

RACIONALIDAD DE LA FUNCIÓN ZETA DE UNA CURVA

PRESENTADA POR: MARCO ANTONIO SÁNCHEZ MIRAFUENTES

PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-I

ASESOR: DR. FELIPE ZALDÍVAR

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UAM-I



## Índice general

Prólogo .....	v
Agradecimientos .....	IX
Capítulo 1 Morfismos étales .....	1
1.1 Morfismos finitos .....	1
1.2 Morfismos planos .....	4
1.3 Morfismos no ramificados .....	6
1.4 Morfismos étales .....	14
Capítulo 2 La topología étale .....	17
2.1 Sitios .....	17
2.2 Pregavillas y gavillas .....	20
2.3 La gavilla asociada a una pregavilla .....	28
2.4 Cubrientes de Galois .....	38
Capítulo 3 La cohomología étale .....	45
3.1 Cohomología .....	45
3.2 Dualidad de Poincaré .....	57
3.3 Variedades Jacobianas .....	66
Capítulo 4 Racionalidad de la función zeta de una curva .....	69
4.1 Introducción .....	69
4.2 La racionalidad de la función zeta .....	71
Apéndice A. Generalidades de categorías abelianas .....	73
A.1 Categorías aditivas y abelianas .....	73
A.2 Algunos funtores importantes .....	76
A.3 Algunos diagramas útiles .....	80
Notaciones .....	87
Bibliografía .....	89
Índice alfabético .....	91



## Prólogo

El objetivo de esta tesis es comprender la demostración de una parte de las conjeturas de Weil, a saber la racionalidad de la función zeta de una curva. En sí este es un problema de geometría diofantina, es decir de geometría algebraica en un principio, sólo que el campo base no tiene que ser un campo algebraicamente cerrado sino practicamente cualquier anillo o campo de interés en la teoría de números.

Las conjeturas en sí se enfocan en el problema de contar el número de puntos de una variedad algebraica definida sobre un campo finito  $k$ . Para ello resulta natural pensar en una cerradura algebraica,  $\bar{k}$ , del campo  $k$  y fijarnos en todas las subextensiones  $L$  de  $k$ , contenidas en  $\bar{k}$ , tal que  $L/k$  es una extensión finita. Cabe mencionar que una parte de estas conjeturas se probó, sin utilizar cohomología, por *B. Dwork* utilizando análisis  $p$ -ádico. La desventaja es que no tenemos información sobre la hipótesis de Riemann, otra de las conjeturas de Weil. Otro intento se debe a *A. Grothendieck* y su escuela. El enfoque de Grothendieck, por medio de la cohomología étale, ha permitido la demostración de todas estas conjeturas y más aún, provee un marco referencial para formular algunas conjeturas de Tate sobre ciclos algebraicos y análogos geométricos de las conjeturas de Birch y Swinnerton-Dyer. La primera topología que se definió en una variedad abstracta arbitraria, es la topología de Zariski, la cual, gracias al trabajo fundamental de Serre, puede ser usada para definir una teoría de cohomología de gavillas coherentes en la variedad, es decir, de gavillas que provienen de módulos sobre los anillos de coordenadas. Más aún, como Serre mismo mostró, para una variedad proyectiva definida sobre  $\mathbb{C}$ , la cohomología obtenida con la topología de Zariski coincide con la inducida por la estructura holomorfa, de tal manera que la topología de Zariski, cuya definición es meramente algebraica, es la adecuada para el estudio de las gavillas coherentes. Sin embargo, la topología de Zariski tiene ciertas limitaciones, por lo que en ocasiones es necesario cambiar la topología del objeto geométrico-algebraico que se está estudiando de tal manera que la nueva topología refleje mejor la estructura que se requiere. Para precisar la afirmación anterior, considere el caso clásico de una variedad algebraica  $X$  definida sobre el campo complejo  $\mathbb{C}$  de tal manera que se tienen dos topologías naturales en  $X$ , a saber, la topología como variedad compleja y la topología de Zariski como variedad algebraica y así se tienen dos tipos de cohomología de gavillas en  $X$  que reflejan las dos topologías anteriores. Recordemos ahora que: (1) Usando la topología compleja en  $X$ , se sabe que  $\dim_{\mathbb{Q}} H^k(X, \mathbb{Q})$  son los números de Betti de  $X$ . (2) Sin embargo, si  $X$  es una variedad algebraica irreducible y  $F$  es cualquier gavilla constante en  $X$ , entonces  $H_{\text{Zar}}^k(X, F) = 0$

para  $k > 0$ , ya que como cada abierto de  $X$  es conexo, entonces  $F$  es *flácida*, en particular  $H_{\text{Zar}}^k(X, F) = 0$ .

Se sigue que la topología de Zariski en  $X$  no refleja la geometría compleja de  $X$ . Así, si queremos una teoría de cohomología de gavillas que sea análoga a la cohomología de una variedad compleja, la cohomología dada por la topología de Zariski no es satisfactoria, en general. Una segunda instancia de las limitaciones de la topología de Zariski es la falta de un teorema de la función inversa: en la topología de Zariski un morfismo entre variedades algebraicas puede ser un isomorfismo entre los espacios tangentes (de Zariski) sin ser un isomorfismo local. Por ejemplo, para  $X = Y = \mathbb{A} - \{0\}$  la función  $z \mapsto z^2$  da un isomorfismo entre los espacios tangentes, pero no es un isomorfismo local (ya que, si el campo base es  $\mathbb{C}$ , sabemos que eliminando una semirecta se tienen inversas locales, i.e., raíces cuadradas, pero en la topología de Zariski al quitar esa semirecta el conjunto resultante no es abierto de Zariski). Una posible solución a este problema particular sería introducir más conjuntos abiertos, lo cual no siendo posible en la topología de Zariski lleva a introducir una topología con más abiertos que la de Zariski, la *topología étale* donde sí se tiene un teorema de la función inversa.<sup>1</sup> Lo anterior es importante, porque para un *esquema* arbitrario ya no se tiene la topología compleja, pero la topología étale, de definición puramente algebraica, sirve como un reemplazo, proveyendo una teoría de cohomología cuyas propiedades son parecidas a las de los grupos de cohomología inducidos por la estructura holomorfa en una variedad compleja, ver [13] Capítulo III sección 3.

Por otra parte, y esto es de importancia aritmética, cuando el esquema es el espectro primo de un campo, en cuyo caso la topología de Zariski es trivial, veremos que los grupos de cohomología étale son isomorfos a los grupos de cohomología de Galois del campo.

Es importante recordar que, antes de Grothendieck ya se conocía la veracidad de las conjeturas de Weil en algunos casos importantes, por ejemplo para curvas elípticas sobre un campo finito  $K = \mathbb{F}_q$  donde la noción de grado de un morfismo de curvas tiene una importancia relevante, ya que se obtiene la proposición, ver [22] capítulo V proposición 2.3

**Proposición 0.1.** *Sea  $\psi \in \text{End}(E)$ . Entonces*

$$\det(\psi_\ell) = \text{gr}(\psi) \text{ y } \text{tr}(\psi_\ell) = 1 + \text{gr}(\varphi) - \text{gr}(1 - \varphi)$$

*En particular,  $\det(\psi_\ell)$  y  $\text{tr}(\psi_\ell)$  son enteros e independientes de  $\ell$ .*

Aplicando la proposición anterior al endomorfismo  $1 - \phi^n : E \rightarrow E$ , para cada entero positivo  $n$  donde  $\phi : E \rightarrow E$  es el endomorfismo de *Frobenius*, se tiene que, ver [22] capítulo V p. 136

$$N(E(K_n)) = \text{gr}(1 - \phi^n) = \det(1 - \phi_\ell^n) = 1 - \alpha^n - \beta^n + q^n$$

---

<sup>1</sup>Para ver una generalización del teorema de la función inversa véase, por ejemplo, Artin, M. *The implicit function theorem in algebraic geometry*. Algebraic Geometry (Internat. Colloq. Tata Inst. Fund. Res. Bombay, 1968). Oxford University Press, London, 1969, pp 13-34.

la igualdad  $N(E(K_n)) = \text{gr}(1-\phi^n)$  se debe al hecho de que  $1-\phi^n$  es un morfismo *separable*, ver [22] capítulo III teorema 4.10 y corolario 5.5. De la igualdad anterior se sigue la racionalidad de la función zeta de una curva elíptica, puesto que

$$\begin{aligned} \log Z_{E/K}(T) &= \sum N(E(K_n))T^n/n \\ &= \sum (1 - \alpha^n - \beta^n + q^n)T^n/n \\ &= -\log(1 - T) + \log(1 - \alpha T) + \log(1 - \beta T) - \log(1 - qT) \end{aligned}$$

se puede demostrar, ver [22] capítulo V p. 136, que  $\alpha + \beta$  es un entero  $a$ , tal que  $a = 1 + q - N(E(K))$ , y que  $\alpha\beta = q$ , de este modo la expresión para  $Z_{E/K}$  queda como sigue

$$Z_{E/K}(T) = \frac{1 - aT + qT^2}{(1 - T)(1 - qT)}$$

Volviendo al caso general, tendremos análogos para la dualidad de Poincaré y la fórmula de traza de Leschfetz, y con esto probaremos la conjetura de la racionalidad de la función zeta de una curva algebraica definida sobre un campo finito.





## **Agradecimientos**

En primer lugar quiero dar las gracias a mi familia, en especial a mi mama Adriana Mirafuentes Valencia y a mi tía Ángela Mirafuentes Valencia por el apoyo brindado, gracias a ellas, en muchos aspectos, he terminado de escribir esta tesis, de este modo estas líneas son también una dedicatoria para mi mama y mi tía.

En segundo lugar agradezco a mi asesor de tesis, Dr. Felipe de Jesús Zaldívar Cruz por aclarar las dudas surgidas durante el presente trabajo y por brindarme artículos y libros, que fueron muy útiles para comprender algunos conceptos que no habia tenido oportunidad de estudiar o comprender, cabe resaltar que si la presente tesis todava tiene algunos errores, son de quien escribe estas líneas. También agradezco a mis sinodales Dr. Gabriel Villa Salvador y Dr. Pedro Luis del Ángel por las correcciones y sugerencias hechas para mejorar esta tesis, agradezco a los doctores Laura Hidalgo Solís y Mario Pineda Ruelas el tiempo y haberme proporcionado material, sobre de todo de libros y artículos que complementan los proporcionados por mi asesor, para terminar esta tesis, finalmente también deseo dar gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado a través de la beca que me fue asignada.

# Capítulo 1

## Morfismos étales

En este capítulo se introducirán las propiedades de los morfismos étales que necesitaremos más adelante. Notemos que la categoría de variedades algebraicas se puede considerar como una subcategoría de la categoría de esquemas; para las nociones de esquemas y morfismos entre ellos, consultar la referencia [10] o la referencia [6].

