]$  para la GAS de los sistemas con respecto a una clase de compactos convexos CVS.

## 1 Introducción

- En [21] se abordó la CLF de sistemas no-lineales con entradas de control en las componentes, dichas componentes pueden ser signadas o positivas en una hipercaja.
- En [11] y [22], Solís-Daun y H. Leyva estudiaron las condiciones para la admisibilidad de controles para el GAS de sistemas respecto a CVS's politópicos con  $0 \in \text{int}U$ .

Para controles positivos (o sea  $0 \in \partial U$ -frontera de  $U$ ) se tiene:

- En [41], Lin & Sontag consideran el problema de síntesis de control escalar respecto al CVS dado por los intervalos abiertos  $U = (0, 1)$  o  $U = (0, \infty)$ .
- En [10], Leyva & Solís-Daun diseñaron un control con valores en el intervalo  $[-r^-, r^+]$ , que hace GAS a un sistema afín, considerando el caso positivo  $[0, r^+]$ .
- En [11], Leyva, Solís-Daun & Suárez extendieron el resultado anterior a una hipercaja asimétrica, abordando el caso de controles positivos, diseñando un control de retroalimentación positivo (con  $r_j^- = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m$ ) :  $[0, r_1^+] \times \dots \times [0, r_m^+]$ .

Los controles propuestos en [11], [22], [21] comparten el mismo esquema de control  $u(x) = (\rho_1(x)\varpi_1(x), \dots, \rho_m(x)\varpi_m(x))$ , donde el control óptimo  $\varpi(x)$  es un control tipo *bang-bang*, y  $\rho_j(x)$  son funciones de entrada para *regular* cada control  $\varpi_j(x)$  en su respectiva hipersuperficie de cambio (singular).

El antecedente más próximo a este trabajo (Leyva, Solís-Daun & Suárez en [11]), es la síntesis de control para la GAS de sistemas no lineales con controles tomando valores en la hipercaja  $m$ -dimensional  $r$ -ponderada  $\mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+] \subset \mathbb{R}^m$ .

En los tiempos más recientes, el control del caos en sistemas caóticos ha sido un tema de investigación muy activo. Tras los primeros trabajos sobre el control del caos de Ott et al. en [28], se han desarrollado numerosos métodos para controlar este tipo de sistemas (véase, por ejemplo, Andrievskii & Fradkov ([2], [3]) y las referencias en ellos). La presencia de un conjunto acotado, en el que cada órbita finalmente entra y permanece (un atractor global), en muchos sistemas caóticos (como el sistema de Lorenz, Chen y Chua suave) indica que son sistemas punto-disipativos (disipativos).

Un sistema se considera punto-disipativo si y sólo si (*ssi*) tiene un conjunto acotado en el que cada órbita entra y permanece. Pliss demostró que, para sistemas de dimensión finita (en los que el espacio de fase es localmente compacto), un sistema es punto-disipativo si tiene un atractor global compacto  $K$  (véase Hale [12], p. 38). Las principales propiedades de  $K$  son: (*i*) es *invariante* bajo la evolución del sistema, y (*ii*) es un *conjunto atractor*, lo que significa que la distancia de cualquier solución a  $K$  disminuye a medida que  $t \rightarrow \infty$ . El *atractor global*  $K$  se define como el máximo conjunto atractor compacto invariante, que abarca toda la dinámica "interesante" del sistema, como los puntos de equilibrio, los ciclos límite, los atractores extraños (*caos*), *etcétera*.

Los trabajos de Levinson y Pliss motivaron a otros a intentar mostrar que muchas nociones de sistemas dinámicos en espacios localmente compactos pueden extenderse a algunos sistemas de dimensiones infinitas (semidinámicos) que tienen algún tipo de propiedad de disipación que implique la existencia de atractores globales compactos. Por

lo tanto, la dinámica esencial se reduce a un conjunto compacto. Sin embargo, la falta de compacidad local del espacio fase debe superarse imponiendo condiciones adicionales sobre el sistema, (*e.g.* *asymptotically smooth* o *uniform compactness*), ver Hale ([12],[13]) o Temam [40], respectivamente.

En general, no es posible obtener una descripción exacta del atractor global  $K$ . En vez de eso, una sobreestimación del mismo, dada por una *bola absorbente*  $\mathcal{B}$ , será suficiente para muchas aplicaciones. A pesar de ello, también es una tarea técnicamente difícil. Eligiendo una función de Lyapunov  $V(x)$  y usando los criterios de estabilidad de Lyapunov, podemos hallar una bola absorbente  $\mathcal{B}$  para un sistema, normalmente como un conjunto de nivel de  $V(x)$ . Para algunos sistemas caóticos (*e.g.* Lorenz, Chen, Lü), esta propiedad disipativa ha sido investigada por muchos autores (ver referencias en [16] por Solís-Daun), lo que implica que son punto-disipativos.

Aun cuando la GAS de sistemas que exhiben un comportamiento caótico a lazo abierto utilizando métodos de control ya ha sido abordado (ver Fradkov y Evans en [7]), hay pocos resultados sobre este problema utilizando controles acotados (ver [7]) y, hasta donde sabemos, no se ha propuesto ninguna solución al mismo mediante controles admisibles (acotados y regulares) hasta el trabajo de Solís-Daun en [16]. De hecho, en [16] se estudia la GAS de sistemas que son punto-disipativos de entrada nula mediante controles admisibles (regulares y acotados); y se ilustró con la GAS de un sistema suave de Chua en el origen. A su vez, éste se basa en el método de síntesis de control propuesto en [15, 18] por Solís-Daun (que se desprende de la teoría CLF de Artstein y Sontag) para la GAS de los sistemas afines mediante controles admisibles.

En vista de que los atractores globales  $K$  son generalmente asimétricos con respecto a los equilibrios del sistema no forzado (*e.g.*, la “mariposa” lorenziana), las bolas absorbentes  $\mathcal{B}$ , a menudo definidas como conjuntos de nivel de las funciones de Lyapunov  $V(x)$ , tampoco están “centradas” en esos puntos. Entonces, como una simple traslación de coordenadas falla en general para retener la estructura de estabilidad, la solución al “uniting CLF problem” derivado en [1] por Andrieu y Prieur, nos permite obtener una  $V(x)$  que es una CLF global. Este problema permitió extender el método propuesto en [16] por Solís-Daun para hacer “cualquier” punto de equilibrio GAS.

## 1.2. Contribuciones principales

En el *Capítulo* §2, diseñamos un control finito y acotado basado en la teoría CLF, que se deriva de la teoría de Lyapunov y los resultados de estabilización para sistemas de control no lineales de Zvi Artstein (1983) y Eduardo Sontag (1983). Este enfoque nos permite abordar la GAS de sistemas con parámetros de control restringidos a conjuntos convexos. Para la síntesis correspondiente, estudiamos conjuntos convexos como el CVS, asegurando que el conjunto admisible de funciones de retroalimentación consista de aquellas funciones continuas restringidas a estos CVS. Específicamente, nos centramos en los conjuntos convexos no estrictos, como los politopos, que surgen naturalmente en diversas aplicaciones. Un politopo de particular importancia, que consideramos como CVS, es el

## 1 Introducción

Zonotopo (proyección afín,  $\pi$ , de un  $m$ -cubo),

$$Z(V) = [-r_1 v^1, r_1 v^1] + \cdots + [-r_m v^m, r_m v^m] + \bar{r},$$

y esta consideración específica es una de nuestras contribuciones.

De manera general, proporcionamos una manera adecuada para lograr la estabilización de un sistema afín con controles que toman valores en el Zonotopo. Específicamente, ofrecemos una síntesis explícita que aborda el problema de estabilización cuando el Zonotopo es el conjunto de valores de control admisibles, incluido el caso de controles positivos.

En el *Capítulo* §3 presentamos un método general de síntesis de control para la estabilización global (CLF) de sistemas de control afín mediante controles admisibles (acotados y regulares) de retroalimentación propuestos por Solís-Daun en [15]. Así, “*modificamos*” la solución al “uniting CLF problem” derivado en [1] por Andrieu y Prieur, en este, *grosso modo*, se unen dos funciones de Lyapunov de control (CLF), la primera CLF caracteriza una propiedad de controlabilidad asintótica local hacia el origen, mientras que la segunda está relacionada con una propiedad de controlabilidad asintótica global con respecto a un conjunto compacto, obteniendo así una  $V(x)$  que es una CLF global.

En el *Capítulo* §4, estabilizamos global y asintóticamente dos sistemas de gran importancia, un sistema de Rössler y el de Lorenz. Sabemos que el sistema de Lorenz es complejo, pues a partir de ciertos parámetros surge “*caos*”, así, con la intención de tener una mejor comprensión de dicho sistema, resolvemos primero el problema de hacer GAS dicho sistema de Rössler, pues O. Rössler presentó a lo largo de los años 70 un conjunto de ecuaciones diferenciales en espacios fase tridimensional que tienen los mínimos ingredientes para el caos en tiempo continuo. Rössler ideó su sistema para comprender mejor el funcionamiento del sistema de Lorenz, así como otros tipos de dinámica caótica. Para lograr dicha estabilización, usamos el control que se diseñó en el *Capítulo* §2. También, dado que los atractores globales suelen ser asimétricos con respecto a los equilibrios del sistema no forzado, y que los desplazamientos de coordenadas no suelen conservar la estructura de estabilidad, usamos la “*modificación*” a la solución al “uniting CLF problem” que realizamos en el *Capítulo* §3 para alcanzar la GAS de (el equilibrio  $\bar{x} = 0$ ) dichos sistemas. Además, para el sistema de Lorenz, hacemos un análisis de estabilidad del sistema controlado de Lorenz (4.22) y mostramos el diagrama de bifurcación de la coordenada  $x_1$  de los puntos fijos frente a distintos valores del parámetro de control, ( $v^*$ ), finalmente, mostramos un segundo diagrama de bifurcación de las variables de estado  $x_3$  frente a distintos valores del parámetro  $v^*$ .

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

### 2.1. CLF-Estabilización con el Zonotopo con 0 en el interior como CVS

Consideremos el sistema afín en el control multi-valuado

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j, \quad (2.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para  $j = 1, \dots, m$ , son campos vectoriales regulares. Aquí, regular quiere decir continuo. Sin pérdida de generalidad, suponemos que  $f(0) = 0$ . El CVS es dado por el zonotopo  $U = Z(V) = [-r_1v^1, r_1v^1] + \dots + [-r_mv^m, r_mv^m] + \bar{r} \subset \mathbb{R}^m$ , y denotemos  $u = (u_1, \dots, u_m)^\top \in U$ , con  $\top$  denotando transposición. El CVS es definido por

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow Z(V) : u(x) \text{ es regular}\}.$$

Sustituyendo la ecuación (2.1) en la definición de función CLF (1.1) y en el teorema de Artstein, tenemos:

Una función escalar  $\mathcal{C}^1$ ,  $V(x)$ , definida positiva y radialmente no acotada, es llamada una función Lyapunov de control (CLF) para (2.1) si

$$\inf_{u \in U} \left\{ \nabla V(x) \cdot \left( f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j \right) \right\} < 0, \quad \forall x \neq 0. \quad (2.2)$$

**Teorema 2.** [42] (de Zvi Artstein, 1983): Suponga que el CVS  $U \subset \mathbb{R}^m$  es convexo y el sistema (2.1) es tal que  $f(x)$  y  $(x, u) \mapsto \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i$  son continuas. Existe un control continuo  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow U$  tal que (2.1) es GAS si y sólo si (ssi) existe una CLF  $V(x)$  que satisface la propiedad de control pequeño (SCP).

Reescribamos (2.2) en una representación equivalente

$$\forall x \neq 0 \quad \inf_{u \in U} \dot{V}(x) = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0, \quad (2.3)$$

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

donde  $\xi^1 \cdot \xi^2$  denota el producto interior de  $\xi^1$  y  $\xi^2$ , y

$$\begin{aligned} a(x) &:= L_f V(x) \quad \& \quad b(x) := (b_1(x), \dots, b_m(x)), \\ \text{con } b_j(x) &:= -L_{g_j} V(x), \text{ para } j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.4)$$

denotan las derivadas direccionales de  $V(x)$  respecto al campo vectorial que define (2.1).

El objetivo primordial en este trabajo es estudiar la GAS de sistemas afines en el control, mediante un control de retroalimentación *admisible* (i.e. regular, “al menos continuo”, y que tome valores en el cvs  $U \subset \mathbb{R}^m$ )  $u(x)$ .

### 2.1.1. CLF-Estabilización de sistemas afines con control escalar acotado

En esta sección proponemos una fórmula explícita de funciones de retroalimentación admisibles para resolver el problema de estabilización con cvs  $U := [-r^-, r^+]$ . Diremos que el control  $u$  es signado si y sólo si (ssi) puede tomar dos signos, es decir,  $r^- > 0$ .

Consideramos el sistema escalar afín en el control

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2.5)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones suaves en  $\mathbb{R}^n$ , con cvs  $U := [-r^-, r^+]$ ,  $-r^- < 0$  y  $r^+ > 0$ . Supondremos que  $f(0) = 0$ . El cvs es dado por

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow U : u(x) \text{ es regular}\}, \quad (2.6)$$

donde *regular* significa al menos continua para cada  $x$ .

De manera que el principal objetivo en esta sección es estudiar la estabilización global asintótica (GAS) del sistema (2.5) por medio de un control de retroalimentación admisible  $u(x)$ .

### 2.1.2. Teoría CLF

Una función escalar  $\mathcal{C}^1$ ,  $V(x)$ , definida positiva y radialmente no acotada, es llamada una función Lyapunov de control (CLF) para (2.5) si

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u)\} = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (2.7)$$

donde

$$a(x) := L_f V(x) \quad \& \quad b(x) := -L_g V(x), \quad (2.8)$$

denota las derivadas direccionales de  $V(x)$  con respecto a los campos vectoriales que definen el sistema (2.5).

Para la síntesis de las funciones de control de retroalimentación continuas en el origen, Arstein introduce en [42] el concepto de *propiedad de control pequeño SCP*.

**Definición 2.** La función Lyapunov de control tiene la propiedad del control pequeño (SCP) con respecto a (2.3) si para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x\| < \delta$ , entonces existe un control  $u \in U$  con  $|u| < \epsilon$ , tal que

$$a(x) - b(x) \cdot u < 0, \text{ para } x \neq 0.$$

De esta manera definimos la función no negativa  $|b|r$  donde

$$r = \begin{cases} r^+ & \text{si } b > 0, \\ r^- & \text{si } b \leq 0. \end{cases}$$

Dado el sistema (2.5), suponga que existe una CLF  $V$  que satisface la SCP. Así, se define la función de retroalimentación óptima (mejor tasa de estabilización)  $\varpi(x) \in U$  como la función de  $\mathbb{R}^n$  a  $U$  que satisface:

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u(x))\} = \nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)\varpi(x)), \forall x \neq 0.$$

Existe sólo un control estabilizante  $\varpi(x) = r(\text{sign}b(x))$  para toda  $x$  tal que  $b(x) \neq 0$ , pero no es continuo en el conjunto  $\mathcal{N}_b := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}$ .

Supongamos que  $V(x)$  es una CLF con respecto a la ecuación (2.5) con controles tomando valores en el intervalo  $U := [-r^-, r^+]$ ,  $r^- > 0$  y  $r^+ > 0$ . Entonces, teniendo en cuenta el control de mejor tasa  $\varpi(x)$  se tiene que

$$\frac{dV(x)}{dt} = a(x) - b(x) \cdot \varpi(x) = a(x) - |b(x)|r(x) < 0, \forall x \neq 0. \quad (2.9)$$

Suponiendo que  $U$  es un intervalo, proponemos funciones de control de realimentación de la forma  $u(x) := \rho(x)\varpi(x)$ , donde  $\rho(x)$  es una función de reescalamiento y  $\varpi(x)$  es un control óptimo. El propósito de esta síntesis es regularizar la discontinuidad de  $\varpi(x)$  en la superficie de cambio  $\mathcal{N}_b$  mediante una función de reescalamiento apropiada  $\rho(x)$ . A continuación se enuncian las condiciones que  $\rho(x)$  debe satisfacer para asegurar la existencia de un control de retroalimentación admisible  $u(x)$  de tal manera que el sistema a lazo cerrado sea GAS.

**Hipótesis H.** Supongamos que  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función regular tal que

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \rho(x) < 1$ ,
- (ii)  $\rho(x) = 0$  ssi  $x \in \mathcal{N}_b$  y
- (iii)  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b, \rho(x) > \frac{a(x)}{|b(x)|r(x)}$ .

Para  $b(x) \neq 0$  la desigualdad (2.9) equivale a la desigualdad  $\frac{a(x)}{|b(x)|r(x)} < 1$ , de manera que la condición (iii) para  $\rho(x)$  implica

$$\frac{a(x)}{|b(x)|r(x)} < \rho(x) < 1.$$

A continuación probaremos que las condiciones de la **Hipótesis H** son suficientes para estabilizar con control  $u(x) := \rho(x)\varpi(x)$ . Basándonos en la definición:  $\mathcal{N}_b := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}$  y el control de mejor tasa  $\varpi(x) = r(\text{sign}b(x))$ , se tiene:

**Teorema 3.** *Supongamos que  $V(x)$  es una CLF (respecto al sistema (2.5) y el CVS  $U := [-r^-, r^+]$ , con  $r^- \geq 0$  y  $r^+ > 0$ ), y satisface la propiedad SCP,  $\varpi(x) = r(\text{sign}b(x))$  es el control de retroalimentación con mejor tasa y  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  una función regular que satisface la **Hipótesis H**. Entonces, el control de retroalimentación  $u(x) := \rho(x)\varpi(x)$  es admisible y es un estabilizador global para el sistema (2.5).*

*Demostración.* Primero se prueba que  $u(x) := \rho(x)\varpi(x)$  es admisible. A partir de la condición  $0 \leq \rho(x) < 1$  tenemos:

Para  $b(x) < 0$

$$u(x) := \rho(x)\varpi(x) = -r^-\rho(x), \text{ así } -r^- \leq -r^-\rho(x) = u(x).$$

Para  $b(x) > 0$

$$u(x) := \rho(x)\varpi(x) = r^+\rho(x), \text{ así } u(x) = r^+\rho(x) \leq r^+.$$

Por lo que  $u(x) \in [-r^-, r^+]$ .

Además,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b$  tenemos que ambos,  $\rho(x)$  y  $\varpi(x)$  son continuos (recordemos que  $\varpi(x)$  es constante en cada intervalo donde  $b$  no cambia de signo) de manera que  $u(x)$  es continuo. En el caso  $x \in \mathcal{N}_b$ , ya que  $\rho(x)$  es continuo y  $\varpi(x) = r(\text{sign}b(x))$  es acotada, entonces, de la SCP y condición (ii) de la Hipótesis H se deduce que  $\forall x^* \in \mathcal{N}_b$ ,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x^*} |u(x)| = \lim_{x \rightarrow x^*} \rho(x) |\varpi(x)| = 0,$$

entonces cada entrada  $u(x)$  es continua en  $\mathcal{N}_b$  y  $u(x)|_{\mathcal{N}_b} = 0$ .

Finalmente probamos que el sistema es GAS:

(a) Si  $x \in \mathcal{N}_b \setminus \{0\}$ , entonces  $a(x) < 0$  y  $u(x)|_{\mathcal{N}_b} = 0$ . Así tenemos que

$$\dot{V} = a(x) - b(x)u(x) = a(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}_b \setminus \{0\}.$$

(b) Si  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b$ , entonces  $b(x) \neq 0$ . Por lo tanto tenemos que

$$\dot{V} = a(x) - b(x)u(x) < 0$$

ya que de la condición (iii) de la **Hipótesis H** se deduce que

$$\begin{aligned} a(x) - b(x)u(x) &= a(x) - b(x)\rho(x)\varpi(x) \\ &= a(x) - b(x)\rho(x)r(\text{sign}b(x)) \\ &= a(x) - r\rho(x)|b(x)| < 0, \end{aligned}$$

por lo que,  $\dot{V} < 0, \forall x \neq 0$ . □

Así, el problema para obtener el control estabilizante consiste en hallar la función de Lyapunov  $V$  con las propiedades CLF y SCP, al menos en una vecindad  $\Omega$  del origen.



### 2.1.3. Síntesis particular de $\rho(x)$

Proponemos la siguiente fórmula, considerando la función de retroalimentación continua  $u_\epsilon(x) = \rho_\epsilon(x)\varpi(x)$ , parametrizada con  $\epsilon > 0$ , dada por

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} r \operatorname{sign} b(x) \left[ 1 - \frac{|b(x)|r - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{(1 + e^{(|b(x)|r)})|b(x)|r} e^{(-\epsilon|b(x)|r)} \right], & \text{si } |b(x)|r > 0, \\ 0, & \text{si } |b(x)|r = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

donde  $\rho_\epsilon(x)$  está dada por

$$\rho_\epsilon(a(x), b(x)) = 1 - \frac{|b(x)|r - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{(1 + e^{(|b(x)|r)})|b(x)|r} e^{(-\epsilon|b(x)|r)}.$$

Si  $\epsilon \rightarrow \infty$ , la función de control  $u_\epsilon(x)$  converge al control estabilizante con mejor tasa  $\varpi(x) = r(\operatorname{sign} b(x))$ , por lo que  $0 < e^{(-\epsilon|b(x)|r)} \leq 1$  para cada  $\epsilon > 0$ , se tiene la condición restrictiva  $0 \leq u_\epsilon(x) \leq r^+$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

De esta manera, la desigualdad (2.9) implica que si  $a(x) < |b(x)|r(x)$  para toda  $x \neq 0$ , entonces el sistema a lazo cerrado (2.5)-(2.10) es GAS, veamos que dicho sistema retroalimentado satisface  $\dot{V}(x) < 0$  para toda  $x \neq 0$ .

A continuación probaremos que la función de control  $u(x) := \rho(x)\varpi(x)$  resuelve el problema de estabilización global.

**Proposición 4.** *Si  $a(x) < |b(x)|r(x)$  para toda  $x \neq 0$ , entonces el sistema a lazo cerrado (2.5) y (2.10) es GAS.*

*Demostración.* Si  $a(x) > 0$ , se tiene que  $|b(x)|r > 0$ , así

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= a(x) - b(x)u_\epsilon(x) \\ &= a(x) - |b(x)|r\rho_\epsilon(a(x), b(x)) \\ &= a(x) - |b(x)|r \left( 1 - \frac{|b(x)|r - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{(1 + e^{(|b(x)|r)})|b(x)|r} e^{(-\epsilon|b(x)|r)} \right) \\ &= a(x) - |b(x)|r + \frac{|b(x)|r - a(x)}{1 + e^{(|b(x)|r)}} e^{(-\epsilon|b(x)|r)} \\ &= (a(x) - |b(x)|r) \left( 1 - \frac{1}{1 + e^{(|b(x)|r)}} e^{(-\epsilon|b(x)|r)} \right) \\ &< 0 \quad \text{por (2.9)}. \end{aligned}$$

Si  $a(x) < 0$ , se tiene que  $|b(x)|r > 0$ , por lo que

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= a(x) - b(x)u_\epsilon(x) \\
 &= a(x) - |b(x)|r\rho_\epsilon(a(x), b(x)) \\
 &= a(x) - |b(x)|r \left( 1 - \frac{|b(x)|r - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{(1 + e^{(|b(x)|r)})} e^{(-\epsilon|b(x)|r)} \right) \\
 &= a(x) - |b(x)|r \left( 1 - \frac{1}{1 + e^{(|b(x)|r)}} e^{(-\epsilon|b(x)|r)} \right) \\
 &< 0.
 \end{aligned}$$

Hemos probado que

$$\dot{V}(x) = a(x) + b(x)u_\epsilon(x) < 0 \text{ para } x \neq 0 \text{ y } \forall \epsilon > 0.$$

□

A continuación mostraremos la continuidad del control  $u_\epsilon(x)$  con la síntesis particular de  $\rho_\epsilon(x)$  propuesta en (2.10), o equivalentemente, para mostrar que  $\rho_\epsilon(x)$  satisface la propiedad (ii) de la **Hipótesis H**.

**Lema.** Si la CLF  $V$  satisface la SCP, entonces se cumplen los siguientes límites:

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x) + |a(x)|}{|b(x)|r} = 0$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow |b(x)|r} \frac{a(x) + |a(x)|}{|b(x)|r} = 0$ .

*Demostración.* **1.** Será suficiente probar que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{|b(x)|} = 0$  para  $a(x) > 0$ .

De la propiedad SCP se tiene que

$$0 < a(x) < b(x)u \leq |b(x)u| = |b(x)||u| < |b(x)|\epsilon, \text{ pues } |u| < \epsilon$$

así

$$0 < \frac{a(x)}{|b(x)|} < \epsilon, \text{ para } \epsilon > 0 \text{ arbitrariamente pequeño y } 0 < \|x\|_2 < \delta.$$

Por lo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{|b(x)|} = 0$ .

**2.** Sea  $x_0 \in \{x : |b(x)|r = 0\}$  un punto arbitrario. Si  $x_0 = 0$ , el límite **2.** coincide con el límite **1.** Por lo que suponemos que  $x_0 \neq 0$ .

Probaremos 2. si se cumple la siguiente igualdad  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x) + |a(x)|}{|b(x)|r} = 0$ .

Si  $x_0 \in \{x : |b(x)|r = 0\}$ , por la desigualdad  $a(x_0) < |b(x_0)|r$ , se tiene que  $a(x_0) < 0$ . Por lo que, sea  $\Omega_\epsilon(x_0)$  una vecindad de  $x_0$  tal que  $a(x) < 0$  para todo  $x \in \Omega_\epsilon(x_0)$ .

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

Sea  $\{x_n\}$  una sucesión tal que  $\{x_n\} \rightarrow x_0$  y  $|b(x)|r > 0$  para cada  $n$ . Entonces, existe un entero positivo  $N$  tal que  $\{x_n\} \in \Omega_\epsilon(x_0)$  para toda  $n > N$ , tal que  $a(x_n) < 0$  si  $n > N$ .

Entonces

$$\frac{a(x_n) + |a(x_n)|}{|b(x_n)|r} = 0 \text{ sí } n > N.$$

Por lo que

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{a(x_n) + |a(x_n)|}{|b(x_n)|r} = 0.$$

□

**Proposición.** Consideremos el sistema afín en el control (2.5) tal que  $V(x)$  es una CLF que satisface la condición SCP. Entonces el control de retroalimentación (2.10) es una función continua.

*Demostración.* De los límites **1.** y **2.** del lema anterior, de la continuidad del término  $|b(x)|r$  y de la continuidad de la composición de funciones continuas, se siguen los siguientes límites para  $u_\epsilon(x)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} u_\epsilon(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow |b(x)|r} u_\epsilon(x) &= 0, \end{aligned}$$

de esta manera se concluye que  $u_\epsilon(x)$  es continua. □

### 2.1.4. CLF-Estabilización global con respecto al zonotopo

Supongamos que el CVS es un conjunto convexo compacto arbitrario  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Una función escalar  $\mathcal{C}^1$ ,  $V(x)$ , definida positiva y radialmente no acotada, es llamada una función Lyapunov de control (CLF) para (2.1) si

$$\inf_{u \in U} \{ \nabla V(x) \cdot (f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j) \} = \inf_{u \in U} \{ a(x) - b(x) \cdot u(x) \} < 0, \forall x \neq 0. \quad (2.11)$$

donde

$$\begin{aligned} a(x) &:= L_f V(x) \quad \& \quad b(x) := (b_1(x), \dots, b_m(x)), \\ \text{con } b_j(x) &:= -L_{g_j} V(x), \text{ para } j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.12)$$

denotan la derivadas de Lie de  $V(x)$  respecto al campo vectorial que define (2.1).

Para la síntesis de las funciones de control de retroalimentación continuas en el origen, Arstein introduce en [42] el concepto SCP.

**Definición 3.** La función Lyapunov de control tiene la propiedad del control pequeño (SCP) con respecto a (2.11) si para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ , entonces existe un control  $u \in U$  con  $\|u\|_U < \epsilon$  ( $\|\cdot\|_A$  es una norma del conjunto  $A$ ), tal que

$$a(x) - b(x) \cdot u < 0, \text{ para } x \neq 0.$$

El problema de optimización (2.11) se satisface si existe un control de retroalimentación  $u(x) \in \partial U$  tal que  $a(x) < b(x) \cdot u(x)$ ,  $\forall x \neq 0$ . Por otra parte, para cualquier control  $u(x)$  tomando valores en  $U$ , se tiene que:  $b(x) \cdot u(x) \leq \mu^*(b(x))\mu(u(x))$ . Así, si hacemos  $u(x) = \varpi(x)$ , con  $\mu(\varpi(x)) \equiv 1$  (es decir, tomando valores en la frontera  $\partial U$ ), entonces

$$b(x) \cdot \varpi(x) = \mu^*(b(x)). \quad (2.13)$$

Por consiguiente, si podemos encontrar una CLF apropiada, entonces cualquier control de retroalimentación  $\varpi(x)$  que satisface (2.13) cumple la equivalencia entre (2.11) y

$$\forall x \neq 0, a(x) < \mu^*(b(x)) \quad (2.14)$$

Decimos que la retroalimentación  $\varpi(x)$  es la mejor tasa (óptimo) de la ley de control respecto a CLF  $V(x)$  [para el sistema (2.1) con controles tomando valores en  $U$ ] ssi satisface

$$\forall x \neq 0, a(x) - b(x) \cdot \varpi(x) = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0. \quad (2.15)$$

De esta manera, el problema (2.11) se satisface si existe un control óptimo  $\varpi(x)$ . Sin embargo, por (2.13), se sigue que  $\varpi(x)$  **no es admisible** ya que es singular en el conjunto

$$\mathcal{N}_b := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}. \quad (2.16)$$

Con respecto a la existencia, unicidad y regularidad del control  $\varpi(x)$ , en [11], [15] se mostró que (2.13) puede ser replanteado como el siguiente programa de optimización.

$$\mathcal{P}(b) := \sup\{b \cdot u : u \in \partial U\} \quad (2.17)$$

Claramente, ya que  $U$  es compacto, existe al menos una solución global a  $\mathcal{P}(b)$ , denotado por  $\omega(b)$ . Así, por el Teorema 10 (a) del Apéndice 1 §5, tenemos que  $\mathcal{P}(b)$  es precisamente  $\varsigma_U(b)$ . Además, el conjunto de soluciones  $\omega(b)$  es la subdiferencial de  $\varsigma_U(b)$  (ver [11], [15]), dado por

$$\varsigma_U(b) = b \cdot \omega, \quad \forall \omega \in \partial \varsigma_U(b), \quad (2.18)$$

donde  $\partial \varsigma_U(b)$  es la subdiferencial de  $\varsigma_U$  en  $b$  y cada  $\omega \in \partial \varsigma_U(b)$  es el subgradiente de  $\varsigma_U$  en  $b$ . Obsérvese que si omitimos  $x$  de (2.13), obtenemos la expresión (2.18). Así, si  $\varsigma_U(b)$  es diferenciable en  $b$ , entonces  $\partial \varsigma_U(b) = \{\omega\}$  con  $\omega = \nabla \varsigma_U(b)$ , así

$$\omega(b) = (\nabla \varsigma_U(b))^\top. \quad (2.19)$$

### 2.1.5. Síntesis general de controles respecto al Zonotopo

**Definición 4.** (*Zonotopo*) Un zonotopo es la imagen de un  $k$ -cubo bajo una proyección afín, que es, un  $m$ -polígono  $Z \subseteq \mathbb{R}^m$ , de la forma

$$\begin{aligned} Z = Z(V) &:= V \cdot C_m + \bar{r} = \{Vy + \bar{r} : y \in C_m\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^m : x = \bar{r} + \sum_{i=1}^k x_i r_i v^i, -1 \leq x_i \leq 1 \text{ \& } r_i > 0\} \end{aligned}$$

para alguna matriz  $V = (v^1, \dots, v^k) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ , con  $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_m^i)^\top$  y  $k \geq m$ .

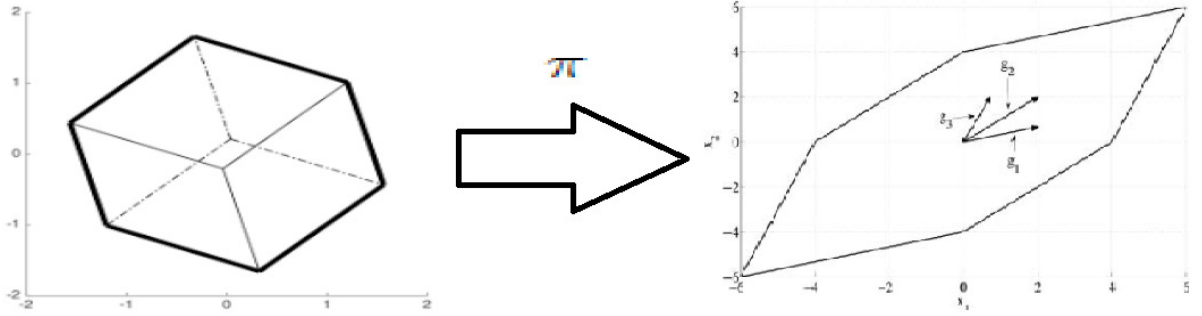


Figura 2.1: Representación gráfica de la Definición 4

Por otro lado, podemos representar un zonotopo como la suma directa de segmentos de línea, dicha representación es sustentada por el *Teorema de Gruber* (ver [29], p. 82). Así, ya que cada  $k$ -cubo es un producto de segmentos de línea  $C_k = C_1 \times \dots \times C_1$ , si es lineal, tenemos

$$\begin{aligned} Z(V) &= \pi(C_1 \times \dots \times C_1) \\ &= \pi(C_1) \oplus \dots \oplus \pi(C_1) \\ &= [-r_1 v^1, r_1 v^1] \oplus \dots \oplus [-r_k v^k, r_k v^k] \oplus \bar{r}, \end{aligned}$$

y así,  $Z(V) = [-r_1 v^1, r_1 v^1] \oplus \dots \oplus [-r_k v^k, r_k v^k] \oplus \bar{r} = S_1 \oplus \dots \oplus S_k \oplus \bar{r}$ , con  $S_i = r_i[-v^i, v^i] + \{\bar{r}^i\}$  y centro  $\bar{r} = \oplus_{i=1}^k \bar{r}^i$ , con  $\bar{r}^i = (\bar{r}_1^i, \bar{r}_2^i, \dots, \bar{r}_m^i)^\top$ , dado por el mapeo afín  $\pi(y) = Vy + \bar{r}$ .