En lo que sigue *todos los anillos y esquemas son noetherianos*, a menos que se especifique otra cosa. Por otro lado una *variedad*, a menos que se especifique otra cosa, es un esquema de tipo finito sobre un campo  $k$ , que es separado y entero.

Recordemos que una *inmersión cerrada* es un morfismo  $f : Y \rightarrow X$  de esquemas tal que  $f$  induce un homeomorfismo en  $Z = f(Y)$ , donde  $Z$  es un subconjunto cerrado de  $X$  y, además, la función inducida  $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$  es suprayectiva.

Un *subesquema abierto*, de un esquema  $X$ , es un esquema  $U$  cuyo espacio topológico subyacente es un subconjunto abierto de  $X$ , y la gavilla  $\mathcal{O}_U$  es isomorfa a la gavilla  $\mathcal{O}_X|_U$ , que es la restricción de la gavilla  $\mathcal{O}_X$  a  $U$ . Una *inmersión abierta* es un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  de esquemas que induce un isomorfismo en un subesquema abierto de  $Y$ . Finalmente dado un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  por un *cambio de base* con respecto al morfismo  $g : Z \rightarrow Y$  queremos decir el morfismo  $f' = p : X \times_Y Z \rightarrow Z$ , donde  $p$  se obtiene del producto fibrado siguiente

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{q} & X \\ p \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Frecuente utilizaremos la expresión *cambio de base* en lugar de *cambio de base con respecto a un morfismo*, si no hay peligro de confusión.

### 1.1. Morfismos finitos

**Definición 1.1.** Un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  es *afín*, si para cada abierto afín  $U \subseteq Y$ ,  $f^{-1}(U)$  es un abierto afín en  $X$ .

Un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es *finito* si  $f$  es un morfismo afín y, para cada  $U \subseteq Y$  abierto afín,  $\Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$  es un  $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ -módulo finitamente generado.

Un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es de *tipo finito* si para toda cubierta de  $Y$ , por abiertos afines  $V_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha) \subseteq Y$ , se tiene que cada  $f^{-1}(V_\alpha)$  es cubierto por un número finito de abiertos afines  $U_{\alpha,i} = \text{Spec}(B_{\alpha,i}) \subseteq X$ , tales que  $B_{\alpha,i}$  es una  $A_\alpha$ -álgebra finitamente generada.

Un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$  se dice que es *localmente de tipo finito* si para toda cubierta de  $Y$ , por abiertos afines  $V_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha) \subseteq Y$ , se tiene que cada  $f^{-1}(V_\alpha)$  es cubierto por abiertos afines  $U_{\alpha,\beta} = \text{Spec}(B_{\alpha,\beta}) \subseteq X$  tales que  $B_{\alpha,\beta}$  es una  $A_\alpha$ -álgebra finitamente generada.

**Comentario 1.2.** En las definiciones anteriores pedimos que las propiedades valgan para todo abierto afín, sin embargo se puede demostrar, ver [10] capítulo II, sección 3, que es suficiente verificar tales propiedades en una cubierta afín del esquema  $Y$ . Esta observación se aplicará en el trabajo subsiguiente.

Si  $k$  es un campo, un  *$k$ -esquema algebraico* es un  $k$ -esquema  $X$  tal que el morfismo estructural  $X \rightarrow \text{Spec}(k)$  es de tipo finito. En particular, una variedad es un  $k$ -esquema algebraico.

**Proposición 1.3.** (a) *Toda inmersión cerrada es finita.*  
 (b) *La composición de dos morfismos finitos es finito.*  
 (c) *Cualquier cambio de base de un morfismo finito es finito.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Primero consideramos el caso siguiente: El epimorfismo canónico  $\rho : A \rightarrow A/I$ , induce el morfismo de esquemas  ${}^a\rho : \text{Spec}(A/I) \rightarrow \text{Spec}(A)$  que es una inmersión cerrada. Por las propiedades generales de  $\text{Spec}$ , se tiene que  ${}^a\rho^{-1}(D(f)) = D(\rho(f))$ , donde  $D(f)$  es un abierto afín distinguido de  $\text{Spec}(A)$ , por lo tanto  ${}^a\rho$  es afín.

También, si  $g = {}^a\rho$ , se tiene que  $g^\sharp((D(f)) : A_f \rightarrow (A/I)_{\rho(f)})$  donde  $g^\sharp((D(f)))$  está dada como sigue:

$$g^\sharp((D(f)))(a/f^m) = \rho(a)/(\rho(f))^m.$$

Puesto que  $A$  es noetheriano, también lo es  $A/I$ , en particular si  $a_1, \dots, a_n \in A$  generan a  $A$  entonces  $\rho(a_1), \dots, \rho(a_n) \in A/I$  generan a  $A/I$ . Por lo tanto, si  $\rho(a)/(\rho(f))^m \in (A/I)_{\rho(f)}$  se tiene que:

$$\rho(a)/(\rho(f))^m = \sum \rho(\alpha_i)\rho(a_i)/(\rho(f))^m = \sum (\rho(\alpha_i)/(\rho(f))^m)\rho(a_i)/1.$$

es decir  $\rho(a_1)/1, \dots, \rho(a_n)/1$  generan a  $(A/I)_{\rho(f)}$  como  $A_f$ -módulo y por lo tanto  $(A/I)_{\rho(f)}$  es un  $A_f$ -módulo finitamente generado.

Ahora, si  $f : Y \rightarrow X$  es una inmersión cerrada, y por lo tanto afín, para ver esto último véase [17], en especial capítulo II, sección 5, p. 107, sea  $U \subseteq X$  un abierto afín; entonces  $f^{-1}(U)$  es un abierto afín y  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$  es suprayectiva. es decir, si ponemos  $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$  y  $B = \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$ , se tiene que  $B \cong A/I$ ,  $I \subseteq A$  un ideal.

Por lo tanto podemos identificar a  $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{O}_Y)$  con el epimorfismo canónico  $\rho : A \rightarrow A/I$ , y aplicamos el caso anterior.

(b): Supongamos que  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  son morfismos finitos. Si  $U \subseteq Z$  es un abierto afín, lo es  $g^{-1}(U) \subseteq Y$ , por ser  $g$  afín, por lo que  $f^{-1}g^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(U) \subseteq X$  es un abierto afín, puesto que  $f$  es afín.

Como  $f$  es finito, entonces  $\mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}(U))$  es un  $\mathcal{O}_Y(g^{-1}(U))$ -módulo finitamente generado, y así existen  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}(U))$  que generan a  $\mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}(U))$ .

Como  $g$  es finito, entonces  $\mathcal{O}_Y(g^{-1}(U))$  es un  $\mathcal{O}_Z(U)$ -módulo finitamente generado, y así existen  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U))$  que generan a  $\mathcal{O}_Y(g^{-1}(U))$ .

Ponemos  $h_1 = f^\#(g^{-1}(U)) : \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}(U))$  y  $h_2 = g^\#(U) : \mathcal{O}_Z(U) \rightarrow \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U))$ . Entonces, dado  $\alpha \in \mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}(U))$  se puede escribir:

$$\alpha = \sum h_1(\beta_i)\alpha_i = \sum h_1\left(\sum h_2(\gamma_{ij})\beta_j\right)\alpha_i = \sum \sum h_1(h_2(\gamma_{ij}))h_1(\beta_j)\alpha_i.$$

Por lo tanto,  $h_1(\beta_j)\alpha_i$  generan a  $\mathcal{O}_X(f^{-1}g^{-1}(U))$  como  $\mathcal{O}_Z(U)$ -módulo.

(c): Considérese un morfismo finito  $f : X \rightarrow S$  y  $h : S' \rightarrow S$  un morfismo de esquemas. Consideramos el siguiente producto fibrado donde queremos probar que  $f'$  es finito:

$$\begin{array}{ccc} X \times_S S' & \xrightarrow{\pi} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{h} & S \end{array}$$

Como  $f$  es finito, existe una cubierta  $\{U_\alpha\}$  de  $S$ , por abiertos afines, tal que  $f^{-1}(U_\alpha)$  es abierto afín, para cada  $\alpha$ . Los  $\{h^{-1}(U_\alpha)\}$  forman una cubierta abierta de  $S'$ , y cada uno de ellos se cubre por abiertos afines de  $S'$ . Sea  $V'_\alpha \subseteq h^{-1}(U_\alpha)$  un tal abierto afín.

Puesto que  $f \circ \pi = h \circ f'$  se tiene que  $\pi^{-1}f^{-1}(U_\alpha) = (f')^{-1}h^{-1}(U_\alpha)$  y ya que  $V'_\alpha \subseteq h^{-1}(U_\alpha)$  esto implica  $(f')^{-1}(V'_\alpha) \subseteq \pi^{-1}f^{-1}(U_\alpha)$ , y por otro lado  $(f')^{-1}(V'_\alpha) \cap \pi^{-1}f^{-1}(U_\alpha)$  se identifica con el producto fibrado  $V'_\alpha \times_{U_\alpha} f^{-1}(U_\alpha)$ .

Poniendo  $V'_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha)$ ,  $U_\alpha = \text{Spec}(C_\alpha)$  y  $f^{-1}(U_\alpha) = \text{Spec}(B_\alpha)$  se tiene que  $V'_\alpha \times_{U_\alpha} f^{-1}(U_\alpha) \cong \text{Spec}(A_\alpha \otimes_{C_\alpha} B_\alpha)$ .

De aquí se sigue que:

(1)  $f'$  es afín, ya que:

$$(f')^{-1}(V'_\alpha) \cap \pi^{-1}f^{-1}(U_\alpha) = (f')^{-1}(V'_\alpha) \cong \text{Spec}(A_\alpha \otimes_{C_\alpha} B_\alpha).$$

(2) Para verificar la segunda condición para que un morfismo sea finito procederemos de la manera siguiente. Del producto fibrado siguiente

$$\begin{array}{ccc}
V'_\alpha \times_{U_\alpha} f^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & f^{-1}(U_\alpha) \\
f' \downarrow & & \downarrow f \\
V'_\alpha & \longrightarrow & U_\alpha
\end{array}$$

se obtiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
A_\alpha \otimes_{C_\alpha} B_\alpha & \longleftarrow & B_\alpha \\
g' \uparrow & & \uparrow g \\
A_\alpha & \longleftarrow & C_\alpha
\end{array}$$

donde  $g'$  y  $g$  corresponden a  $f'$  y  $f$ , respectivamente. Por hipótesis  $B_\alpha$  es un  $C_\alpha$ -módulo finitamente generado, por medio de  $g$ . De esta manera existen  $b_1 \dots b_n \in B_\alpha$  con  $b = \sum c_i b_i$ ,  $c_i \in C_\alpha$ .  $A_\alpha$  tiene estructura de  $C_\alpha$ -módulo. Entonces, para  $a \in A_\alpha$ :

$$a \otimes b = a \otimes \sum c_i b_i = \sum (c_i a) \otimes b_i = \sum c_i a (1 \otimes b_i).$$

Por lo tanto  $1 \otimes b_1, \dots, 1 \otimes b_n$  generan a  $A_\alpha \otimes_{C_\alpha} B_\alpha$  como  $A_\alpha$ -módulo.  $\square$

**Comentario 1.4.** Se puede mostrar que si  $f : Y \rightarrow X$  es un morfismo finito entonces  $f$  es propio, en particular la función continua  $f : Y \rightarrow X$  es cerrada. Para una demostración ver [13] p. 4, proposición 1.4.

## 1.2. Morfismos planos

**Definición 1.5.** Un morfismo de anillos  $f : A \rightarrow B$  se dice que es *plano* si  $B$  es plano visto como  $A$ -módulo. Es decir  $f$  es plano si y sólo si el funtor  $- \otimes_A B$  es exacto.

Un morfismo de esquemas  $f : Y \rightarrow X$  se dice que es *plano*, si para todo  $y \in Y$ , el morfismo de anillos  $f_y^\# : \mathcal{O}_{X, f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}$  es plano, y diremos que  $f$  es *fielmente plano* si es plano y suprayectivo.

**Ejemplo 1.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra, con  $k$  un campo. Entonces el morfismo de esquemas  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(k)$  es plano, puesto que todo  $k$ -espacio vectorial es un  $k$ -módulo plano.

La definición de morfismo plano es de naturaleza técnica, sin embargo necesaria para la definición de morfismo étale.

**Proposición 1.6.** (a) *Toda inmersión abierta es plana.*  
(b) *La composición de dos morfismos planos es plano.*  
(c) *Cualquier cambio de base de un morfismo plano es plano.*

DEMOSTRACIÓN. (a): Se sabe que  $f = (f, f^\#) : Y \rightarrow X$  es una inmersión abierta si y sólo si  $f$  es un homeomorfismo en su imagen,  $f(Y)$  es abierto en  $X$  y

$$f_y^\# : \mathcal{O}_{X, f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y, y}.$$

es un isomorfismo, ver [6] capítulo I, p. 122.

Por tanto, si  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de  $\mathcal{O}_{X,f(y)}$ -módulos, como  $N \otimes_{\mathcal{O}_{X,f(y)}} \mathcal{O}_{Y,y} \cong N \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{Y,y} \cong N$ , para cada  $\mathcal{O}_{X,f(y)}$ -módulo  $N$ , entonces  $- \otimes \mathcal{O}_{Y,y}$  es exacto y por lo tanto  $f$  es un morfismo plano.

(b): Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $h : Y \rightarrow Z$  morfismos planos. Entonces para cada  $x \in X$  los morfismos de anillos

$$f_{f(x)}^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}.$$

$$h_{h(f(x))}^\# : \mathcal{O}_{Z,h(f(x))} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,f(x)}.$$

son planos y hay que probar que  $\mathcal{O}_{X,x}$  es un  $\mathcal{O}_{Z,h(f(x))}$ -módulo plano. Ponemos para abreviar  $A = \mathcal{O}_{Z,h(f(x))}$ ,  $B = \mathcal{O}_{Y,f(x)}$  y  $C = \mathcal{O}_{X,x}$ , por lo que si tenemos la siguiente sucesión exacta de  $A$ -módulos

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0.$$

entonces se obtiene

$$(1) \quad 0 \rightarrow M' \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \rightarrow M'' \otimes_A B \rightarrow 0.$$

que es una sucesión exacta de  $B$ -módulos, por lo tanto

$$0 \rightarrow (M' \otimes_A B) \otimes_B C \rightarrow (M \otimes_A B) \otimes_B C \rightarrow (M'' \otimes_A B) \otimes_B C \rightarrow 0.$$

es una sucesión exacta. Ahora si  $N$  es un  $A$ -módulo se tiene que  $(N \otimes_A B) \otimes_B C \cong N \otimes_A C$ ; por lo tanto de (1) se tiene que la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \rightarrow M' \otimes_A C \rightarrow M \otimes_A C \rightarrow M'' \otimes_A C \rightarrow 0.$$

lo cual demuestra (b).

(c): Sea  $f : Y \rightarrow X$  un morfismo plano y  $\varphi : X' \rightarrow X$  otro morfismo de esquemas. Consideremos el producto fibrado siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X' \times_X Y & \xrightarrow{\pi^1} & Y \\ \pi^2 \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

Sea  $z \in X' \times_X Y$ . Se puede elegir un abierto afín  $U \subseteq X$  con  $f(\pi^1(z)) \in U$ , aquí  $\pi^1$  y  $\pi^2$  son las proyecciones del producto fibrado anterior, y como  $f(\pi^1(z)) = \varphi(\pi^2(z))$ , existen abiertos afines  $W \subseteq Y$  y  $U' \subseteq X'$  que satisfacen

$$\pi^1(z) \in W \subseteq f^{-1}(U) \text{ y } \pi^2(z) \in U' \subseteq \varphi^{-1}(U).$$

por lo que  $z \in (\pi^1)^{-1}(W) \cap (\pi^2)^{-1}(U') = W \times_U U'$ . Y por esto sólo falta probar que si  $f : A \rightarrow B$  es un morfismo de anillos plano y  $A \rightarrow A'$  es otro morfismo de anillos, el morfismo de anillos  $A' \rightarrow B \otimes_A A'$  es plano, pero si  $M$  es un  $A'$ -módulo se tiene que:

$$(B \otimes_A A') \otimes_{A'} M \cong B \otimes_A (A' \otimes_{A'} M) \cong B \otimes_A M$$

lo que termina la demostración de la proposición.  $\square$

El resultado siguiente será utilizado a menudo, para una demostración ver [13] capítulo I, teorema 2.12.

**Proposición 1.7.** *Todo morfismo plano  $f : X \rightarrow Y$  es abierto, es decir, si  $U \subseteq X$  es abierto entonces  $f(U) \subseteq Y$  es abierto.*

□

### 1.3. Morfismos no ramificados

**Definición 1.8.** Un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow Y$ , de tipo finito, se dice que es *no ramificado* en  $x \in X$ , si se satisfacen las propiedades siguientes:

- (1)  $\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$ ; donde  $\mathfrak{m}_x$  es el ideal máximo de  $\mathcal{O}_{X,x}$  y  $\mathfrak{m}_{f(x)}$  es el ideal máximo de  $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ .
- (2)  $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$  es una extensión finita y separable de  $k(f(x)) = \mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}$ .

Diremos que  $f$  es *no ramificado*, si para cada  $x \in X$ ,  $f$  es no ramificado en  $x$ .

**Comentario 1.9.** El morfismo de gavillas  $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ , induce un morfismo de anillos locales en las fibras

$$\varphi = f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}.$$

y como  $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$ , entonces  $\varphi$  induce un morfismo en los campos residuales  $k(f(x)) \hookrightarrow k(x)$ . Así, (1) dice que  $\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x} = \langle \varphi(\mathfrak{m}_{f(x)}) \rangle = \mathfrak{m}_x$  y (2) dice que la siguiente extensión

$$\begin{array}{c} k(x) \\ \uparrow \\ k(f(x)) \end{array}$$

es finita y separable. En particular esto dice que un morfismo  $\text{Spec}(L) \rightarrow \text{Spec}(K)$ , con  $L/K$  una extensión de campos finita y separable, es no ramificado.

Será necesario un concepto preliminar antes de ver la proposición principal de esta sección.

**Definición 1.10.** Sean  $A$  y  $B$  anillos, con  $B$  una  $A$ -álgebra y  $M$  un  $B$ -módulo. Una  *$A$ -derivación* de  $B$  en  $M$  es una función  $D : B \rightarrow M$  tal que:

- (1)  $D$  es un morfismo  $A$ -lineal.
- (2)  $D(bb') = bD(b') + b'D(b)$  para todo  $b, b' \in B$ .

El módulo de *diferenciales relativas* (o de *diferenciales de Kähler*) de  $B$  sobre  $A$  es un  $B$ -módulo  $\Omega_{B/A}^1$  junto con una derivación  $d_{B/A} : B \rightarrow \Omega_{B/A}^1$ , que satisface la siguiente propiedad universal: Para cada  $B$ -módulo  $M$  y toda derivación  $d' : B \rightarrow M$ , existe un único  $B$ -morfismo  $f : \Omega_{B/A}^1 \rightarrow M$  tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{d_{B/A}} & \Omega_{B/A}^1 \\
 d' \downarrow & \swarrow f & \\
 M & & 
 \end{array}$$

Si  $D$  es una derivación se demuestra por inducción que si  $n \geq 1$  es un entero y  $b \in B$  se tiene que  $D(b^n) = nb^{n-1}D(b)$ ; también para cada  $A$ -álgebra  $B$  el par  $(d_{B/A}, \Omega_{B/A}^1)$  existe y está dado por

$$(d_{B/A}, I/I^2)$$

donde  $I$  es el núcleo del morfismo  $\delta : B \otimes_A B \rightarrow B$  dado por  $\delta(b \otimes b') = bb'$ ; y  $d_{B/A}$  se define por  $d_{B/A} = 1 \otimes b - b \otimes 1$  mód  $I^2$ , además el conjunto  $\{d_{B/A}(b)\}$  genera a  $\Omega_{B/A}^1$ , como  $B$ -módulo, ver [24], p. 183.

**Lema 1.11.** *Sea  $L/K$  una extensión de campos y  $d : L \rightarrow \Omega_{L/K}^1$  una  $K$ -derivación. Sean  $a \in L$  y  $f(x) \in K[x] \subseteq L[x]$  entonces  $df(a) = f'(a)da$ , donde  $f'$  es la derivada usual del polinomio  $f(x)$ . En particular si la extensión es finita y separable  $\Omega_{L/K}^1 = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $f(x) = \sum \alpha_i x^i$  un polinomio en  $K[x]$  entonces

$$df(a) = d\left(\sum \alpha_i a^i\right) = \sum d(\alpha_i a^i) = \sum \alpha_i d(a^i) = \sum \alpha_i i a^{i-1} da = f'(a)da.$$

Ahora si  $L/K$  es finita y separable ponemos  $D = d_{L/K}$  y dado  $a \in L$  existe un polinomio  $f(x) \in K[x]$  que verifica  $f(a) = 0$  y  $f'(a) \neq 0$ ; por lo anterior  $d_{L/K} f(a) = 0 = f'(a)d_{L/K}(a)$  y de este modo  $d_{L/K}(a) = 0$  y como los  $d_{L/K}(a)$  generan a  $\Omega_{L/K}^1$  se sigue la conclusión.  $\square$

**Lema 1.12.** *Si  $A$  y  $k'$  son  $k$ -álgebras y ponemos  $B = A \otimes_k k'$ . Entonces  $\Omega_{B/k'}^1 \cong \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B$ .*

DEMOSTRACIÓN. Se tiene el diagrama conmutativo siguiente de la suma fibrada:

$$\begin{array}{ccc}
 k & \xrightarrow{\varphi_2} & A \\
 \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 k' & \xrightarrow{i} & B
 \end{array}$$

donde los morfismos de anillos  $\varphi$  e  $i$  son inducidos por los morfismos de anillos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ . Consideramos los pares  $(d_{A/k}, \Omega_{A/k}^1)$ ,  $(d_{B/k}, \Omega_{B/k}^1)$ , y  $(d_{B/k'}, \Omega_{B/k'}^1)$ .