La función soporte de un zonotopo está dada de la siguiente manera

$$\varsigma_Z(b) = \sum_{i=1}^k (r_i |b \cdot v^i| + b \cdot \bar{r}^i). \quad (2.20)$$

Así, por (5.11):

2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

$$\omega(b) = (\nabla_{\zeta_Z}(b))^\top = \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b \cdot v^i) v^i + \bar{r}^i). \quad (2.21)$$

Finalmente, ya que  $\varpi(x) := \omega(b(x))$ , entonces

$$\varpi(x) := \omega(b(x)) = \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) v^i + \bar{r}^i). \quad (2.22)$$

Desarrollando (2.22), se tiene

$$\begin{aligned} \varpi(x) &= \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) v^i + \bar{r}^i) \\ &= r_1 \text{sign}(b(x) \cdot v^1) v^1 + \bar{r}^1 + \cdots + r_m \text{sign}(b(x) \cdot v^m) v^m + \bar{r}^m + \cdots + r_k \text{sign}(b(x) \cdot v^k) v^k + \bar{r}^k \\ &= r_1 \text{sign}(b(x) \cdot v^1) \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_m^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{r}_1^1 \\ \vdots \\ \bar{r}_m^1 \end{pmatrix} + \cdots + r_m \text{sign}(b(x) \cdot v^m) \begin{pmatrix} v_1^m \\ \vdots \\ v_m^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{r}_1^m \\ \vdots \\ \bar{r}_m^m \end{pmatrix} \\ &\quad + \cdots + r_k \text{sign}(b(x) \cdot v^k) \begin{pmatrix} v_1^k \\ \vdots \\ v_m^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{r}_1^k \\ \vdots \\ \bar{r}_m^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) v_1^i + \bar{r}_1^i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) v_m^i + \bar{r}_m^i) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Nota:** De este último desarrollo podemos notar que el vector resultante ( $\varpi(x)$ ) es de dimensión  $(m \times 1)$ , ya que la dimensión del vector renglón  $b(x)$  es  $(1 \times m)$ , el producto de estos vectores ( $b(x)\varpi(x)$ ) está bien definido.

Así, tomando la suma sobre los renglones tenemos:

$$\varpi_j(x) = \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) v_j^i + \bar{r}_j^i) \text{ para } j = 1, \dots, m. \quad (2.23)$$

Si suponemos  $V(x)$  es CLF respecto al sistema (2.1) con controles tomando valores en el Zonotopo  $Z(V) = [-r_1 v^1, r_1 v^1] \oplus \cdots \oplus [-r_k v^k, r_k v^k] \oplus \bar{r}$ . Entonces, teniendo en cuenta el control de mejor tasa asociada  $\varpi(x)$  dado por (2.23), tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= a(x) - (b_1(x), b_2(x), \dots, b_m(x)) \begin{pmatrix} \varpi_1(x) \\ \varpi_2(x) \\ \vdots \\ \varpi_m(x) \end{pmatrix} \\
&= a(x) - (b_1(x)\varpi_1(x) + b_2(x)\varpi_2(x) + \dots + b_m(x)\varpi_m(x)) \\
&= a(x) - \left[ \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) b_1(x) v_1^i + b_1(x) \bar{r}_1^i) + \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) b_2(x) v_2^i + b_2(x) \bar{r}_2^i) \right. \\
&\quad \left. + \dots + \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) b_m(x) v_m^i + b_m(x) \bar{r}_m^i) \right] \\
&= a(x) - \left[ r_1 \text{sign}(b(x) \cdot v^1) \sum_{j=1}^m b_j(x) v_j^1 + \sum_{j=1}^m b_j(x) \bar{r}_j^1 + r_2 \text{sign}(b(x) \cdot v^2) \sum_{j=1}^m b_j(x) v_j^2 + \sum_{j=1}^m b_j(x) \bar{r}_j^2 \right. \\
&\quad \left. + \dots + r_k \text{sign}(b(x) \cdot v^k) \sum_{j=1}^m b_j(x) v_j^k + \sum_{j=1}^m b_j(x) \bar{r}_j^k \right] \\
&= a(x) - \left[ \sum_{i=1}^k \left( r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) \sum_{j=1}^m b_j(x) v_j^i + \sum_{j=1}^m b_j(x) \bar{r}_j^i \right) \right] \\
&= a(x) - \sum_{i=1}^k (r_i |b(x) \cdot v^i| + b(x) \cdot \bar{r}^i) < 0 \quad \text{ssi} \\
a(x) &< \sum_{i=1}^k (r_i |b(x) \cdot v^i| + b(x) \cdot \bar{r}^i) \quad \text{ssi} \\
a(x) &< \beta(x) \quad \forall x \neq 0.
\end{aligned}$$

**Observación 1:** Note que sí  $\beta(x) = 0$  entonces  $a(x) < 0$ . Además, se tiene que  $\beta(x) = 0$  ssi  $x \in \mathcal{N}_\zeta$ .

Suponiendo que  $U$  es un conjunto estrictamente convexo con  $0 \in \text{int}U$ , en [20, 18] se consideraron controles generales de retroalimentación de la forma  $u(x) = \rho(x)\varpi(x)$ , donde  $\rho(x)$  es un reescalamiento apropiado y  $\varpi(x)$  es la correspondiente ley de control de mejor tasa, comprende muchos de las síntesis de fórmulas de control propuestas en la literatura existente. Sin embargo, la síntesis sólo puede tratar las singularidades de  $\varpi(x)$  en  $\mathcal{N}_b$ . En adelante, en este trabajo, proponemos funciones de control de retroalimentación de forma descentralizada

$$u(x) := (u_1(x), \dots, u_m(x))^\top, \quad \text{con } u_j(x) := \rho_j(x)\varpi_j(x), \text{ para } j = 1, \dots, m, \quad (2.24)$$

donde  $\varpi(x)$  es la función de control definida por composición  $\omega(b)$  dada por (2.19) y  $b(x)$  dada por (2.12), y  $\rho(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_m(x))$  es una función vectorial de reescalamiento por determinar.

El propósito de esta síntesis, obedece al problema de hacer frente a las discontinuidades de  $\varpi(x)$  en las superficies de cambio  $\mathcal{N}_j$  mediante apropiadas funciones de reescalamiento  $\rho_j(x)$  utilizadas para regularizar cada entrada  $\varpi_j(x)$ .

Para la síntesis de las  $\rho_j(x)$  se deben satisfacer ciertas condiciones para garantizar la existencia de un control de retroalimentación admisible  $u(x)$  tal que el sistema a lazo cerrado (2.1) y (2.24) sea GAS.

**Hipótesis H.** Supongamos que  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función regular tal que

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \rho_j(x) \leq 1, j = 1, \dots, m.$
- (ii)  $\rho_j(x) = 0$  ssi  $x \in \mathcal{N}_j$ , para  $j = 1, \dots, m$ , y
- (iii)  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_j, \|\rho(x)\|_\infty > \frac{a(x)}{\beta(x)}.$

**Observación 2:** Impondremos algunas condiciones de regularidad sobre  $\rho(x)$  para asegurar la continuidad del control de retroalimentación  $u(x)$ . Una primera condición, es la continuidad siempre que  $b_j(x) \neq 0$ , para  $j = 1, \dots, m$ , con  $\rho(x)$  eliminando singularidades de  $\varpi(x)$ , es decir,  $\forall x^* \in \mathcal{N}_j, \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x)\varpi_j(x)$  exista. Ahora, ya que  $0 \in \mathcal{N}_b = \cap_j \mathcal{N}_j$ , se supondrá SCP, la condición necesaria para la continuidad de cada  $u_j(x) = \rho_j(x)\varpi_j(x)$  en  $\mathcal{N}_j$  es que  $\forall x^* \in \mathcal{N}_j^0, \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x)\varpi_j(x) = 0$  y  $\rho_j(x) \upharpoonright_{\mathcal{N}_j^0} \equiv 0$ , donde  $\mathcal{N}_j^0$  es la componente conexa de 0 en  $\mathcal{N}_j$ . Por lo que, si deseamos que el conjunto  $\mathcal{N}_j$  sea conexo, se tiene que cumplir  $\rho_j(x) \upharpoonright_{\mathcal{N}_j} \equiv 0$  y,  $\forall x^* \in \mathcal{N}_j, \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x)\varpi_j(x) = 0.$ □

**Observación 3:** La continuidad del control en  $x = 0$  se obtiene a través de la propiedad SCP. Para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $0 < \|x\| < \delta$ , entonces  $a(x) < b(x) \cdot u(x)$  se asegura para un determinado  $u$  con  $\mu(u) < \epsilon$  (donde  $\mu$  es “equivalente” a una norma). Por lo tanto, para dicha  $u$ ,  $a(x) < b(x) \cdot u(x) \leq \beta(x)\mu(u(x)) < \epsilon\beta(x)$ , de manera que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{\beta(x)} = 0.$ □

**Observación 4:** Derivado de la condición (iii) de la **Hipótesis H**, cada  $\rho_j(x)$  se puede definir como una composición de funciones continuas  $\rho_j(x) := \varrho_j(\alpha, \beta) \circ (a(x), \beta(x))$ , donde  $\varrho_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ . Por otra parte, si denotamos  $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$ , entonces se tiene que,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \beta(x) \neq 0, \|\varrho(\alpha, \beta)\|_\infty > \frac{\alpha}{\beta}$  y  $\varrho(\alpha, 0) = (0, \dots, 0)$ .

**Teorema 5.** Supongamos que  $V(x)$  es una CLF (respecto al sistema (2.1) y el CVS  $U := Z(V) = [-r_1 v^1, r_1 v^1] \oplus \dots \oplus [-r_k v^k, r_k v^k] \oplus \bar{r} = S_1 \oplus \dots \oplus S_k \oplus \bar{r}$ , con  $S_i = r_i[-v^i, v^i] + \bar{r}^i$ ,  $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_m^i)^\top$  y  $\bar{r}^i = (\bar{r}_1^i, \bar{r}_2^i, \dots, \bar{r}_m^i)^\top$ , y satisface la propiedad SCP,  $\varpi_j(x)$  es el control de retroalimentación con mejor tasa y  $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función regular que satisface la **Hipótesis H**. Entonces, el control de retroalimentación  $u_j(x) := \rho_j(x)\varpi_j(x)$  es admisible y es un estabilizador global para el sistema (2.1).

*Demostración.* Primero se prueba que  $u_j(x) := \rho_j(x)\varpi_j(x) = \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) v_j^i + \bar{r}_j^i)$  es admisible. Ya que un Zonotopo es la suma directa de segmentos de línea,



cualquier elemento perteneciente a dicho conjunto se encuentran entre el intervalo cerrado  $\left[ \sum_{i=1}^k (-r_i v^i + \bar{r}^i), \sum_{i=1}^k (r_i v^i + \bar{r}^i) \right]$ . Así, a partir de la condición  $0 \leq \rho_j(x) \leq 1$  tenemos:

Para  $b(x) \cdot v^i < 0$

Caso  $v_j^i > 0$ , ya que  $u_j(x) := \rho_j(x) \varpi_j(x) = \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (-r_i v_j^i + \bar{r}_j^i)$ , así  $\sum_{i=1}^k (-r_i v_j^i + \bar{r}_j^i) \leq \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (-r_i v_j^i + \bar{r}_j^i) = u_j(x)$ .

Caso  $v_j^i < 0$ , ya que  $u_j(x) := \rho_j(x) \varpi_j(x) = \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (-r_i v_j^i + \bar{r}_j^i)$ , así  $u_j(x) = \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (-r_i v_j^i + \bar{r}_j^i) \leq \sum_{i=1}^k (-r_i v_j^i + \bar{r}_j^i)$ .

Para  $b(x) \cdot v^i > 0$

Caso  $v_j^i > 0$ , ya que  $u_j(x) := \rho_j(x) \varpi_j(x) = \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (r_i v_j^i + \bar{r}_j^i)$ , así  $u_j(x) = \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (r_i v_j^i + \bar{r}_j^i) \leq \sum_{i=1}^k (r_i v_j^i + \bar{r}_j^i)$ .

Caso  $v_j^i < 0$ , ya que  $u_j(x) := \rho_j(x) \varpi_j(x) = \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (r_i v_j^i + \bar{r}_j^i)$ , así  $\sum_{i=1}^k (r_i v_j^i + \bar{r}_j^i) \leq \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (r_i v_j^i + \bar{r}_j^i) = u_j(x)$ .

Por lo que  $u_j(x) \in \left[ \sum_{i=1}^k (-r_i v_j^i + \bar{r}_j^i), \sum_{i=1}^k (r_i v_j^i + \bar{r}_j^i) \right] \subset \left[ \sum_{i=1}^k (-r_i v^i + \bar{r}^i), \sum_{i=1}^k (r_i v^i + \bar{r}^i) \right]$ , para  $j = 1, \dots, m$ .

Además,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j \mathcal{N}_j$  tenemos que ambos,  $\rho(x)$  y  $\varpi(x)$  son continuas, de manera que  $u(x)$  es continua. En el caso  $x \in \mathcal{N}_j$ , ya que  $\rho(x)$  es continua y  $\varpi_j(x) = \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) v_j^i + \bar{r}_j^i)$  es acotada, entonces, de la SCP y condición (ii) de la **Hipótesis H** se deduce que  $\forall x^* \in \mathcal{N}_j$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{x \rightarrow x^*} |u_j(x)| &= \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x) \left| \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) v_j^i + \bar{r}_j^i) \right| \\ &\leq \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x) \left( \sum_{i=1}^k (r_i |v_j^i| + |\bar{r}_j^i|) \right) = 0 \end{aligned}$$

entonces cada entrada  $u_j(x)$  es continua en  $\mathcal{N}_j$  y  $u_j(x) \upharpoonright_{\mathcal{N}_j} = 0$ .

Finalmente probamos que el sistema es GAS:

(a) Si  $x \in \mathcal{N}_\zeta \setminus \{0\}$ , entonces de la **observación 1** se sigue que  $a(x) < 0$  y  $u(x) \upharpoonright_{\mathcal{N}_\zeta} = 0$ . Así tenemos que

$$\dot{V} = a(x) - b(x) \cdot u(x) = a(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}_\zeta \setminus \{0\}.$$

(b) Si  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_\zeta$ , entonces existe al menos una  $j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) tal que  $b(x) \cdot v^i \neq 0$  con  $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_m^i)^\top$ . Entonces, de la condición (iii) de la **Hipótesis H** y la definición de  $\beta(x)$ , se deduce que

$$\dot{V} = a(x) - b(x) \cdot u(x) < 0$$

si y sólo si

$$a(x) < \sum_{j=1}^m \rho_j(x) \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) b_j(x) v_j^i + b_j(x) \bar{r}_j^i)$$

si y sólo si

$$\begin{aligned}
 a(x) &< \rho(\mathbf{x}) \left( \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) b_1(x) v_1^i + b_1(x) \bar{r}_1^i), \right. \\
 &\quad \left. \dots, \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) b_m(x) v_m^i + b_m(x) \bar{r}_m^i) \right) \\
 &\leq \|\rho(\mathbf{x})\|_\infty \left\| \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) b_1(x) v_1^i + b_1(x) \bar{r}_1^i), \right. \\
 &\quad \left. \dots, \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) b_m(x) v_m^i + b_m(x) \bar{r}_m^i) \right\|_\infty \\
 &= \|\rho(\mathbf{x})\|_\infty \max_{1 \leq j \leq m} \left| \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) b_j(x) v_j^i + b_j(x) \bar{r}_j^i) \right| \\
 &\leq \|\rho(\mathbf{x})\|_\infty \left| \sum_{i=1}^k \left( r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) \sum_{j=1}^m b_j(x) v_j^i + \sum_{j=1}^m b_j(x) \bar{r}_j^i \right) \right| \\
 &= \|\rho(\mathbf{x})\|_\infty |\beta(x)| \\
 &= \|\rho(\mathbf{x})\|_\infty \beta(x)
 \end{aligned}$$

por lo que,  $\dot{V} < 0, \forall x \neq 0$ . Así  $u(x)$  es un estabilizador asintótico global.  $\square$

**Observación:** Por medio de la **Hipótesis H** pudimos demostrar la admisibilidad del control  $u_j(x)$  y también que hace GAS al sistema (2.1), el punto (i) de dicha **Hipótesis** nos indica que la función de reescalamiento no se saldrá del rango de definición, con el punto (ii) evitamos singularidades y el punto (iii) nos dice que hará GAS al sistema para un valor fijo por cada  $j$  que tomemos, lo cual no es práctico, de esta manera se propondrá un control que estabilice al sistema para cualquier  $j$ .

### 2.1.6. Síntesis de una fórmula de control de retroalimentación explícita con respecto al zonotopo

De ésta manera, para una CLF  $V(x)$  adecuada, se diseñará una función de reescalamiento, tal que el control de retroalimentación  $u^\epsilon(x)$  sea admisible y haga GAS al sistema (2.1), por lo que se propone la siguiente familia de controles de retroalimentación  $\epsilon$ -parametrizada ( $\epsilon > 0$ ):

$$u^\epsilon(x) := (u_1^\epsilon(x), \dots, u_m^\epsilon(x)) \text{ con } u_j^\epsilon(x) = \varrho_j^\epsilon(a(x), \beta(x)) \varpi_j(x) \quad (2.25)$$

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

y

$$u_j^\epsilon(x) = \varrho_j^\epsilon(a(x), \beta(x)) \varpi_j(x) = \varrho_j^\epsilon(a(x), \beta(x)) \sum_{i=1}^k (r_i \text{sign}(b(x) \cdot v^i) v_j^i + \bar{r}_j^i) \text{ para } j = 1, \dots, m, \quad (2.26)$$

con  $\varpi(x)$  el control de mejor tasa que comparte el esquema de (2.22),  $\varrho_j^\epsilon : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\varrho_j^\epsilon(a(x), \beta(x)) = \begin{cases} 1 - \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{2m(e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{-\epsilon|\gamma_j(x)|}, & \text{si } \gamma_j(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_j(x) = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

para  $j = 1, \dots, m$ , donde  $\gamma_j(x) = \frac{b_j(x)\varpi_j(x)}{\beta(x)}$  y el parámetro  $\epsilon > 0$ . En lo subsecuente, a menos que se diga lo contrario, denotaremos  $\rho_j^\epsilon(x) := \varrho_j^\epsilon(a(x), \beta(x))$ , para  $j = 1, \dots, m$ .

### 2.1.7. La CLF estabilización con respecto al Zonotopo

**Teorema 6.** *Supongamos que  $V(x)$  es una CLF respecto al sistema (2.1), con controles tomando valores en el Zonotopo  $U$ . Si  $\varpi(x)$  es el mejor control de mejor tasa dado en (2.22), entonces el sistema a lazo cerrado (2.1)-(2.25) es GAS.*

*Demostración.* Supongamos que  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b$ , es decir  $\beta(x) > 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= a(x) - (b_1(x), \dots, b_m(x)) \begin{pmatrix} u_1^\epsilon(x) \\ \vdots \\ u_m^\epsilon(x) \end{pmatrix} \\
&= a(x) - (b_1(x), \dots, b_m(x)) \begin{pmatrix} \rho_1^\epsilon(x) \varpi_1(x) \\ \vdots \\ \rho_m^\epsilon(x) \varpi_m(x) \end{pmatrix} \\
&= a(x) - [\rho_1^\epsilon(x) b_1(x) \varpi_1(x) + \dots + \rho_m^\epsilon(x) b_m(x) \varpi_m(x)] \\
&= a(x) - \left[ \left( 1 - \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{2m(e^{(|\gamma_1(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_1(x)|)} \right) b_1(x) \varpi_1(x) \right. \\
&\quad \left. + \dots + \left( 1 - \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{2m(e^{(|\gamma_m(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_m(x)|)} \right) b_m(x) \varpi_m(x) \right] \\
&= a(x) - \left[ b_1(x) \varpi_1(x) - \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{2m(e^{(|\gamma_1(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_1(x)|)} b_1(x) \varpi_1(x) \right. \\
&\quad \left. + \dots + b_m(x) \varpi_m(x) - \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{2m(e^{(|\gamma_m(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_m(x)|)} b_m(x) \varpi_m(x) \right] \\
&= a(x) - \left[ \beta(x) - \sum_{j=1}^m \left( \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{2m(e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_j(x)|)} b_j(x) \varpi_j(x) \right) \right] \\
&= a(x) - \beta(x) + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{2m(e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_j(x)|)} b_j(x) \varpi_j(x) \right).
\end{aligned}$$

Así:

$$\frac{\dot{V}}{\beta(x)} = \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{2m(e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_j(x)|)} \gamma_j(x) \right)$$

Utilizaremos la conocida desigualdad [8]:

$$\ln(y) < y - 1 \quad (y > 0, y \neq 0) \tag{2.28}$$

Ya que el siguiente cociente esta acotado

$$0 < \frac{e^{(|\gamma_j(x)|)} - 1}{e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1} < 1,$$

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

se cumple la siguiente desigualdad:

$$0 < \sum_{j=1}^m \frac{e^{(|\gamma_j(x)|)} - 1}{e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1} < \sum_{j=1}^m 1 = m. \quad (2.29)$$

Se analizan los siguientes casos:

(i) Si  $a(x) \leq 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{\beta(x)} &= \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\beta(x)}{2m(e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_j(x)|)} \gamma_j(x) \right) \\ &\leq \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^m \left( \frac{|\gamma_j(x)|}{e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1} e^{(-\epsilon|\gamma_j(x)|)} \right) \quad (a \leq |a| \forall a) \\ &\leq \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^m \frac{|\gamma_j(x)|}{e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1} \\ &= \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^m \frac{\ln e^{(|\gamma_j(x)|)}}{e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1} \\ &< \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^m \frac{e^{(|\gamma_j(x)|)} - 1}{e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1} \quad \text{por (2.28)} \\ &< \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{1}{2m} (m) \quad \text{por (2.29)} \\ &= \frac{a(x)}{\beta(x)} - \frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

pues  $\frac{a(x)}{\beta(x)} \leq 0$ .

(ii) Si  $a(x) > 0$ , se sigue

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{V}}{\beta(x)} &= \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\beta(x) - a(x)}{2m(e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_j(x)|)} \gamma_j(x) \right) \\
&\leq \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{\beta(x) - a(x)}{2m\beta(x)} \sum_{j=1}^m \left( \frac{|\gamma_j(x)|}{e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1} e^{(-\epsilon|\gamma_j(x)|)} \right) \quad (a \leq |a| \forall a) \\
&\leq \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{\beta(x) - a(x)}{2m\beta(x)} \sum_{j=1}^m \frac{|\gamma_j(x)|}{e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1} \\
&< \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{\beta(x) - a(x)}{2m\beta(x)} \sum_{j=1}^m \frac{e^{(|\gamma_j(x)|)} - 1}{e^{(|\gamma_j(x)|)} + 1} \quad \text{por (2.28)} \\
&< \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{\beta(x) - a(x)}{2m\beta(x)} (m) \quad \text{por (2.29)} \\
&= \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{\beta(x) - a(x)}{2\beta(x)} = \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{a(x)}{2\beta(x)} \\
&= \frac{a(x)}{2\beta(x)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{a(x)}{\beta(x)} - 1 \right) < 0.
\end{aligned}$$

Pues  $0 < \frac{a(x)}{\beta(x)} < 1$ .

De esta manera, en ambos casos se tiene:

$$\frac{\dot{V}}{\beta(x)} < 0,$$

por lo que hemos demostrado que  $\dot{V} < 0$ , para  $x \neq 0$  y para todo  $\epsilon > 0$ .  $\square$

A continuación mostraremos la continuidad del control  $u^\epsilon(x)$  con la síntesis particular de  $\rho^\epsilon(x)$  propuesto en (2.27), o equivalentemente, para mostrar que  $\rho^\epsilon(x)$  satisface la propiedad (ii) de la **Hipótesis H**.

**Lema.** *Supongamos que  $V(x)$  es una CLF respecto al sistema (2.1) con controles tomando valores en el Zonotopo  $U$  y satisface la propiedad SCP, entonces el límite*

$$\blacksquare \quad \lim_{\beta(x) \rightarrow 0} \frac{a(x) + |a(x)|}{\beta(x)} = 0,$$

se cumple.

*Demostración.* Sea  $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n; \beta(x) = 0\}$  un punto arbitrario. Si  $x_0 = 0$ , entonces el límite coincide con el límite de la **Observación 3**. Por lo que supondremos  $x_0 \neq 0$ .

Recordando que  $\beta(x) = \varsigma_Z(b)$ , probaremos dicha igualdad si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x) + |a(x)|}{\beta(x)} = 0.$$

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

Por lo que, si  $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n ; \beta(x) = 0\}$ , por la desigualdad  $a(x_0) < \beta(x)$ , se tiene que  $a(x_0) < 0$ .

Por lo que, sea  $\Omega_\epsilon(x_0)$  una vecindad de  $x_0$  tal que  $a(x) < 0$  para todo  $x \in \Omega_\epsilon(x_0)$ .

Sea  $\{x_n\}$  una sucesión tal que  $\{x_n\} \rightarrow x_0$  y  $\beta(x_n) > 0$  para cada  $n$ . Entonces, existe un entero positivo  $N$  tal que  $\{x_n\} \in \Omega_\epsilon(x_0)$  para toda  $n > N$ , tal que  $a(x_n) < 0$  si  $n > N$ .

Entonces

$$\frac{a(x_n) + |a(x_n)|}{\beta(x_n)} = 0 \text{ sí } n > N.$$

Por lo que

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{a(x_n) + |a(x_n)|}{\beta(x_n)} = 0.$$

□

**Proposición 7.** *Supongamos que  $V(x)$  es una CLF (respecto al sistema (2.1) y el CVS  $U := Z(V) = [-r_1 v^1, r_1 v^1] \oplus \dots \oplus [-r_k v^k, r_k v^k] \oplus \bar{r} = S_1 \oplus \dots \oplus S_k \oplus \bar{r}$ , con  $S_i = r_i[-v^i, v^i] + \bar{r}^i$ ,  $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_m^i)^\top$  y  $\bar{r}^i = (\bar{r}_1^i, \bar{r}_2^i, \dots, \bar{r}_m^i)^\top$ , y satisface la propiedad SCP. Entonces  $u^\epsilon(x)$  dado por (2.25) es una fórmula de una  $\epsilon$ -familia ( $\epsilon > 0$ ) de controles admisibles óptimos que hacen al sistema (2.1) GAS.*

*Demostración.* Como consecuencia del término  $0 < \exp\left(-\epsilon \left| \frac{b_j(x) \varpi_j(x)}{\beta(x)} \right| \right) \leq 1$  para toda  $\epsilon > 0$ , se satisface la condición de restricción de control  $u_j^\epsilon(x) \in \left[ \sum_{i=1}^k (-r_i v^i + \bar{r}^i), \sum_{i=1}^k (r_i v^i + \bar{r}^i) \right]$ , para  $j = 1, \dots, m$ , y para toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Para verificar la continuidad; de acuerdo al límite del **Lema** anterior, del límite de la **Observación 3**, de la continuidad de los términos,  $\sum_{i=1}^k (r_i b_j(x) v_j^i + b_j(x) \bar{r}_j^i)$  sí  $b(x) \cdot v^i > 0$  o  $\sum_{i=1}^k (-r_i b_j(x) v_j^i + b_j(x) \bar{r}_j^i)$  sí  $b(x) \cdot v^i < 0$  y de la continuidad de la composición de funciones continuas, se siguen los siguientes límites para cada función  $u_j^\epsilon(x)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_j^\epsilon(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \beta(x)} u_j^\epsilon(x) = 0,$$

de esta manera se concluye que  $u_j^\epsilon(x)$  es continua y admisible. □

### 2.1.8. Ejemplos

**Ejemplo 1.** *Consideremos el problema de estabilizar el siguiente sistema escalar*

$$\dot{x} = \frac{x}{1+x^2} + u, \quad u \in U = [-r^-, r^+].$$

La figura 2.2 ilustra el flujo del sistema con entrada de control nula ( $u = 0$ ):

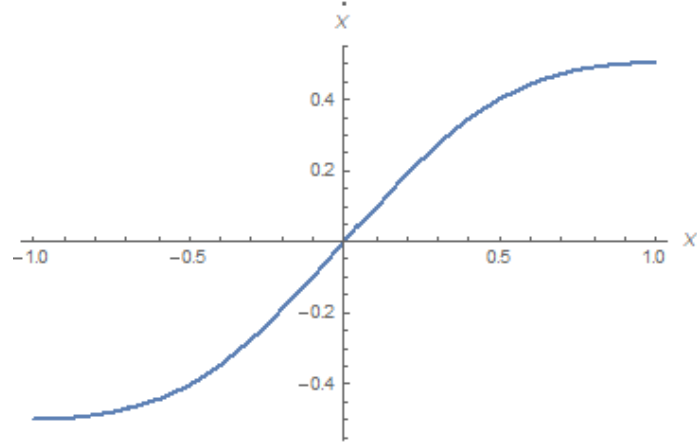


Figura 2.2: Sistema escalar con  $u = 0$ .

claramente es un sistema con equilibrio inestable en el origen.

Consideremos la función  $V = \frac{x^2}{2}$ , así obtenemos que  $a(x) = \nabla V(x)f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ,  $b(x) = -\nabla V(x)g(x) = -x$ . Si  $r^- = r^+ = 1$ , tenemos que  $V$  es una CLF ya que

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \dot{V} &= a(x) - b(x)u_\epsilon(x) \\ &= \frac{x^2}{1+x^2} - |x| < 0 \text{ para } x \neq 0, \end{aligned}$$

de manera que el estabilizador con mejor tasa es  $\varpi(x) = \text{sign}(x)$ . La función de retroalimentación explícita  $u_\epsilon(a, b) = \rho_\epsilon(a, b)\varpi$ , en función de  $x$  es:

$$u_\epsilon(a(x), b(x)) = \begin{cases} \text{sign}(x) \left[ 1 - \frac{|x| - \frac{x^2}{1+x^2}}{(1+e^{|x|})^{|x|}} e^{-\epsilon|x|} \right], & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

**Ejemplo 2.** Consideremos el problema de estabilizar el siguiente sistema, mediante funciones admisibles

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{y}{1+y^2} + u_1, \\ \dot{y} &= \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + u_2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

La figura 2.3 muestra la dinámica libre del sistema (2.30), para esto, se realizó una linealización alrededor del origen, pues éste es el único punto crítico que posee el sistema, con la intención de mostrar que dicho sistema es inestable.



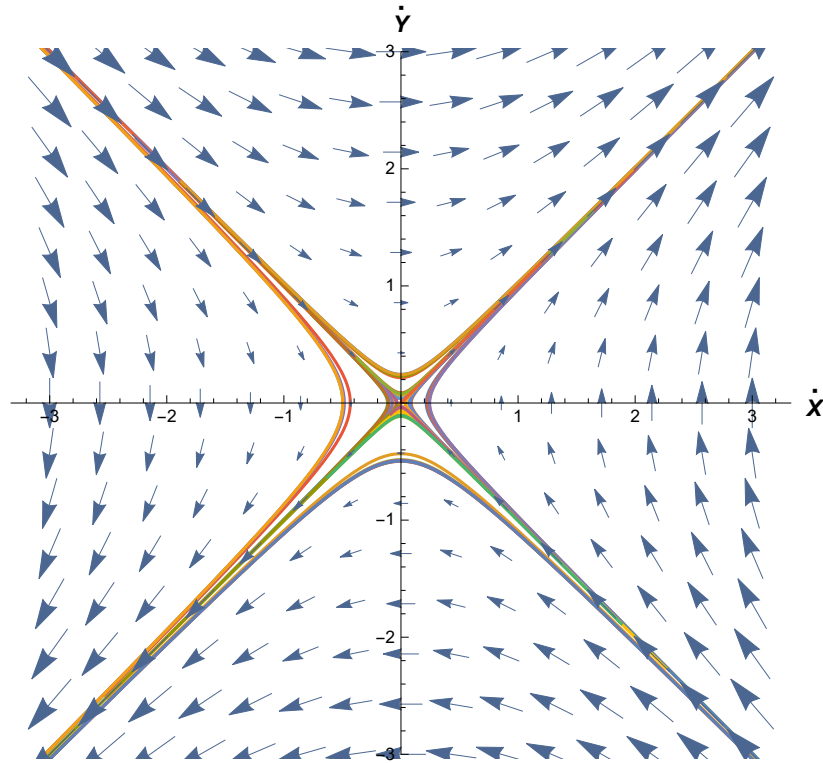


Figura 2.3: Dinámica libre del sistema (2.3).

Como CVS consideramos un hexágono centrado en el origen, generado por un Zonotopo  $U := Z(v^1, v^2, v^3)$  con  $v^1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v^2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$  y  $v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ .

La figura 2.4 muestra el hexágono generado por el Zonotopo,  $Z(v^1, v^2, v^3)$ , bajo una proyección de un hipercubo unitario, con centro en el origen.

2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotos con 0 en el interior

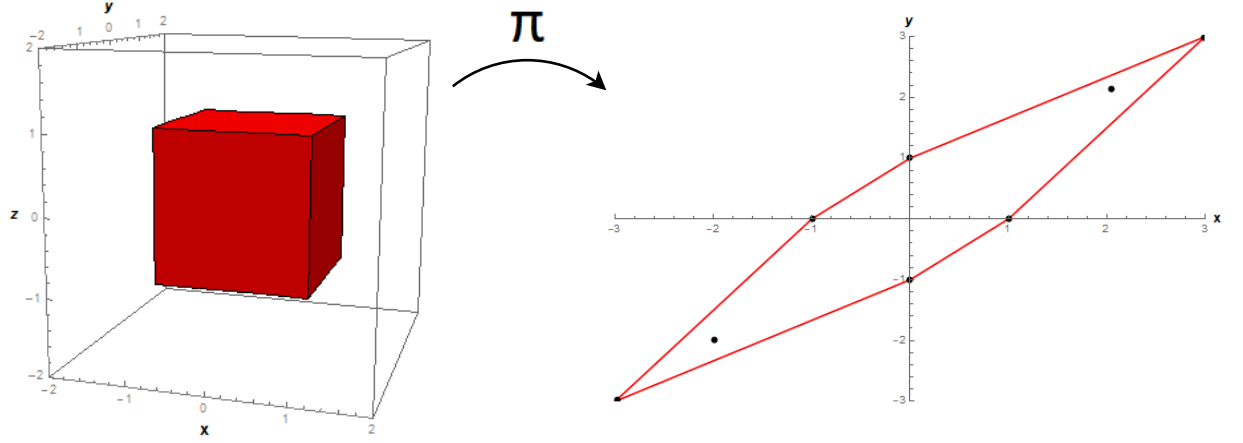


Figura 2.4: Proyección,  $\pi$ , de un hipercubo unitario, con centro en el origen, generando un Zonotopo hexagonal.