Como  $d_{B/k'}$  es una  $k$ -derivación, por la propiedad universal del par  $(d_{B/k}, \Omega_{B/k}^1)$ , existe un único  $B$ -morfismo  $\nu_{B/k'/k}$  tal que  $\nu_{B/k'/k} \circ d_{B/k} = d_{B/k'}$ . La composición  $d_{B/k} \circ \varphi : B \rightarrow \Omega_{B/k}^1$  es una  $k$ -derivación, y así por la propiedad universal del par  $(d_{A/k}, \Omega_{A/k}^1)$  existe un único  $A$ -morfismo  $w : \Omega_{A/k}^1 \rightarrow \Omega_{B/k}^1$  tal que  $w \circ d_{A/k} = d_{B/k} \circ \varphi$ .



Por otro lado tenemos los siguientes morfismos inducidos  $d_{A/k} \otimes 1_{k'} : B = A \otimes_k k' \rightarrow \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B = \Omega_{A/k}^1 \otimes_k k'$  dado por  $a \otimes \alpha' \mapsto d_{A/k}(a) \otimes \alpha'$ , que es una  $k'$ -derivación; un morfismo  $h_1 : \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B = \Omega_{A/k}^1 \otimes_k k' \rightarrow \Omega_{B/k}^1$  dado por  $x \otimes b \mapsto bw(x)$ .

Ponemos  $\psi = \nu_{B/k'/k} \circ h_1 : \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B \rightarrow \Omega_{B/k'}^1$ . De esta manera se obtiene:

$$\begin{aligned} \psi(d_{A/k} \otimes 1_{k'}(a \otimes \alpha')) &= \nu_{B/k'/k} \circ h_1(d_{A/k} \otimes 1_{k'}(a \otimes \alpha')) \\ &= \nu_{B/k'/k}(h_1(d_{A/k}(a) \otimes \alpha')) \\ &= \nu_{B/k'/k}(\alpha' w(d_{A/k}(a))) \\ &= \nu_{B/k'/k}(\alpha' d_{B/k}(\varphi(a))) \\ &= \alpha' \nu_{B/k'/k}(d_{B/k}(\varphi(a))) \\ &= \alpha' d_{B/k'}(\varphi(a)) \\ &= d_{B/k'}(a \otimes \alpha'). \end{aligned}$$

es decir el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B = \Omega_{A/k}^1 \otimes_k k' & \xrightarrow{\psi} & \Omega_{B/k'}^1 \\ \uparrow d_{A/k} \otimes 1_{k'} & & \uparrow d_{B/k'} \\ B & \xrightarrow{1_B} & B \end{array}$$

Existe un único  $B$  morfismo  $f : \Omega_{B/k'}^1 \rightarrow \Omega_{A/k}^1 \otimes_A B$  tal que  $f \circ d_{B/k'} = d_{A/k} \otimes 1_{k'}$  y observemos que  $f$  es suprayectiva puesto que  $d_{A/k} \otimes 1_{k'}(B)$  genera a  $\Omega_{A/k}^1 \otimes_A B$ , ya que  $d_{A/k}(A)$  genera a  $\Omega_{A/k}^1$ . Ahora,  $\psi \circ f \circ d_{B/k'} = d_{B/k'}$  por lo que  $\psi \circ f = 1_{\Omega_{B/k'}^1}$ , esta última igualdad por la propiedad universal del par  $(d_{B/k'}, \Omega_{B/k'}^1)$ ; de esta manera  $f$  es inyectiva por lo que  $f$  es un isomorfismo.  $\square$

**Comentario 1.13.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas, considere el morfismo diagonal  $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$ , que algunas veces denotaremos por  $\Delta$  si no hay peligro de confusión. Observamos que  $\Delta_f$  es un isomorfismo de  $X$  sobre  $\Delta_f(X)$ , que es localmente un subesquema cerrado de  $X \times_Y X$ , es decir, un subesquema cerrado de un  $W \subseteq X \times_Y X$  abierto.

Si  $\mathfrak{J}$  es la gavilla de ideales de  $\Delta_f(X)$  en  $W$ , entonces se define la gavilla de *diferenciales relativas* de  $X$  sobre  $Y$  por  $\Omega_{X/Y}^1 = \Delta_f^*(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)$  en  $X$ .

Para las afirmaciones siguientes ver [10] p. 172-175.

- (1)  $\Omega_{X/Y}^1$  es una gavilla cuasi coherente de  $\mathcal{O}_X$ -módulos.

**Notación.** Si  $A$  es un anillo y  $M$  es un  $A$ -módulo, entonces la *gavilla asociada* a  $M$  se denota por  $\underline{M}$  o por  $M^\sim$ , para más detalles ver [10], en especial p.110.

- (2) Si  $U \subseteq Y$  es un abierto afín y  $W \subseteq X$  es un abierto afín con  $f(W) \subseteq U$ , entonces  $\Omega_{W/U}^1 \cong (\Omega_{B/A}^1)^\sim$ , donde  $U = \text{Spec}(A)$  y  $W = \text{Spec}(B)$ .
- (3) Sea  $g : Y' \rightarrow Y$  un morfismo de esquemas y considere  $U$  y  $W$  como en (2) y se elige un abierto afín  $U' \subseteq Y'$  tal que  $g(U') \subseteq U$ . Entonces  $g'^*(\Omega_{W/U}^1) \cong (\Omega_{B/A}^1 \otimes_A B)$ .

En vista de (3) del comentario 1.13 y del lema 1.12 se obtiene la proposición:

**Proposición 1.14.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y' \rightarrow Y$  morfismos de esquemas, y considere el producto fibrado siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Entonces  $\Omega_{X'/Y'}^1 \cong g'^*(\Omega_{X/Y}^1)$ , donde  $X' = X \times_Y Y'$ .

□

**Proposición 1.15.** Sean  $X$  y  $Y$  esquemas,  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo de tipo finito. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:

- (1)  $\Omega_{X/Y}^1 = 0$ .
- (2) El morfismo diagonal  $\Delta : X \rightarrow X \times_Y X$  es una inmersión abierta.
- (3)  $f$  es no ramificado.

DEMOSTRACIÓN. (1)  $\Rightarrow$  (2): Para mostrar que  $\Delta$  es una inmersión abierta bastará probar que, para cada  $x \in X$ , el morfismo de anillos  $\Delta_x^\# : \mathcal{O}_{X \times_Y X, \Delta(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ , es un isomorfismo y que  $\Delta$  es un homeomorfismo de  $X$  en un subconjunto abierto de  $X \times_Y X$ , ver [6] capítulo I proposición 4.2.2. Considere abiertos afines  $U \subseteq X$ ,  $W \subseteq Y$  con  $x \in U = \text{Spec}(B)$ ,  $f(x) \in W = \text{Spec}(A)$  y  $f(U) \subseteq W$ . De esta manera se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} U & & U \\ \Delta \searrow & & \downarrow q \\ U \times_W U & \xrightarrow{q} & U \\ \downarrow p & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & W \end{array}$$

Que se transforma en:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & B \\
 & & & & \swarrow \\
 & & & & 1_B \\
 & & & & \leftarrow B \\
 & & & & \swarrow \\
 & & & & \delta \\
 & & & & B \otimes_A B \\
 & & & & \swarrow \\
 & & & & 1_B \\
 & & & & \leftarrow B \\
 & & & & \swarrow \\
 & & & & \varphi \\
 & & & & A \\
 & & & & \leftarrow \varphi \\
 & & & & B
 \end{array}$$

donde  $\delta$  es el morfismo diagonal,  $\Delta$  es una inmersión cerrada (recordar que  $\delta$  es un epimorfismo y además puesto que  $p \circ \Delta = 1_U$  se tiene que  $\Delta$  es inyectiva). Se pone  $x = \mathfrak{p}' \in \text{Spec}(B)$  y  $\mathfrak{p} = \delta^{-1}(\mathfrak{p}')$ . Además, sabemos que  $\Omega_{U/W}^1 \cong \widetilde{\Omega_{B/A}^1}$ . De esta manera se tiene:

$$(2) \quad (\Omega_{B/A}^1)_{\mathfrak{p}} = (I/I^2)_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}/I_{\mathfrak{p}}^2 = (\Omega_{U/W}^1)_x = 0.$$

donde  $I = \ker(\delta)$ .

Note que  $I \subseteq \mathfrak{p}$ , puesto que si  $t \in I$  entonces  $\delta(t) = 0 \in \mathfrak{p}'$ . Además, como  $f$  es de tipo finito, entonces al morfismo  $f|_U: U \rightarrow W$  le corresponde un morfismo de anillos  $\varphi: A \rightarrow B$  de tipo finito.

Ahora, observe que la familia  $\{1 \otimes b - b \otimes 1\}$ ,  $b \in B$ , genera a  $I$  como  $B$ -módulo, pues si  $t \in I$  entonces  $t = \sum x \otimes y$  por lo que:

$$\begin{aligned}
 \sum x \otimes y &= \sum (x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1) + (x \otimes 1)(y \otimes 1) \\
 &= \sum (x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1) + (\sum xy) \otimes 1.
 \end{aligned}$$

Puesto que  $\delta(t) = \sum xy = 0$ , se tiene que  $\sum x \otimes y = \sum (x \otimes 1)(1 \otimes y - y \otimes 1)$ .

Como  $\varphi: A \rightarrow B$  es de tipo finito, existen  $b_1, \dots, b_n \in B$  tal que cada  $b \in B$  es de la forma  $b = \sum \varphi(a_j) b_1^{i_1} \cdots b_n^{i_n}$ . Se afirma que  $\tilde{C} = \{1 \otimes b_1 - b_1 \otimes 1, \dots, 1 \otimes b_n - b_n \otimes 1\}$  generan a  $I$  como  $B \otimes_A B$ -módulo.

Para ello basta ver que cada  $1 \otimes b - b \otimes 1$  es combinación lineal de elementos del conjunto  $\tilde{C}$ , y es suficiente ver que  $\{1 \otimes b_i b_j - b_i b_j \otimes 1\}$  es de la forma requerida.

Ahora

$$\begin{aligned}
 1 \otimes b_i b_j - b_i b_j \otimes 1 &= (1 \otimes b_i)(1 \otimes b_j - b_j \otimes 1) + (1 \otimes b_i)(b_j \otimes 1) - (b_i \otimes 1)(b_j \otimes 1) \\
 &= (1 \otimes b_i)(1 \otimes b_j - b_j \otimes 1) + (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)(b_j \otimes 1).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $I$  es finitamente generado como  $B \otimes_A B$ -módulo y puesto que  $I_{\mathfrak{p}} \subseteq \text{Rad}((B \otimes_A B)_{\mathfrak{p}})$ , ya que  $I \subseteq \mathfrak{p}$ . Entonces  $I_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}^2$ , por (2), y, por el lema de Nakayama,  $I_{\mathfrak{p}} = 0$ , donde  $\text{Rad}(C)$  denota al radical de Jacobson del anillo  $C$ .

Por lo tanto existe un abierto  $\tilde{U} \subseteq U \times_W U$ , con  $\mathfrak{p} \in \tilde{U}$  e  $I_{\mathfrak{q}} = 0$  para cada  $\mathfrak{q} \in \tilde{U}$ , ya que el soporte de  $\tilde{I}$  es cerrado, ver [6] Capítulo 0, p. 45, Proposición 5.2.2. Observe que  $\tilde{U} \subseteq \Delta(U)$ , ya que  $I \subseteq \mathfrak{q}$  para cada  $\mathfrak{q} \in \tilde{U}$  y esto implica que  $\delta(\mathfrak{q})$  es un ideal primo de  $B$  y  $\delta^{-1}(\delta(\mathfrak{q})) = \mathfrak{q}$ , es decir,  $\Delta(\delta(\mathfrak{q})) = {}^a\delta(\delta(\mathfrak{q})) = \mathfrak{q}$ . Además como  $\ker(\delta_{\mathfrak{q}}) = I_{\mathfrak{q}} = 0$ , para cada  $\mathfrak{q} \in \tilde{U}$ , esto implica que  $\Delta_{\mathfrak{q}}$  es un

isomorfismo. Entonces  $\Delta$  es una función abierta y los morfismos de anillos  $\Delta_x^\sharp$  son isomorfismos para cada  $x \in X$ , por lo tanto  $\Delta_{X/Y}$  es una inmersión abierta.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Pongamos  $y = f(x)$ . Por (2) se tiene que  $\Delta_f : X \rightarrow X \times_Y X$  es una inmersión abierta. Considere el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X_y = X \times_Y \text{Spec}(k(y)) & \longrightarrow & X \\ f_y \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec}(k(y)) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

donde  $f_y : X_y \rightarrow \text{Spec}(k(y))$  es el morfismo obtenido de  $f$ , por cambio de base. Entonces  $\Delta_{f_y}$  también es una inmersión abierta, esto se sigue de (5.3.4) y (4.3.2) de [6] capítulo I. Sea  $\bar{k}$  una cerradura algebraica de  $k(y)$ ; sabemos que  $X_y$  es homeomorfo a  $f^{-1}(y)$ , así, podemos pensar a  $x$  en  $X_y$ , y encontrar un abierto afín  $U \subseteq X_y$ , con  $x \in U$ . Consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} U \times_{\text{Spec}(k(y))} \text{Spec}(\bar{k}) & \longrightarrow & U \\ g \downarrow & & \downarrow f_y \\ \text{Spec}(\bar{k}) & \longrightarrow & \text{Spec}(k(y)) \end{array}$$

Ponemos  $X' = U \times_{\text{Spec}(k(y))} \text{Spec}(\bar{k})$ ,  $Y' = \text{Spec}(\bar{k})$  entonces  $\Delta_g : X' \rightarrow X' \times_{Y'} X'$  es una inmersión abierta, esto nuevamente es por (5.3.4) y (4.3.2) de [6] capítulo I. Así  $X' = \text{Spec}(\bar{A})$  donde  $\bar{A} = A \otimes_{k(y)} \bar{k}$ ,  $U = \text{Spec}(A)$ . Primero se probará que  $\bar{A}$  es una  $\bar{k}$ -álgebra finita, ya que, en vista de la proposición 3.1 de [13] capítulo I sección 3, ésto ya mostraría que  $A$  es un producto finito de extensiones finitas y separables de  $k(y)$ . Para ello será suficiente mostrar que cada punto cerrado  $x \in X'$  es aislado, es decir,  $\{x\}$  es abierto. Considere el morfismo canónico  $s' : \text{Spec}(k(x)) \rightarrow X'$  con  $s'(\bullet) = \{x\}$  y, ya que  $k(x) = \bar{k}$ , podemos escribir  $s' : \text{Spec}(\bar{k}) \rightarrow X'$  y se cumple que  $g \circ s' = 1_{Y'}$ .

De esta manera se tiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} X' & & & & X \\ & \searrow \Gamma_{s' \circ g} & & \searrow 1_{X'} & \\ & & X' \times_{Y'} X' & \xrightarrow{q} & X \\ & \searrow s' \circ g & \downarrow p & & \downarrow \\ & & X' & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

donde  $\Gamma_{s' \circ g}$  denota la grafica del morfismo  $s' \circ g$ . De las igualdades:

$$\begin{aligned} p \circ \Gamma_{s' \circ g} \circ s' &= s', & q \circ \Gamma_{s' \circ g} \circ s' &= s' \\ p \circ \Delta_g \circ s' &= s', & q \circ \Delta_g \circ s' &= s' \end{aligned}$$

se tiene que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
Y' & \xrightarrow{s'} & X' \\
s' \downarrow & & \downarrow \Gamma_{s' \circ g} \\
X' & \xrightarrow{\Delta_g} & X' \times_{Y'} X'
\end{array}$$

Por lo tanto  $\Gamma_{s' \circ g}^{-1} \Delta_g(X') = \{x\}$  pues obsérvese que, en primer lugar,  $x \in \Gamma_{s' \circ g}^{-1} \Delta_g(X')$  por diagrama conmutativo anterior. Ahora, recordando que  $s'(\bullet) = x$ , por otra parte si  $z \in \Gamma_{s' \circ g}^{-1} \Delta_g(X')$  entonces  $\Gamma_{s' \circ g}(z) = \Delta_g(z')$ , y aplicando los morfismos  $p$  y  $q$ , las proyecciones del producto fibrado  $X' \times_{Y'} X'$ , a la igualdad anterior, se obtiene que  $z' = x$  y  $z = z'$ .

Así  $(\{x\}, \mathcal{O}_{X'}|_{\{x\}})$  es un esquema y, por lo tanto, existe un anillo  $B$  con  $(\{x\}, \mathcal{O}_{X'}|_{\{x\}}) = (\text{Spec}(B), \mathcal{O}_{\text{Spec}(B)})$ . Entonces,  $B$  es artiniiano, ya que se tiene un morfismo  $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(\bar{k})$ , inducido por  $g$ , por lo que  $B$  es una  $\bar{k}$ -álgebra finita. Si consideramos la inmersión abierta  $\Delta_g : X' \rightarrow X' \times_{Y'} X'$  se puede suponer que  $X' \times_{Y'} X'$  se reduce a un sólo punto, así  $\Delta_g$  es un isomorfismo de  $X'$  en  $X' \times_{Y'} X'$  por lo que  $B \otimes_{\bar{k}} B \rightarrow B$  es un isomorfismo y esto implica que,  $B \cong \bar{k}$ , ya que  $\dim_{\bar{k}}(B \otimes_{\bar{k}} B) = (\dim_{\bar{k}} B)^2$ , pero esto dice que  $f$  es no ramificado en  $x \in X$  y, puesto que  $x$  es arbitrario, entonces  $f$  es no ramificado.

(3)  $\Rightarrow$  (1)  $\Omega_{X/Y}^1$  es un  $\mathcal{O}_X$ -módulo finito ya que si  $U \subseteq X$ ,  $W \subseteq Y$  son abiertos afines, con  $x \in U$ ,  $y = f(x) \in W$  y  $f(U) \subseteq W$ ; entonces  $\Omega_{U/W}^1 \cong \widetilde{\Omega_{B/A}^1}$ , con  $U = \text{Spec}(B)$ ,  $W = \text{Spec}(A)$  y como  $f : X \rightarrow Y$  es localmente de tipo finito, entonces  $\Omega_{U/W}^1$  es finitamente generado como  $B$ -módulo.

Por el lema de Nakayama  $(\Omega_{X/Y}^1)_x = 0$  es equivalente a  $(\Omega_{X/Y}^1)_x / \mathfrak{m}_x (\Omega_{X/Y}^1)_x = 0$  es decir,  $(\Omega_{X_y/\text{Spec}(k(y))}^1)_x = 0$ , y esta última afirmación se sigue de la proposición 3.2 (b) de [13] capítulo I sección 3, junto con el hecho de que, por 1.14,  $(\Omega_{X_y/\text{Spec}(k(y))}^1)_x \cong (g'^* \Omega_{X/Y}^1)_x$  donde  $g'$  es la proyección  $X_y \rightarrow U$ , ver [10] capítulo II sección 5 p. 110. Del diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
X_y = U \times_W \text{Spec}(k(y)) & \longrightarrow & U \\
f_y \downarrow & & \downarrow f \\
\text{Spec}(k(y)) & \longrightarrow & W
\end{array}$$

vemos que  $X_y$  es un espacio discreto, ya que  $f$  es no ramificado. En particular  $\{x\}$  es un conjunto abierto y como la cuestión es local podemos reemplazar a  $X_y$  por  $\{x\}$ , puesto que  $k(x)$  es una extensión finita y separable de  $k(y)$ . Aplicando el lema 1.11 se tiene que  $(\Omega_{X/Y}^1)_x = 0$ , y como esto vale para todo  $x \in X$  se sigue que  $\Omega_{X/Y}^1 = 0$ .  $\square$

**Proposición 1.16.** (a) *Toda inmersión es no ramificada.*  
(b) *La composición de dos morfismos no ramificados es no ramificado.*

(c) *Cualquier cambio de base de un morfismo no ramificado es no ramificado.*

DEMOSTRACIÓN. (a): Considere primero una inmersión abierta  $f : X \rightarrow Y$ . Sabemos que, ver [6] p. 122,  $\varphi = f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es una biyección; en particular se tiene que  $\varphi(\mathfrak{m}_{f(x)}) = \mathfrak{m}_x$  por lo que la primera parte de la definición 1.8 se cumple. Y ya que  $\varphi$  es biyectiva en particular  $k(f(x)) = k(x)$ , es decir, se verifica la segunda parte de la definición 1.8.

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una inmersión cerrada sabemos que, ver [6] p. 122,  $\varphi = f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  es suprayectiva, y por la definición de  $\varphi$  se tiene que  $\varphi(\mathfrak{m}_{f(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$ . Puesto que  $\varphi$  es suprayectiva y es un morfismo de anillos locales, se tiene que  $\mathfrak{m}_x \subseteq \varphi(\mathfrak{m}_{f(x)})$ , por lo tanto  $\varphi(\mathfrak{m}_{f(x)}) = \mathfrak{m}_x$ , en particular se cumple la primera condición de la definición 1.8, y por ser  $\varphi$  suprayectiva se tiene que  $k(f(x)) = k(x)$ , es decir, se verifica la segunda parte de la definición 1.8.