Tomando  $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , se tiene

$$\dot{V} = x \left( \frac{y}{1+y^2} + u_1 \right) + y \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + u_2 \right)$$

con

$$a(x, y) = \frac{xy}{1+y^2} + \frac{xy}{1+x^2} + \frac{y^3}{1+y^2}, \quad b_1 = -x \quad b_2 = -y.$$

De acuerdo a la condición CLF

$$\inf_{u_1, u_2} \dot{V} = a(x) - b_1 \varpi_1 - b_2 \varpi_2 = a(x) - \beta(x) < 0 \text{ para } x \neq 0.$$

La mejor tasa de control está dada por

$$\varpi(x) = \begin{pmatrix} 1.5 \text{sign}(b \cdot v^1) + 0.5 \text{sign}(b \cdot v^2) + \text{sign}(b \cdot v^3) \\ \text{sign}(b \cdot v^1) + 0.5 \text{sign}(b \cdot v^2) + 1.5 \text{sign}(b \cdot v^3) \end{pmatrix}.$$

Considerando el valor de la función signo como un caso, es posible mostrar que se cumple la condición CLF.

Donde los controles con mejor tasa,  $\varpi_1, \varpi_2$  son

$$\varpi_1 = \begin{pmatrix} 3 & \text{si } b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ 0 & \text{si } b \cdot v^1 < 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ -1 & \text{si } b \cdot v^1 < 0, b \cdot v^2 < 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ -3 & \text{si } b \cdot v^1 < 0, b \cdot v^2 < 0 \text{ y } b \cdot v^3 < 0 \\ 0 & \text{si } b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 < 0 \text{ y } b \cdot v^3 < 0 \\ 1 & \text{si } b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 < 0 \end{pmatrix}$$

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

y

$$\varpi_2 = \begin{pmatrix} 3 & \text{si } b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ 1 & \text{si } b \cdot v^1 < 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ 0 & \text{si } b \cdot v^1 < 0, b \cdot v^2 < 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ -3 & \text{si } b \cdot v^1 < 0, b \cdot v^2 < 0 \text{ y } b \cdot v^3 < 0 \\ -1 & \text{si } b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 < 0 \text{ y } b \cdot v^3 < 0 \\ 0 & \text{si } b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 < 0 \end{pmatrix}.$$

A continuación obtendremos la condición CLF:  $\inf_{u_1, u_2} \dot{V} < 0$  para  $x \neq 0$ , para los casos antes mencionados.

Teniendo en cuenta las siguientes desigualdades

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{y}{1+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{y^2}{1+y^2} < 1,$$

que aplica también para la variable  $x$ , se tiene:

El caso  $b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0$  y  $b \cdot v^3 > 0$ , con  $x > 0$  &  $y > 0$ :

$$\dot{V} = x \left( \frac{y}{1+y^2} - 3 \right) + y \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} - 3 \right) < 0.$$

El caso  $b \cdot v^1 < 0, b \cdot v^2 > 0$  y  $b \cdot v^3 > 0$ , con  $x = 0$  &  $y > 0$ :

$$\dot{V} = y \left( \frac{y^2}{1+y^2} - 1 \right) < 0.$$

El caso  $b \cdot v^1 < 0, b \cdot v^2 < 0$  y  $b \cdot v^3 > 0$ , con  $x < 0$  &  $y = 0$ :

$$\dot{V} = x * (1) < 0.$$

El caso  $b \cdot v^1 < 0, b \cdot v^2 < 0$  y  $b \cdot v^3 < 0$ , con  $x < 0$  &  $y < 0$ :

$$\dot{V} = x \left( \frac{y}{1+y^2} + 3 \right) + y \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + 3 \right) < 0.$$

El caso  $b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 < 0$  y  $b \cdot v^3 < 0$ , con  $x = 0$  &  $y < 0$ :

$$\dot{V} = y \left( \frac{y^2}{1+y^2} + 1 \right) < 0.$$

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

El caso  $b \cdot v^1 > 0$ ,  $b \cdot v^2 > 0$  y  $b \cdot v^3 < 0$ , con  $x > 0$  &  $y = 0$ :

$$\dot{V} = x * (-1) < 0.$$

De esta manera se cumple la condición CLF:  $\inf_{u_1, u_2} \dot{V} < 0$  para  $x \neq 0$ .

La función de retroalimentación explícita  $u_j^\epsilon(a(x), \beta(x))$  para  $j = 1, 2$  es

$$u_1^\epsilon(a(x), \beta(x)) = \begin{cases} \varpi_1 \left[ 1 - \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{4(e^{(|\gamma_1(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_1(x)|)} \right], & \text{si } \gamma_1(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_1(x) = 0, \end{cases}$$

donde  $\gamma_1(x) = \frac{-x\varpi_1}{x\varpi_1 + y\varpi_2}$ ,  
y

$$u_2^\epsilon(a(x), \beta(x)) = \begin{cases} \varpi_2 \left[ 1 - \frac{\beta(x) - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{4(e^{(|\gamma_2(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_2(x)|)} \right], & \text{si } \gamma_2(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_2(x) = 0, \end{cases}$$

donde  $\gamma_2(x) = \frac{-y\varpi_2}{x\varpi_1 + y\varpi_2}$  y el parámetro  $\epsilon > 0$ .

Podemos concluir que, dado un sistema afín en el control y conocida una función de Lyapunov  $V(x)$  con las propiedades CLF y SCP al menos en una vecindad  $\Omega$  del origen. Al aplicar el método de síntesis con CVS zonotopico, hemos logrado:

- Dar una familia de estabilizadores admisibles  $u^\epsilon(x)$  para cada  $\epsilon \in (0, \infty)$ .
- Para el caso  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ , el punto de reposo  $\bar{x} = 0$  del sistema a lazo cerrado (2.1) con retroalimentación admisible  $u^\epsilon(x)$  es GAS.

## 2.2. CLF-Estabilización con el zonotopo con 0 en la frontera como CVS

Retomando el sistema afín en el control multi-valuado

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j, \quad (2.31)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para  $j = 1, \dots, m$ , son campos vectoriales regulares. Aquí, regular significa continuo. Sin perder generalidad, suponemos que  $f(0) = 0$ . El CVS dado por el zonotopo  $U = Z(V) = [-r_1v^1, r_1v^1] \oplus \dots \oplus [-r_kv^k, r_kv^k] \oplus \bar{r}$ .

Si  $U = Z(V) = [0, r_1v^1] \oplus \dots \oplus [0, r_kv^k]$ , el control de retroalimentación restringido  $u(x)$  es un control positivo acotado.

El CVS es definido por

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow Z(V) : u(x) \text{ es regular}\}.$$

El principal objetivo en este capítulo es alcanzar la estabilización global asintótica (GAS) del sistema afín en el control (2.31), mediante un control de retroalimentación admisible  $u(x)$ , cuando el CVS es el zonotopo  $Z(V) = [0, r_1 v^1] \oplus \cdots \oplus [0, r_k v^k]$ , es decir,  $0 \in \partial Z(V)$ . Así, esta Sección §2.2, representa una extensión de la Sección §2.1, con el objetivo de incluir el caso de la entrada del control nulo en la frontera del CVS  $U$ , que representa el caso de controles positivos.

Dado el sistema afín en el control multi-valuado (2.31), con CVS cualquier conjunto convexo  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)^\top \in U$ , con  $\top$  denotando transposición. Decimos que una componente  $u_j$  de la entrada del control es signado si y sólo si (ssi)  $u_j$  puede tomar dos signos; mientras que es positiva si y sólo si  $u_j \geq 0$ . Una entrada de control  $u$  se denomina positiva ssi  $u_j \geq 0$  para toda  $j$ .

Nótese que si renombramos  $g_j(x) \leftarrow -g_j(x)$  y  $u_j \leftarrow -u_j$  en (2.31), cualquier componente  $u_j \leq 0$  se convierte en positiva, siempre que  $r_i^+ v_j^i \neq 0$ . Por consiguiente, en este trabajo incluimos el caso de componentes negativos en el control  $u$ .

### 2.2.1. CLF-Estabilización de sistemas afines con control escalar afines acotados

De acuerdo al Teorema 14 y el Corolario 12 de la Sección §5 del Apéndice, la función soporte  $\varsigma_U(b)$  es semidefinida positiva, entonces la síntesis de control propuesto  $u^\epsilon(x)$  definido en (2.25) es singular cuando  $\beta(x) = 0$  (es decir, cuando  $x$  se encuentra en el cono  $m$ -dimensional negativo ( $\mathcal{N}_\varsigma = C_i^-$ )), pero esto no ocurre con el caso escalar. Así, si el CVS es  $U = [0, r^+]$ , tomemos  $\varsigma_{Z^1}(b) = |b|r$  con

$$r = \begin{cases} r^+, & \text{si } b > 0, \\ 0, & \text{si } b \leq 0, \end{cases}$$

y

$$\varpi(b) = r \text{sign} b = \begin{cases} r^+, & \text{si } b > 0, \\ 0, & \text{si } b < 0. \end{cases}$$

De esta manera, el control dado en (2.25) se convierte en un control de retroalimentación escalar  $u^\epsilon(x)$  de la forma

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|b(x)|r - \frac{1}{2}(a(x) + |a(x)|)}{(1 + e^{(|b(x)|r)})|b(x)|r} e^{(-\epsilon|b(x)|r)}, & \text{si } |b(x)|r > 0, \\ 0, & \text{si } |b(x)|r = 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

De la Sección §2.1 podemos verificar que la desigualdad se cumple:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= a(x) - |b(x)|ru_\epsilon(x) \\ &< 0. \end{aligned}$$

**Observación 5.** Ya que  $r_i^- v_j^i = 0$  para alguna  $j$  y teniendo en cuenta que la función soporte  $\varsigma_{Z^m}(b)$  es semidefinida positiva, no es posible garantizar que el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{\beta(x)} = 0$$

se mantenga. Por lo que, para el caso de tener el control nulo en la frontera (controles positivos), será válida la fórmula propuesta sólo para la familia de sistemas que satisfacen este límite. De manera que las fórmulas de control (2.25)-(2.27) producen que tales sistemas sean GAS con respecto al CVS dado por el Zonotopo  $Z(V)$  que contiene al 0 en su frontera.

De esta manera, las condiciones de  $\rho(x)$  para asegurar la existencia de un control de retroalimentación admisible  $u(x)$  de tal manera que el sistema a lazo cerrado sea GAS (**Hipótesis H**), como la suficiencia de dicha **Hipótesis** para el problema de estabilizar con control  $u(x) := \rho(x)\varpi(x)$  (Teorema 9), aplican para el caso de controles positivos restringiéndonos a la **Observación 5**.

### 2.2.2. Estabilización global con el Zonotopo como CVS

A continuación exploramos la geometría detrás de la estabilización CLF del sistema (2.31) con CVS dado por el Zonotopo  $Z(V)$  que contienen el origen (no necesariamente como un punto interior), de manera que incluimos el caso de controles positivos.

Para nuestro problema de control, supongamos que  $U$  es un CVS cerrado con  $0 \in U$ . Observe que tenemos la condición CLF si hay una retroalimentación  $u(x)$  que toma valores en  $\partial U$  de tal manera que  $a(x) < b(x)u(x) \forall x \neq 0$ . De otra manera, para cualquier control  $u(x)$  que toma valores en  $U$ , tenemos que:  $b(x)u(x) \leq \mu^*(b(x))\mu(u(x))$ . Así, para  $u(x) = \varpi(x)$ , con  $\mu(\varpi(x)) = 1$  (ya que  $\varpi(x)$  toma valores en  $\partial U$ ) y recordando que  $\mu^*(b(x)) = \varsigma_U(b(x))$ ,

$$b(x)\varpi(x) = \varsigma_U(b(x)). \quad (2.33)$$

Por lo que, dada una CLF, entonces cualquier control  $\varpi(x)$  que satisface (2.33) establece la equivalencia entre la condición CLF y la desigualdad

$$\forall x \neq 0, \quad a(x) < \varsigma_U(b(x)). \quad (2.34)$$

Decimos que la retroalimentación  $\varpi(x)$  es la mejor tasa (óptima) de la ley de control respecto a CLF  $V(x)$  [para el sistema (2.31) con controles tomando valores en  $U$ ] ssi satisface

$$\forall x \neq 0, \quad a(x) - b(x) \cdot \varpi(x) = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0. \quad (2.35)$$

De esta manera, la condición CLF se satisface si existe un control óptimo  $\varpi(x)$ . Sin embargo, por (2.33), se sigue que  $\varpi(x)$  **no es admisible** ya que es singular en el conjunto

$$\mathcal{N}_b := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}. \quad (2.36)$$

Con respecto a la existencia, unicidad y regularidad del control  $\varpi(x)$ , en [11], [15] se mostró que (2.33) está garantizada, siempre que  $U$  pertenezca a la clase de cada CVS compacto estrictamente convexo (ningún segmento de línea está contenida en  $\partial U$ )  $u \in \mathbb{R}^m$  con  $0 \in \text{int}U$ , denotado por  $\mathcal{U}(\mathbb{R}^m)$ . Especialmente, se demostró que si  $U \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^m)$ , entonces  $\varsigma_U(b(x))$  es  $C^1(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$  y  $\varpi(x)$  es un control de retroalimentación de tipo gradiente de la forma

$$\varpi(x) := \omega(b(x)), \text{ donde } \omega(b) = (\nabla \varsigma_U(b))^\top, \quad (2.37)$$

y  $b(x)$  está dada por (2.4). Ahora, si  $\varsigma_U(b(x))$  es diferenciable en  $b(x)$  la fórmula (2.37) sigue siendo válida. Por lo que, si  $U = \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$ -polígono, entonces  $\varsigma_U(b(x))$  es seccionalmente lineal, de manera que, por (2.37)  $\omega(b)$  es constante en el interior de cada cono poliédrico,  $\text{int}C_i$ , es decir

$$\omega(b) = (\nabla \varsigma_Z(b))^\top = \begin{cases} v_1, & \text{si } b \in \text{int}C_1 \\ \vdots \\ v_k, & \text{si } b \in \text{int}C_k. \end{cases} \quad (2.38)$$

Además,  $\omega(b)$  es singular en las superficies de cambio  $\partial C_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Ahora, consideremos el Zonotopo  $Z(V) = S_1 \oplus \dots \oplus S_k \oplus \bar{r}$  con  $0 \in Z(V)$ . Recordemos que  $\varsigma_{Z^k}(b) = \sum_{i=1}^k (r_i |b \cdot v^i| + b \cdot \bar{r}^i)$ , una función definida positiva ssi  $0 \in \text{int}Z(V)$ , pero ésta sólo es semidefinida positiva si  $0 \in \partial Z(V)$ . Además, por el Teorema 17, tenemos que  $\mathcal{N}_\varsigma$  es un  $(m-d)$ -ortante en  $\mathbb{R}^m$ , siendo el cono normal de la  $d$ -cara  $F$  ( $1 \leq d \leq m$ ) de  $Z(V)$  tal que  $0 \in \text{relint}F$ . Por otro lado, si  $F = \{0\}$ -un vértice entonces se tiene al Zonotopo positivo  $Z(V)$ , y  $\mathcal{N}_\varsigma = \bar{\mathbb{R}}^m$ . En cualquier caso, de (2.37), tenemos que es constante en cada uno de los  $2^m$  ortantes abiertos  $\mathbb{R}^m$ .

### 2.2.3. Fórmula explícita de control de retroalimentación respecto al Zonotopo positivo

La fórmula que proponemos respecto al Zonotopo positivo, es la familia de controles (2.25) restringido al CVS  $Z(V)$ , pues consideramos que, por un lado; se usa casi todo el recurso de control disponible, pues toma valores muy próximos a la frontera del CVS  $Z(V)$  y también lo podemos aplicar al caso de entradas de control signados / positivos.

De manera que para extender la Proposición 7 al caso  $0 \in \partial Z(V)$ , se agregó la **Observación 5**, de tal forma que se puede utilizar en el caso cuando 0 esta en al frontera del CVS  $Z(V)$  (en particular, controles positivos). Así, si  $r_i^- v_j^i = 0$  para alguna  $j$ , la función  $\varsigma_{Z^m}(b)$  es sólo semidefinida positiva. Por lo que no es posible garantizar que el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{\beta(x)} = 0$$

se mantenga. Por lo tanto, al suponer que éste límite se cumple, se asegura que la fórmula de control (2.25)-(2.27) haga que tales sistemas sean GAS con respecto al CVS dado por el Zonotopo  $Z(V)$  que contiene al 0, es decir, con componentes en las entradas de control signadas / positivas.

### 2.2.4. Ejemplos

**Ejemplo 3.** Consideremos el problema uno-dimensional

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} + u.$$

La figura 2.5 muestra el flujo del sistema con entrada de control nula ( $u = 0$ ):

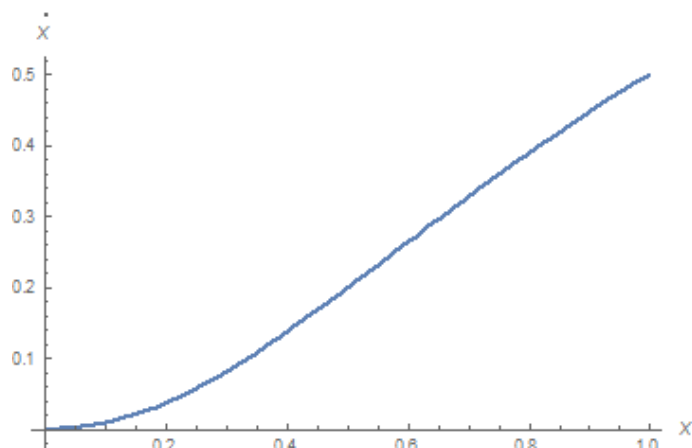


Figura 2.5: Sistema escalar con  $u = 0$ .

Considerando el cvs  $U = [0, r^+]$ . Sea  $V = \frac{x^2}{2}$ , de tal forma que  $a(x) = \nabla V(x)f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ ,  $b(x) = -\nabla V(x)g(x) = -x$  y  $r^+ = 1$ . Con  $V$  una CLF ya que:

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \dot{V} &= a(x) - |b(x)|r \\ &= \frac{x^3}{1+x^2} - |x| \\ &= \begin{cases} x \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right) < 0, & \text{si } x < 0, \\ x \left( \frac{x^2}{1+x^2} - 1 \right) < 0, & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

donde  $r = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ r^+ = 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ . La función de retroalimentación es dada por:

$$u_\epsilon(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - \frac{x - \frac{x^3}{1+x^2}}{(1+e^x)x} e^{-\epsilon x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$



El control óptimo (con mejor tasa) está dado por

$$\varpi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ r^+, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

**Ejemplo 4.** Consideremos el problema de estabilizar el siguiente sistema, mediante funciones admisibles

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{y}{1+y^2} + u_1, \\ \dot{y} &= \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + u_2. \end{aligned} \tag{2.39}$$

La figura 2.6 muestra la dinámica libre del sistema (2.39), para esto, se realizó una linealización alrededor del origen, pues éste es el único punto crítico que posee el sistema, con la intención de mostrar que dicho sistema es inestable.

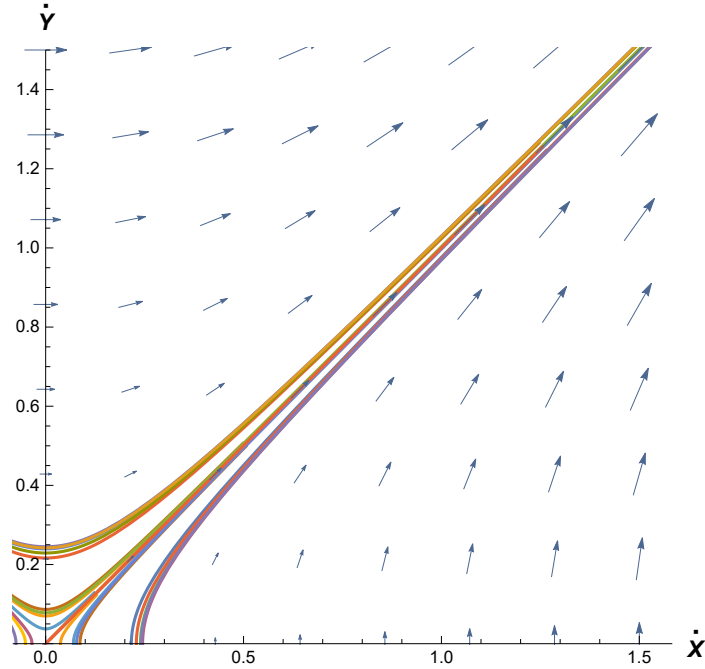


Figura 2.6: Dinámica libre del sistema (2.39).

Como cvs consideramos un hexágono centrado en el punto  $\bar{r} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$ , generado por un Zonotopo  $U := Z(v^1, v^2, v^3)$  con  $v^1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v^2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$  y  $v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ .

La figura 2.7 muestra el hexágono generado por el Zonotopo,  $Z(v^1, v^2, v^3)$ , bajo una proyección de un cubo unitario con  $\bar{0}$  en la frontera.

2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con  $\bar{0}$  en el interior

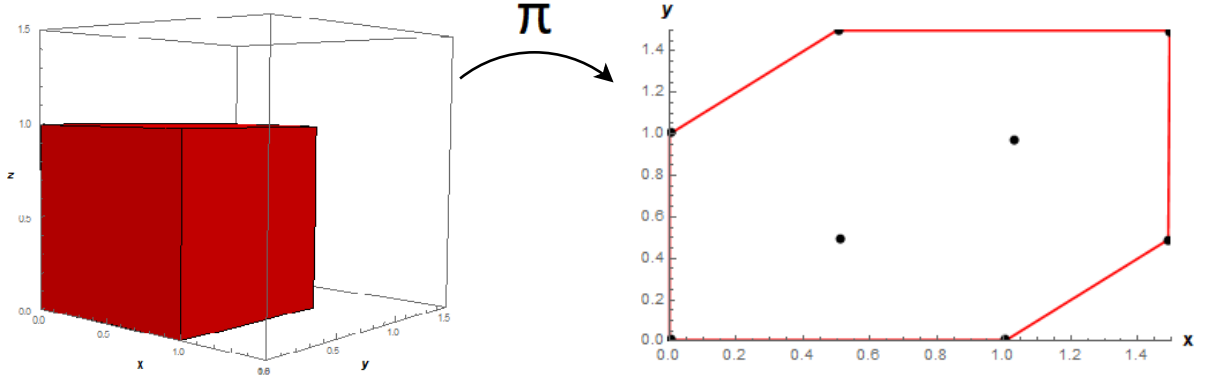


Figura 2.7: Proyección,  $\pi$ , de un cubo unitario, con  $\bar{0}$  en la frontera, generando un Zonotopo hexagonal.

Tomando  $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , se tiene

$$\dot{V} = x \left( \frac{y}{1+y^2} + u_1 \right) + y \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + u_2 \right)$$

con

$$a(x, y) = \frac{xy}{1+y^2} + \frac{xy}{1+x^2} + \frac{y^3}{1+y^2}, \quad b_1 = -x \quad b_2 = -y.$$

De acuerdo a la condición CLF

$$\inf_{u_1, u_2} \dot{V} = a(x) - b_1 \varpi_1 - b_2 \varpi_2 = a(x) - \beta(x) < 0 \text{ para } x \neq 0.$$

La mejor tasa de control está dada por

$$\varpi(x) = \begin{pmatrix} 0.5 \text{sign}(b \cdot v^2) + \text{sign}(b \cdot v^3) \\ \text{sign}(b \cdot v^1) + 0.5 \text{sign}(b \cdot v^2) \end{pmatrix}.$$

Ya que  $b \cdot v^i > 0$  para  $i = 1, 2, 3$ . Consideraremos cada caso por el vértice correspondiente al cubo unitario, mediante el valor de la función signo es posible mostrar que se cumple la condición CLF.

Donde los controles con mejor tasa,  $\varpi_1, \varpi_2$  son

$$\varpi_1 = \begin{pmatrix} 1.5 & \text{si} & b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ 1.5 & \text{si} & b \cdot v^1 = 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ 1 & \text{si} & b \cdot v^1 = 0, b \cdot v^2 = 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ 0 & \text{si} & b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 = 0 \text{ y } b \cdot v^3 = 0 \\ 0.5 & \text{si} & b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 = 0 \end{pmatrix}$$

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

y

$$\varpi_2 = \begin{pmatrix} 1.5 & \text{si } b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ 0.5 & \text{si } b \cdot v^1 = 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ 0 & \text{si } b \cdot v^1 = 0, b \cdot v^2 = 0 \text{ y } b \cdot v^3 > 0 \\ 1 & \text{si } b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 = 0 \text{ y } b \cdot v^3 = 0 \\ 1.5 & \text{si } b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0 \text{ y } b \cdot v^3 = 0 \end{pmatrix} .$$

A continuación obtendremos la condición CLF:  $\inf_{u_1, u_2} \dot{V}(x) < 0$  para  $x \neq 0$ , para los casos antes mencionados.

Teniendo en cuenta las siguientes desigualdades

$$0 \leq \frac{y}{1+y^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{y^2}{1+y^2} < 1,$$

que aplica también para la variable  $x$ , se tiene:

El caso  $b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0$  y  $b \cdot v^3 > 0$ , con  $x > 0$  &  $y > 0$ :

$$\dot{V} = x \left( \frac{y}{1+y^2} - 1.5 \right) + y \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} - 1.5 \right) < 0.$$

El caso  $b \cdot v^1 = 0, b \cdot v^2 > 0$  y  $b \cdot v^3 > 0$ , con  $x > y > 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x \left( \frac{y}{1+y^2} - 1.5 \right) + y \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} - 0.5 \right) \\ &< -x + y < 0. \end{aligned}$$

El caso  $b \cdot v^1 = 0, b \cdot v^2 = 0$  y  $b \cdot v^3 > 0$ , con  $x > 0$  &  $y = 0$ :

$$\dot{V} = x(-1.5) < 0.$$

El caso  $b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 = 0$  y  $b \cdot v^3 = 0$ , con  $x = 0$  &  $y > 0$ :

$$\dot{V} = y \left( \frac{y^2}{1+y^2} - 1 \right) < 0.$$

El caso  $b \cdot v^1 > 0, b \cdot v^2 > 0$  y  $b \cdot v^3 = 0$ , con  $y > x > 0$ :

$$\dot{V} = x \left( \frac{y}{1+y^2} - 0.5 \right) + y \left( \frac{x}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} - 1.5 \right) < 0.$$

De esta manera se cumple la condición CLF:  $\inf_{u_1, u_2} \dot{V} < 0$  para  $x \neq 0$ .

## 2 CLF-Estabilización con controles restringidos a Zonotopos con 0 en el interior

La función de retroalimentación explícita  $u_j^\epsilon(a(x), \beta(x))$  para  $j = 1, 2$  es

$$u_1^\epsilon(a(x), \beta(x)) = \begin{cases} \varpi_1 \left[ 1 - \frac{\beta(x) - a(x)}{4(e^{(|\gamma_1(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_1(x)|)} \right], & \text{si } \gamma_1(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_1(x) = 0, \end{cases}$$

donde  $\gamma_1(x) = \frac{-x\varpi_1}{x\varpi_1 + y\varpi_2}$ , y

$$u_2^\epsilon(a(x), \beta(x)) = \begin{cases} \varpi_2 \left[ 1 - \frac{\beta(x) - a(x)}{4(e^{(|\gamma_2(x)|)} + 1)\beta(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_2(x)|)} \right], & \text{si } \gamma_2(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_2(x) = 0, \end{cases}$$

donde  $\gamma_2(x) = \frac{-y\varpi_2}{x\varpi_1 + y\varpi_2}$  y el parámetro  $\epsilon > 0$ .

Podemos concluir que, dado un sistema afín en el control y conocida una función de Lyapunov  $V(x)$  con las propiedades CLF y SCP al menos en una vecindad  $\Omega$  del origen, al aplicar el método de síntesis con CVS  $U := [0, r^+]$ , en el caso escalar y CVS zonotopico con  $\bar{0}$  en la frontera para el caso general, hemos logrado:

- Dar una familia de estabilizadores admisibles  $u^\epsilon(x)$  para cada  $\epsilon \in (0, \infty)$ .
- Para el caso  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ , el punto de reposos  $\bar{x} = 0$  del sistema a lazo cerrado (2.31) con retroalimentación admisible  $u^\epsilon(x)$  es GAS.

### 3 Una solución a un problema unificador de CLF

Es importante mencionar que el problema de hacer GAS un sistema (2.1) a través de controles *acotados* de retroalimentación está lejos de ser trivial. De hecho, si tomamos cualquier CLF  $V(x)$  para el sistema (2.1), tenemos: (i) ya que su conjunto asociado a la dinámica libre inestable  $\mathcal{A}_+$  puede ser *no acotado*, entonces de (2.3) el mínimo CVS  $U_{r^*}$  puede ser *no acotado* también; o (ii) un control acotado basado en alguna  $V(x)$  puede cancelar las no linealidades favorables, induciendo la aparición de fenómenos indeseables, como nuevos equilibrios o ciclos-límite, que representan obstáculos la GAS del sistema.

Ahora bien, dado que la fórmula de control (2.26) mejora la dinámica no forzada del sistema cuando es benéfica en el problema de estabilización, la misma función de Lyapunov  $V(x)$  puede proponerse como candidata CLF para el sistema (2.1), siempre que su mínimo global sea el equilibrio deseado  $\bar{x}$  del sistema no forzado  $dx/dt = f(x)$  a estabilizar.

Sin embargo, en Solís-Daun [19] se demostró que si la función de Lyapunov  $V(x)$  para el atractor global  $K$  desaparece en un conjunto de nivel  $V_o$ , subconjunto de una bola absorbente  $\mathcal{B}$ . Entonces, su conjunto mínimo es  $V_o$ , de modo que  $\forall x \in V_o, \nabla V(x) = 0$ . Por lo tanto, la condición  $\mathcal{N}_b \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}_-$  no se cumple: Si  $b(x) = 0$ , entonces  $a(x) \leq 0$ , con  $\emptyset \neq V_o \subseteq \mathcal{N}_a \cap \mathcal{N}_b$ . Por lo tanto,  $V(x)$  no es una CLF, a menos que  $V_o$  sea el conjunto de equilibrios de la ecuación  $\dot{x} = f(x)$ .

Además, dado que los atractores globales  $K$  son generalmente asimétricos respecto a los equilibrios del sistema no forzado (*e.g.*, tipo “mariposa” Lorenziana, véase la Fig. 4), las bolas absorbentes  $\mathcal{B}$ , a menudo definidas como conjuntos de nivel de las funciones de Lyapunov  $V(x)$ , tampoco están centradas en esos puntos. En particular, supongamos que  $V_o = \{v_o\}$  con  $v_o \neq \bar{x}$  –un equilibrio aislado de  $dx/dt = f(x)$ . Entonces,  $\mathcal{N}_b \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}_-$  no se satisface de nuevo. Además, una traslación de coordenadas no lo remedia: De hecho, si  $x = z + v_o - \bar{x}$ , y definimos  $W(z) = V(z + v_o - \bar{x})$ , de modo que  $W(\bar{x}) = V(v_o) = 0$ . Por simplicidad, sea  $dz/dt = \bar{f}(z) + Bu$ , con  $\bar{f}(z) = f(z + v_o - \bar{x})$  y  $B$  una matriz constante de rango completo. Así,  $\bar{a}(z) = 0$  si  $z = \bar{x}$ , pero  $\bar{x}$  ya no es un equilibrio,  $\bar{f}(\bar{x}) = f(v_o) \neq 0$ . Por lo tanto, puede existir una vecindad  $N$  de  $\bar{x}$  tal que para algunos  $\bar{z} \in N \setminus \{\bar{x}\}$ ,  $\bar{a}(\bar{z}) = L_f W(\bar{z}) > 0$ , siempre que  $\bar{b}(\bar{z}) = -L_B W(\bar{z}) = 0$ . Entonces,  $W(z)$  no es un CLF. Por último, un desplazamiento de coordenadas aplicado *solamente* a  $V(x)$  es aún peor:  $\mathcal{A}_+$  puede ser *no acotado*, de modo que el mínimo CVS  $U_{r^*}$  puede ser *no acotado* también.

Por lo tanto, como una simple traslación de coordenadas no consigue en general mantener la estructura de estabilidad, una solución consiste en “deformar”  $V(x)$  en otra  $\bar{V}(x)$ , tan regular como se desee, con mínimo global  $\bar{x}$ , tal que  $\bar{V}(x)$  coincida con  $V(x)$  en

### 3 Una solución a un problema unificador de CLF

$\mathbb{R}^n \setminus \text{int}V^{-1}[0, c]$ , y  $\mathcal{B} \subset \text{int}V^{-1}[0, c]$ , para algún  $c > 0$ . A su vez, este problema puede ser reformulado en términos del “uniting CLF problem” (véase [1] y las referencias en él): Unir dos CLFs  $V_0(x)$  &  $V_\infty(x)$ , donde  $V_0(x)$  es una CLF local y  $V_\infty(x)$  una global; y que fue motivado originalmente por el problema de unir controles locales (posiblemente óptimos) con controles globales (ver [39]).

Por lo tanto, vamos a modificar la solución al “uniting CLF problem” obtenida en [1], de modo que podamos extender el método propuesto en [16] para hacer cualquier equilibrio GAS. En el presente contexto, aunque  $V_0(x)$  puede ser cualquier CLF elegida para hacer GAS un punto  $\bar{x}$  tal que  $f(\bar{x}) + \sum g_j(\bar{x}) \bar{u}_j = 0$  (si  $\bar{u} = 0$ , entonces  $\bar{x}$  es un equilibrio del sistema no forzado  $dx/dt = f(x)$ ), también puede elegirse para satisfacer alguna condición *optima* “local”, mejorando así localmente el rendimiento del sistema a lazo cerrado.

*Notación:* Para  $\eta = 0/\infty$  y  $\bowtie \in \{>, <\}$ , denotamos  $V_\eta^{-1}[0, c] := \{x \in \mathbb{R}^n : V_\eta(x) \leq c\}$ , para cualquier  $c > 0$ ,  $a_\eta(x) := L_f V_\eta(x)$  y  $b_\eta(x) := -L_g V_\eta(x)$ . Además,  $\mathcal{N}_{b_\eta} := \{x \in \mathbb{R}^n : b_\eta(x) = 0\}$ ,  $\mathcal{A}_\pm^\eta := \{x \in \mathbb{R}^n : a_\eta(x) \bowtie 0\}$ , y  $\mathcal{N}_{a_\eta} := \{x \in \mathbb{R}^n : a_\eta(x) = 0\}$ .

Ahora, utilizamos el método dado en [1] para resolver el “uniting CLF problem”, modificándolo en consecuencia para nuestro problema de control particular. De hecho, elegimos una (posiblemente óptima localmente) CLF  $V_0(x)$ , si su mínimo se encuentra en el punto deseado  $\bar{x}$  a estabilizar; mientras que, en un espíritu basado en la pasividad, elegimos una CLF  $V_\infty(x)$  porque el correspondiente conjunto inestable de dinámica libre  $\mathcal{A}_+^\infty$  está “atrapado” en una bola absorbente compacta  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A}_+^\infty \subset \mathcal{B}$ , normalmente construida de “tamaño” mínimo. Por lo tanto,  $V_\infty(x)$  es una CLF para un “buen” rendimiento “en general”, tal que  $u_\varepsilon(x)$  son controles de amortiguación fuera de  $\mathcal{B}$ . Entonces, dados los CLFs  $V_0(x)$  &  $V_\infty(x)$ , el problema unificador CLF consiste, *grosso modo*, en buscar un tercer CLF  $V(x)$  que sea igual (hasta múltiplos escalares) a: (1)  $V_\infty(x)$  fuera de un conjunto compacto dado, y (2)  $V_0(x)$  en una vecindad dada de  $\bar{x}$  (ver detalles más adelante en (3.6)).

**Suposición 1:** Supongamos que las funciones  $V_0(x)$  y  $V_\infty(x)$  son ambas propias y de clase  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ , con  $V_0(x)$  desapareciendo sólo en un punto deseado  $\bar{x}$  y  $V_\infty(x)$  no negativo, y dos números  $R_0 > 0$  y  $r_\infty > 0$  tales que:

(i)  $\mathcal{B} = V_\infty^{-1}[0, r_\infty + \epsilon]$  es una bola absorbente compacta para el sistema no forzado de (2.1), para algún pequeño  $\epsilon \geq 0$ , por lo que  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$ ,  $a_\infty(x) < 0$ , y  $V_\infty \upharpoonright_{V_0} = 0$  para un conjunto compacto  $V_0 \subset \text{int}\mathcal{B}$ .

(ii)  $\forall x \in V_0^{-1}[0, R_0]$ , tenemos  $\mathcal{N}_{b_0} \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}_-^0$ ,  $\forall x \neq 0$ ,  $(b_0(x) = 0) \Rightarrow (a_0(x) < 0)$ .

(iii) Suposición de cobertura: tenemos  $\{x \in \mathbb{R}^n : V_0(x) < R_0\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}) = \mathbb{R}^n$ .

**Suposición 2:**  $\forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : V_0(x) < R_0\} \cap (\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B})$ ,

$$a_0(x) \|b_\infty(x)\| < |a_\infty(x)| \|b_0(x)\|. \quad (3.1)$$

Ya que  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$ ,  $a_\infty(x) < 0$ , tenemos  $a_0(x) \|b_\infty(x)\| + a_\infty(x) \|b_0(x)\| < 0$ , supuesto en [1]. La condición (3.1) significa que la dinámica libre estable inducida por  $V_\infty(x)$  (debido a  $|a_\infty(x)|$ ) mayoriza, en algún sentido, la dinámica libre inestable inducida por  $V_0(x)$  (debido a  $a_0(x)$ ).

### 3 Una solución a un problema unificador de CLF

La CLF  $V(x)$  propuesta en [1] es definida como un tipo de *combinación convexa* de  $V_0(x)$  &  $V_\infty(x)$ :

$$\begin{aligned} V(x) &= R_0[\phi_0(V_0(x)) + \phi_\infty(V_\infty(x))]V_\infty(x) + \\ & r_\infty[1 - \phi_0(V_0(x)) - \phi_\infty(V_\infty(x))]V_0(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $\phi_0, \phi_\infty : [0, \infty) \rightarrow [0, 1/2]$  son funciones no decrecientes de clase  $\mathcal{C}^1$  que satisfacen

$$\phi_\eta(s) \begin{cases} = 0, & \forall s \leq r_\eta, \\ > 0, & \forall r_\eta < s < R_\eta, \\ = \frac{1}{2}, & \forall s \geq R_\eta, \end{cases} \quad (3.3)$$

para  $\eta = 0/\infty$ , con  $r_0 = \max_{\{x: V_\infty(x) \leq r_\infty\}} V_0(x)$ , y  $R_\infty = \min_{\{x: V_0(x) \geq R_0\}} V_\infty(x)$ , cuando  $\{x : V_0(x) \geq R_0\} \neq \emptyset$ ; de lo contrario, si es vacío, entonces elegimos cualquier  $R_\infty > r_\infty$ .

Podemos inclusive definir funciones  $\phi_0, \phi_\infty$  lo suficientemente regulares: *E.g.* para  $\eta = 0/\infty$ , las siguientes funciones son  $\mathcal{C}^\infty$  y *planas* en  $s = r_\eta, R_\eta$ ,

$$\phi_\eta(s) := \frac{\frac{1}{2}\chi_{r_\eta}(s)}{\chi_{r_\eta}(s) + \chi_{R_\eta}(s)} = \begin{cases} 0, & \forall s \leq r_\eta, \\ \frac{\frac{1}{2}\zeta_{r_\eta}(s)}{\zeta_{r_\eta}(s) + \zeta_{R_\eta}(s)}, & r_\eta < s < R_\eta, \\ \frac{1}{2}, & \forall s \geq R_\eta, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{donde } \chi_{r_\eta}(s) &:= \begin{cases} 0, & \forall s \leq r_\eta, \\ \zeta_{r_\eta}(s) > 0, & \forall s > r_\eta, \end{cases} \\ \text{y } \chi_{R_\eta}(s) &:= \begin{cases} \zeta_{R_\eta}(s) > 0, & \forall s < R_\eta, \\ 0, & \forall s \geq R_\eta, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

con  $\zeta_{r_\eta}(s) = e^{1/(r_\eta - s)}$  y  $\zeta_{R_\eta}(s) = e^{1/(s - R_\eta)}$ . Ambos,  $\chi_{r_\eta}(s)$  y  $\chi_{R_\eta}(s)$  son  $\mathcal{C}^\infty$ , acotados por 1, y el *plano* en  $r_\eta$  &  $R_\eta$ , respectivamente. Recordemos que una función  $h$  es *plana* en un punto  $s^*$  ssi tiene derivadas de todos los órdenes en  $s^*$ , y  $\forall k \geq 0, d^k h(s^*)/ds^k = 0$ .

Por lo tanto, bajo las Suposiciones 1 & 2, trabajando a lo largo de la línea de la prueba del Teorema 2.1 en [1], tenemos que  $V(x)$  definida en (3.2) es una CLF global [para el sistema (2.1) y controles tomando valores en algún CVS  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ ] tal que

1.  $\mathcal{N}_b \setminus \{0\} \subset \mathcal{A}_-$
  2.  $\mathcal{B} \subseteq \{x : V(x) = r_\infty V_0(x)\}$ , y
  3.  $\{x : V_0(x) \geq R_0\} \subseteq \{x : V(x) = R_0 V_\infty(x)\}$ .
- (3.6)

Note que en vista de la segunda condición, si  $V_0(x)$  satisface la *propiedad de control pequeño*, entonces  $V(x)$  también la satisface.

De la tercera condición tenemos que  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus V_0^{-1}[0, R_0], V(x) = R_0 V_\infty(x)$ . Entonces tomando  $R^* > R_0$  tal que  $V_0^{-1}[0, R_0] \subset \text{int} V_\infty^{-1}[0, R^*]$ , con  $V_\infty^{-1}[0, R^*]$  una bola absorbente compacta para el sistema no forzado (2.1), de manera que  $\mathcal{N}_a \cup \mathcal{A}_+ \subset V_\infty^{-1}[0, R^*]$ . Por lo tanto, tenemos que el conjunto resultante de la dinámica libre inestable  $\mathcal{A}_+$  suele ser mayor que el original,  $\mathcal{A}_+^\infty$ , inducido por  $V_\infty(x)$ . De hecho,  $\mathcal{A}_+^\infty \subset \mathcal{B} = V_\infty^{-1}[0, r_\infty + \epsilon]$ , para algún  $\epsilon \geq 0$ , mientras que  $\mathcal{A}_+$  está dentro de la bola compacta absorbente  $V_\infty^{-1}[0, R^*]$ , con  $\mathcal{B} \subset V_\infty^{-1}[0, R^*]$ . Sin embargo, es un precio que hay que pagar para obtener estabilidad frente a un punto  $\bar{x}$  que es distinto de cualquier mínimo de  $V_\infty(x)$ .

### 3 Una solución a un problema unificador de CLF

Así, podemos aplicar el método propuesto para encontrar el mínimo CVS  $U_{\mathbf{r}^*}$  con respecto a una familia de CVS  $U_{\mathbf{r}} \in \mathcal{K}^0(\mathbb{R}^m)$ , resolviendo el programa minimax (2.2). Por lo que, de (2.4)-(3.2), obtenemos

$$\begin{aligned} a(x) &:= L_f V(x) = A(x) L_f V_0(x) + B(x) L_f V_\infty(x) \text{ y} \\ b(x) &:= -L_g V(x) = -(A(x) L_g V_0(x) + B(x) L_g V_\infty(x)), \end{aligned} \quad (3.7)$$

con

$$\begin{aligned} A(x) &= [R_0 V_\infty(x) - r_\infty V_0(x)] \phi'_0(V_0(x)) + \\ & r_\infty [1 - \phi_0(V_0(x)) - \phi_\infty(V_\infty(x))] \text{ and} \\ B(x) &= [R_0 V_\infty(x) - r_\infty V_0(x)] \phi'_\infty(V_\infty(x)) + \\ & R_0 [\phi_0(V_0(x)) + \phi_\infty(V_\infty(x))], \end{aligned} \quad (3.8)$$

utilizando la notación tomada de [1].

Por lo tanto,  $V(x)$  definido en (3.2) es una CLF [para los sistemas afines (4.3) & (4.17) que son punto-disipativos a lazo abierto y cualquier CVS  $U_{\mathbf{r}}$ ,  $\text{int}U_{\mathbf{r}} \supset U_{\mathbf{r}^*}$ ], tal que su mínimo global está en un equilibrio  $\bar{x}$ , por lo que podemos diseñar controles admisibles de retroalimentación que hacen  $\bar{x}$  GAS. Finalmente, suponiendo que  $V_0(x)$  y  $V_\infty(x)$  son ambos de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $V(x)$  es también de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  si elegimos funciones  $\phi_0(s)$  &  $\phi_\infty(s)$  definidas en (3.4)-(3.5).



## 4 CLF-Estabilización global de dos sistemas caóticos controlados con CVS Zonotopico

Sabemos que el sistema de Lorenz es muy complejo, pues a partir de ciertos parámetros surge “caos”, de esta manera, el primer objetivo será resolver el problema de hacer GAS un sistema de Rössler, ya que O. Rössler presentó en los años 70 un conjunto de ecuaciones diferenciales en espacios de fase tridimensionales que tienen los mínimos ingredientes para el caos en tiempo continuo. Rössler ideó su sistema para comprender mejor el funcionamiento del sistema de Lorenz, así como otros tipos de dinámica caótica.

Así, para lograr la GAS de este par de sistemas, haremos uso del Teorema 6 de síntesis de controles de retroalimentación regulares y acotados de acuerdo a la teoría CLF.

### 4.1. Sistemas Dinámicos Disipativos

Sea la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ , y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua con  $f(0) = 0$ . Dada una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , nombramos

$$a(x) := L_f V(x) = \nabla V(x) \cdot f(x), \quad (4.2)$$

la derivada direccional de  $V(x)$  respecto al campo vectorial  $f(x)$ . Claramente la derivada respecto al tiempo de  $V(x)$  a lo largo de las soluciones de (4.1) cumple  $dV/dt = a(x)$ .

Con base en  $a(x)$  definimos  $\mathcal{N}_a := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) = 0\}$ ,  $\mathcal{A}_- := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) < 0\}$  y  $\mathcal{A}_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) > 0\}$ . Note que  $\mathcal{N}_a \cup \mathcal{A}_- \cup \mathcal{A}_+ = \mathbb{R}^n$ .

Sea  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  cualquier vecindad abierta que contiene al origen, su *complemento abierto*  $\text{int}N^c := \mathbb{R}^n \setminus \bar{N}$  (aquí,  $\bar{N}$  significa la *cerradura del conjunto*  $N$ ). Recordemos que una función  $V : N \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es:

- (i) *definida positiva* ssi  $V(0) = 0$ , y  $V(x) > 0$  para  $x \neq 0$ .
- (ii) *propia* ssi  $V^{-1}[0, c] = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq V(x) \leq c\}$  es compacto para cualquier  $c \geq 0$ . En  $\mathbb{R}^n$ , este concepto es una equivalencia a *radialmente no acotada*:  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ .
- Además, consideremos la siguiente propiedad de tasa de decaimiento:
- (iii)  $\forall x \in N \setminus \{0\}$ ,  $dV/dt = L_f V(x) := \nabla V(x) \cdot f(x) < 0$ .

**Definición 5.** Una función de Lyapunov estricta para valores-grandes  $V : \text{int}N^c \rightarrow \mathbb{R}$  para el sistema (4.1) es una función de clase  $C^\kappa(\text{int}N^c)$  (para  $\kappa \geq 1$ ), que satisface (ii) y (iii) de arriba (con  $N$  reemplazado por  $\text{int}N^c$ ). Una función de Lyapunov estricta global  $V(x)$  es una función de clase  $C^\kappa(\mathbb{R}^n)$ , para  $\kappa \geq 1$ , que satisface las propiedades (i), (ii), y (iii) de arriba con  $N$  reemplazado por  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 6.** Un sistema (4.1) se dice *punto-disipativo* ssi existe un conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$  que atrae a toda  $x \in \mathbb{R}^n$ .

No obstante, deseáramos tener un estimado de  $K$  si no tenemos una descripción exacta de él.

**Definición 7.** Una *bola absorbente* es cualquier conjunto acotado positivamente invariante  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  tal que todas las soluciones que empiezan en  $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{B}$  entran en su frontera  $\partial\mathcal{B}$  en tiempo finito.

En este contexto, el resultado es de suma importancia.

**Teorema 8.** [13] *Un sistema (4.1) es punto-disipativo ssi existe el máximo atractor global  $K$ , y también ssi existe una bola absorbente  $\mathcal{B}$ . Además,  $K$  es un conjunto conexo.*

## 4.2. Estabilización de un sistema controlado acotado basado en el sistema de Rössler

### 4.2.1. Construcción de una bola absorbente para el sistema de Rössler

Poincaré-Bendixson mostró en su teorema que el caos no puede existir en sistemas bidimensionales, por lo que se necesita una dimensión mínima de tres para el comportamiento caótico. Partiendo de esta premisa, O. Rössler introdujo un conjunto de ecuaciones diferenciales en espacios fase tridimensionales durante los años 70. Estos sistemas se diseñaron para poseer los elementos mínimos necesarios para el caos en tiempo continuo. Entre estos sistemas, una de las conocidas ecuaciones de Rössler, ampliamente estudiada en [32], es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 + x_1^2, \\ \dot{x}_3 &= \mu(\nu x_1 - x_3), \end{aligned} \tag{4.3}$$

con parámetros  $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Rössler ideó su sistema para comprender mejor el funcionamiento del sistema de Lorenz, así como otros tipos de dinámica caótica, para algunos valores de los parámetros, ver Figura 4.1.

Además, en [32], el sistema (4.3) fue nombrado "Ecuación 3", se decía: "*Both the Lorenz equation and Equation 3 produce globally attracting chaotic regimes.*" Sin embargo, hasta donde sabemos, no se ha mostrado prueba alguna de esta afirmación para el sistema (4.3). Incluso pasó desapercibida en [23]: "*people do not know whether the Rössler system is globally attractive ... Some global synchronization results have been obtained on the*

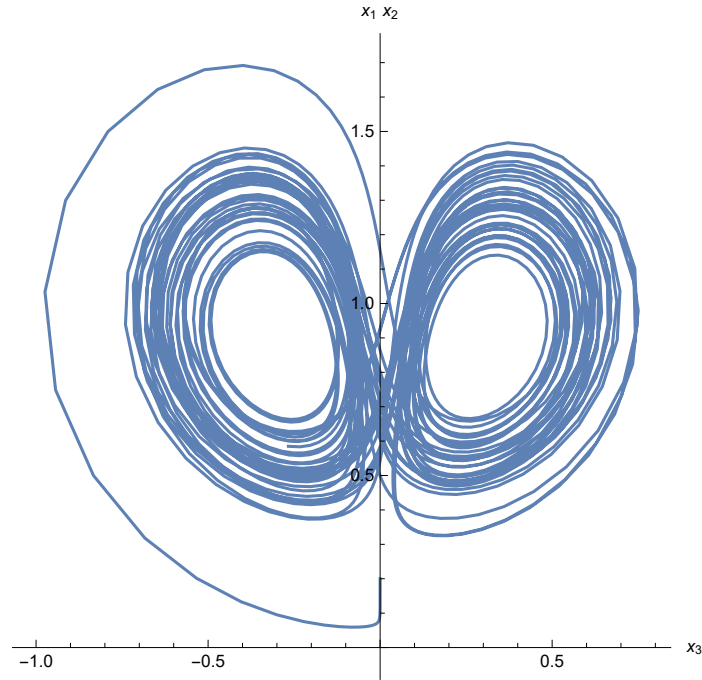


Figura 4.1: Caos de tipo *Lorenziano* de la ecuación de Rössler (4.3), proyectado en el plano  $x_1x_2$ . Parámetros:  $\alpha = 0.1, \mu = 0.08, \nu = 0.125$ . Condiciones iniciales:  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0, 0.2, 10^{-6})$ .

*assumption that the Rössler system is globally bounded. However, the reasoning on the assumption has not been verified*” Párrafo que alude al conjunto de las 6 ecuaciones caóticas de Rössler, de las cuales (4.3) es la tercera.

Por lo tanto, a continuación mostraremos que (4.3) es efectivamente un sistema punto-disipativo, construyendo una bola absorbente explícita para éste, definida como un conjunto de nivel de una función de Lyapunov  $V(x)$ , y que abarca cada caso para los parámetros  $(\alpha, \mu, \nu)$  estudiados en este trabajo, incluyendo aquellos que generan comportamiento caótico. Como se mencionó en la Introducción, este es un problema difícil. Sin embargo, una pista para resolverlo se encuentra si prestamos atención a los dos párrafos siguientes tomados de [31] relativos a una versión preliminar del sistema (4.3):

*“The first equation consists of a 2-variable, double focus subsystem complemented by a linearly coupled third variable”, and it was also said that “The subsystem  $\{x_1, x_2\}$  is a double-focus system, ... if  $x_3 = \text{const} = \text{zero}$ . The addition of third line renders the 2 foci unstable (one for  $x_3 = +\text{const}$ , the other for  $x_3 = -\text{const}$ ).”*

En [32], la ecuación (4.3) era una mejora de la dada en [31], en el sentido de que exhibe *“an asymmetrical form of chaos ... with a constant added to the third line”* (parámetro  $\nu$ ), al tiempo que comparte las propiedades antes mencionadas: *“[in] Equation 3 ... the first two lines determine a double-focus-plus-saddle system [with] the switching variable ... simplified up to linearity.”*

Ahora, consideremos el siguiente sistema afín controlado de Rössler  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2 - x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha x_2 + x_1^2, \\ \dot{x}_3 &= \mu(\nu x_1 - x_3) + u_2,\end{aligned}\tag{4.4}$$

con entradas de control  $u = (u_1, u_2)^\top \in U \subset \mathbb{R}^2$ .

Por lo tanto, de los párrafos anteriores hemos recogido algunas pruebas que demuestran que el sistema de Rössler (4.4) podría ser representado como la interconexión de dos subsistemas afines de retroalimentación. De hecho, vamos a representar el sistema (4.4) como la interconexión de los siguientes dos subsistemas, para  $u_2 \equiv 0$ :

$$\begin{aligned}\Sigma_1 : \dot{x}^1 &= \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ -\alpha x_2 + x_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Sigma_2 : \dot{x}^2 &= \dot{x}_3 = -\mu x_3 + \mu\nu x_1,\end{aligned}\tag{4.5}$$

donde  $x^1 = (x_1, x_2)$  y  $x^2 = x_3$ .

Entonces, de (4.5), los subsistemas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  pueden ser representados en la forma  $\dot{x}^1 = f^1(x^1) + g^1(x^1)\psi^2(x^2, -\psi^1(x^1)) + g^1(x^1)u_1$ , y  $\dot{x}^2 = f^2(x^2) - g^2(x^2)\psi^1(x^1)$ , respectivamente, si definimos

$$\begin{aligned}V_\infty(x) &= V_1(x^1) + V_2(x^2), \text{ con} \\ V_1(x^1) &= \frac{1}{2} \left( x_1^2 + (x_2 - 1/\nu)^2 \right) \ \& \ V_2(x^2) = \frac{1}{2\mu\nu} x_3^2,\end{aligned}\tag{4.6}$$

Nótese que denotamos por  $V_\infty(x)$  la función de almacenamiento anterior, ya que será nuestra CLF global de acuerdo con la solución al “uniting CLF problem” introducido en el capítulo §3.

Ahora, ya que  $g^1(x^1) = (1, 0)^\top$  y  $g^2(x^2) = \mu\nu$ , obtenemos

$$\begin{aligned}\psi^1(x^1) &= -(x_1, x_2 - 1/\nu) \cdot (1, 0) = -x_1, \\ \text{and } \psi^2(x^2, -\psi^1(x^1)) &= -\frac{x_3}{\mu\nu} \cdot \mu\nu = -x_3.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema (4.4) es la interconexión de retroalimentación de  $\Sigma_1$  &  $\Sigma_2$ , lo que simplificó la búsqueda de  $V_\infty(x)$ .

Estudiemos ahora el comportamiento global del sistema no forzado (4.3). En primer lugar, tiene tres puntos de equilibrio:  $\bar{x}^0 = (0, 0, 0)$  y  $\bar{x}^{1,2} = (\pm\theta, 1 - \nu, \pm\nu\theta)$ , con  $\theta = \sqrt{\alpha(1 - \nu)}$ , para  $\alpha > 0$  y  $0 < \nu < 1$ , donde el parámetro  $\nu$  se introdujo para obtener una componente *asimétrica* en el modelo. Claramente, si  $\nu \rightarrow 1$ , entonces  $\bar{x}^{1,2} \rightarrow \bar{x}^0$  –el origen. Además, linealizando se obtiene que son puntos hiperbólicos, por lo que el Teorema de Hartman-Grobman (véase ([30], p. 119)) garantiza que  $\bar{x}^0$  es una silla de montar, mientras que  $\bar{x}^{1,2}$  son dos focos, para los valores  $(\alpha, \mu, \nu)$  dados en la Figura 4.7.

Nótese que la función de almacenamiento  $V_\infty(x)$  definida en (4.6) es  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ , propia y no negativa, desapareciendo en  $V_o = \{v_o\} = \{(0, 1/\nu, 0)\}$  (mínimo global). La derivada de Lie de  $V_\infty(x)$  respecto a (4.3),  $a_\infty(x) = L_f V_\infty(x)$ , es

$$a_\infty(x) = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right)x_1^2 - \alpha \left(x_2 - \frac{1}{2\nu}\right)^2 - \frac{1}{\nu}x_3^2 + \frac{\alpha}{4\nu^2} \quad (4.7)$$

la cual es no negativa ssi  $x \in \mathcal{D}$ , donde  $\mathcal{D}$ , definida por

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 : a_\infty(x) \geq 0\} = \overline{\mathcal{A}_+^\infty}, \quad (4.8)$$

es el dominio elipsoidal (compacto) con centro en  $(0, 1/2\nu, 0)$  siempre que  $\alpha > 0$  y  $0 < \nu < 1$ , y tal que  $\partial\mathcal{D} = \mathcal{N}_{a_\infty}$ . Además, los equilibrios  $\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2$  de la ecuación (4.3) siempre se hallan en  $\partial\mathcal{D}$  y difieren de  $v_o$ , para cualquier valor de los parámetros. Nótese que, incluso  $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{D}$ , se tiene que  $dV_\infty(x)/dt < 0$ ,  $\mathcal{D}$  no es positivamente invariante, así, no puede ser usado para “ATRAPAR” el atractor global  $K$  de la ecuación (4.3). De hecho, en la Figura 4.8 podemos ver trayectorias que salen de  $\mathcal{D}$  y regresan nuevamente a él.

Ahora, construiremos una bola absorbente explícita  $\mathcal{B}$  para el sistema (4.3) que cubre todos los casos en el espacio de parámetros  $\alpha > 0, \mu > 0$  &  $0 < \nu < 1$  estudiados en esta tesis. Ciertamente, representar el sistema (4.4) como una interconexión de retroalimentación de dos sistemas simplificó la búsqueda de  $V_\infty(x)$ , lo que a su vez facilita la construcción de una bola absorbente elipsoidal  $\mathcal{B}$ , como un conjunto de nivel de  $V_\infty(x)$ . La función de almacenamiento  $V_\infty(x)$  se usa para simplificar las fórmulas, y no pretende ser óptima (una “buena” aproximación al atractor global). De hecho, sea  $d = \max_{x \in \mathcal{D}} V_\infty(x)$ . De la geometría del problema tenemos que  $d$  existe y se encuentra en  $\mathcal{N}_{a_\infty}$ , y por tanto en un punto en el que:  $x_1 = \lambda(1/\nu - 1)x_1$ ,  $x_2 - 1/\nu = \lambda\alpha(x_2 - 1/2\nu)$  y  $x_3/\mu\nu = \lambda x_3/\nu$ , para algunos multiplicadores Lagrangianos  $\lambda$ . Las posibles soluciones son:

(i)  $\lambda = 1/\mu$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = (2\mu - \alpha)/(2\nu(\mu - \alpha))$ , y  $x_3^2 = \alpha^2(\alpha - 2\mu)/(4\nu(\mu - \alpha)^2)$ , siempre que  $\alpha \geq 2\mu > 0$ . Entonces,  $V_\infty = \alpha^2/(8\nu^2\mu(\alpha - \mu))$ , si  $\alpha > 2\mu$ ; o  $1/2\nu^2$ , si  $\alpha = 2\mu$  (entonces  $x = (0, 0, 0)$ ). En cualquier caso,  $\alpha - \mu > 0$ .

(ii)  $\lambda = \nu/(1 - \nu)$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_2 = (2 - 2\nu - \alpha\nu)/(2\nu(1 - \nu - \alpha\nu))$ , y  $x_1^2 = \alpha^2(\alpha\nu + 2\nu - 2)/(4(1 - \nu)(1 - \nu - \alpha\nu)^2)$ , siempre que  $\alpha\nu + 2\nu - 2 \geq 0$ . Entonces,  $V_\infty = \alpha^2/(8(1 - \nu)(\alpha\nu + \nu - 1))$ , si  $\alpha\nu + 2\nu - 2 > 0$ ; o  $1/2\nu^2$ , si  $\alpha\nu + 2\nu - 2 = 0$  (entonces  $x = (0, 0, 0)$ ). Encualquier caso,  $\alpha\nu + \nu - 1 \geq 1 - \nu > 0$ .

(iii)  $x_1 = x_3 = 0$ , implica  $x_2 = 1/\nu$  or  $x_2 = 0$ , lo que da  $V_\infty = 0$  o  $V_\infty = 1/2\nu^2$ , respectivamente.

Resumiendo, para  $\alpha > 0, \mu > 0$  y  $0 < \nu < 1$ , el  $d$  máximo de  $V_\infty(x)$  en  $\mathcal{D}$  es:

$$d = \begin{cases} \alpha^2/(8\nu^2\mu(\alpha - \mu)), & \text{si } \alpha > 2\mu, \\ \alpha^2/(8(1 - \nu)(\alpha\nu + \nu - 1)), & \text{si } \alpha\nu + 2\nu - 2 > 0, \\ 1/2\nu^2, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.9)$$

En consecuencia, para todo valor de los parámetros  $\alpha, \mu > 0$  y  $0 < \nu < 1$ , el conjunto compacto  $\mathcal{B} := V_\infty^{-1}[0, d + \epsilon]$  es una *bola absorbente* para (4.3), para algún  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño pero finito. Obsérvese que si tomamos  $\epsilon = 0$ , todas las trayectorias entrarán finalmente en  $V_\infty^{-1}[0, d]$ , pero algunas podrían ser asintóticas a él: *E.g.*, si tomamos los valores,  $(\alpha, \mu, \nu)$ , que llevan a  $d = 1/2\nu^2$ , el punto de equilibrio  $(0, 0, 0)$  siempre pertenece a la frontera de  $\mathcal{D} \cap V_\infty^{-1}[0, d]$ , de modo que las trayectorias que empiezan fuera

de  $V_\infty^{-1}[0, d]$  y son atraídas por el origen (un punto silla de montar) tardarán un tiempo infinito en hacerlo.

Obsérvese que los valores  $(\alpha, \mu, \nu) = (0, 1, 0, 08, 0, 125)$  dados en [32] que generan caos en (4.3) pertenecen al caso que lleva a  $d = 1/2\nu^2$ . Para estos valores, la Figura 4.2 muestra una bola absorbente  $\mathcal{B}$  que contiene  $\mathcal{D}$  dada por (4.8) y el atractor global  $K$  de la Figura 4.1, proyectado sobre el plano  $x_1x_2$ .

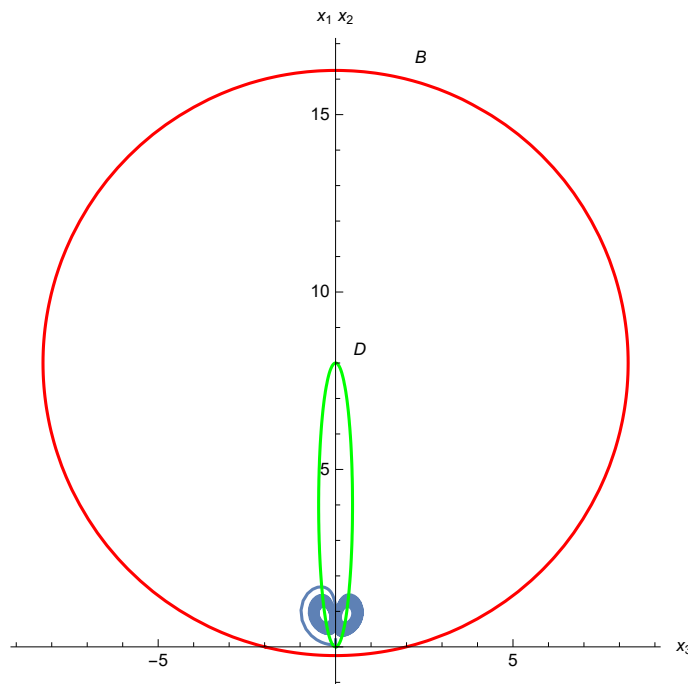


Figura 4.2: Bola absorbente  $\mathcal{B}$  (rojo) que contiene el elipsoide  $\mathcal{D}$  (verde) y el atractor global  $K$  (caos de la Figura 4.1) de la ecuación de Rössler (4.3), así como algunas trayectorias de (4.3) que entran en  $\partial\mathcal{B}$  en tiempo finito, proyectadas sobre el plano  $x_1x_2$ . Parámetros:  $\alpha = 0.1, \mu = 0.08, \nu = 0.125$ .

#### 4.2.2. CLF-estabilización global de un sistema controlado de Rössler

Volvamos al sistema controlado de Rössler (4.4), para el que suponemos un CVS compacto parametrizado  $U_r \subset \mathbb{R}^2$ , con parámetro de control acotado  $r = (r_1, r_2)$ , con  $r_1, r_2 > 0$  por determinar.

Ahora, vamos a demostrar que  $V_\infty(x)$  no puede ser una CLF con respecto a cualquier equilibrio del sistema no forzado (4.3) utilizando un desplazamiento de coordenadas. Por simplicidad, supongamos el equilibrio  $\bar{x}^0 = (0, 0, 0)$ , y consideremos la traslación de coordenadas  $T : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow z + v_o - \bar{x}^0 = (z_1, z_2 + 1/\nu, z_3)$ . Entonces, proponemos

$$V_0(z) = \frac{1}{2} \left( z_1^2 + z_2^2 + \frac{1}{\mu\nu} z_3^2 \right), \quad (4.10)$$

la cual es  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ , positiva definida y propia (Nótese que se denotó  $V_0$  en lugar de  $W$ ). Entonces, la derivada de  $V_0(z)$  a lo largo de las soluciones de (4.3) bajo el desplazamiento de coordenadas  $T$ , es

$$\bar{a}_0(z) = L_{\bar{f}}V_0(z) = \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) z_1^2 - \alpha z_2 \left(z_2 + \frac{1}{\nu}\right) - \frac{1}{\nu} z_3^2, \quad (4.11)$$

donde  $\bar{f}(z_1, z_2, z_3) = f(z_1, z_2 + 1/\nu, z_3)$ . Obsérvese que  $\bar{x}^0$  no es un equilibrio:  $\bar{f}(0, 0, 0) = (0, -\alpha/\nu, 0)$ . Ahora, asumiendo el sistema afín (4.4) bajo el mapeo  $T$  obtenemos  $\bar{b}_0(z) = -L_B V_0(z) = -(z_1, z_3/\mu\nu)$ , y además  $\bar{b}_0(z) = (0, 0)$  ssi  $z_1 = z_3 = 0$  (el eje- $z_2$ ). Por lo tanto, si  $\bar{b}_0(z) = (0, 0)$ , entonces  $\bar{a}_0(0, z_2, 0) = -\alpha z_2(z_2 + 1/\nu)$ , siendo no negativo siempre que  $z_2 \in [-1/\nu, 0] \cap N$ , con  $N$  cualquier vecindad de  $\bar{x}^0$ . ¡Por lo que,  $V_0(z)$  no es una CLF para el sistema (4.4) bajo  $T$ !

Ahora, apliquemos la solución modificada al “uniting CLF problem” propuesta en el Capítulo §3 para construir una CLF que tenga su mínimo en algún equilibrio deseado del sistema (4.3) y que sea igual a  $V_\infty(x)$  para  $x$  suficientemente grande. Para simplificar, supongamos que deseamos estabilizar el punto de reposo  $\bar{x}^0 = (0, 0, 0)$ . Entonces, como una primer función candidata CLF “local” para el sistema afín (4.4), proponemos la misma función  $V_0(z)$  definida anteriormente en (4.10),

$$V_0(x) = \frac{1}{2} \left( x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{\mu\nu} x_3^2 \right), \quad (4.12)$$

pero en coordenadas  $x$  (aplicando igualmente  $T$  solamente a  $V_\infty(x)$ ). Por tanto,  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ , definida positiva y propia. En este caso,

$$a_0(x) = L_f V_0(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \frac{1}{\nu} x_3^2. \quad (4.13)$$

El antecedente inmediato a esta Sección se realizó en Solís Daun (ver, [17]), en el que el sistema (4.4), con  $u_2 = 0$ , se estabiliza globalmente con la función de Lyapunov “local” (4.12) pero con un control *no acotado*. De esta manera, para el caso de control acotado, utilizaremos dicho resultado añadiendo la variable de control  $u_2$ .