(b): Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $h : Y \rightarrow Z$  dos morfismos no ramificados, y considere la composición

$$h \circ f : X \rightarrow Z$$

Dado  $x \in X$  se tienen los morfismos siguientes:

$$\varphi = f_{f(x)}^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

$$\psi = h_{h(f(x))}^\# : \mathcal{O}_{Z,h(f(x))} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,f(x)}$$

Se quiere probar que  $\mathfrak{m}_{h(f(x))}\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$  y, por definición,  $\mathfrak{m}_{h(f(x))}\mathcal{O}_{X,x}$  es el ideal generado, en  $\mathcal{O}_{X,x}$ , por el conjunto  $\varphi(\psi(\mathfrak{m}_{h(f(x))}))$ .

Si  $w \in \mathfrak{m}_{h(f(x))}\mathcal{O}_{X,x}$  entonces  $w = \sum a_i \varphi(\psi(x_i))$  con  $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$  y  $x_i \in \mathfrak{m}_{h(f(x))}$ .

Pero se sabe que:

(a)  $\mathfrak{m}_{f(x)}\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$ .

(b)  $\mathfrak{m}_{h(f(x))}\mathcal{O}_{Y,f(x)} = \mathfrak{m}_{f(x)}$ .

Por lo que, de (b),  $\psi(x_i) \in \mathfrak{m}_{f(x)}$  y de (a)  $\sum a_i \varphi(\psi(x_i)) \in \mathfrak{m}_x$ , por lo tanto  $\mathfrak{m}_{h(f(x))}\mathcal{O}_{Y,f(x)} \subseteq \mathfrak{m}_x$ .

Ahora, si  $w \in \mathfrak{m}_x$  se tiene que, por (a),  $w = \sum a_i \varphi(y_i)$ ,  $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$  e  $y_i \in \mathfrak{m}_{f(x)}$ , y por (b)  $y_i = \sum b_{i,j} \psi(x_{i,j})$ , por lo tanto:

$$w = \sum a_i \varphi(y_i) = \sum \sum a_i \varphi(b_{i,j} \psi(x_{i,j})), \text{ de esto se sigue que:}$$

$$w \in \mathfrak{m}_{h(f(x))}\mathcal{O}_{Y,f(x)}, \text{ es decir } \mathfrak{m}_x \subseteq \mathfrak{m}_{h(f(x))}\mathcal{O}_{Y,f(x)}.$$

Por consiguiente se cumple la primera condición de la definición 1.8.

Además, las extensiones siguientes son finitas y separables:

$$k(h(f(x))) \subseteq k(f(x)) \text{ y } k(f(x)) \subseteq k(x), \text{ puesto que } f \text{ y } h \text{ son no ramificados.}$$

Por lo tanto  $k(h(f(x))) \subseteq k(x)$  es finita y separable, lo cual prueba la segunda parte de la definición 1.8.

(c) Sea  $f : X \rightarrow S$  un morfismo no ramificado y sea  $h : S' \rightarrow S$  otro morfismo. En el producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} X \times_S S' & \xrightarrow{\pi} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{h} & S \end{array}$$

se sabe, por la proposición 1.14, que  $\Omega_{X'/S'}^1 \cong \pi^*(\Omega_{X/S}^1)$ .

Y como  $f$  es no ramificado se tiene que  $\Omega_{X/S}^1 = 0$ , por la proposición 1.15, es decir,  $f'$  es no ramificado, por la proposición 1.15.  $\square$

## 1.4. Morfismos étales

**Definición 1.17.** Un morfismo de esquemas (de tipo finito)  $f : Y \rightarrow X$  se dice que es *étale*, si es plano y no ramificado.

**Proposición 1.18.** (a) *Toda inmersión abierta es étale.*  
 (b) *La composición de dos morfismos étales es étale.*  
 (c) *Cualquier cambio de base de un morfismo étale es étale.*

DEMOSTRACIÓN. (a): Puesto que una inmersión abierta es plana y no ramificada, por 1.16 y por 1.6, tal inmersión es étale.

(b): Como la composición de morfismos planos es plano, y como la composición de morfismos no ramificados es no ramificado, por 1.16 y por 1.6, se sigue que la composición de dos morfismos étales es étale.

(c): Sea  $f : Y \rightarrow X$  un morfismo étale. Entonces es plano y no ramificado, por lo que si  $g : Z \rightarrow X$  es cualquier morfismo de esquemas, de la proposición 1.6 se sigue que  $f' : Z \times_X Y \rightarrow Z$  es plano y de la proposición 1.16 se sigue que es no ramificado, por lo tanto  $f'$  es étale.  $\square$

**Ejemplo 2.** Sea  $k$  un campo y  $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$  un morfismo étale. Entonces  $X = \bigsqcup_{i=1}^n \text{Spec}(k_i)$  donde cada  $k_i/k$  es una extensión de campos, finita y separable.

Para ver esto observe que  $f$  es no ramificado por lo que se tiene que  $X$  es un esquema artiniiano, por lo tanto discreto y así cada  $\mathcal{O}_{X,x}$  es una extensión finita y separable de  $k$  para cada  $x \in X$  y por lo tanto  $X = \bigsqcup_{i=1}^n \text{Spec}(k_i)$ .

El resultado siguiente será utilizado a menudo, y se sigue de la proposición 1.7, ya que  $f$  es plano.

**Proposición 1.19.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es étale, entonces  $f$  es abierto.*

$\square$

La proposición siguiente es una propiedad útil de los morfismos étales.

**Proposición 1.20.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos de esquemas. Si  $g$  es no ramificado y  $g \circ f$  es étale, entonces  $f$  es étale.

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar sabemos que  $\Delta = (1_Y, 1_Y) : Y \rightarrow Y \times_Z Y$  es una inmersión abierta, por 1.15, y por tanto étale, lo que implica que  $\Gamma_f$  es también étale, puesto que se obtiene como un cambio de base del morfismo  $\Delta$ . Por el lema A.12 del apéndice, vemos que  $f = (g \circ f \times 1_Y) \circ \Gamma_f$  se factoriza por morfismos étales, así por 1.18 inciso (b),  $f$  es étale.  $\square$

**Definición 1.21.** Sea  $X$  un esquema. Un *punto geométrico* de  $X$  es un morfismo  $\bar{x} \rightarrow X$  donde  $\bar{x} = \text{Spec}(k)$  con  $k$  es un campo separablemente cerrado que contiene al campo residual  $k(x)$  y  $\bar{x} \rightarrow X = \text{Spec}(k) \rightarrow \text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$  donde  $\text{Spec}(k(x)) \rightarrow X$  es el morfismo canónico.





# Capítulo 2

## La topología étale

### 2.1. Sitios

Sea  $E$  una clase de morfismos de esquemas tales que:

- ( $e_1$ ) Todos los isomorfismos están en  $E$ .
- ( $e_2$ ) La composición de dos morfismos en  $E$  está en  $E$ .
- ( $e_3$ ) Cualquier cambio de base de un morfismo en  $E$  está en  $E$ .

Un morfismo de tal clase  $E$  se dirá que es un  $E$ -morfismo. La subcategoría plena de  $\text{Esq}/X$  de  $X$ -esquemas cuyos morfismos estructurales son  $E$ -morfismos, se denotará por  $E/X$ .

Las clases siguientes son importantes para el trabajo posterior:

- (a)  $E = (\text{Zar})$  todas las inmersiones abiertas.
- (b)  $E = (\text{ét})$  todos los morfismos étales de tipo finito.
- (c)  $E = (\text{Pl})$  todos los morfismos planos que son localmente de tipo finito.

Por los resultados del capítulo 1, las clases anteriores verifican ( $e_1$ ), ( $e_2$ ) y ( $e_3$ ), además los  $E$ -morfismos son abiertos, por 1.19.

Fijamos un esquema  $X$ , una clase  $E$  ya sea (a), (b) o (c), y una subcategoría plena  $\mathcal{C}/X$  de  $\text{Esq}/X$  tal que si  $Y \rightarrow X$  está en  $\mathcal{C}/X$  y  $U \rightarrow Y$  es cualquier  $E$ -morfismo entonces  $U \rightarrow Y \rightarrow X$  está en  $\mathcal{C}/X$ . Un  $E$ -cubriente de un objeto  $Y$  de  $\mathcal{C}/X$  es una familia  $\{U_i \xrightarrow{g_i} Y\}_{i \in I}$  de  $E$ -morfismos tales que  $Y = \bigcup g_i(U_i)$ . En ocasiones nos referiremos a un  $E$ -cubriente como una *familia suprayectiva* de morfismos. Obsérvese que si tenemos un  $E$ -cubriente  $\{U_i \xrightarrow{g_i} Y\}_{i \in I}$ , entonces, por la condición impuesta a  $\mathcal{C}/X$ , el diagrama siguiente conmuta, para cada  $i \in I$

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{g_i} & Y \\ q \downarrow & \swarrow f & \\ & & X \end{array}$$

donde  $q = f \circ g_i$  y  $f : Y \rightarrow X$  es el morfismo estructural de  $Y$ , como la categoría  $\mathcal{C}/X$  es plena entonces los  $X$  morfismos  $g_i : U_i \rightarrow Y$  pertenecen a  $\mathcal{C}/X$ .

La clase de todos los  $E$ -cubrientes de todos los objetos de  $\mathcal{C}/X$  se dice que forman una  $E$ -topología en  $\mathcal{C}/X$ . La categoría  $\mathcal{C}/X$  junto con una  $E$ -topología se dice que es un  $E$ -sitio, y lo denotamos por  $X_E$  o  $(\mathcal{C}/X)_E$ .

El  $E$ -sitio pequeño en  $X$  es  $(E/X)_E$  y en el caso de que todos los  $E$ -morfismos son localmente de tipo finito, el  $E$ -sitio grande en  $X$  es  $(\text{LFT}/X)_E$ , donde  $\text{LFT}/X$

la subcategoría plena de  $\text{Esq}/X$  cuyos morfismos estructurales son localmente de tipo finito.