Sea  $u_2 = 0$ . De (4.4) tenemos  $b_0(x) = -L_{g_1} V_0(x) = -x_1$ . Así,  $\forall x \neq 0$ , si  $b_0(x) = 0$ , entonces  $a_0(0, x_2, x_3) = -\alpha x_2^2 - x_3^2/c < 0$ . Por lo que,  $V_0(x)$  es una CLF para el sistema (4.4). Sin embargo, notesé que si  $x_2 = x_3 = 0$  (el eje- $x_1$ ), entonces  $a_0(x_1, 0, 0) = x_1^2 \geq 0$ . Así,  $\mathcal{N}_{a_0} \cup \mathcal{A}_+^0 = \{x \in \mathbb{R}^n : a_0(x) \geq 0\}$  es un conjunto *no acotado*. Entonces, de (2.2), tenemos que el CVS mínimo  $U_{r^*}$  es también *no acotado*. Así,  $V_0(x)$  es una CLF para (4.4), pero con respecto al CVS sin restricciones  $U = \mathbb{R}$ .

Seleccionamos  $r_\infty = d = 1/2\nu^2$  para incluir los parámetros dados en las figuras 4.1 & 4.2. Por lo tanto, cálculos sencillos nos llevan a las únicas soluciones distintas de cero:  $r_0 = \max_{\{x: V_\infty(x) \leq r_\infty = 1/2\nu^2\}} V_0(x) = 2/\nu^2$ , por lo que tomamos  $R_0 = \delta^2 r_0 = 2\delta^2/\nu^2$ ,

para algún  $\delta > 1$ ; y puesto que  $\{x : V_0(x) \geq R_0\} \neq \emptyset$ ,  $R_\infty = \min_{\{x:V_0(x) \geq R_0\}} V_\infty(x) = (2\delta - 1)^2/2\nu^2$ .

Por último, como es evidente que se cumple la suposición de cobertura, se cumple la siguiente *Suposición*.

Ahora, mostramos que la *Suposición 2* se cumple. De (3.1), debemos probar que  $\forall x \in V_0^{-1}[0, R_0] \setminus V_\infty^{-1}[0, r_\infty]$ ,  $a_0(x)|b_\infty(x)| < |a_\infty(x)||b_0(x)|$ . En este caso,  $b_0(x) = b_\infty(x) = -x_1$ , de modo que si  $x_1 = 0$  entonces  $a_0(0, x_2, x_3) = -\alpha x_2^2 - x_3^2/\nu < 0$  y  $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus V_\infty^{-1}[0, r_\infty]$ ,  $a_\infty(x) < 0$ . Así, suponiendo  $x_1 \neq 0$ , entonces la desigualdad anterior se reduce a  $a_0(x) < |a_\infty(x)|$ . Por lo tanto, a partir de (4.7)-(4.13), debemos mostrar que  $\forall x \in V_0^{-1}[0, R_0] \setminus V_\infty^{-1}[0, r_\infty]$ ,  $a_0(x) - |a_\infty(x)| =$

$$\left(2 - \frac{1}{\nu}\right)x_1^2 - 2\alpha x_2^2 + \frac{\alpha}{\nu}x_2 - \frac{2}{\nu}x_3^2 < 0 \quad (4.14)$$

se cumple. Obsérvese que negando la desigualdad (4.14) se obtiene

$$\left(\frac{1-2\nu}{\nu}\right)x_1^2 + 2\alpha\left(x_2 - \frac{1}{4\nu}\right)^2 + \frac{2}{\nu}x_3^2 \leq \frac{\alpha}{8\nu^2}, \quad (4.15)$$

que define un dominio elipsoidal (compacto)  $\mathcal{E}$  centrado en  $(0, 1/4\nu, 0)$  siempre que  $\alpha > 0$  y  $0 < \nu < 1/2$ . En particular, un cálculo sencillo muestra que  $\mathcal{E} \setminus \{0\} \subset \text{int}V_\infty^{-1}[0, 1/2\nu^2]$ , siempre que los parámetros  $(\alpha, \mu, \nu)$  satisfagan  $0 < \nu \leq 1/6$ ,  $\alpha\nu + 5\nu - 2 < 0$  y  $\alpha < 5\mu$ . Estas condiciones se cumplen con los parámetros  $(\alpha, \mu, \nu) = (0, 1, 0, 08, 0, 125)$  propuestos en [32]. Supongamos estas condiciones junto con las que conducen a  $d = 1/2\nu^2$ . Por tanto, dado que fuera de  $\mathcal{E}$  la desigualdad (4.14) se cumple, entonces también se cumple en  $V_0^{-1}[0, R_0] \setminus V_\infty^{-1}[0, r_\infty]$ , for  $r_\infty = 1/2\nu^2$ , para  $r_\infty = 1/2\nu^2$  y  $R_0 = 2\delta^2/\nu^2$ . De aquí se deduce la *Suposición 2*.

Por otra parte, suponiendo las dos entradas de control  $u_1$  y  $u_2$  en (4.4) (por lo que  $r_1, r_2 > 0$ ), esperamos conseguir un mejor rendimiento. Entonces, tenemos la misma función  $b_1(x)$  y  $b_2(x) = -L_{g_2}V(x) = -\partial V(x)/\partial x_3$ .

En consecuencia, para  $V_\infty(x)$  dada por (4.6) y  $V_0(x)$  dada por (4.12), tenemos que  $V(x)$  en (3.2) (definido en el *Capítulo §3*) es un CLF para el sistema de Rössler (4.4) con CVS un cuadrado centrado en el origen, dado por un Zonotopo  $U = Z(v^1, v^2)$  donde  $v^1 = (1.5, 0)^\top$  y  $v^2 = (0, 1.5)^\top$ , con  $\top$  denotando transposición.

Ahora, suponiendo que deseamos estabilizar el punto de equilibrio  $\bar{x}^0$ , así, la derivada  $V(x)$  respecto al tiempo, a lo largo de las soluciones del sistema de Rössler (4.4) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \nabla V(x)f(x) + \nabla V(x)g(x)u \\ &= A(x) \left[ x_1(\dot{x}_1 + u_1) + x_2(\dot{x}_2) + \frac{x_3}{\mu\nu}(\dot{x}_3 + u_2) \right] \\ &\quad + B(x) \left[ x_1(\dot{x}_1 + u_1) + \left(x_2 - \frac{1}{\nu}\right)(\dot{x}_2) + \frac{x_3}{\mu\nu}(\dot{x}_3 + u_2) \right] \end{aligned}$$

con



$$a_0(x) = x_1^2 - \alpha x_2^2 - \frac{1}{\nu} x_3^2, \quad b_{0,1} = -x_1 \text{ y } b_{0,2} = -\frac{x_3}{\mu\nu}$$

y

$$a_\infty(x) = x_1^2 \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) - \alpha x_2 \left(x_2 - \frac{1}{\nu}\right) - \frac{1}{\nu} x_3^2, \quad b_{\infty,1} = -x_1 \text{ y } b_{\infty,2} = -\frac{x_3}{\mu\nu}.$$

De acuerdo a la condición CLF

$$\begin{aligned} \inf_{\varpi_1, \varpi_2} \dot{V} &= A(x) [a_0(x) - b_{0,1}\varpi_1 - b_{0,2}\varpi_2] \\ &\quad + B(x) [a_\infty(x) - b_{\infty,1}\varpi_1 - b_{\infty,2}\varpi_2] \\ &< 0 \text{ for } x \neq 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

La mejor tasa de control es dada por

$$\varpi(x) = \begin{pmatrix} 1.5 \text{sign}(b \cdot v^1) \\ 1.5 \text{sign}(b \cdot v^2) \end{pmatrix}$$

Considerando el valor de la función signo como un caso en cada octante, es posible demostrar que se cumple la condición CLF, donde los controles con la mejor tasa  $\varpi_1, \varpi_2$  son

$$\varpi_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \text{ if } b \cdot v^1 > 0 \text{ and } b \cdot v^2 > 0 \\ 1.5 \text{ if } b \cdot v^1 > 0 \text{ and } b \cdot v^2 < 0 \\ -1.5 \text{ if } b \cdot v^1 < 0 \text{ and } b \cdot v^2 > 0 \\ -1.5 \text{ if } b \cdot v^1 < 0 \text{ and } b \cdot v^2 < 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\varpi_2 = \begin{pmatrix} 1.5 \text{ if } b \cdot v^1 > 0 \text{ and } b \cdot v^2 > 0 \\ -1.5 \text{ if } b \cdot v^1 > 0 \text{ and } b \cdot v^2 < 0 \\ -1.5 \text{ if } b \cdot v^1 < 0 \text{ and } b \cdot v^2 > 0 \\ 1.5 \text{ if } b \cdot v^1 < 0 \text{ and } b \cdot v^2 < 0 \end{pmatrix}$$

A continuación obtendremos la condición CLF:  $\inf_{u_1, u_2} \dot{V} < 0$  para  $x \neq 0$ , para los casos citados, por lo que, a partir de la dinámica del sistema de Rössler, tenemos las siguientes cotas

$$\begin{aligned} -1 &\leq x_1 \leq 1.2 \\ 0 &\leq x_2 \leq 2.2 \\ -0.02 &\leq x_3 \leq 0.02 \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} -1.46 &\leq x_1 - x_1x_2 - x_3 \leq 1.22 \\ -0.22 &\leq -\alpha x_2 + x_1^2 \leq 1.44 \\ -0.0116 &\leq \mu(\nu x_1 - x_3) \leq 0.0136 \end{aligned}$$

El caso  $b \cdot v^1 > 0$  y  $b \cdot v^2 > 0$ , con  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  &  $x_3 > 0$ , tenemos  $\dot{V}(x) < 0$  para  $x \neq 0$ .

El caso  $b \cdot v^1 > 0$  y  $b \cdot v^2 > 0$ , con  $x_1 > 0$ ,  $x_2 = 0$  &  $x_3 > 0$ , tenemos  $\dot{V}(x) < 0$  para  $x \neq 0$ .

El caso  $b \cdot v^1 > 0$  y  $b \cdot v^2 < 0$ , con  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  &  $x_3 < 0$ , tenemos  $\dot{V}(x) < 0$  para  $x \neq 0$ .

El caso  $b \cdot v^1 > 0$  y  $b \cdot v^2 < 0$ , con  $x_1 > 0$ ,  $x_2 = 0$  &  $x_3 < 0$ , tenemos  $\dot{V}(x) < 0$  para  $x \neq 0$ .

El caso  $b \cdot v^1 < 0$  y  $b \cdot v^2 > 0$ , con  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$  &  $x_3 > 0$ , tenemos  $\dot{V}(x) < 0$  para  $x \neq 0$ .

El caso  $b \cdot v^1 < 0$  y  $b \cdot v^2 > 0$ , con  $x_1 < 0$ ,  $x_2 = 0$  &  $x_3 > 0$ , tenemos  $\dot{V}(x) < 0$  para  $x \neq 0$ .

El caso  $b \cdot v^1 < 0$  y  $b \cdot v^2 < 0$ , con  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$  &  $x_3 < 0$ , tenemos  $\dot{V}(x) < 0$  para  $x \neq 0$ .

El caso  $b \cdot v^1 < 0$  y  $b \cdot v^2 < 0$ , con  $x_1 < 0$ ,  $x_2 > 0$  &  $x_3 < 0$ , tenemos  $\dot{V}(x) < 0$  para  $x \neq 0$ .

De esta forma se cumple la condición CLF:  $\inf_{u_1, u_2} \dot{V} < 0$  para  $x \neq 0$ .

La función de retroalimentación explícita  $u_{0j}^\epsilon(a_0(x), \beta_0(x))$  y  $u_{\infty j}^\epsilon(a_\infty(x), \beta_\infty(x))$  para  $j = 1, 2$  son

$$u_{01}^\epsilon(a_0(x), \beta_0(x)) = \begin{cases} \varpi_1 \left[ 1 - \frac{\beta_0(x) - \frac{1}{2}(a_0(x) + |a_0(x)|)}{4(e^{(|\gamma_1(x)|)} + 1)\beta_0(x)} e^{-\epsilon|\gamma_1(x)|} \right], & \text{si } \gamma_1(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_1(x) = 0, \end{cases}$$

y

$$u_{\infty 1}^\epsilon(a_\infty(x), \beta_\infty(x)) = \begin{cases} \varpi_1 \left[ 1 - \frac{\beta_\infty(x) - \frac{1}{2}(a_\infty(x) + |a_\infty(x)|)}{4(e^{(|\gamma_1(x)|)} + 1)\beta_\infty(x)} e^{-\epsilon|\gamma_1(x)|} \right], & \text{si } \gamma_1(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_1(x) = 0, \end{cases}$$

donde  $\gamma_1(x) = \frac{-x_1\varpi_1}{x_1\varpi_1 + \frac{x_3}{\mu\nu}\varpi_2}$ , y

$$u_{02}^\epsilon(a_0(x), \beta_0(x)) = \begin{cases} \varpi_2 \left[ 1 - \frac{\beta_0(x) - \frac{1}{2}(a_0(x) + |a_0(x)|)}{4(e^{(|\gamma_2(x)|)} + 1)\beta_0(x)} e^{-\epsilon|\gamma_2(x)|} \right], & \text{si } \gamma_2(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_2(x) = 0, \end{cases}$$

y

$$u_{\infty 2}^\epsilon(a_\infty(x), \beta_\infty(x)) = \begin{cases} \varpi_2 \left[ 1 - \frac{\beta_\infty(x) - \frac{1}{2}(a_\infty(x) + |a_\infty(x)|)}{4(e^{(|\gamma_2(x)|)} + 1)\beta_\infty(x)} e^{-\epsilon|\gamma_2(x)|} \right], & \text{si } \gamma_2(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_2(x) = 0, \end{cases}$$

donde  $\gamma_2(x) = \frac{-x_3 \varpi_2}{x_1 \varpi_1 + \frac{x_3}{\mu\nu} \varpi_2}$  y el parámetro  $\epsilon > 0$ .

Las gráficas respecto al tiempo de los controles de realimentación  $u_1^\epsilon(x)$  y  $u_2^\epsilon(x)$  dados por  $\rho_1^\epsilon(x)$  y  $\rho_2^\epsilon(x)$ , y la correspondiente trayectoria a lazo cerrado para el sistema (4.4) con la condición inicial  $(5, 1, -1)$  se ilustran en la figura 4.3.

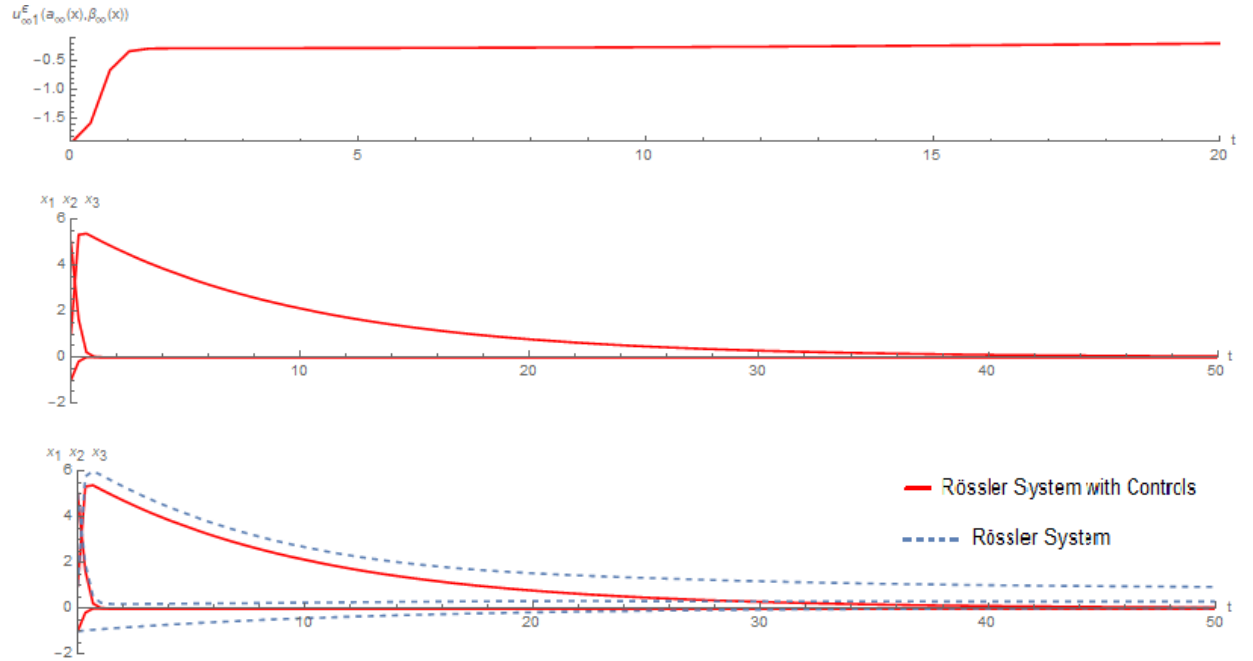


Figura 4.3: Controles acotados retroalimentados  $u_{\infty 1}^\epsilon(a_\infty(x), \beta_\infty(x))$  y  $u_{\infty 2}^\epsilon(a_0(x), \beta_0(x))$  y la correspondiente trayectoria a lazo cerrado para la condición inicial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (5, 1, -1)$ .

### 4.3. Estabilización de un sistema de control acotado basado en el sistema de Lorenz

#### 4.3.1. Una bola absorbente para el sistema de Lorenz

La investigación de Lorenz de un conjunto tridimensional de ecuaciones diferenciales que modelan algunos de los comportamientos impredecibles que normalmente asociamos con el tiempo (Lorenz es meteorólogo además de matemático) se describe en Lorenz (1979). Las ecuaciones con las que finalmente dio en el clavo se derivaban de un modelo de convección de fluidos (ver deducción en *Apéndice 2 §5, Sección §§5*), véase la figura 4.4, dichas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3,\end{aligned}\tag{4.17}$$

donde  $\sigma$ ,  $r$  y  $b$  son tres parámetros reales positivos.

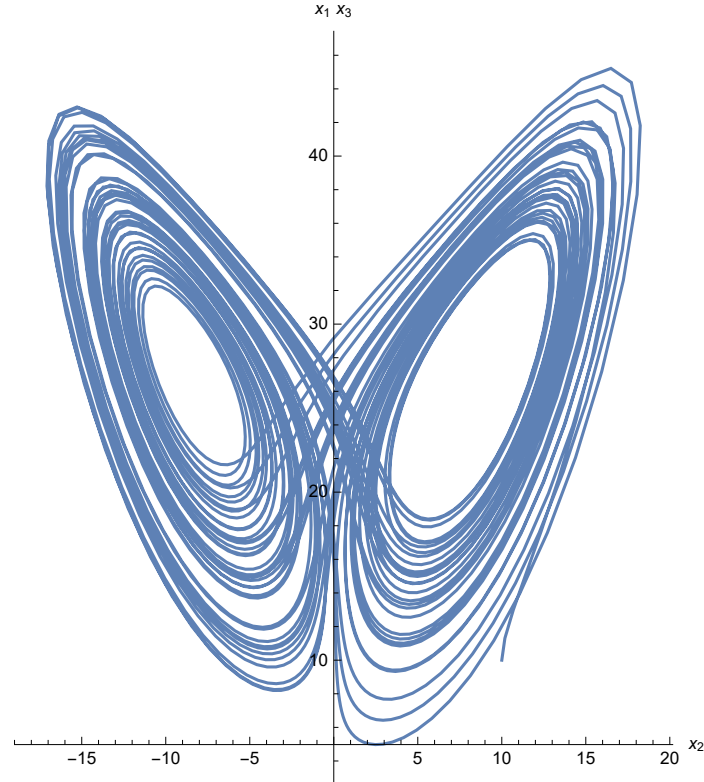


Figura 4.4: Sistema de Lorenz proyectado en el plano  $x_1x_3$ . Parámetros:  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $b = 8/3$ . Condiciones iniciales:  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (10, 10, 10)$ .

Estas ecuaciones tienen algunas propiedades básicas, tales como:

- **Simetría**

Las ecuaciones son invariantes a la transformación  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (-x_1, -x_2, x_3)$ . Así, si  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  es una solución, también lo es  $-x_1(t), -x_2(t), x_3(t)$ .

- **El eje- $x_3$  es invariante**

De las ecuaciones (4.17) vemos que si  $x_1(0) = 0$  y  $x_2(0) = 0$ , entonces  $x_1$  y  $x_2$  siguen siendo cero para todo  $t$ . Así pues, el eje  $x_3$  es una órbita, en la que  $\dot{x}_3 = -bx_3$ , por lo que  $x_3(t) = x_3(0)e^{-bt}$ , para  $x_1, x_2 = 0$ . Por lo tanto, el eje  $x_3$  siempre es una parte de la variedad estable para el equilibrio en el origen.

■ **El sistema es disipativo**

La divergencia del flujo es  $-1 - b - \sigma$  y ésta es siempre negativa. Así un elemento de volumen,  $V$ , es contraído por el flujo en un elemento de volumen  $Ve^{-(1+b+\sigma)t}$  en un tiempo  $t$ .

■ **Puntos Fijos**

El origen  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 0, 0)$  es un punto de reposo para cada valor de los parámetros. Si  $0 < r < 1$  el sistema es estable y globalmente atractor. En  $r = 1$  hay una bifurcación de tipo simple, y para  $r > 1$  hay otros dos puntos fijos llamados  $C^+$  y  $C^-$ , que representan rollos de convección a izquierda o derecha. Los puntos fijos son  $x_1^* = x_2^* = \pm\sqrt{b(r-1)}$ ,  $x_3^* = r - 1$ . Cuando  $r \rightarrow 1^+$ ,  $C^+$  y  $C^-$  colapsan al origen en una bifurcación *pitchfork*.

Ahora, de hecho, sabemos que (4.17) es efectivamente un sistema punto-disipativo, ya que en ([38], Apéndice C, pp. 196–198) se construyó una bola absorbente explícita  $\mathcal{B}$ , para esta se consideró la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2} (rx_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma(x_3 - 2r)^2). \quad (4.18)$$

En dicho trabajo se aclara que la elección de esta función de almacenamiento se utiliza para simplificar las fórmulas, y no pretende ser óptima (una “buena” aproximación al atractor global).

Denotamos por  $V_\infty(x)$  a la función de almacenamiento anterior (4.18), ya que será nuestra CLF global de acuerdo con la solución al “uniting CLF problem” introducido en el Capítulo §3.

Obsérvese que la función de almacenamiento  $V_\infty(x)$  definida en (4.18) es  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ , propia y no negativa, y sólo se anula en  $V_o = \{v_o\} = \{(0, 0, -2r)\}$  (mínimo global). La derivada de Lie de  $V_\infty(x)$  respecto a (4.17),  $a_\infty(x) = L_f V_\infty(x)$ , es

$$a_\infty(x) = -r\sigma x_1^2 - \sigma x_2^2 - b\sigma(x_3 - r)^2 + b\sigma r^2 \quad (4.19)$$

que es no negativa ssi  $x \in \mathcal{D}$ , donde  $\mathcal{D}$ , definido por

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 : a_\infty(x) \geq 0\} = \overline{\mathcal{A}_+^\infty}, \quad (4.20)$$

es el dominio elipsoidal (compacto) centrado en  $(0, 0, -2r)$  siempre que  $\sigma > 0$ ,  $r > 0$  y  $b > 0$ , y tal que  $\partial\mathcal{D} = \mathcal{N}_{a_\infty}$ . Los puntos de equilibrio  $\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2$  de la ecuación (4.17) siempre se hallan en  $\partial\mathcal{D}$  y difieren de  $v_o$ , para cualquier valor de los parámetros. Note que si bien  $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{D}$ , cumple que  $dV_\infty(x)/dt < 0$ ,  $\mathcal{D}$  este conjunto no es positivamente invariante, por lo que no sirve para “atrapar” al atractor global  $K$  de la ecuación (4.17). De hecho, en la figura 4.5 podemos ver trayectorias que salen de  $\mathcal{D}$  y vuelven de nuevo a él.

Así, la construcción de una bola absorbente explícita  $\mathcal{B}$ , ver deducción en Apéndice 2 §5 Sección §§5, para el sistema (4.17) que cubre todos los casos en el espacio de parámetros  $\sigma > 0$ ,  $r > 0$  y  $b > 0$  es:

$$d = \begin{cases} b^2 r^2 / (b - \sigma), & \text{si } b \geq 2\sigma \text{ y } \sigma \leq 1, \\ b^2 r^2 / (b - 1), & \text{si } b \geq 2 \text{ y } \sigma \geq 1, \\ 4\sigma r^2, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.21)$$

En consecuencia, para cualquier caso de los parámetros  $\sigma > 0$ ,  $r > 0$  y  $b > 0$ , el conjunto compacto  $\mathcal{B} := V_\infty^{-1}[0, d + \epsilon]$  es una *bola absorbente* para el sistema (4.17), para algún  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño pero finito. Obsérvese que fijando  $\epsilon = 0$ , todas las trayectorias entrarán finalmente en  $V_\infty^{-1}[0, d]$ , pero algunas podrían ser asintóticas a ella: por ejemplo, si escogemos los parámetros que conducen a  $d = 4\sigma r^2$ , el punto de reposo  $(0, 0, 0)$  estará siempre en la frontera de  $\mathcal{D} \cap V_\infty^{-1}[0, d]$ , de modo que las trayectorias que comiencen fuera de  $V_\infty^{-1}[0, d]$  y sean atraídas por el origen tardarán tiempo infinito en hacerlo.

Nótese que los valores de los parámetros  $(\sigma, r, b) = (10, 28, 8/3)$  que generan caos en (4.17) pertenecen al caso que lleva a  $d = 4\sigma r^2$ . Para estos valores, la Figura 4.5 muestra una bola absorbente  $\mathcal{B}$  que contiene  $\mathcal{D}$  dada por (4.20) y el atractor global  $K$  de la Figura 4.5, proyectado sobre el plano  $x_1 x_3$ .

### 4.3.2. Estabilización CLF global del sistema controlado de Lorenz

Consideremos el siguiente sistema controlado de Lorenz de la forma  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) + u_1, \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - bx_3 + u_2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ahora, vamos a aplicar la solución modificada a la “uniting CLF problem” propuesto en el Capítulo §3 para construir una CLF que tenga su mínimo en algún equilibrio deseado del sistema (4.17) y que sea igual a  $V_\infty(x)$  para  $x$  suficientemente grande. Para simplificar, supongamos que deseamos estabilizar el punto de reposo  $\bar{x}^0$ . Entonces, como candidata “local” CLF para (4.22), proponemos la esta función de Lyapunov,

$$V_0(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma} x_1^2 + \frac{1}{r} (x_2^2 + x_3^2) \right), \quad (4.23)$$

por consiguiente,  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ , definida positiva y propia. En este caso,

$$a_0(x) = L_f V_0(x) = -x_1^2 - \frac{1}{r} x_2^2 - \frac{b}{r} x_3^2 + 2x_1 x_2. \quad (4.24)$$

De (4.22) y (4.23) obtenemos  $b_0(x) = (-L_{g_1} V_0(x), -L_{g_2} V_0(x)) = (-x_1/\sigma, -x_3/r)$ . Así,  $\forall x \neq 0$ , si  $b_0(x) = 0$ , entonces  $a_0(0, x_2, 0) = -x_2^2/r < 0$ . Por lo que,  $V_0(x)$  es una CLF para el sistema (4.22).

Seleccionamos  $r_\infty = d = 4\sigma r^2$  para incluir los valores de los parámetros dados en las Figuras 4.4 & 4.5. Por lo tanto, cálculos sencillos nos llevan a las únicas soluciones distintas de cero:  $r_0 = \max_{\{x: V_\infty(x) \leq r_\infty = 4\sigma r^2\}} V_0(x) = 8r$ , por lo que tomamos  $R_0 = \delta^2 r_0 = 8\delta^2 r$ , para algún  $\delta > 1$ ; y puesto que  $\{x : V_0(x) \geq R_0\} \neq \emptyset$ ,  $R_\infty = \min_{\{x: V_0(x) \geq R_0\}} V_\infty(x) = 4(2\delta - 1)^2 \sigma r^2$ .

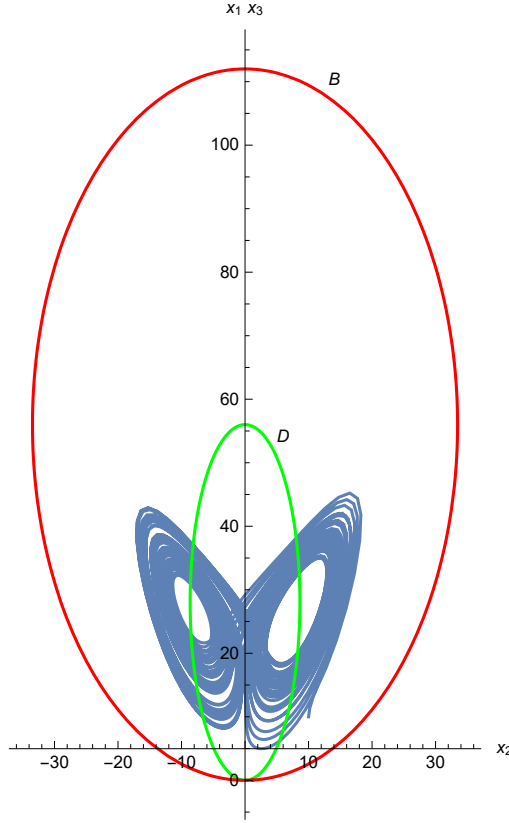


Figura 4.5: Bola absorbente  $\mathcal{B}$  (rojo) conteniendo el elipsoide  $\mathcal{D}$  (verde) y el atractor global  $K$  (caos de la Figura 4.4) del sistema de Lorenz (4.17), así como algunas trayectorias de (4.17) que entran en  $\partial\mathcal{B}$  en tiempo finito, proyectadas sobre el plano  $x_1x_3$ .

Por último, dado que la suposición de cobertura obviamente se satisface, se cumple la siguiente *Suposición*.

Ahora, mostramos que la *Suposición 2* se cumple. De (3.1), debemos probar que  $\forall x \in V_0^{-1}[0, R_0] \setminus V_\infty^{-1}[0, r_\infty]$ ,  $a_0(x) \|b_\infty(x)\| < |a_\infty(x)| \|b_0(x)\|$ . En este caso,  $b_0(x) = (-x_1/\sigma, -x_3/r)$  y  $b_\infty(x) = (-rx_1, -\sigma(x_3 - 2r))$ , de modo que si  $x_1 = x_3 = 0$  entonces  $a_0(0, x_2, 0) = -x_2^2/r < 0$  y  $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus V_\infty^{-1}[0, r_\infty]$ ,  $a_\infty(x) < 0$ . Así, suponiendo  $x_1, x_3 \neq 0$ , de (4.19)-(4.24) y puesto que  $\|b_0(x)\| = \sqrt{x_1^2/\sigma^2 + x_3^2/r^2} < \sqrt{r^2x_1^2 + \sigma^2(x_3 - 2r)^2} = \|b_\infty(x)\|$ , para los parámetros aquí presentados, debemos probar que  $\forall x \in V_0^{-1}[0, R_0] \setminus V_\infty^{-1}[0, r_\infty]$ ,  $a_0(x) \|b_\infty(x)\| < |a_\infty(x)| \|b_0(x)\| < |a_\infty(x)| \|b_\infty(x)\|$  entonces  $a_0(x) - |a_\infty(x)| =$

$$-(1+r\sigma)x_1^2 - \left(\frac{1+r\sigma}{r}\right)x_2^2 - b\left(\frac{1+r\sigma}{r}\right)\left(x_3 - \frac{r^2\sigma}{1+r\sigma}\right)^2 + b\left(\frac{r^3\sigma^2}{1+r\sigma}\right) < 0 \quad (4.25)$$

se cumple. Obsérvese que negando la desigualdad (4.25) se obtiene

$$rx_1^2 + x_2^2 + b \left( x_3 - \frac{r^2\sigma}{1+r\sigma} \right)^2 \leq \frac{br^4\sigma^2}{(1+r\sigma)^2}, \quad (4.26)$$

que define un dominio elipsoidal (compacto)  $\mathcal{E}$  centrado en  $(0, 0, r^2\sigma/(1+r\sigma))$  siempre que  $\sigma, r > 0$ . En particular, un cálculo sencillo muestra que  $\mathcal{E} \setminus \{0\} \subset \text{int}V_\infty^{-1}[0, 4\sigma r^2]$ , siempre que los valores de los parámetros  $(\sigma, r, b)$  satisfagan  $0 < b\sigma^2 < b\sigma r^2 < 7\sigma^2 r^2 + 12\sigma r + 4$ . Los parámetros  $(\sigma, r, b) = (10, 28, 8/3)$  propuestos en [38], cumplen dichas condiciones. Supongamos estas condiciones junto con las que conducen a  $d = 4\sigma r^2$ . Por tanto, dado que fuera de  $\mathcal{E}$  la desigualdad (4.25) se cumple, entonces también se cumple en  $V_0^{-1}[0, R_0] \setminus V_\infty^{-1}[0, r_\infty]$ , para  $r_\infty = 4\sigma r^2$  y  $R_0 = 4(2\delta - 1)^2\sigma r^2$ . Por lo tanto se sigue la *Suposición 2*.

En consecuencia, para  $V_\infty(x)$  dado por (4.18) y  $V_0(x)$  dado por (4.23), tenemos que  $V(x)$  en (3.2) (definido en el *Capítulo 3*) es una CLF para el sistema de Lorenz (4.22) con CVS un cuadrado centrado en el origen, dado por un Zonotopo  $U = Z(v^1, v^2)$  con  $v^1 = (15, 0)^\top$  y  $v^2 = (0, 15)^\top$ , con  $\top$  denotando transposición.

Ahora, ya que deseamos estabilizar el punto  $\bar{x}^0$ , entonces, la derivada con respecto al tiempo de  $V(x)$  a lo largo de las soluciones del sistema (4.22) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \nabla V(x)f(x) + \nabla V(x)g(x)u \\ &= A(x)[rx_1(\dot{x}_1 + u_1) + \sigma x_2(\dot{x}_2) + \sigma(x_3 - 2r)(\dot{x}_3 + u_2)] \\ &\quad + B(x)[(x_1/\sigma)(\dot{x}_1 + u_1) + (x_2/r)(\dot{x}_2) + (x_3/r)(\dot{x}_3 + u_2)] \end{aligned}$$

con

$$a_0(x) = -x_1^2 - \frac{1}{r}x_2^2 - \frac{b}{r}x_3^2 + 2x_1x_2, \quad b_{0,1} = -x_1/\sigma \text{ and } b_{0,2} = -x_3/r,$$

y

$$a_\infty(x) = -r\sigma x_1^2 - \sigma x_2^2 - b\sigma(x_3 - r)^2 + b\sigma r^2, \quad b_{\infty,1} = -rx_1 \text{ and } b_{\infty,2} = -\sigma(x_3 - 2r).$$

De acuerdo a la condición CLF

$$\begin{aligned} \inf_{\varpi_1, \varpi_2} \dot{V} &= A(x)[a_0(x) - b_{0,1}\varpi_1 - b_{0,2}\varpi_2] \\ &\quad + B(x)[a_\infty(x) - b_{\infty,1}\varpi_1 - b_{\infty,2}\varpi_2] \\ &< 0 \text{ for } x \neq 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Las mejores tasas de control están dadas por



$$\varpi_{\infty}(x) = \begin{pmatrix} 15 \operatorname{sign}(b_{\infty} \cdot v^1) \\ 15 \operatorname{sign}(b_{\infty} \cdot v^2) \end{pmatrix}$$

y

$$\varpi_0(x) = \begin{pmatrix} 15 \operatorname{sign}(b_0 \cdot v^1) \\ 15 \operatorname{sign}(b_0 \cdot v^2) \end{pmatrix}.$$

A continuación obtendremos la condición CLF:  $\inf_{u_1, u_2} \dot{V} < 0$  para  $x \neq 0$ , según el CVS propuesto.

A partir de la dinámica del sistema de Lorenz, tenemos las siguientes cotas

$$\begin{aligned} -17 &\leq x_1 \leq 18.3 \\ -22.4 &\leq x_2 \leq 24.6 \\ 4.9 &\leq x_3 \leq 45.2 \end{aligned}$$

es fácil mostrar que para estos valores, además de  $\varpi_{\infty}(x)$  y  $\varpi_0(x)$  propuestos, la condición se cumple. Así

$$\begin{aligned} \inf_{\varpi_1, \varpi_2} \dot{V}(x) &= A(x) [a_0(x) - (x_1/\sigma) \varpi_{0,1}(x) - (x_3/r) \varpi_{0,2}(x)] \\ &\quad + B(x) [a_{\infty}(x) - r x_1 \varpi_{\infty,1}(x) - \sigma(x_3 - 2r) \varpi_{\infty,1}(x)] < 0 \end{aligned}$$

De esta forma se cumple la condición CLF:  $\inf_{u_1, u_2} \dot{V} < 0$  para  $x \neq 0$ .

Las funciones de retroalimentación explícitas  $u_{0j}^{\epsilon}(a_0(x), \beta_0(x))$  y  $u_{\infty j}^{\epsilon}(a_{\infty}(x), \beta_{\infty}(x))$  para  $j = 1, 2$  son

$$u_{01}^{\epsilon}(a_0(x), \beta_0(x)) = \begin{cases} \varpi_{0,1} \left[ 1 - \frac{\beta_0(x) - \frac{1}{2}(a_0(x) + |a_0(x)|)}{4(e^{|\gamma_{0,1}(x)|} + 1)\beta_0(x)} e^{-\epsilon|\gamma_{0,1}(x)|} \right], & \text{si } \gamma_{0,1}(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_{0,1}(x) = 0, \end{cases}$$

y

$$u_{\infty 1}^{\epsilon}(a_{\infty}(x), \beta_{\infty}(x)) = \begin{cases} \varpi_{\infty,1} \left[ 1 - \frac{\beta_{\infty}(x) - \frac{1}{2}(a_{\infty}(x) + |a_{\infty}(x)|)}{4(e^{|\gamma_{\infty,1}(x)|} + 1)\beta_{\infty}(x)} e^{-\epsilon|\gamma_{\infty,1}(x)|} \right], & \text{si } \gamma_{\infty,1}(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_{\infty,1}(x) = 0, \end{cases}$$

donde  $\gamma_{0,1}(x) = \frac{-\frac{x_1}{\sigma} \varpi_{0,1}}{\frac{x_1}{\sigma} \varpi_{0,1} + \frac{x_3}{r} \varpi_{0,2}}$  y  $\gamma_{\infty,1}(x) = \frac{-r x_1 \varpi_{\infty,1}}{r x_1 \varpi_{\infty,1} + \sigma(x_3 - 2r) \varpi_{\infty,2}}$ ,

y

4 CLF-Estabilización global de dos sistemas caóticos controlados con CVS Zonotopico

$$u_{02}^\epsilon(a_0(x), \beta_0(x)) = \begin{cases} \varpi_{0,2} \left[ 1 - \frac{\beta_0(x) - \frac{1}{2}(a_0(x) + |a_0(x)|)}{4(e^{(|\gamma_{0,2}(x)|)} + 1)\beta_0(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_{0,2}(x)|)} \right], & \text{si } \gamma_{0,2}(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_{0,2}(x) = 0, \end{cases}$$

y

$$u_{\infty 2}^\epsilon(a_\infty(x), \beta_\infty(x)) = \begin{cases} \varpi_{\infty,2} \left[ 1 - \frac{\beta_\infty(x) - \frac{1}{2}(a_\infty(x) + |a_\infty(x)|)}{4(e^{(|\gamma_{\infty,2}(x)|)} + 1)\beta_\infty(x)} e^{(-\epsilon|\gamma_{\infty,2}(x)|)} \right], & \text{si } \gamma_{\infty,2}(x) \neq 0, \\ 0, & \text{si } \gamma_{\infty,2}(x) = 0, \end{cases}$$

donde  $\gamma_{0,2}(x) = \frac{-\frac{x_3}{r}\varpi_{0,2}}{\frac{x_1}{\sigma}\varpi_{0,1} + \frac{x_3}{r}\varpi_{0,2}}$  y  $\gamma_{\infty,2}(x) = \frac{-\sigma(x_3 - 2r)\varpi_{\infty,2}}{rx_1\varpi_{\infty,1} + \sigma(x_3 - 2r)\varpi_{\infty,2}}$ , y el parámetro  $\epsilon > 0$ .

La figura 4.6 muestra las gráficas respecto al tiempo del control de retroalimentación  $u_{0,2}^\epsilon(x)$  y  $u_{\infty,1}^\epsilon(x)$  dados por  $\rho_{0,2}^\epsilon(x)$  y  $\rho_{\infty,1}^\epsilon(x)$ .

#### 4 CLF-Estabilización global de dos sistemas caóticos controlados con CVS Zonotopico

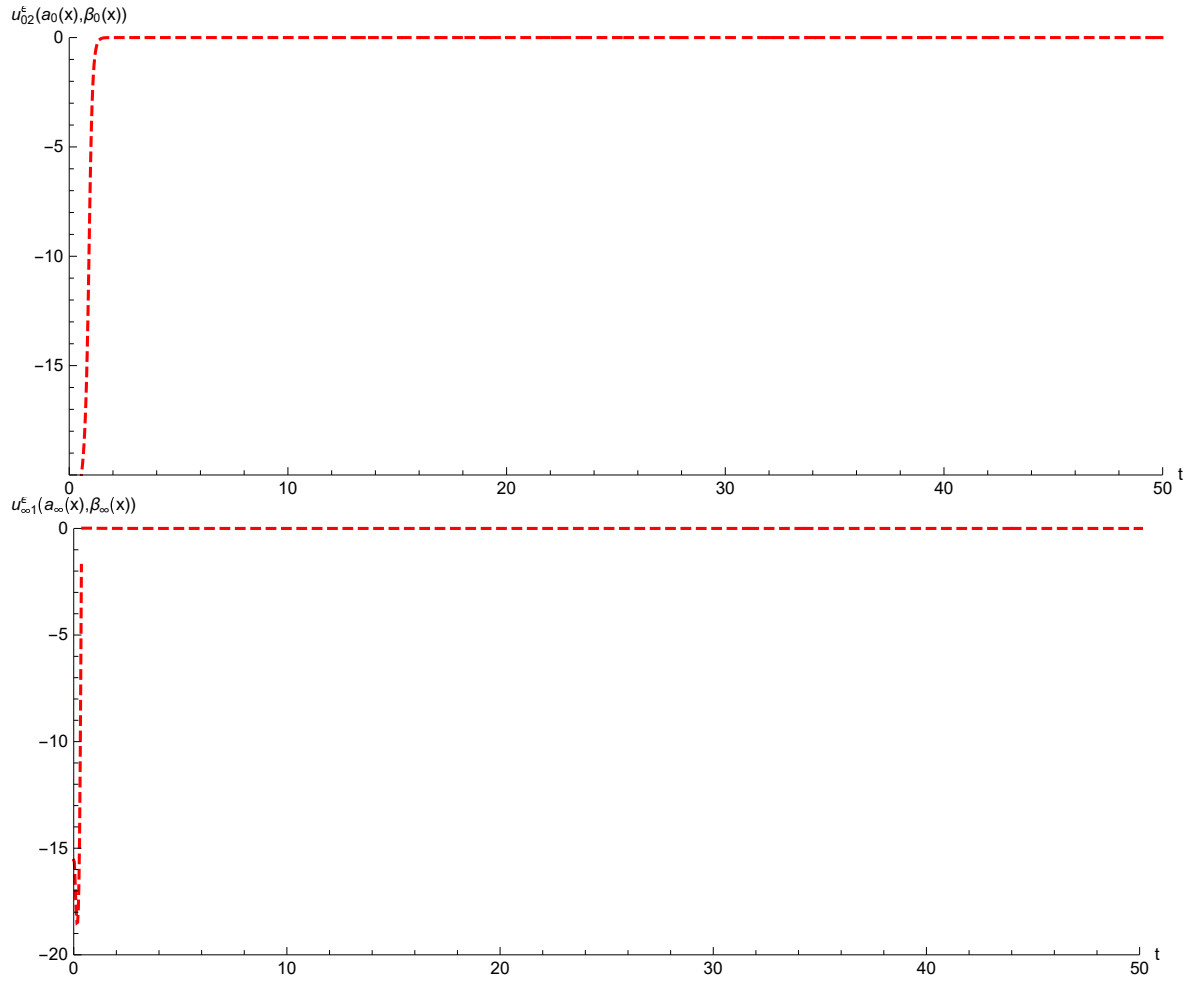


Figura 4.6: Controles acotados de retroalimentación  $u_{\infty 1}^{\epsilon}(a_{\infty}(x), \beta_{\infty}(x))$  y  $u_{02}^{\epsilon}(a_0(x), \beta_0(x))$ .

La figura 4.7 muestra la gráfica a lazo cerrado para el sistema controlado de Lorenz (4.22) para la condición inicial (10, 10, 10).

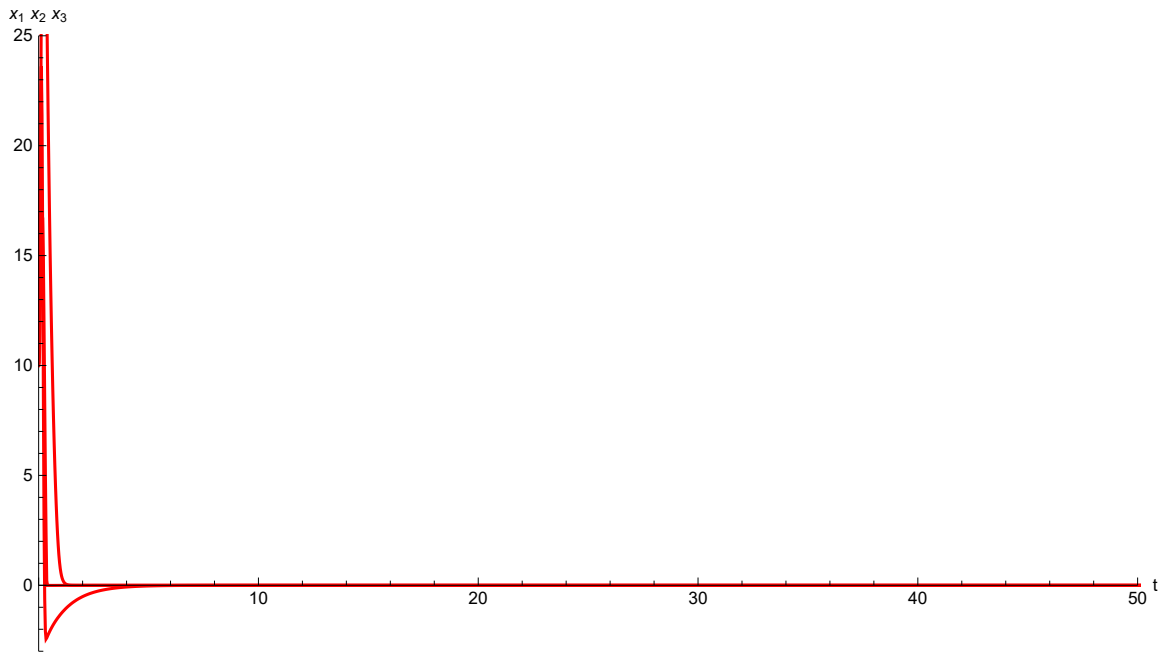


Figura 4.7: Trayectoria a lazo cerrado para la condición inicial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (10, 10, 10)$ .

La figura 4.8 muestra la gráfica con respecto al tiempo del sistema de Lorenz (4.17) frente al sistema controlado de Lorenz (4.22).

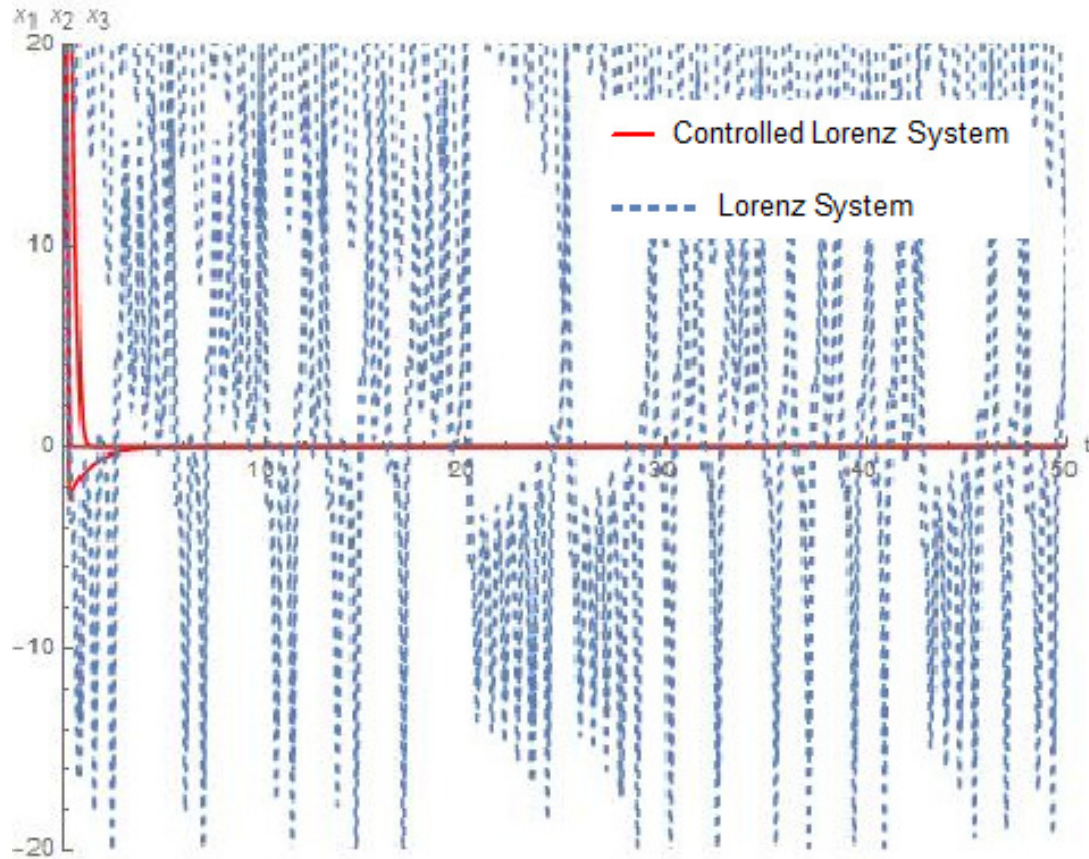


Figura 4.8: Gráfica respecto al tiempo del sistema de Lorenz (4.17) frente al sistema controlado de Lorenz (4.22).

Fijando los parámetros  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$ ,  $b = 8/3$  y  $v^* = 15$ , donde  $|u_j^\epsilon(x)| \leq v^*$ , para el sistema de Lorenz controlado (4.22), los puntos fijos son, el origen  $(0, 0, 0)$  y los puntos  $C^\pm = (\pm 8.58, \pm 10.08, 26.83)$ . Para el equilibrio  $C^\pm$ , hay dos raíces complejas conjugadas con parte real positiva por lo que son espirales, el origen tiene tres raíces con parte real negativa, por lo que es GAS.

La figura 4.9 muestra un diagrama de bifurcación para distintos valores de  $v^*$ , en el que observamos como la acción de control surte efecto en  $v^* \approx 15$ , produciéndose una bifurcación pitchfork.

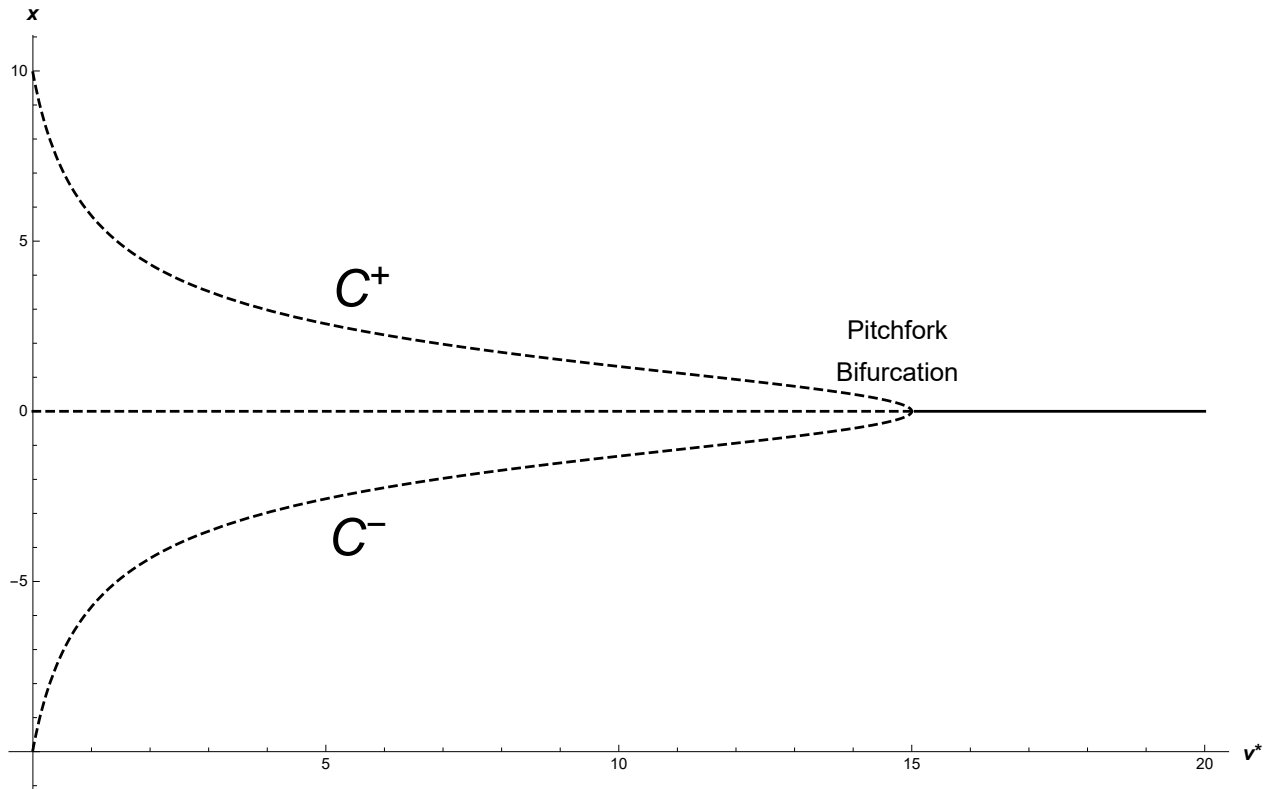


Figura 4.9: Diagrama de bifurcación del sistema de Lorenz. Dicho diagrama es la gráfica de la coordenada  $x$  de los puntos fijos frente al parámetro  $v^*$ , con  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  y  $b = 8/3$  fijos. La línea sólida denota equilibrio estable, las líneas discontinuas denotan equilibrios inestables, con una bifurcación pitchfork que se produce en  $v^* \approx 15$ .

La figura 4.10 muestra un diagrama de bifurcación de las variables de estado,  $z$  frente a diferentes valores de  $v^*$ . Para  $0 \leq v^* < 5$ , encontramos que las soluciones del sistema controlado de Lorenz (4.22) son caóticas, para  $5 \leq v^* < 15$ , las soluciones  $C^\pm$  se vuelven estables y en  $v^* \approx 15$  se produce una bifurcación de Hopf donde el flujo se dirige al origen.

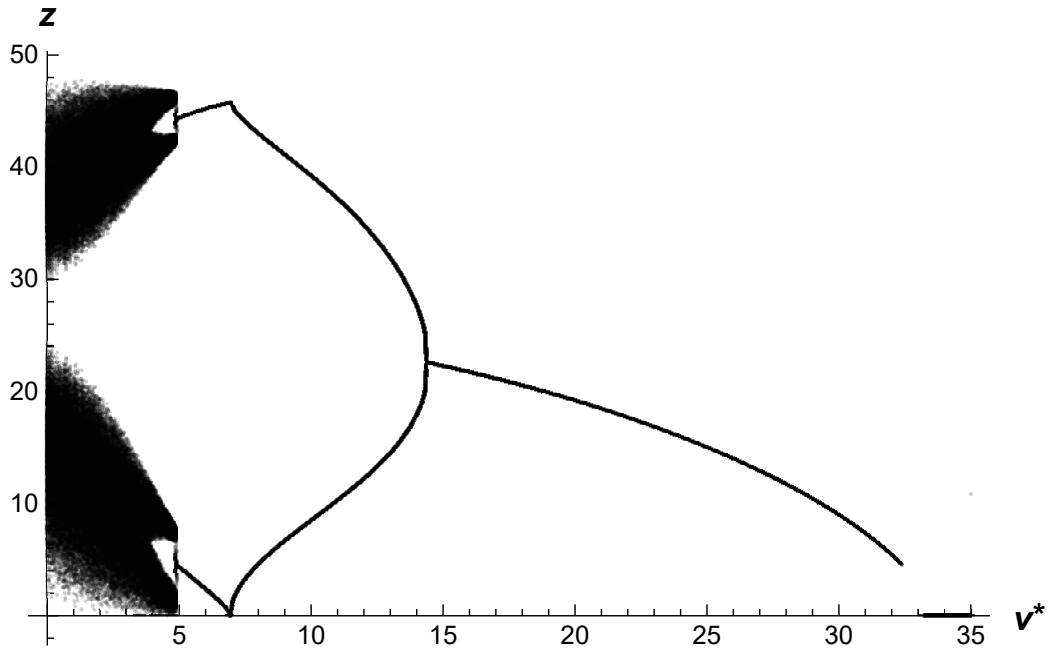


Figura 4.10: Diagrama de bifurcación de las variables de estado,  $z$  frente a diferentes valores de  $v^*$ .

## 5 Conclusiones

En el *Capítulo* §2, *Sección* §§2.1 abordamos el problema de estabilización de un sistema afín en el control respecto al Zonotopo  $m$ -dimensional,  $Z(V)$ , como CVS, que contiene al origen en su interior. Para resolver dicho problema consideramos las condiciones establecidas en el Teorema 1 de Zvi Artstein. El resultado logrado tiene la debilidad de suponer conocida una función de Lyapunov  $V(x)$  con las propiedades CLF y SCP, al menos en una vecindad  $\Omega$  del origen. Aplicando el método de síntesis presentado en la *Sección* §§2.1, obtuvimos lo siguiente:

- Una familia de estabilizadores admisibles  $u_\epsilon(x)$  para cada  $\epsilon \in (0, \infty)$ .
- Para el caso  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ , el punto de reposo  $x = 0$  del sistema a lazo cerrado (2.5) con retroalimentación admisible  $u_\epsilon(x)$  es GAS.
- El control  $u_\epsilon(x)$  se aproxima al control óptimo para valores grandes del parámetro  $\epsilon$ .

Primero mostramos que el problema de optimización CLF (2.11) es soluble si existe un control de retroalimentación  $\varpi(x)$ , que toma valores en  $\partial U$ , y es la función de control con mejor tasa con respecto a una CLF. En particular, si el CVS es la hipercaja  $m$ -dimensional  $Z(V) \subset \mathbb{R}^m$ , se analizan las condiciones para la existencia, unicidad y regularidad del control de retroalimentación  $\varpi(x)$ , y obtenemos una fórmula explícita para éste. Entonces, observamos que el control  $\varpi(x)$  es constante por pedazos con superficies de cambio definidas como la preimagen de los hiperplanos cartesianos  $C_i$  de  $\mathbb{R}^m$ , por lo tanto, se trata de un control tipo bang-bang.

Sin embargo, en vista de que el control de retroalimentación  $\varpi(x)$  no es admisible (es discontinuo en  $\cup_j \mathcal{N}_j$ ), consideramos una forma general de estabilizadores de retroalimentación admisibles  $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))^\top$ , cuyas componentes están dadas por  $u_j(x) = \rho_j(x)\varpi_j(x)$ , donde cada  $\rho_j(x)$  es una función de reescalamiento usada para regularizar cada entrada  $\varpi_j(x)$ . Entonces, proponemos un familia uno-parametrizada explícita de controles de retroalimentación admisibles  $u_\epsilon(x)$  definida por (2.25). Además los controles de retroalimentación son suaves/real analíticos sobre  $\mathbb{R}^n$  excepto en las superficies de cambio  $\mathcal{N}_j$  y continua en todas partes, siempre que la CLF y los campos vectoriales del sistema (2.1) sean suaves/real analíticos.

En el *Capítulo* §2, *Sección* §§2.2 estudiamos el problema de estabilización con control positivo para sistemas afines; además de extender los resultados de la *Sección* §§2.1 al caso de controles positivos. También mostramos que el caso  $0 \in Z(V)$  es considerado un problema cualitativamente diferente; al poner especial atención al caso cuando  $0 \in \partial Z(V)$ , y en particular a los controles positivos. De manera que generalizamos la síntesis



## 5 Conclusiones

de la fórmula explícita para controles de retroalimentación presentada en la Sección §§2.1 para incluir el caso  $0 \in \partial Z(V)$ .

En el Capítulo §3 presentamos un método general de síntesis de control para la estabilización global CLF de sistemas de control afín mediante controles admisibles (acotados y regulares) de retroalimentación propuestos por Solís-Daun en [15]. Así, “*modificamos*” la solución al “uniting CLF problem” derivado en [1] por Andrieu y Prieur, en este, *grosso modo*, se unen dos funciones de Lyapunov de control (CLF), la primera CLF caracteriza una propiedad de controlabilidad asintótica local hacia el origen, mientras que la segunda está relacionada con una propiedad de controlabilidad asintótica global con respecto a un conjunto compacto, obteniendo así una  $V(x)$  que es una CLF global.

En el Capítulo §4, Sección §§4.2 estabilizamos global y asintóticamente un sistema de Rössler, para este fin, primero encontramos una bola absorbente  $\mathcal{B}$  para dicho sistema, que es bien conocido por su comportamiento caótico. Para ello, un buen conocimiento de la dinámica del sistema no forzado es crucial para el método propuesto, que aprovecha la dinámica no forzada favorable. De hecho, dado que  $V(x)$  es una función de Lyapunov estricta respecto al atractor global, se utiliza como base para construir una CLF. Sin embargo, como los atractores globales suelen ser asimétricos respecto a los equilibrios del sistema no forzado, y los desplazamientos de coordenadas no suelen conservar la estructura de estabilidad, introducimos la solución modificada al “uniting CLF problem” que nos permite extender el método para hacer “cualquier” punto de equilibrio GAS. Por último, la CLF  $V(x)$  es suave, siempre que las CLF’s  $V_0(x)$  y  $V_\infty(x)$  sean ambas suaves. El método utilizado se basa en la teoría CLF, introducido por Artstein y Sontag, que fue desarrollado por Solís-Daun en [15] para CVS acotados. La clase de sistemas punto-disipativos incluye algunos sistemas caóticos bien conocidos, como el sistema de Lorenz, Chua suave, Lü, Chen, ... y ahora el sistema de Rossler (4.3) introducido en [31, 32]. De hecho, ejemplificamos los resultados con un sistema afín dado en (4.4) basado en la ecuación (4.3): (1) Demostramos que puede representarse como la interconexión retroalimentada de dos subsistemas, lo que ciertamente simplifica la búsqueda de la función  $V_\infty(x)$ ; (2) basándonos en  $V_\infty(x)$ , construimos una bola absorbente explícita para “atrapar” el atractor global del sistema de Rössler (4.3), demostrando que se trata de un sistema punto-disipativo; y (3) aplicamos el método de síntesis de control, desarrollado en el Capítulo §2, para alcanzar la GAS de (el equilibrio  $\bar{x} = 0$  de) el sistema afín (4.4) mediante controles retroalimentados admisibles acotados. Finalmente, en particular, esta Sección es la base para hacer GAS el sistema de Lorenz (4.17), ya que como se mencionó anteriormente el sistema de Rössler (4.2) fue creado para entender dicho sistema de Lorenz.

En la Sección §§4.3 utilizamos una bola absorbente  $\mathcal{B}$  para un sistema de Lorenz, obtenida por C. Sparrow (ver [38], Apéndice C, p. 196-198), que es bien conocido por su comportamiento caótico. Para encontrar tal bola absorbente  $\mathcal{B}$ , en [38] se propone una función de Lyapunov estricta  $V(x)$  con respecto al atractor global, en dicha Sección proponemos una CLF local. Sin embargo, dado que los atractores globales son generalmente asimétricos con respecto a los equilibrios del sistema no forzado, y los desplazamientos de coordenadas no suelen conservar la estructura de estabilidad, introducimos una solución modificada al “uniting CLF problem” que nos permite extender el método para obtener

## 5 Conclusiones

casi “cualquier” equilibrio GAS. Por último, igual que en la Sección §§4.2, la CLF  $V(x)$  es suave, siempre que las CLF’s  $V_0(x)$  y  $V_\infty(x)$  sean ambas suaves. El método utilizado se basa en el enfoque de las funciones de Lyapunov de control CLF, introducido por Artstein y Sontag, que fue desarrollado por Solís-Daun en [15] para CVS acotados. Ejemplificamos los resultados con un sistema afín (4.22) basado en el sistema de Lorenz (4.17): (i) Usamos la bola absorbente  $\mathcal{B}$  dada en [38] junto con la función de Lyapunov (que llamamos  $V_\infty(x)$ ) que se propuso para este fin; (ii) de esta forma “atrapamos” al atractor global del sistema de Lorenz (4.17), probando que es un sistema punto-disipativo; (iii) aplicamos el método de síntesis de control, desarrollado en el Capítulo §2, para alcanzar la GAS de (el equilibrio  $\bar{x} = 0$  de) el sistema afín (4.22) mediante controles admisibles de realimentación acotada; y (iv) hacemos un análisis de estabilidad alrededor de los puntos de reposo del sistema controlado (4.22) y mostramos el diagrama de bifurcación de la coordenada  $x_1$  de los puntos fijos frente a distintos valores del parámetro de control ( $v^*$ ), finalmente, mostramos otro diagrama de bifurcación de las variables de estado  $x_3$  frente a distintos valores del parámetro  $v^*$ .

Para futuras investigaciones se busca extender los resultados del Capítulo §4 a sistemas de dimensión infinita, pues, algunos de éstos están caracterizados por ser disipativos (al igual que ciertos sistemas caóticos). Así, dichos sistemas están restringidos por las definiciones y resultados dados en la Sección §§4.1. Para muchos sistemas semidinámicos, los atractores globales compactos  $K$  tienen dimensión finita (en un sentido Hausdorff o fractal). Esto, junto con su invariancia, implica que el semi-flujo restringido a  $K$  es un sistema dinámico (generado por una EDO). Sin embargo, debido a su compleja estructura (normalmente,  $K$  es un conjunto fractal), carece de toda utilidad práctica. Un enfoque prometedor fue la introducción, en Foias et al. [6], de la noción de “*variedad inercial*”, es decir, una variedad Lipschitz positivamente invariante de dimensión finita que contiene el atractor  $K$  y atrae exponencialmente todas las trayectorias del espacio fase (es un análogo global de la variedad central). La restricción al sistema (EDP o EDR) a la variedad inercial es una EDO, llamada “*forma inercial*” para el sistema dado. El comportamiento asintótico de las soluciones del sistema que tiene una variedad inercial suficientemente grande está completamente determinado por la forma inercial. Algunos sistemas importantes donde existen variedades inerciales son: las ecuaciones de Kuramoto-Sivashinski, la ecuación de difusión-reacción de Chafee-Infante y Cahn-Hilliard, la ecuación no lineal de Burger, las ecuaciones de Beam y von Kármán, y las ecuaciones de Korteweg-de Vries. Así, los sistemas de dimensión infinita donde exista una variedad inercial son los considerados para hacerlos GAS. Sin embargo, hallar la restricción a la variedad inercial (*forma inercial*) es un problema muy “*complicado*” y hasta donde sabemos, no se ha hallado en ningún caso dicha variedad de manera “*explícita*” (EDO). Creemos que este objetivo es alcanzable, ya que durante el Congreso Mundial de Control (IFAC, Paris 2017) Solís-Daun (ver [19]) presentó un artículo en el cual se afirma, que se puede “*Estabilizar global y asintóticamente (GAS) un sistema de dimensión infinita (e.g. EDP’s o EDR’s) a través de controles de dimensión finita y acotados*”. De hecho, ya que el sistema de Lorenz se derivó inicialmente de una aproximación Oberbeck-Boussinesq. Es un caso particular de la ecuación de Navier-Stokes con la ecuación de convección térmica. El problema original es un problema 2D considerando la convección térmica entre dos placas horizontales paralelas. El

## 5 Conclusiones

sistema de Lorenz surge al aplicar una expansión truncada de Fourier-Galerkin, de esta manera, dado que la EDP es disipativa, “sospechamos” que dicho sistema (4.17) es la variedad inercial del sistema original, aunque “no se ha encontrado prueba alguna”.

# Apéndice A

## A.1. Definiciones y resultados básicos de convexidad

Ahora presentamos definiciones y resultados básicos para conjuntos convexos generales, particularmente polítopos, y así, aclarar la notación que se utiliza a lo largo de este trabajo.

Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^m$  es llamado convexo si para cada par de puntos  $p, q \in A$  se tiene  $[p, q] := \{\lambda p + (1 - \lambda)q : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset A$ . Decimos que  $p$  es una combinación convexa de  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}^m$  si existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$  con

$$(1) p = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i, (2) \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \text{ y } (3) \lambda_i \geq 0. \quad (5.1)$$

Si la condición (3) no se cumple,  $p$  es llamada una combinación afín de  $p_1, \dots, p_r$ , si la condición (2) no se cumple,  $p$  es llamada una combinación positiva de  $p_1, \dots, p_r$  y si los puntos (2) y (3) fallan, se dice que  $p$  es una combinación lineal de  $p_1, \dots, p_r$ .