El *sitio de Zariski*,  $X_{\text{Zar}}$ , es por definición el Zar-sitio pequeño. El *sitio étale* es el ét-sitio pequeño  $(\text{ét}/X)_{\text{ét}}$ , también denotado por  $X_{\text{ét}}$ , a este sitio también se le conoce como la *topología étale de X*. El *sitio plano*,  $X_{\text{Pl}}$ , es el dado por el sitio grande  $(\text{LFT}/X)_{\text{Pl}}$

**Comentario 2.1.** Una *topología de Grothendieck* es una categoría  $\mathcal{C}$  junto con una colección de familias de morfismos de  $\mathcal{C}$  llamados *cubrientes*, que denotaremos por  $\text{cub}(\mathcal{C})$ , que satisfacen las propiedades siguientes:

- (i) Si  $U \rightarrow V$  es un isomorfismo, entonces  $\{U \rightarrow V\} \in \text{cub}(\mathcal{C})$ .
- (ii) Si  $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{cub}(\mathcal{C})$  y  $\{U_{ij} \rightarrow U_i\} \in \text{cub}(\mathcal{C})$  para toda  $i$ , entonces  $\{U_{ij} \rightarrow U\} \in \text{cub}(\mathcal{C})$ .
- (iii) Si  $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{cub}(\mathcal{C})$  y  $V \rightarrow U$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ , entonces  $U_i \times_U V$  existen para todo  $i$  y se tiene que  $\{U_i \times_U V \rightarrow V\} \in \text{cub}(\mathcal{C})$ .

Un sitio cumple las propiedades anteriores por (e1), (e2), (e3), así un sitio es una topología de Grothendieck.

En lo que sigue la palabra *cubriente* será sinónimo de la frase *familia E-cubriente*, a menos que se especifique otra cosa.

La noción de topología de Grothendieck generaliza la noción usual de topología en un conjunto  $X$ , pensando a los abiertos en el espacio  $X$  no como subconjuntos de  $X$  sino como otros objetos, no necesariamente contenidos en  $X$ , junto con funciones con codominio  $X$  cuyas imágenes se piensan como los abiertos de  $X$ . Por otra parte, los morfismos entre abiertos de  $X$  se deben pensar como inclusiones de conjuntos abiertos, sólo que en el caso general de una topología de Grothendieck  $X_E$  estas inclusiones tan sólo son morfismos entre estos objetos, y puede haber más de una manera en que se tengan estos morfismos por lo que si los pensamos como inclusiones se tiene que tomar en cuenta que podrían haber distintas maneras en las que un objeto se puede incluir en otro. Por otra parte, se quiere que la intersección de dos conjuntos abiertos sea otro abierto; en este caso se recuerda que la intersección se puede ver como un producto fibrado y en el caso general lo que se requiere es que los productos fibrados pertenezcan a la clase de objetos que van a jugar el papel de los abiertos de la topología. Sin embargo, notemos que para tomar la unión de una colección arbitraria de abiertos es necesario pensar a éstos como metidos en algún conjunto abierto mayor común y así no se tiene, para topologías de Grothendieck, el análogo de uniones arbitrarias.

**Ejemplo 3.** Si  $X$  es cualquier esquema, viendo a  $X$  como un esquema sobre  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  y para  $X_{\text{Zar}}$  la clase de todas las inmersiones abiertas  $U \hookrightarrow X$ , identificando a  $U$  con su imagen en  $X$  lo pensamos como un abierto en la topología de Zariski de  $X$ , y ciertamente una cubierta en  $X_{\text{Zar}}$  es lo mismo que una cubierta abierta de  $X$  en el sentido usual, es decir, es una familia de abiertos  $\{U_i \hookrightarrow X\}$  tal que

$$X = \bigcup U_i$$

donde notamos que en este ejemplo el producto fibrado de dos abiertos de  $X$  es su intersección:  $U_i \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} U' = U_i \cap U'$ . Así, el sitio de Zariski,  $X_{\text{Zar}}$ , en un esquema  $X$  es lo mismo que la topología de Zariski en el sentido usual, identificando cualquier inmersión abierta  $j : U \hookrightarrow X$  con su imagen.

**Definición 2.2.** Considere ahora sitios  $X'_{E'}$  y  $X_E$ . Un morfismo  $\pi : X' \rightarrow X$  de esquemas define un *morfismo de sitios*  $\pi^\bullet : X_E \rightarrow X'_{E'}$  mediante:  $\pi^\bullet(Y) = Y_{(X')} := Y \times_X X'$  que se obtiene del producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X X' & \xrightarrow{p} & Y \\ q \downarrow & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

De esta manera se tiene que

- (a) para cada  $Y \in X_E$ ,  $Y_{(X')}$  pertenece a  $X'_{E'}$ .
- (b) para cada  $E$ -morfismo  $U \rightarrow Y$  en  $X_E$ ,  $U_{(X')} \rightarrow Y_{(X')}$  es un  $E'$ -morfismo.

Para ver que los cambios de base de familias suprayectivas de morfismos dan familias suprayectivas de morfismos, se necesita el lema siguiente.

**Lema 2.3.** Sean  $f_1 : X_1 \rightarrow Y$  y  $f_2 : X_2 \rightarrow Y$  morfismos de esquemas, si  $x_1 \in X_1$ ,  $x_2 \in X_2$  verifican que  $f_1(x_1) = f_2(x_2)$ , entonces existe un punto  $z \in X_1 \times_Y X_2$  tal que  $\pi_1(z) = x_1$  y  $\pi_2(z) = x_2$ , donde  $\pi_1$  y  $\pi_2$  denotan las proyecciones del producto fibrado  $X_1 \times_Y X_2$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos  $y = f_1(x_1) = f_2(x_2)$ , y considere las extensiones  $k(y) \subseteq k(x_1)$  y  $k(y) \subseteq k(x_2)$ ; entonces  $k(x_1) \otimes_{k(y)} k(x_2) \neq 0$ , puesto que  $k(x_1)$  y  $k(x_2)$  son  $k(y)$ -espacios vectoriales no nulos. Por lo tanto  $k(x_1) \otimes_{k(y)} k(x_2)$  tiene un ideal máximo,  $\mathfrak{m}$ , y el campo  $K := (k(x_1) \otimes_{k(y)} k(x_2)) / \mathfrak{m}$  es una extensión de  $k(y)$  que contiene a  $k(x_1)$  y  $k(x_2)$ .

Las composiciones

$$(\varphi_1 = \text{Spec}(K) \xrightarrow{\theta_1} \text{Spec}(k(x_1)) \xrightarrow{\text{can}} X_1) \rightarrow Y$$

y

$$(\varphi_2 = \text{Spec}(K) \xrightarrow{\theta_2} \text{Spec}(k(x_2)) \xrightarrow{\text{can}} X_2) \rightarrow Y$$

son iguales. Para probar esta última afirmación procedemos como sigue: se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec}(K) & \xrightarrow{\theta_2} & \text{Spec}(k(x_2)) \\ \theta_1 \downarrow & & \downarrow \psi_2 \\ \text{Spec}(k(x_1)) & \xrightarrow{\psi_1} & \text{Spec}(k(y)) \end{array}$$

de este último diagrama se obtiene el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Spec}(K) & \xrightarrow{\theta_2} & \mathrm{Spec}(k(x_2)) & \xrightarrow{\mathrm{can}} & X_2 \\
\theta_1 \downarrow & & \downarrow \psi_2 & & \downarrow f_2 \\
\mathrm{Spec}(k(x_1)) & \xrightarrow{\psi_1} & \mathrm{Spec}(k(y)) & \xrightarrow{\mathrm{can}} & Y \\
\mathrm{can} \downarrow & & & \nearrow f_1 & \\
X_1 & & & & 
\end{array}$$

y de aquí se sigue lo afirmado. Por lo que existe un morfismo único  $h : \mathrm{Spec}(K) \rightarrow X_1 \times_Y X_2$  tal que  $\pi_1 \circ h = \varphi_1$  y  $\pi_2 \circ h = \varphi_2$ . En particular poniendo  $z = h(\bullet)$  se cumplen las conclusiones del lema.  $\square$

Si tenemos un cubriente  $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} Y\}_{i \in I}$  de  $Y$  se sabe, ver el comentario A.8 en el apéndice, que el siguiente diagrama es un producto fibrado, para cada  $i \in I$ :

$$\begin{array}{ccc}
U_{i(X')} = X' \times_X U_i & \longrightarrow & U_i \\
\tilde{\varphi}_i \downarrow & & \downarrow \varphi_i \\
Y_{(X')} = X' \times_X Y & \longrightarrow & Y
\end{array}$$

Sea  $U = \bigcup \tilde{\varphi}_i(U_{i(X')})$ . Si  $w \in X' \times_X Y$ , en el espacio subyacente, entonces existe un  $j \in I$  y un  $x_j \in U_j$  tal que  $p(w) = \varphi_j(x_j) = y \in Y$ , aplicando el lema 2.3 vemos que  $U = X' \times_X Y$ . Así, el funtor

$$\pi^\bullet = (Y \mapsto Y_{(X')}) : \mathcal{C}/X \rightarrow \mathcal{C}'/X'$$

lleva cubrientes en cubrientes, y diremos entonces  $\pi$  es un *morfismo continuo*.

**Ejemplo 4.** Sea  $\pi : X \rightarrow Y$  un morfismos de esquemas, entonces  $\pi$  define un morfismo de sitios  $Y_{\acute{e}t} \rightarrow X_{\acute{e}t}$  como sigue: para cada  $U \in Y_{\acute{e}t}$  ponemos  $\pi_*(U) = \pi^\bullet(U) = U_{(X)}$ .

## 2.2. Pregavillas y gavillas

Una *pregavilla* de grupos abelianos en un sitio  $(\mathcal{C}/X)_E$  es un funtor contravariante  $P : \mathcal{C}/X \rightarrow \mathrm{Ab}$ . Así,  $P$  asocia a cada  $U$  en  $\mathcal{C}/X$  un grupo abeliano  $P(U)$ , que algunas veces se denota por  $\Gamma(U, P)$  y cuyos elementos a veces llamaremos *secciones* de  $P$  en  $U$ .

Con cada morfismo  $f : U' \rightarrow U$  de  $\mathcal{C}/X$ ,  $P$  asocia un morfismo de grupos abelianos  $P(f) : P(U) \rightarrow P(U')$  que algunas veces se le llama *morfismo de restricción*. En ocasiones usaremos la notación  $\rho_{U'}^U = P(f)$  para denotar al morfismo de restricción de  $U$  a  $U'$ . La notación  $\rho_{U'}^U$  es ambigua ya que puede existir más de un morfismo  $U \rightarrow U'$ , sin embargo la seguiremos utilizando teniendo en mente este hecho, con la salvedad de que si tenemos mas de una pregavilla (o gavilla)  $P, P_1$  etc, utilizaremos la notación  $P(\varphi_i), P_1(\varphi_i)$ , etc.