Para un conjunto  $A$ , el conjunto de cada combinación convexa de puntos en  $A$  se llama *envolvente convexa* de  $A$ , denotado  $\text{conv}(A)$ . Análogamente, se define la *envolvente afín* de  $A$ :  $\text{aff}(A)$ , la *envolvente positiva* de  $A$ :  $\text{pos}(A)$  y la *envolvente lineal* de  $A$ :  $\text{lin}(A)$ . Por lo que, no es complicado verificar que  $\text{conv}(A)$ ,  $\text{aff}(A)$  y  $\text{lin}(A)$  son el conjunto convexo, el plano y el subespacio más pequeños que contiene  $A$ , respectivamente. Toda *envolvente afín* es la traslación de una *envolvente lineal* y la dimensión de dicha *envolvente afín* es definida como la dimensión de la correspondiente *envolvente lineal*. Además, decimos que el conjunto  $A$  es  $k$ -dimensional,  $k$ -conjunto abreviando, si  $k$  es la dimensión de  $\text{aff}(A)$ . Subespacios afines de dimensión  $0, 1, \dots, k, \dots, m - 1$  en  $\mathbb{R}^m$  son puntos, líneas,  $k$ -planos e hiperplanos, respectivamente. El *interior relativo* de  $A$ , denotado  $\text{relint}A$ , es el interior de  $A$  relativo a  $\text{aff}(A)$ .

Dado  $H = \{p \in \mathbb{R}^m : v \cdot p = c\} \subset \mathbb{R}^m$  un hiperplano, denotaremos por  $H^+ = \{p \in \mathbb{R}^m : v \cdot p \geq c\}$  y  $H^- = \{p \in \mathbb{R}^m : v \cdot p \leq c\}$  a los semiespacios cerrados cuyo borde es  $H$ . Decimos que  $H$  es un hiperplano soporte de un conjunto convexo cerrado  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  si al menos un punto  $a_0 \in A$  está en  $H$ , es decir,  $v \cdot a_0 = c$ , y  $A \subset H^+$  o  $A \subset H^-$ . El semiespacio que contenga a  $A$  es llamado el semiespacio soporte de  $A$ .

Una funcional de Minkowski (o gauge)  $\mu : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  positivamente homogénea ( $\mu(\lambda u) = \lambda \mu(u)$  para  $\lambda \geq 0$ ) y una función convexa. Así, para un conjunto convexo  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^m$ , la funcional gauge es

$$\mu(u) := \inf\{r \geq 0 : u \in rU\} \quad (5.2)$$

## 5 Conclusiones

e inversamente, si  $\mu(u)$  es cerrado (es decir, semicontinua por abajo y  $\mu \upharpoonright_{\text{dom}\mu \neq \emptyset}$  finita), entonces existe un único conjunto convexo  $U \neq \emptyset$  tal que  $U = \{u \in \mathbb{R}^m : \mu(u) \leq 1\}$  es un conjunto de nivel.

**Teorema 9.** ([33], pp. 79 & 125). Sea  $U \subset \mathbb{R}^m$  un convexo cerrado con  $0 \in U$ . Entonces, (i)  $\mu$  es cerrada y semi-definida positiva ( $\mu(u) \geq 0$  y  $\mu(0) = 0$ ); (ii)  $\mu$  es definida positiva ssi  $U$  es un conjunto compacto; y (iii)  $\mu$  es finita en todas partes ssi  $0 \in \text{int}U$ .

Si  $U$  es un conjunto convexo compacto con  $0 \in \text{int}U$  entonces la polar de  $\mu$  y el conjunto polar de  $U$ , son definidos, respectivamente, por

$$\mu^*(u^*) := \sup_{u \neq 0} \frac{u^* \cdot u}{\mu(u)} \text{ y } U^* := \{u^* \in (\mathbb{R}^m)^* : \mu^*(u^*) \leq 1\}, \quad (5.3)$$

donde  $(\mathbb{R}^m)^*$  es el espacio dual de  $\mathbb{R}^m$ .

La función soporte de  $U$  denotada por  $\varsigma_U$ , es definida como

$$\varsigma_U(u^*) := \sup_{u \in U} u^* \cdot u, \quad (5.4)$$

la cual es una función positivamente y convexa, y  $\text{dom}\varsigma_U$  es un cono en  $(\mathbb{R}^m)^*$  con vértice en 0.

**Teorema 10.** Supongamos que  $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^m$ . Entonces se tiene:

(a) ([33], p. 125).  $U$  es un conjunto convexo cerrado con  $0 \in U$ , entonces  $U^*$  es un conjunto convexo cerrado con  $0 \in U^*$ , y  $U^{**} = U$ . Además, si  $\mu$  y  $\mu^*$  son respectivamente las funcionales gauge de  $U$  y  $U^*$ , entonces  $\mu^* = \varsigma_U$ , y vice versa.

(b)  $U$  es acotada ssi  $U^*$  satisface que  $0 \in \text{int}U^*$ .

(c)  $U^*$  es acotada ssi  $U$  satisface que  $0 \in \text{intconv}U$ .

Si  $0 \in \text{int}U$ , entonces  $U$  y  $U^*$  tienen las mismas propiedades.

**Corolario 11.**  $U$  es convexo compacto con  $0 \in \text{int}U$  ssi  $U^*$  es convexo compacto con  $0 \in \text{int}U^*$ . Además,  $U^{**} = U$ .

Observe que es importante que 0 sea un punto interior de  $U$ . De lo contrario, si  $0 \notin \text{int}U$  se pierden algunas propiedades.

**Corolario 12.** Si  $U$  es un conjunto convexo compacto con  $0 \in \partial U$ , entonces: (i)  $U^*$  es un conjunto convexo cerrado no acotado con  $0 \in \text{int}U^*$ ; (ii)  $\mu$  es definida positiva, pero no es finita en cualquier parte; y (iii)  $\varsigma_U$  es semi-continua por abajo y finita en todas partes, pero sólo es semi-definida positiva.

Un conjunto convexo compacto  $P$  que es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos  $\{v_1, \dots, v_r\} \subset \mathbb{R}^m$  es un politopo, es denotado  $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_r\}$ . La envolvente convexa de puntos  $v_1, \dots, v_r$  que es afinmente independiente (es decir, ninguno de los puntos es una combinación de los otros) es llamada simplex. Si  $H$  es hiperplano soporte de  $A$ , entonces  $H \cap A$  es la cara expuesta de  $A$ . Tomamos la convención de llamar al  $\emptyset$  y a  $A$  caras del conjunto  $A$ , refiriéndose a éstas como impropias. Caras de dimensión

$0, 1, \dots, k, \dots, m - 1$  son llamadas vertices, aristas,  $k$ -caras y facetas. Un conjunto convexo  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  es un poliedro (polígono, si  $m = 2$ ) ssi es la intersección finita de semi-espacios cerrados.

Aunque definimos los politopos como la envoltura convexa de sus vertices, los siguientes enunciados establecen una descripción equivalente de  $P$ , que además es un teorema no trivial atribuido a Weyl y Minkowski.

**Teorema 13.** *Un subconjunto  $P \subset \mathbb{R}^m$  es la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos (un  $V$ -politopo) ssi es un poliedro acotado (un  $H$ -politopo).*

**Teorema 14.** *Si  $U$  es un politopo, entonces  $U^*$  es un poliedro.*

**Teorema 15.**  *$U$  es un politopo con  $0 \in \text{int}U$  ssi  $U^*$  es también un politopo con  $0 \in \text{int}U^*$ . Además, la polaridad provee una biyección entre las caras de  $U$  y las caras de  $U^*$  que invierten la relación de inclusión.*

**Proposición 16.** ([33], p. 174)  *$U \subset \mathbb{R}^m$  es un politopo ssi su función soporte es continua y seccionalmente lineal.*

## A.2. Geometría de la estabilización global CLF respecto a CVS politópicos

A continuación exploraremos la geometría detrás de la estabilización del sistema (2.1) con CVS dado por politopos conteniendo el origen no necesariamente como un punto interior.

En lo sucesivo, identificaremos el espacio dual  $(\mathbb{R}^m)^*$  con  $\mathbb{R}^m$  usando el producto interior, y denotamos el covector  $u^*$  por  $b$ .

Regresando a nuestro problema de control, obsérvese que el problema (2.3) se satisface si existe un control de retroalimentación  $u(x)$  tomando valores en  $\partial U$  tal que  $a(x) < b(x) \cdot u(x)$ ,  $\forall x \neq 0$ . Por otra parte, para cualquier control  $u(x)$  tomando valores en  $U$ , se tiene que:  $b(x) \cdot u(x) \leq \mu^*(b(x))\mu(u(x))$ . Así, si hacemos  $u(x) = \varpi(x)$ , con  $\mu(\varpi(x)) \equiv 1$ , entonces

$$b(x) \cdot \varpi(x) = \mu^*(b(x)). \quad (5.5)$$

Por consiguiente, si podemos encontrar una CLF apropiada, entonces cualquier control de retroalimentación  $\varpi(x)$  que satisface (5.5) cumple la equivalencia entre (2.3) y

$$\forall x \neq 0, a(x) < \mu^*(b(x)) \quad (5.6)$$

Decimos que la retroalimentación  $\varpi(x)$  es la mejor tasa (óptimo) de la ley de control respecto a CLF  $V(x)$  [para el sistema (2.1) con controles tomando valores en  $U$ ] ssi satisface

$$\forall x \neq 0, a(x) - b(x) \cdot \varpi(x) = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0. \quad (5.7)$$

## 5 Conclusiones

De ésta manera, el problema (2.3) se satisface si existe un control óptimo  $\varpi(x)$ . Sin embargo, por (5.5), se sigue que  $\varpi(x)$  **no es admisible** ya que es singular en el conjunto

$$\mathcal{N}_b := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}. \quad (5.8)$$

Con respecto a la existencia, unicidad y regularidad del control  $\varpi(x)$ , en [11], [15] se mostró que (5.5) puede ser replanteado como el siguiente programa de optimización.

$$\mathcal{P}(b) := \sup\{b \cdot u : u \in \partial U\} \quad (5.9)$$

Claramente, ya que  $U$  es compacto, existe al menos una solución global a  $\mathcal{P}(b)$ , denotado por  $\omega(b)$ . Así, por el Teorema 10 (a), tenemos que  $\mathcal{P}(b)$  es precisamente  $\varsigma_U(b)$ . Además, el conjunto de soluciones  $\omega(b)$  es la subdiferencial de  $\varsigma_U(b)$  (ver [11], [15]), dado por

$$\varsigma_U(b) = b \cdot \omega, \quad \forall \omega \in \partial \varsigma_U(b), \quad (5.10)$$

donde  $\partial \varsigma_U(b)$  es la subdiferencial de  $\varsigma_U$  en  $b$  y cada  $\omega \in \partial \varsigma_U(b)$  es el subgradiente de  $\varsigma_U$  en  $b$ . Obsérvese que si omitimos  $x$  de (5.5), obtenemos la expresión (5.10). Así, si  $\varsigma_U(b)$  es diferenciable en  $b$ , entonces  $\partial \varsigma_U(b) = \{\omega\}$  con  $\omega = \nabla \varsigma_U(b)$ , así

$$\omega(b) = (\nabla \varsigma_U(b))^\top. \quad (5.11)$$

En lo sucesivo, sólo supondremos politópicos cvs  $U$  con  $0 \in U$ . De la Proposición 16, tenemos que  $U$  es un politopo ssi su función soporte es continua y seccionalmente lineal. Los dominios de la linealidad corresponden a los vértices del politopo  $U$ . Por lo que, asumiendo la V-representación, si  $U$  tiene  $k$ -vértices, tenemos que  $U = \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$  y su función soporte es dada por

$$\varsigma_U(b) = \begin{cases} v_1 \cdot b, & \text{si } b \in C_1 \\ \vdots \\ v_k \cdot b, & \text{si } b \in C_k, \end{cases} \quad (5.12)$$

donde los  $C_i$  son conos poliedricos con vértice en  $0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , correspondiente a los dominios de la linealidad de  $\varsigma_U$ . Esta colección de conos  $\mathbb{R}^m$ , se dice que es el abanico del politopo  $U$ .

Toda cara propia  $F$  de un conjunto convexo cerrado  $A$  correspondiente a un cono  $N_F$  de funciones lineales  $v \in (\mathbb{R}^m)^*$  son maximizadas en  $F$  sobre  $A$ . Identificamos a  $(\mathbb{R}^m)^*$  con  $\mathbb{R}^m$  y llamamos a tal función  $v$  un vector normal de  $F$  sobre  $A$ . En lo sucesivo la cara que es maximal respecto a  $v$  será denotada por  $(A)^v$ . El cono  $N_F$  es el cono normal de  $F$  y los conos normales de todas las caras de un politopo  $P$  forman un abanico completo, el abanico normal,  $N_p$ , de  $P$ . Es decir, toda cara no vacía de un cono normal es también un cono normal de alguna cara de  $P$ , la intersección de dos conos normales es una cara de ambos y la unión de todos los conos cubren  $\mathbb{R}^m$ . La transformación que manda una cara  $F$  de  $P$  a su cono normal  $N_F$  es un anti-isomorfismo.

## 5 Conclusiones

Para  $\varsigma_U(b)$  definida en (5.12), la polar  $U^*$  es dada por

$$\begin{aligned} U^* &= \{b \in \mathbb{R}^m : \varsigma_U(b) \leq 1\} \\ &= \{b \in \mathbb{R}^m : v_1 \cdot b \leq 1 \& \dots \& v_k \cdot b \leq 1\}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

la cual es definida para un sistema de  $k$  desigualdades lineales.

Definimos el conjunto nulo de  $\varsigma_U$  por

$$\mathcal{N}_\varsigma := \{b \in \mathbb{R}^m : \varsigma_U(b) = 0\}. \quad (5.14)$$

Del Teorema 9, si  $U$  es compacto con  $0 \in \text{int}U$ , entonces  $\varsigma_U(b)$  es finita en todas partes y definida positiva ( $\mathcal{N}_\varsigma = \{0\}$ ). Por lo tanto, si  $U$  es un politopo con  $0 \in \partial U$ , el Teorema 14 y el Corolario 12, implican que  $U^*$  es un poliedro no acotado con  $0 \in \text{int}U^*$ , y  $\varsigma_U(b)$  es sólo semi-definida positiva, es decir,  $\mathcal{N}_\varsigma$  contiene completamente al 0. Además, ya que  $\varsigma_U(b)$  es sólo semi-definida positiva, ésta es una función impropia:  $\varsigma_U^{-1}[0] = \mathcal{N}_\varsigma$ .

De ésta manera, remarcamos la importancia de estudiar las propiedades y la estructura geométrica del conjunto nulo  $\mathcal{N}_\varsigma$ . El siguiente resultado muestra la estructura geométrica de  $\mathcal{N}_\varsigma$  en términos de la ubicación del 0 como punto interior relativo de las caras de un politopo  $U$  con  $0 \in U$ . Este resultado es nuevo y no se ha tratado en la literatura.

**Teorema 17.** *Supongamos  $U \subset \mathbb{R}^m$  con  $0 \in U$ . Entonces, el conjunto nulo  $\mathcal{N}_\varsigma$  de  $\varsigma_U$  es un cono poliédrico cerrado con vértice en 0. Además, **(a)** si 0 es un vértice de  $U$  entonces  $\mathcal{N}_\varsigma = C_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , un cono  $m$ -dimensional; en cualquier otro caso, **(b)** existe una cara de  $F$  (la más pequeña) que contiene al 0, es decir, una  $d$ -cara de  $U$  ( $1 \leq d \leq m$ ), incluyendo  $U$  misma, tal que  $0 \in \text{relint}F$ , y  $\mathcal{N}_\varsigma$  es  $(m-d)$ -dimensional dado por la intersección de los conos poliédricos correspondientes a todos los vértices de  $F$ .*

Regresando a nuestro problema de control, en vista que la función soporte  $\varsigma_U(b)$  de un politópico CVS es seccionalmente lineal, entonces  $\omega(b)$ , la solución al programa (5.9), es constante en el interior de cada cono poliédrico,  $\text{int}C_i$ , y de (5.11) es dado por

$$\omega(b) = (\nabla \varsigma_Z(b))^\top = \begin{cases} v_1, & \text{si } b \in \text{int}C_1 \\ \vdots \\ v_k, & \text{si } b \in \text{int}C_k, \end{cases} \quad (5.15)$$

y en particular,  $\omega(b) \upharpoonright_{\text{int}\mathcal{N}_\varsigma} \equiv 0$ . Además,  $\omega(b)$  es singular en las superficies de cambio  $\partial C_i$ , para  $i = 1, \dots, k$ .

Regresando a la dependencia de la variable de estado  $x \in \mathbb{R}^n$ , y tomando  $b(x)$  definido en (2.4). Obsérvese que ya que todos los conos poliédricos  $C_i$  tienen en común su vértice en 0, entonces  $\cap_i C_i = \{0\}$ . Así, el conjunto  $\mathcal{N}_b$  dado por (5.8), puede ser definido como la preimagen de 0 bajo la aplicación  $b(x)$ , es decir,  $\mathcal{N}_b = b^{-1}[0] = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}$ . Análogamente, definimos la representación en el espacio de estados  $\mathbb{R}^n$  de un cono poliédrico correspondiente a cada vértice  $v_i$  de  $U$ , donde  $C_i = b^{-1}[C_i] = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) \in C_i\}$ , para  $i = 1, \dots, k$ .



## 5 Conclusiones

Supongamos que la unión de las superficies de cambio  $\partial C_i$  de la solución  $\omega(b)$  puede ser representada por medio de conjuntos de 0-nivel de  $m$  funciones continuas  $\gamma_j(b)$  tal que su intersección es 0. Entonces, definimos la representación de estos conjuntos en  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{N}_j = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma_j(b(x)) = 0\}, \text{ para } j = 1, \dots, m, \quad (5.16)$$

tal que su intersección es  $\mathcal{N}_b = \cap_j \mathcal{N}_j$ . Finalmente, definimos la representación en  $\mathbb{R}^n$  del conjunto nulo dado por (5.14), como

$$\mathcal{N}_\zeta = b^{-1}[N_\zeta] = \{x \in \mathbb{R}^n : \zeta_U(b(x)) = 0\}. \quad (5.17)$$

Claramente,  $\mathcal{N}_b \subset \mathcal{N}_\zeta$ , con igualdad si  $0 \in \text{int}U$ .

En lo sucesivo, denotaremos por  $\beta(x) := \zeta_U(b(x))$  y la mejor tasa de ley de control de retroalimentación (5.15) definida por  $\varpi(x) := \omega(b(x))$ . Además, es claro que  $\varpi(x)$  es una función singular sobre el conjunto  $\cup_j \mathcal{N}_j$ , y en particular,  $\varpi(b) \upharpoonright_{\text{int}\mathcal{N}_\zeta} \equiv 0$ .

Ahora, supongamos  $V(x)$  es una CLF respecto al sistema (2.1) con controles tomando valores en el politopo  $U$  conteniendo a el 0 (es decir, si  $U$  tiene  $k$  vértices, entonces  $U = \text{conv}(v_1, \dots, v_k)$ ). Entonces, considerando la mejor tasa de control asociada  $\varpi(x)$  dada por (5.15) y  $\beta(x)$  definido por (5.12), se tiene  $\forall x \neq 0$ ,

$$\dot{V} = a(x) - b(x) \cdot \varpi(x) = a(x) - \beta(x) < 0 \text{ ssi } a(x) < \beta(x) \quad (5.18)$$

**Observación 1:** De la desigualdad (5.18) observamos que  $\forall x \neq 0$ , si  $\beta(x) = 0$  entonces  $a(x) < 0$ . Además, se tiene que  $\beta(x) = 0$  ssi  $x \in \mathcal{N}_\zeta$ .

# Apéndice B

## B.1. Deducción del modelo de Lorenz

Lorenz desarrolló un modelo muy simplificado para simular el comportamiento de la convección atmosférica. En esencia, la convección alude a la transferencia de calor entre regiones con temperaturas diferentes mediante el movimiento de fluidos. En la atmósfera, este movimiento es impulsado por la gravedad, causada por las diferencias de densidad entre las masas de aire caliente y frío. Durante el día, el Sol calienta la superficie de la Tierra, que transfiere parte de su energía al aire por conducción. A medida que el aire se calienta, su densidad disminuye, haciéndolo más ligero. En consecuencia, la gravedad hace que este aire más caliente ascienda, mientras que el aire más frío y denso desciende.

Supuso que la atmósfera era un fluido, concretamente un gas (hipótesis razonable dado que la atmósfera se compone principalmente de aire y vapor de agua) situado entre dos superficies: una inferior cálida y otra superior más fría. Esto crea un gradiente de temperatura en el que el aire en contacto con la superficie inferior es más caliente y el aire cercano a la superficie superior es más frío.

La dinámica de la atmósfera se rige por complejas ecuaciones diferenciales que relacionan variables específicas con sus variaciones temporales y espaciales, junto con numerosos parámetros. La contribución de Lorenz consistió en simplificar este modelo atmosférico concentrándose en la convección impulsada por la temperatura. Derivó un sistema de tres ecuaciones con tres variables, donde las derivadas temporales de cada variable dependían de combinaciones lineales y no lineales de estas variables y de ciertos parámetros numéricos. Este sistema es conocido ahora como *modelo de Lorenz*.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3,\end{aligned}\tag{5.19}$$

donde el parámetro  $\sigma$  representa el *número de Prandtl*,  $r$  denota el *número de Rayleigh relativo*, y  $b$  se relaciona con el tamaño físico del sistema.

En 1960, tras formular su modelo simplificado, que no se correspondía directamente con la atmósfera real, Lorenz intentó resolverlo utilizando un ordenador Royal McBee LGP-30. Su programa proporcionaba valores para cada variable  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  cada cinco iteraciones, y cada iteración tardaba aproximadamente un segundo. Para acelerar la obtención de resultados más amplios, utilizó los valores de salida de la máquina para estas variables como condiciones iniciales para cálculos posteriores, redondeándolos a tres decimales en lugar de los seis que arrojaba la máquina. Creía que esta pequeña alteración tendría un impacto insignificante, basándose en la suposición predominante

de que los pequeños cambios en las condiciones iniciales sólo afectarían ligeramente a la solución. Después de poner en marcha el programa, se tomó un descanso.

A su regreso, Lorenz observó un resultado inesperado: aunque las iteraciones iniciales coincidían con los resultados anteriores, al cabo de un tiempo divergían significativamente. Tras confirmar la precisión de la máquina y la corrección del programa, se dio cuenta de que pequeños cambios en las condiciones iniciales provocaban resultados drásticamente diferentes con el paso del tiempo. Este fenómeno se conoce ahora como “*sensibilidad respecto a las condiciones iniciales*”.

Lorenz profundizó en las matemáticas de su modelo y publicó sus conclusiones en un artículo de 1963 titulado “*Deterministic Nonperiodic Flow*”. Demostró que, para determinados valores de los parámetros, el sistema mostraba un comportamiento muy complejo, conocido ahora como *atractor de Lorenz*.

Estas ideas le llevaron a proponer el *efecto mariposa* en un artículo de 1972 titulado “*Predictability: Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?*”, [25]. Esta metáfora ilustra cómo una pequeña perturbación, como el aleteo de una mariposa, podría causar efectos importantes, como un huracán, a través de una cadena de acontecimientos.

Este hecho contribuyó al desarrollo de la *teoría del caos*, que explora sistemas dinámicos muy sensibles a las condiciones iniciales. Pequeñas variaciones iniciales pueden dar lugar a comportamientos futuros muy diferentes, complicando las predicciones a largo plazo. Esta idea sugiere que pequeñas perturbaciones atmosféricas pueden alterar el clima a gran escala.

El trabajo de Lorenz abrió un nuevo campo de estudio que afecta no sólo a las matemáticas, sino también a diversas ciencias biológicas, físicas y sociales. En meteorología, ha llevado a comprender que las predicciones meteorológicas precisas más allá de dos o tres semanas pueden ser fundamentalmente imposibles.

### B.1.1. Convección de Rayleigh-Bénard

El *modelo de Lorenz* explica el comportamiento de un fluido en condiciones *Rayleigh-Bénard*, que implican un fluido incompresible dentro de una celda que se calienta por abajo y se enfría desde arriba. Cuando el gradiente de temperatura en la dirección vertical es suficientemente grande, una pequeña parte del fluido asciende debido a la *fuerza de flotación*. Si esta fuerza es lo suficientemente fuerte, el paquete de fluido asciende más deprisa de lo que disminuye su temperatura, dando lugar al *flujo convectivo*; en caso contrario, no se producirá convección.

A continuación presentamos las ecuaciones que describen el fenómeno de convección natural de *Rayleigh-Bénard*, en donde intervienen el campo de velocidades  $u$ , la distribución de temperaturas  $T$ , la distribución de densidades  $\rho$  y el campo de presiones  $p$ , permaneciendo constantes los coeficientes característicos del fluido:

- **Ecuación de continuidad**

$$\text{Div}u = 0 \tag{5.20}$$

- Ecuación de Navier-Stokes

$$\varrho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \varrho f - \nabla p + \eta \nabla^2 u \quad (5.21)$$

- Ecuación de la energía

$$\varrho c_\nu \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right) = \lambda \nabla^2 T + 2\eta \varepsilon : \varepsilon \quad (5.22)$$

### B.1.2. Aproximación de Boussinesq-Oberbeck

La aproximación de *Boussinesq-Oberbeck* ignora las variaciones de densidad resultantes de pequeñas diferencias de temperatura  $\Delta T$ , cuando no interviene la fuerza producida por la gravedad. Dado que la fuerza gravitatoria es la única fuerza externa que influye en la convección natural, el término de flotabilidad  $\varrho f$  se expresa como  $\varrho g$ , donde  $g$  representa el vector de aceleración gravitatoria dado por

$$\mathbf{g} = \{0, 0, -g\},$$

aquí  $g$  es la aceleración de la gravedad, aproximadamente  $9.8 \text{ m/s}^2$ .

En los fluidos “movidos” por convección natural, en los que el movimiento del fluido es el resultado de los efectos de empuje causados por las diferencias de densidad debidas a las variaciones de temperatura, es habitual aproximar suponiendo constante la densidad del fluido, excepto en el término de flotabilidad de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. En este término, se considera que la densidad varía de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\varrho(T) = \varrho_0 [1 - \alpha (T - T_0)], \quad (5.23)$$

donde

- el *coeficiente de expansión térmica isobárico* se representa por  $\alpha$ . Para los fluidos incompresibles, suponemos que las variaciones de presión en el medio son tan pequeñas que las variaciones de densidad resultantes son despreciables. Por lo tanto, este coeficiente está dado por

$$\alpha = -\frac{1}{\varrho} \left( \frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_p$$

donde el subíndice  $p$  indica que la presión se considera constante.

- $T_0$  es la *temperatura de referencia*, lo que significa que la diferencia de temperatura viene dada por  $\Delta T = T - T_0$ .
- $\varrho_0$  representa el valor constante de la densidad en la temperatura de referencia  $T_0$ .

## 5 Conclusiones

Utilizando esta aproximación, junto con la suposición de incompresibilidad del fluido, y considerando que los coeficientes característicos del fluido  $\lambda$ ,  $c_v$ ,  $\eta$  y  $\alpha$  son independientes de la velocidad y la temperatura, partimos de las ecuaciones (5.20) a (5.22) para derivar las ecuaciones completas de la *aproximación de Boussinesq-Oberbeck*, que describen el fenómeno de convección de Bénard.

- **Ecuación de continuidad**

$$\text{Div} u = 0 \tag{5.24}$$

- **Ecuación del movimiento**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u &= \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 u \\ &= [1 - \alpha (T - T_0)] - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + v \nabla^2 u \end{aligned} \tag{5.25}$$

donde  $v = \frac{\eta}{\rho_0}$  es llamado *coeficiente cinemático de viscosidad*.

- **Ecuación de la energía**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \chi \nabla^2 T \tag{5.26}$$

el *coeficiente de difusividad térmica*, denotado como  $\chi = \frac{\lambda}{\rho_0 c_v}$ , es una propiedad específica de cada fluido que caracteriza la velocidad en la cual varía la temperatura en el fluido. El término  $\chi \nabla^2 T$  se conoce como *término de conducción térmica*.

En el contexto del experimento de Bénard, el término  $2\eta\varepsilon$  :  $\varepsilon$  puede despreciarse. Esto se debe a que, para fluidos como el agua o la silicona, este término es mucho menor que el término de conducción térmica  $\chi \nabla^2 T$  por un factor de aproximadamente  $10^{-7}$ .

Esta aproximación se basa en linealizar la relación entre densidad y temperatura, lo que la hace adecuada para escenarios donde las variaciones de temperatura no son excesivamente grandes.

### B.1.3. Modelo de Saltzman

El problema de la convección de Bénard en tres dimensiones es muy complejo de resolver, incluso con métodos numéricos. No obstante, para un flujo bidimensional, el problema se vuelve significativamente más sencillo. En consecuencia, el profesor Barry Saltzman redujo el problema de la convección tridimensional a uno bidimensional suponiendo que las celdas de Bénard en el plano  $x_1 x_3$  evolucionan independientemente de la coordenada  $x_2$ . Lo que significa que la componente del campo de velocidad en la dirección  $x_2$  y todas las derivadas  $\partial/\partial x_2$  desaparecen, como se ilustra en la Figura 5.1.

## 5 Conclusiones

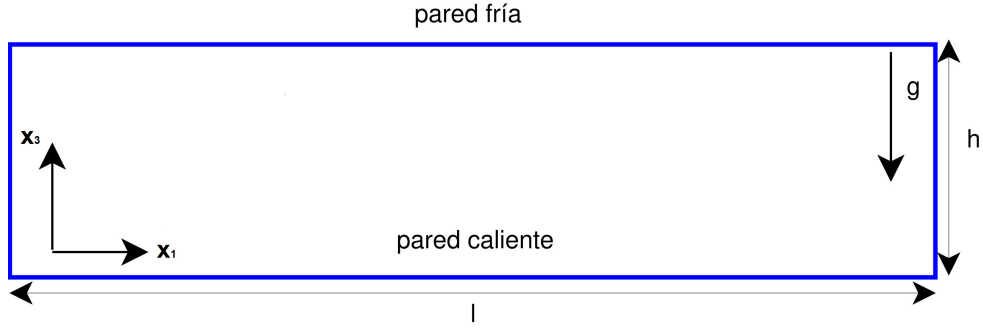


Figura 5.1: Representación del fluido confinado en la cavidad

Por lo tanto, el problema se reduce al estudio del movimiento bidimensional de un fluido confinado dentro de un recinto rectangular con un ancho  $l$  y altura  $h$ . Las paredes verticales se consideran adiabáticas, lo que implica que no intercambian calor con su entorno. La pared superior se mantiene a una temperatura  $T_0$ , mientras que la pared inferior está a una temperatura  $T_0 - \Delta T$ .

A partir de las ecuaciones (5.24), (5.25) y (5.26), e incorporando el supuesto antes mencionado, derivamos las ecuaciones que gobiernan el problema de convección en dos dimensiones.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_3} &= 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + w \frac{\partial u}{\partial x_3} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \nabla^2 u \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x_1} + w \frac{\partial w}{\partial x_3} &= -\frac{\rho}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \nabla^2 w \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x_1} + w \frac{\partial T}{\partial x_3} &= \chi \nabla^2 T
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

En el sistema de ecuaciones anterior, observamos cuatro ecuaciones diferenciales parciales con cuatro incógnitas  $u$ ,  $w$ ,  $p$  y  $T$ . Con el objetivo de simplificar el problema, en términos del número de incógnitas como del número de ecuaciones, adoptaremos el método descrito por Barry Saltzman en su artículo “*Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem*”, [37]. Este método nos permite simplificar el problema a dos ecuaciones con dos incógnitas.

Para lograr dicha reducción, introducimos el concepto de *función de corriente*. En el caso de un flujo bidimensional incompresible, definimos una función escalar conocida como *función de corriente*, denotada por  $\psi(x_1, x_3, t)$ , esta función nos permite derivar el campo de velocidades de la siguiente manera:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial x_3} \quad \&\& \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

## 5 Conclusiones

La existencia de dicha función surge de asumir la continuidad e incompresibilidad del fluido. Más aún, emplear esta función simplifica las ecuaciones al eliminar una incógnita, aunque a costa de aumentar en un grado el orden de las ecuaciones diferenciales. La función de corriente significa la ubicación espacial de las partículas dentro de la celda del fluido.

Haciendo referencia a la descripción del fenómeno bidimensional, establecemos las condiciones de contorno para la temperatura de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_3, t)_{x_3=0} &= T_0 + \Delta T \\ T(x_1, x_3, t)_{x_3=h} &= T_0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Definimos la función  $\theta(x_1, x_3, t)$ , que representa la desviación de la temperatura en todo punto del espacio  $T = T(x_1, x_3, t)$  de su componente lineal. Por tanto, la temperatura se expresa de la siguiente manera:

$$T(x_1, x_3, t) = T_0 + \Delta T \left(1 - \frac{x_3}{h}\right) + \theta(x_1, x_3, t), \quad (5.29)$$

de donde se cumple

$$\theta(x_1, 0, t) = 0 \quad \&\& \quad \theta(x_1, h, t) = 0.$$

Podemos asumir en este modelo asumimos que las temperaturas  $T_0$  y  $T_0 + \Delta T$  son constantes a causa del calentamiento externo. Para eliminar la presión,  $p$ , de las ecuaciones (5.27), derivamos la primera ecuación con respecto a  $x_3$  y la segunda con respecto a  $x_1$ . Posteriormente, aplicamos el teorema de Schwarz,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} + w \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_3} + v \frac{\partial}{\partial x_3} (\nabla^2 u) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_3} + w \frac{\partial^2 w}{\partial x_3 \partial x_1} &= -g \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_3} + v \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 w). \end{aligned}$$

Sustrayendo la primera ecuación de la segunda, y usando la definición de función de corriente tenemos

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla^2 \psi) - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} (\nabla^2 \psi) - g \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) + v \nabla^4 \psi = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \\ &= - \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} - \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

## 5 Conclusiones

esto es equivalente al rotacional del campo de velocidades con signo contrario. De tal manera, expresa la rotación del fluido en el plano  $x_1x_3$ . Además, se cumple la siguiente relación

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \nabla^2\nabla^2\psi \\ &= \frac{\partial^4\psi}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x_1^2\partial x_3^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial x_3^4} \\ &= \psi_{x_1x_1x_1x_1} + \psi_{x_1x_3x_3x_1} + \psi_{x_3x_1x_1x_3} + \psi_{x_3x_3x_3x_3}.\end{aligned}\tag{5.31}$$

**Nota:** Hemos asumido que la función  $\psi$  es de clase  $C^4$ , definida en un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^3$ . También, asumimos que las derivadas mixtas de  $\psi$  existen y son continuas y, según el teorema de Schwarz, estas derivadas son iguales.

Introduciendo la ecuación (5.23), que expresa la variación de densidad en el término de flotabilidad de la ecuación de movimiento, y la expresión de la ecuación de temperatura (5.29) en la ecuación desarrollada anteriormente y en la cuarta ecuación de (5.27) (ecuación de energía), establecemos las relaciones entre las variables  $\psi$  y  $\theta$  que describen el modelo de convección natural.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi) - \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_1}(\nabla^2\psi) + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla^2\psi) - g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - v\nabla^4\psi &= 0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x_3} - \frac{\nabla T}{h}\right) - \chi\nabla^2\theta &= 0.\end{aligned}$$

Haremos uso del *operador de Jacobi* para reducir la notación, éste operador se define de la siguiente manera

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(x_1, x_3)} = \frac{\partial a}{\partial x_1}\frac{\partial b}{\partial x_3} - \frac{\partial a}{\partial x_3}\frac{\partial b}{\partial x_1},$$

para expresar las ecuaciones anteriores de una forma más simple. Las ecuaciones finales son:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi = -\frac{\partial(\psi, \nabla^2\psi)}{\partial(x_1, x_3)} + v\nabla^4\psi + g\alpha\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\tag{5.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = -\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x_1, x_3)} + \frac{\Delta T}{h}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \chi\nabla^2\theta.\tag{5.33}$$

Estas ecuaciones sirvieron de base a Edward Lorenz para desarrollar su modelo de convección, que finalmente dio lugar al famoso sistema de ecuaciones diferenciales que lleva su nombre.

**Nota:** Echando la vista atrás, empezamos con un sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales con cuatro incógnitas y lo redujimos con éxito a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas,  $\psi$  y  $\theta$ .

Modelar un comportamiento como la convección atmosférica, se basa en el *diseño por similitud*, que implica equilibrios macroscópicos de los componentes del sistema. Para evaluar la similitud entre el modelo y el prototipo, los datos experimentales son cruciales.



## 5 Conclusiones

Es importante tener en cuenta que el modelo sirve como diseño a menor escala, mientras que el prototipo representa el diseño a mayor escala para las “pruebas” y la “validación”. Garantizar que el comportamiento observado en el modelo sigue siendo coherente con el del prototipo a pesar del “cambio de escala” es esencial.

Para facilitar este cambio de escala, primero debemos establecer las ecuaciones y parámetros del modelo y luego representarlos en variables adimensionales para “escalar” el prototipo adecuadamente.

Así, introduciremos las siguientes variables adimensionales marcadas con \*,

$$\begin{aligned} x_1 &= hx_1^* & \nabla^2 &= \left(\frac{1}{h^2}\right) \nabla^{*2} \\ x_3 &= hx_3^* & \psi &= \chi\psi^* \\ t &= \frac{h^2}{\chi} t^* & \theta &= \frac{\chi v}{g\alpha h^3} \theta^*, \end{aligned}$$

en las ecuaciones (5.32) y (5.33), obteniendo las equivalencias para la función de flujo  $\psi^*$  y la desviación de la temperatura  $\theta^*$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \nabla^{*2} \psi^* = -\frac{\partial(\psi^*, \nabla^{*2} \psi^*)}{\partial(x_1^*, x_3^*)} + \sigma \nabla^{*4} \psi^* + \sigma \frac{\partial \theta^*}{\partial x_1^*} \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \theta^* = -\frac{\partial(\psi^*, \theta^*)}{\partial(x_1^*, x_3^*)} + \text{Ra} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_1^*} + \nabla^{*2} \theta^*. \quad (5.35)$$

Resultado de la adimensionalización del sistema, aparecen dos parámetros adimensionales de suma importancia.

### Número de Prandtl

El ingeniero y físico alemán Ludwig Prandtl (1875-1953), conocido por sus trabajos en teoría aerodinámica y mecánica de fluidos, introdujo un número adimensional denotado por  $\sigma$ . Este número indica la relación entre la difusividad viscosa y la difusividad térmica,

$$\sigma = \frac{v}{\chi}.$$

La fricción del fluido viscoso contra la superficie de control produce una tensión de cizalladura proporcional al gradiente vertical de velocidades. La distribución de velocidades oscila entre cero en el contacto con la superficie de control y la velocidad máxima en las regiones alejadas de la superficie. La zona entre estos estados se conoce como *capa límite*.

La región del fluido en la que no puede despreciarse la viscosidad debido a la existencia de gradientes de velocidad elevados se denomina *capa límite viscosa*. Del mismo modo, la región en la que no puede ignorarse la variación de temperatura debido a la diferencia de temperatura entre el fluido y la superficie de control se denomina *capa límite térmica*.

Como se mencionó anteriormente, el número de Prandtl representa la relación entre la difusión de la cantidad de movimiento, debida a la fricción del fluido con la superficie de

## 5 Conclusiones

control, y la difusión de calor de este proceso. Así, este número indica el espesor relativo de la capa límite viscosa y de la capa límite térmica. Es importante señalar que el número de Prandtl depende únicamente de las características físicas del fluido.

### Número de Rayleigh

El número de Rayleigh, introducido por el matemático y físico, que ganó el Premio Nobel John William Strutt y fue barón tercero Rayleigh, es un número adimensional que representa la relación entre la fuerza de flotación (gravedad en este contexto) y la viscosidad cinemática de un fluido. También caracteriza la naturaleza de la transferencia de calor, ya que para ciertos valores de este número, la transferencia de calor puede ocurrir por conducción o convección.

A medida que aumenta el número de Rayleigh, el predominio de la fuerza gravitacional se vuelve más pronunciado. La expresión del número de Rayleigh viene dada por:

$$\text{Ra} = \frac{g\alpha h^3 \Delta T}{\chi\nu}$$

de esta expresión podemos deducir que el número de Rayleigh actúa como “*parámetro de control*” en el problema de convección de Bénard.

**Nota:** Como sugiere su nombre, las variables o parámetros adimensionales “no tienen dimensiones”. No quiere decir que carezcan de unidades, más bien que son una relación de dos variables diferentes con las mismas unidades, que se anulan entre sí.

Para las ecuaciones adimensionales, asumimos las siguientes condiciones de contorno,

1.  $\theta^*(x_1, 0, t) = \theta^*(x_1, h, t) = 0,$
2.  $\psi^*(x_1, 0, t) = \psi^*(x_1, h, t) = 0,$
3.  $\nabla^{*2}\psi^*(x_1, 0, t) = \nabla^{*2}\psi^*(x_1, h, t) = 0.$

A partir de las ecuaciones adimensionales y estas condiciones de contorno, Barry Saltzman representó la función de corriente  $\psi^*$  y la desviación de temperatura  $\theta^*$  usando expansiones de Fourier. Las expresó como una suma de componentes dobles de Fourier, siendo  $l$  la longitud de onda en la dirección  $x_1$  y  $2h$  en la dirección  $x_3$ ,

$$\psi^*(x_1^*, x_3^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi(m, n, t^*) \exp \left[ 2\pi h i \left( \frac{m}{l} x_1^* + \frac{n}{2h} x_3^* \right) \right], \quad (5.36)$$

$$\theta^*(x_1^*, x_3^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(m, n, t^*) \exp \left[ 2\pi h i \left( \frac{m}{l} x_1^* + \frac{n}{2h} x_3^* \right) \right], \quad (5.37)$$

los números de onda en las direcciones  $x_1$  y  $x_3$  son  $m$  y  $n$ , respectivamente. Los coeficientes complejos de Fourier  $\Theta$  y  $\Psi$  son dados por

$$\Psi(m, n, t^*) = \frac{1}{2lh} \int_0^l \int_{-h}^h \psi^*(x_1^*, x_3^*, t^*) \exp \left[ 2\pi h i \left( \frac{m}{l} x_1^* + \frac{n}{2h} x_3^* \right) \right] dx_1^* dx_3^*, \quad (5.38)$$

$$\Theta(m, n, t^*) = \frac{1}{2lh} \int_0^l \int_{-h}^h \theta^*(x_1^*, x_3^*, t^*) \exp \left[ 2\pi h i \left( \frac{m}{l} x_1^* + \frac{n}{2h} x_3^* \right) \right] dx_1^* dx_3^*. \quad (5.39)$$

## 5 Conclusiones

Considerando las condiciones del *Teorema de Fourier*, suponemos que las funciones  $\psi^*$  y  $\theta^*$  son integrables dentro del rectángulo  $[0, l] \times [-h, h]$ . En la expansión de Fourier, la variable  $x_1^*$  tiene un periodo de  $l/h$  mientras que el periodo de la variable  $x_3^*$  es  $1/2$ .

Dadas las condiciones de contorno para  $\psi^*$  y  $\theta^*$ , estas funciones representan el fenómeno de convección en la región  $x_3^* = 0$  a  $h$ .

Para derivar las ecuaciones que describen los coeficientes de Fourier, Saltzman transformó las ecuaciones adimensionales, utilizando las relaciones antes mencionadas (5.36), (5.37), (5.38), y (5.39), en un sistema de dos ecuaciones diferenciales que involucran las variables  $\Psi$  y  $\Theta$ .

Ya que dichos coeficientes son complejos, la representación en sus respectivas partes reales e imaginarias son,

$$\Psi(m, n) = \Psi_1(m, n) + i\Psi_2(m, n), \quad (5.40)$$

$$\Theta(m, n) = \Theta_1(m, n) + i\Theta_2(m, n), \quad (5.41)$$

obteniendo un total de doce ecuaciones que determinaban las relaciones entre las componentes  $\Psi_1(m, n)$ ,  $\Psi_2(m, n)$ ,  $\Theta_1(m, n)$  y  $\Theta_2(m, n)$ .

Haciendo uso de las soluciones dadas por *Rayleigh* para las ecuaciones adimensionales, hizo truncamientos en los desarrollos de Fourier con los siguientes valores para los números de onda  $m$  y  $n$ ,

(m, n)	
(1, 1)	(2, 1)
(3, 1)	(4, 1)
(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)
(3, 2)	(4, 2)
(5, 2)	(6, 2)
(0, 1)	(0, 2)
(0, 3)	(0, 4)

Cuadro 5.1: Valores para los números de onda

También, supuso que el número de Prandtl del fluido en el estudio era  $\sigma = 10$  y tomó el número de Rayleigh como parámetro de control.

De esta manera, reescribió las doce relaciones como un conjunto de 52 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de la forma

$$\frac{dX_i}{dt^*} = \sum_{j,k} C_{ijk} X_j X_k,$$

donde  $X_i$ ,  $X_j$  y  $X_k$  hacen referencia a las variables  $\Psi_1(m, n)$ ,  $\Psi_2(m, n)$ ,  $\Theta_1(m, n)$  y  $\Theta_2(m, n)$  para una asignación específica de los subíndices para cada valor de la tupla

## 5 Conclusiones

$(m, n)$  y  $C_{ijk}$  correspondientes a los coeficientes. Utilizando herramientas de cálculo numérico, calculó estos coeficientes para los valores  $m$  y  $n$ .

Lo que realmente sorprendió a Saltzman fue que, en la mayoría de los casos, todas las variables excepto las tres siguientes:

$$\Psi_1(3, 1) = A, \quad (5.42)$$

$$\Theta_1(3, 1) = D, \quad (5.43)$$

$$\Theta_2(0, 2) = G, \quad (5.44)$$

tendían a cero. Esto indicaba que estas tres variables eran significativamente más influyentes o relevantes para describir el fenómeno de convección, simplificando el complejo sistema en una forma más manejable para el análisis. Este fenómeno llevó a Lorenz a desarrollar su modelo.

### B.1.4. Modelo de Lorenz

El punto de partida para Edward Lorenz fueron las ecuaciones (5.32) y (5.33), tomando en cuenta las ideas presentadas por Barry Saltzman en su trabajo, así como las anomalías que presentan las tres variables mencionadas anteriormente. Lorenz expresó la función de corriente  $\psi$  y la desviación de temperatura  $\theta$  en términos de tres amplitudes  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$  y  $X_3(t)$  de la siguiente manera:

$$\psi(x_1, x_3, t) = \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}}{a} X_1(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} x_3\right), \quad (5.45)$$

$$\theta(x_1, x_3, t) = \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[ \sqrt{2} X_2(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} x_3\right) - X_3(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} x_3\right) \right], \quad (5.46)$$

donde estas amplitudes dependen sólo del tiempo. El parámetro  $a$  es un número adimensional relacionado con la transferencia de calor dentro del fluido. Cuando  $a$  excede un valor crítico, la transferencia de calor ocurre fundamentalmente por convección. Para los fines de este modelo, asumiremos que la convección comienza cuando  $a$  alcanza su valor crítico mínimo. Además,

$$\text{Ra} = \frac{\alpha g h^3 \Delta T}{\chi v} \quad \&\& \quad \text{Ra}_{cr} = \frac{\pi^4 (1+a^2)^3}{a^2}.$$

Por consiguiente, al resolver se tiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \psi_{x_1 x_1} + \psi_{x_3 x_3} \\ &= -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \psi, \end{aligned}$$

## 5 Conclusiones

y

$$\begin{aligned}\nabla^4 \psi &= \nabla^2 (\nabla^2 \psi) \\ &= \left[ -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \right]^2 \psi.\end{aligned}$$

Sustituyendo (5.45) y (5.46) en (5.32), obtenemos

$$\begin{aligned}& \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \psi \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \psi \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \psi \right) \\ & - g\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\Delta T}{\pi} \frac{Ra_{cr}}{Ra} \left[ \sqrt{2} X_2(t) \cos \left( \frac{\pi a}{h} x_1 \right) \sin \left( \frac{\pi}{h} x_3 \right) - X_3(t) \sin \left( \frac{2\pi}{h} x_3 \right) \right] \right) \\ & - v \left[ -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \right]^2 \psi = 0.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}& -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \frac{\chi (a^2 + 1) \sqrt{2}}{a} \sin \left( \frac{\pi a}{h} x_1 \right) \sin \left( \frac{\pi}{h} x_3 \right) \dot{X}_1(t) \\ & + \frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} (\psi) - \frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} (\psi) \\ & + g\alpha \frac{\Delta T}{\pi} \frac{Ra_{cr}}{Ra} \frac{\pi a}{h} \sqrt{2} X_2(t) \sin \left( \frac{\pi a}{h} x_1 \right) \sin \left( \frac{\pi}{h} x_3 \right) \\ & - v \left[ -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \right]^2 \frac{\chi (a^2 + 1) \sqrt{2}}{a} X_1(t) \sin \left( \frac{\pi a}{h} x_1 \right) \sin \left( \frac{\pi}{h} x_3 \right) = 0.\end{aligned}$$

Entonces, usando el teorema de Schwarz y anulando el factor  $\sin \left( \frac{\pi a}{h} x_1 \right) \sin \left( \frac{\pi}{h} x_3 \right)$  para  $x_3 \neq kh$  con  $k \in \mathbb{Z}$  y también  $x_1 \neq \frac{kh}{a}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $a \neq 0$  tenemos

$$\begin{aligned}& -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \frac{\chi (a^2 + 1) \sqrt{2}}{a} \dot{X}_1(t) \\ & + g\alpha \frac{\Delta T}{\pi} \frac{Ra_{cr}}{Ra} \frac{\pi a}{h} \sqrt{2} X_2(t) \\ & - v \left[ -\frac{\pi^2}{h^2} (a^2 + 1) \right]^2 \frac{\chi (a^2 + 1) \sqrt{2}}{a} X_1(t) = 0.\end{aligned}$$

Reduciendo con cuidado la ecuación anterior, se tiene

$$\chi \dot{X}_1(t) = \pi^2 (a^2 + 1) \chi v \frac{1}{h^2} X_2(t) - v \frac{\pi^2 (a^2 + 1)}{h^2} X_1(t),$$

al dividir por  $\chi$  y, teniendo en cuenta que el número de Prandtl es  $\sigma = \frac{v}{\chi}$ , obtenemos

$$\dot{X}_1(t) = \frac{\chi \pi^2 (a^2 + 1)}{h^2} [\sigma X_2(t) - \sigma X_1(t)]. \quad (5.47)$$

## 5 Conclusiones

¡La expresión anterior es la primer ecuación del sistema de Lorenz, salvo algunas constantes!

Repitiendo el mismo proceso como en el caso anterior,

$$\begin{aligned}\nabla^2\theta &= \theta_{x_1x_1} + \theta_{x_3x_3} \\ &= -(a^2 + 1) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[ \sqrt{2}X_2(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} X_3(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}x_3\right) \frac{4\pi^2}{h^2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo (5.45) y (5.46) en (5.33), se obtiene

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[ \sqrt{2}X_2(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right) - X_3(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}x_3\right) \right] \right) \\ &- \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[ \sqrt{2}X_2(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right) - X_3(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}x_3\right) \right] \right) \\ &+ \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[ \sqrt{2}X_2(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right) - X_3(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}x_3\right) \right] \right) - \frac{\nabla T}{h} \right) \\ &- \chi \left( -(a^2 + 1) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \left[ \sqrt{2}X_2(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right) \right] + \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} X_3(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}x_3\right) \frac{4\pi^2}{h^2} \right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

al desarrollar la expresión anterior y simplificar los términos como se realizó en (5.47), se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}&\frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2}\dot{X}_2(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right) - \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \dot{X}_3(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}x_3\right) \\ &= -\chi (a^2 + 1) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} X_1(t)X_2(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}x_3\right) \\ &- \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{\chi (a^2 + 1) \sqrt{2}\pi}{h^2} X_1(t)X_3(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right) \\ &+ \Delta T \frac{\chi (a^2 + 1) \sqrt{2}\pi}{h^2} X_1(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right) \\ &- \chi - (a^2 + 1) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2}X_2(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right) \\ &+ \chi \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{4\pi}{h^2} X_3(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h}x_3\right).\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de  $\cos\left(\frac{\pi a}{h}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}x_3\right)$  y  $\sin\left(\frac{2\pi}{h}x_3\right)$  se tienen las siguien-

## 5 Conclusiones

tes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} \dot{X}_2(t) &= -\Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{\chi (a^2 + 1) \sqrt{2} \pi}{h^2} X_1(t) X_3(t) - \chi (a^2 + 1) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \sqrt{2} X_2 \\ &\quad + \Delta T \frac{\chi (a^2 + 1) \sqrt{2} \pi}{h^2} X_1(t) \\ -\frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \dot{X}_3(t) &= -\chi (a^2 + 1) \frac{\pi^2}{h^2} \frac{\Delta T}{\pi} \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} X_1(t) X_2(t) + \chi \Delta T \frac{\text{Ra}_{cr}}{\text{Ra}} \frac{4\pi}{h^2} X_3(t). \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{X}_2(t) &= -\frac{\chi (a^2 + 1) \pi^2}{h^2} X_1(t) X_3(t) - \frac{\chi (a^2 + 1) \pi^2}{h^2} X_2(t) \\ &\quad + \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_{cr}} \frac{\chi (a^2 + 1) \pi^2}{h^2} X_1(t) \\ \dot{X}_3(t) &= \frac{\chi (a^2 + 1) \pi^2}{h^2} X_1(t) X_2(t) - \chi \frac{(a^2 + 1) 4\pi^2}{(a^2 + 1) h^2} X_3(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, además de las constantes y el cambio de nombres, hemos derivado las dos últimas ecuaciones del sistema de Lorenz. En consecuencia, al tomar en cuenta la primera ecuación que derivamos en (5.47) junto con las dos ecuaciones derivadas anteriormente, y nombrando,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{v}{\chi} && \text{Número de Prandtl} \\ r &= \frac{\text{Ra}}{\text{Ra}_{cr}} && \text{Número de Rayleigh relativo} \\ b &= \frac{4}{(a^2 + 1)} && \text{Número adimensional} \end{aligned}$$

finalmente, reescalando el tiempo como  $\tau = \frac{\chi (a^2 + 1) \pi^2}{h^2} t$  tenemos el **sistema de Lorenz**

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= \sigma (X_2(t) - X_1(t)) \\ \dot{X}_2(t) &= r X_1(t) - X_2(t) - X_1(t) X_3(t) \\ \dot{X}_3(t) &= X_1(t) X_2(t) - b X_3(t), \end{aligned}$$

aquí, el operador  $\cdot$  significa la derivada con respecto al tiempo reescalado  $\tau$ . El parámetro  $b$  es una cantidad adimensional que mide la dirección  $x_1$  de la celda de Bénard, lo que indica que es proporcional al ancho de los flujos de convección. Con base en el desarrollo de este modelo, se justifica el uso de  $r$  como parámetro de control. Además, sabemos que cuando  $\text{Ra} > \text{Ra}_{cr}$ , o equivalentemente  $r > 1$ , se produce convección, lo que da como resultado la formación de celdas de Bénard. Ahora explicaremos el significado de estas variables  $X_1(t)$ ,  $X_2(t)$  y  $X_3(t)$ .

- La variable  $X_1(t)$  es proporcional a la intensidad de las corrientes convectivas y, por tanto, representa la intensidad del movimiento convectivo. Si  $X_1 > 0$ , el flujo de convección es en el sentido de las agujas del reloj; si  $X_1 < 0$ , es en sentido antihorario.
- La variable  $X_2(t)$  denota la diferencia de temperatura entre los flujos de convección ascendentes y descendentes dentro de la celda, caracterizando la variación de temperatura en el fenómeno de convección que forma las celdas de Bénard.
- La variable  $X_3(t)$  representa la desviación de  $\Delta T$ , como función lineal, desde el centro de la celda. En función de  $x_3$ , representa la variación de temperatura general de cada molécula de fluido de  $T_0$  a  $T_0 + \Delta T$ .

En resumen, el sistema de Lorenz puede describirse como un sistema autónomo no lineal tridimensional derivado de las ecuaciones simplificadas de los rollos de convección que ocurren en la dinámica atmosférica de la Tierra.

## B.2. Construcción de una bola absorbente para el sistema de Lorenz

### B.2.1. Existencia de un elipsoide acotado en el que entran todas las trayectorias

En esta sección mostramos la construcción de una bola absorbente para el sistema de Lorenz, (4.17), como la diseño C. Sparrow en [38]. Así, se probará que existe una región acotada  $\mathcal{B}$  tal que toda trayectoria acaba entrando en ésta y nunca sale de ella. Consideremos la siguiente función de Lyapunov

$$V = V_\infty(x) = rx_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma(x_3 - 2r)^2, \quad (5.48)$$

ésta función es  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ , propia y no negativa, y sólo se anula en  $V_o = \{v_o\} = \{(0, 0, -2r)\}$  (mínimo global). La derivada de Lie de  $V_\infty(x)$  respecto a (4.17),  $a_\infty(x) = L_f V_\infty(x)$ , es

$$a_\infty(x) = -r\sigma x_1^2 - \sigma x_2^2 - b\sigma(x_3 - r)^2 + b\sigma r^2 \quad (5.49)$$

la cuál es no negativa ssi  $x \in \mathcal{D}$ , donde  $\mathcal{D}$ , definida por

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 : a_\infty(x) \geq 0\} = \overline{\mathcal{A}_+^\infty}, \quad (5.50)$$

es el dominio elipsoidal (compacto) centrado en  $(0, 0, -2r)$  siempre que  $\sigma > 0$ ,  $r > 0$  y  $b > 0$ , y tal forma que  $\partial\mathcal{D} = \mathcal{N}_{a_\infty}$ . Así, los puntos de reposo  $\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2$  de la ecuación (4.17) siempre se hallan en  $\partial\mathcal{D}$  y difieren de  $v_o$ , para cada valor de los parámetros. Note que aun cuando  $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{D}$ , se tiene que  $dV_\infty(x)/dt < 0$ ,  $\mathcal{D}$  no es positivamente invariante, por lo que no sirve para “atrapar” al atractor global  $K$  de la ecuación (4.17). De hecho, en la figura 4.5 podemos ver trayectorias que salen de  $\mathcal{D}$  y vuelven de nuevo a él.



### B.2.2. Tamaño del elipsoide

La función de almacenamiento  $V_\infty(x)$  se usa para simplificar las fórmulas, y no pretende ser óptima (una “buena” aproximación al atractor global). De hecho, sea  $d = \max_{x \in \mathcal{D}} V_\infty(x)$ . De la geometría del problema se tiene que  $d$  existe y se encuentra en  $\mathcal{N}_{a_\infty}$ , el máximo de  $V$  en  $\mathcal{D}$  ocurrirá en algún lugar de la frontera de  $\mathcal{D}$  y, por tanto, en un punto en el que  $2rx_1 = 2rx_1\lambda$ ;  $2\sigma x_2 = 2x_2\lambda$ ; y  $2\sigma(x_3 - 2r) = 2b(x_3 - r)\lambda$  para algunos multiplicadores Lagrangianos  $\lambda$ . Las posibles soluciones son:

- $\lambda = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = r(b - 2\sigma) / (b - \sigma)$ , y  $x_1^2 = b^2r(b - 2\sigma) / (b - \sigma)^2$  siempre que  $b \geq 2\sigma$ , entonces  $V = b^2r^2 / (b - \sigma)$ ;
- $x_1 = 0$ ,  $\lambda = \sigma$ ,  $x_3 = r(b - 2) / (b - 1)$ ,  $x_2^2 = b^2r^2(b - 2) / (b - 1)^2$  siempre que  $b \geq 2$ , entonces  $V = b^2r^2(b - 2) / (b - 1)$ ;
- $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3 = 2r$  o  $x_3 = 0$ , lo que da  $V = 0$  y  $V = 4\sigma r^2$  respectivamente.

Resumiendo, para  $\sigma, r, b > 0$ , el  $d$  máximo de  $V_\infty(x)$  en  $\mathcal{D}$  es:

$$d = \begin{cases} b^2r^2 / (b - \sigma), & \text{si } b \geq 2, \sigma \leq 1 \\ b^2r^2 / (b - 1), & \text{si } b \geq 2, \text{ y } \sigma \geq 1 \\ 4\sigma r^2, & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (5.51)$$

En consecuencia, para cada valor de los parámetros  $\sigma > 0$ ,  $r > 0$  y  $b > 0$ , el conjunto compacto  $\mathcal{B} := V_\infty^{-1}[0, d + \epsilon]$  es una *bola absorbente* para (4.17), para algún  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño pero finito. Note que fijando  $\epsilon = 0$ , las trayectorias entrarán finalmente en  $V_\infty^{-1}[0, d]$ , aunque algunas podrían ser asintóticas a ella: por ejemplo, si escogemos los parámetros que conducen a  $d = 4\sigma r^2$ , el punto de reposo  $(0, 0, 0)$  se halla en la frontera de  $\mathcal{D} \cap V_\infty^{-1}[0, d]$ , de modo que las trayectorias que comiencen fuera de  $V_\infty^{-1}[0, d]$  y sean atraídas por el origen tardarán tiempo infinito en hacerlo.

Nótese que los valores de los parámetros  $(\sigma, r, b) = (10, 28, 8/3)$  que generan caos en (4.17) pertenecen al caso que lleva a  $d = 4\sigma r^2$ . Para estos valores, la Figura 4.5 muestra una bola absorbente  $\mathcal{B}$  que contiene  $\mathcal{D}$  dada por (5.50) y el atractor global  $K$  de la Figura 4.4, proyectado sobre el plano  $x_1x_3$ .

# Bibliografía

- [1] Andrieu, V. & Prieur, C. (2010). Uniting two control Lyapunov functions for affine systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55(8), 1923–1927.
- [2] Andrievskii, B. & Fradkov, A. (2003). Control of Chaos: Methods and Applications. I. Methods. *Autom. & Remote Control* 64, 673-713.
- [3] Andrievskii, B. & Fradkov, A. (2004). Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications. *Autom. & Remote Control* 65, 505-533.
- [4] E. Sontag, “Control-Lyapunov functions”, in *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, V. Blondel, et al., Eds., New York: Springer-Verlag, pp. 211–216, 1998.
- [5] E. D. Sontag, A “universal” construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization, *Systems Control Lett.*, 13 (1989), pp. 117–123.
- [6] Foias, C., Sell, G. & Teman, R. (1988). Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations. *J. Diff. Eqs.*, 73, 309-353.
- [7] Fradkov, A. & Evans, R. (2005). Control of chaos: methods and applications in engineering. *Annual Reviews Control*, 29, 33–56.
- [8] G. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, 2nd Edition, 1988, Cambridge Mathematical Library.
- [9] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [10] H. Leyva, & J. Solís-Daun, “Synthesis of positive controls for the global CLF stabilization of systems”, in *Proc. 48th IEEE Conf. Dec. Control/28th Chinese Ctrl. Conf.*, Shanghái, P.R. China, Dec. 2009, pp. 656-660.
- [11] H. Leyva, J. Solís-Daun, & R. Suárez, “Global CLF stabilization of systems with control inputs constrained to a hyperbox”, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 51, pp. 745-766, 2013.
- [12] Hale, J. K. (1988). *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*. Providence RI: Math. Surveys & Monographs 25, Amer. Math. Soc.
- [13] Hale, J. K. (2006). Dissipation and compact attractors. *J. Dynamics & Diferential Equations* 18, 485-523.

## Bibliografía

- [14] J. Curtis, “CLF-based nonlinear control with polytopic input constraints”, in Proc. 42th IEEE Conf. Dec. Control, Maui HI, Dec. 2003, pp. 2228-2233.
- [15] J. Solís-Daun, “Global CLF stabilization of nonlinear systems. Part I: A geometric approach – compact strictly convex CVS”, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 51, pp. 2152-2175, 2013.
- [16] J. Solís-Daun, Global CLF stabilization of systems with point-dissipative free dynamics via admissible controls: Chaos control of a Chua’s system. *Int. J. Bifurcation & Chaos*, 23(11), 2013.
- [17] J. Solís-Daun, “Upper bound and global stabilization of a Rössler chaotic system by regular feedback controllers (in Spanish)”, AMCA, 2014.
- [18] J. Solís-Daun, Global CLF stabilization of nonlinear systems. Part II: An approximation approach – closed CVS. *SIAM J. Control Optim.*, 53(2), 645–669, 2015.
- [19] J. Solís-Daun, “Globally Stabilizing Finite-Dimensional Damping Control for Dissipative PDE with Bounded Inputs”IFAC WC, 2017 pp. 7115-7120.
- [20] J. Solís-Daun, B. Aguirre, & R. Suárez, “Synthesis of regular controls for the global CLF stabilization of nonlinear systems”, in 4th IFAC Symp. Syst. Structure Control, Ancona, Italy, Sept. 2010, pp. 242-248.
- [21] J. Solís-Daun, & H. Leyva, “Global CLF stabilization of nonlinear systems with positive/signed control components in a hyperbox”, in Proc. Congreso Nacional de Control Automático AMCA 2013, Ensenada B.C., México, October 2013, pp. 442–447.
- [22] J. Solís-Daun, & H. Leyva, “On the global CLF stabilization of systems with polytopic control value sets”, in: Proc. 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, August 28–Sept. 2, 2011, pp. 11042–11047.
- [23] Liao, X. & Yu, P. (2006). Study of globally exponential synchronization for the family of Rössler chaotic systems. *Int. J. Bifurcation & Chaos*, 16(8), 2395–2406.
- [24] Lorenz, Edward N. *Deterministic Nonperiodic Flow*. J. Atmos. Sci. Vol 20 (1963), 130
- [25] Lorenz, Edward N. *Predictability; Does the Flat of a Butterfly’s wing in Brazil Set Off a Tornado in Texas?*. American Association for the Advancement of Science (1972)
- [26] M. Malisoff, “An algorithm for feedback stabilization with respect to saturating controls using universal formulas for control-Lyapunov functions”, in Proc. Amer. Ctrl. Conf., Chicado IL, June 2000, pp. 1771-1773.
- [27] M. Malisoff, & E. Sontag, “Universal formulas for feedback stabilization with respect to Minkowski balls”, *Syst. & Control Lett.*, vol. 40, pp. 247–260, 2000.

## Bibliografía

- [28] Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. (1990). Controlling chaos. *Physics Review Lett.* 64, 1196-1199.
- [29] P. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Springer, Berlin, 2007.
- [30] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems* (3rd Ed.). New York: Springer.
- [31] Rössler, O. (1976). Different types of chaos in two simple differential equations. *Z. Naturforsch., A* 31, 1664–1670.
- [32] Rössler, O. (1979). Continuous chaos - four prototype equations. *Annals N.Y. Academy of Sciences*, 316, 376–392.
- [33] R. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton NJ: Princeton University Press, 1970.
- [34] R. Schneider, *Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, 2nd edition, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 151, Cambridge Univ. Press, New York, 2014.
- [35] R. Suárez, J. Solís-Daun, & B. Aguirre, “Global CLF stabilization for systems with compact convex control value sets”, in *Proc. 40th IEEE Conf. Dec. Control*, Orlando FL, Dec. 2001, pp. 3838–3843.
- [36] R. Suárez, J. Solís-Daun, & J. Álvarez-Ramírez, “Global robust stabilization of nonlinear systems subject to input constraints”, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, vol. 14, pp. 1227–1238, 2002.
- [37] Saltzman, B. *Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem - I.* *J. Atmos. Sci.* 19, 329-341 (1962)
- [38] Sparrow, C. [1982] *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*, (Verlag New York: Springer).
- [39] Teel, A., Kaiser, O. & Murray, R. (1997). Uniting local and global controllers for the Caltech ducted fan. In *Proc. of the 16th American Control Conf.*, Albuquerque NM, pp.1539-1543.
- [40] Temam, R. (1988). *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics* (2nd Ed.). New York: Springer.
- [41] Y. Lin, & E. Sontag, “A universal formula for stabilization with bounded controls”, *Syst. Control Lett.*, vol. 16, pp. 393-397, 1991.
- [42] Z. Artstein, “Stabilization with relaxed controls”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, vol. 7, pp. 1163–1173, 1983.
- [43] Z. Qu, *Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems*, 1998, Wiley, New York.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00091

Matrícula: 2181800333

ESTABILIZACIÓN GLOBAL ASINTÓTICA DE SISTEMAS CON CONTROL ACOTADO.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 3 del mes de septiembre del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. JESUS ALVAREZ CALDERON
- DR. LUIS AGUSTIN ALVAREZ ICAZA LONGORIA
- DR. GUILLERMO FERNANDEZ ANAYA
- DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN
- DRA. MARTHA ALVAREZ RAMIREZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: HECTOR ALFREDO MARTINEZ PEREZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



*H.A.M.P*

HECTOR ALFREDO MARTINEZ PEREZ  
ALUMNO

REVISÓ

*[Signature]*

MTRA. ROSALBA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

*Roman Linares Romero*

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

*[Signature]*

DR. JESUS ALVAREZ CALDERON

VOCAL

*[Signature]*

DR. LUIS AGUSTIN ALVAREZ ICAZA  
LONGORIA

VOCAL

*[Signature]*

DR. GUILLERMO FERNANDEZ ANAYA

VOCAL

*[Signature]*

DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN

SECRETARIA

*Martha Alvarez R*

DRA. MARTHA ALVAREZ RAMIREZ