Un *morfismo*  $\phi : P \rightarrow P'$  de pregavillas en  $(\mathcal{C}/X)_E$  es una transformación natural entre los funtores contravariantes  $P$  y  $P'$ . Así, un morfismo de pregavillas  $\eta : F \rightarrow$

$F'$  es una colección de morfismos (de grupos abelianos)  $\eta_U : F(U) \rightarrow F'(U)$ , uno para cada  $E$ -morfismo  $U \rightarrow X$ , tales que si  $V \rightarrow X$  es otro  $E$ -morfismo tal que se tiene un  $X$ -morfismo  $j : U \rightarrow V$ , entonces los cuadrados siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccc} F(V) & \xrightarrow{\eta_V} & F'(V) \\ F(j) \downarrow & & \downarrow F'(j) \\ F(U) & \xrightarrow{\eta_U} & F'(U) \end{array}$$

Considere un morfismo de pregavillas  $\psi : P \rightarrow P'$ . Definimos la pregavilla *núcleo*, que denotamos por  $\ker(\psi)$ , como sigue: si  $U \in \mathcal{C}/X$  ponemos  $\ker(\psi)(U) = \ker(P(U) \xrightarrow{\psi_U} P'(U))$  y los morfismos de restricción son los inducidos por  $P$ . La pregavilla *imagen*, que denotaremos por  $\text{im}(\psi)$ , se define como sigue: Si  $U \in \mathcal{C}/X$  ponemos  $\text{im}(\psi)(U) = \text{im}(P(U) \xrightarrow{\psi_U} P'(U))$  y los morfismos de restricción son los inducidos por  $P'$ .

Las pregavillas y los morfismos de pregavillas sobre  $(\mathcal{C}/X)_E$  forman una categoría abeliana  $P((\mathcal{C}/X)_E)$ , ver por ejemplo [8], p. 126-130.

**Ejemplo 5.** Si  $M$  es un grupo abeliano, la *pregavilla constante*  $P_M$  en  $X_E$  está definida por  $P_M(U) = M$ , para cada  $U$  y  $P_M(f) = 1_M$  para cada morfismo  $f : U \rightarrow U'$ ; y si  $\emptyset$  es el esquema vacío  $P_M(\emptyset) = \{0\}$ .

**Ejemplo 6.** La *pregavilla aditiva*  $\mathbb{G}_a$  en el sitio  $(\mathcal{C}/X)_E$  está dada por  $\mathbb{G}_a(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ , visto sólo como grupo aditivo para cada  $U$ , y si  $f : U \rightarrow U'$  es un morfismo  $\mathbb{G}_a(f)$  es el morfismo aditivo  $\Gamma(U', \mathcal{O}_{U'}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  inducido por  $f$ .

**Ejemplo 7.** La *pregavilla multiplicativa*  $\mathbb{G}_m$  en el sitio  $(\mathcal{C}/X)_E$  está dada por  $\mathbb{G}_m(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$ , el grupo de unidades del anillo  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ , y si  $f : U \rightarrow U'$  es un morfismo  $\mathbb{G}_m(f)$  es el morfismo multiplicativo  $\Gamma(U', \mathcal{O}_{U'})^* \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^*$  inducido por  $f$ .

**Ejemplo 8.** Si  $Z$  es un  $X$ -esquema, el funtor contravariante  $\text{Hom}_X(-, Z)$  es una pregavilla en  $X_E$ . En general, si  $\mathcal{A}$  es cualquier categoría y  $F : \mathcal{A} \rightarrow \text{Conj}$  es un funtor contravariante (o covariante), diremos que es  $F$  *representable* si existe un objeto  $B$  de  $\mathcal{A}$  tal que el funtor  $F$  es naturalmente equivalente al funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, B)$ . (En el caso covariante se debe tener que  $F$  es naturalmente equivalente al funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, -)$ ).

**Definición 2.4.** Una pregavilla  $P$  en  $X_E$  es una *gavilla* si satisface que:

- (1) Si  $s \in P(U)$  y existe una cubierta  $\{\varphi_i : U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  de  $U$  tal que  $\rho_{U_i}^U(s) = 0$  para cada  $i \in I$ , entonces  $s = 0$ . Aquí  $\rho_{U_i}^U = P(\varphi_i)$
- (2) Si  $\{\varphi_i : U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$  es una cubierta de  $U$  y se tiene una familia  $\{s_i\}$ ,  $s_i \in P(U_i)$  tal que  $\rho_{U_i \times_U U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \times_U U_j}^{U_j}(s_j)$  para todos los  $i, j \in I$ , entonces existe un  $s \in P(U)$  tal que  $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$  para cada  $i \in I$ .

Notemos que ésta es la definición usual de gavilla sólo reemplazando la intersección de abiertos con el producto fibrado de dos objetos de  $X_E$ .

La definición anterior de gavilla se puede expresar diciendo que el diagrama siguiente es exacto:

$$P(U) \rightarrow \prod P(U_i) \rightrightarrows \prod P(U_i \times_U U_j)$$

Es decir, el morfismo  $P(U) \rightarrow \prod P(U_i)$  es inyectivo y dado  $\{s_i\} \in \prod P(U_i \times_U U_j)$  que satisface que  $\rho_{U_i \times_U U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \times_U U_j}^{U_j}(s_j)$  existe un  $s \in \prod P(U_i)$  tal que  $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$ .

Otra manera de decir lo anterior es que el primer morfismo es el *igualador* de los otros dos morfismos.

Sean  $F$  y  $G$  gavillas en un sitio  $X_E$ ; un *morfismo de gavillas* es un morfismo de pregavillas entre las pregavillas  $F$  y  $G$ .

También es posible definir pregavillas y gavillas con valores en una categoría arbitraria  $\mathcal{C}$  sin embargo en lo que sigue, a menos que se especifique otra cosa, una pregavilla, o una gavilla, significa una pregavilla, o una gavilla, de grupos abelianos.

**Proposición 2.5.** *Supongamos que  $P$  es una pregavilla en  $X_{\text{ét}}$  y  $P$  satisface las condiciones siguientes:*

- (a) *la restricción de  $P$  a  $X_{\text{Zar}}$ , es gavilla.*
- (b) *Si  $W \rightarrow U$  es un cubriente étale, con  $W$  y  $U$  esquemas afines, entonces el siguiente diagrama es exacto:  $P(U) \rightarrow P(W) \rightrightarrows P(W \times_U W)$*

*Entonces  $P$  es una gavilla en  $X_{\text{ét}}$*

DEMOSTRACIÓN. Primero supongamos que  $W$  es un esquema de la forma  $W = \coprod W_i$ . Por tanto, tenemos morfismos  $\varphi_i : W_i \rightarrow W$  (inmersiones abiertas) en particular  $W = \bigcup \varphi_i(W_i)$  y como  $P$  es gavilla en el sitio de Zariski entonces

$$P(W) \rightarrow \prod P(W_i) \rightrightarrows \prod P(W_i \times_W W_j).$$

es exacta. Aquí se recuerda que  $W_i \times_W W_j = W_i \cap W_j$ . Si  $\{x_i\} \in \prod P(W_i)$  se verifica que:

$$\rho_{W_i \cap W_j}^{W_i}(x_i) = \rho_{W_i \cap W_j}^{W_j}(x_j).$$

puesto que si  $W_i \cap W_j = \emptyset$   $P(W_i \cap W_j) = \{0\}$  y si  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$  esto implica  $W_i = W_j = W_i \cap W_j$ , por que  $W$  es unión *disjunta* de los esquemas  $W_i$  y en este esquema  $W$  los  $W_i$  son ajenos por pares. Y como  $P$  es gavilla, en  $X_{\text{Zar}}$ , existe un único  $s \in P(W)$  con  $\rho_{W_i}^W(s) = x_i$ . De esta manera  $P(W) \cong \prod P(W_i)$ .

Ahora, considere un cubriente étale  $\{U_i \rightarrow U\}$  arbitrario. Si tenemos la sucesión

$$(3) \quad P(U) \rightarrow \prod P(U_i) \rightrightarrows \prod P(U_i \times_U U_j).$$

por lo anterior  $\prod P(U_i) = P(U' = \coprod U_i)$  y  $P(\prod(U_i \times_U U_j)) = \prod P(U_i \times_U U_j) = P(U' \times_U U')$ . Entonces (3) se transforma en:

$$P(U) \rightarrow P(U') \rightrightarrows P(U' \times_U U').$$

y debemos probar que la sucesión anterior es exacta.

Por otro lado, si tenemos un cubriente étale  $\{U_i \rightarrow U\}_{i \in I}$ , con  $I$  un conjunto finito, y cada  $U_i$  afín, por (b) se tiene que:

$$P(U) \rightarrow P(U') \rightrightarrows P(U' \times_U U').$$

es exacta, ya que  $U' = \coprod U_i$  es afín.

Sea  $f : \coprod U'_j \rightarrow U$ , donde  $\{U'_j \rightarrow U\}$  es un cubriente étale. Por propiedades de  $\coprod U'_j$  se tiene que  $f$  es suprayectiva. Escribiendo  $U$  como unión de abiertos afines  $U = \bigcup_i U_i$ , para cada  $i$ ,  $f^{-1}(U_i) = \bigcup U'_{i_k}$ , con cada  $U'_{i_k}$  un abierto afín y como  $f$  es suprayectiva, entonces  $U_i = \bigcup f(U'_{i_k})$  y cada  $f(U'_{i_k})$  es abierto en  $U_i$ , por la proposición 1.19.

Puesto que cada  $U_i$  es casi compacto, existe un conjunto finito de índices  $K_i$ , para cada  $i$ , tal que  $U_i = \bigcup_{k \in K_i} f(U'_{i_k})$ , es decir  $\{U'_{i_k} \rightarrow U_i\}_{k \in K_i}$  es un cubriente finito.

Observe entonces que  $U'_{i_k} \rightarrow U_i$  son los morfismos  $f|_{U'_{i_k}} : U'_{i_k} \rightarrow U_i$ , y notemos también que:

$$U' = \bigcup_{i, k \in K_i} U'_{i_k}.$$

Ahora, para cada  $i$ , por la hipótesis (b), la sucesión:

$$(4) \quad P(U_i) \rightarrow \prod_k P(U'_{i_k}) \rightrightarrows \prod_{k, l} P(U'_{i_k} \times_U U'_{j_l}).$$

es exacta, donde recordamos que el conjunto de índices  $K_i$  es finito y  $k, l \in K_i$ .

También, por la hipótesis (a), la sucesión siguiente es exacta:

$$(5) \quad P(U') \rightarrow \prod_{i, k} P(U'_{i_k}) \rightrightarrows \prod_{i, j, k, l} P(U'_{i_k} \cap U'_{j_l}).$$

Notemos que la condición para que  $P$  sea una gavilla, también se puede expresar diciendo que la sucesión siguiente es exacta:

$$0 \rightarrow P(X) \rightarrow \prod P(X_i) \rightarrow \prod P(X_i \times_X X_j).$$

donde  $\{X_i \rightarrow X\}$  es un cubriente y  $\prod P(X_i) \rightarrow \prod P(X_i \times_X X_j)$  es el morfismo  $\prod (P(\pi_{ij}^1) - P(\pi_{ij}^2))$ . Considere ahora el diagrama siguiente:



$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P(U) & \xrightarrow{\varphi} & P(U') & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & P(U' \times_U U') \\
& & \downarrow \psi & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 \\
0 & \longrightarrow & \prod P(U_i) & \xrightarrow{\phi} & \prod P(U'_{i_k}) & \xrightarrow{\phi_1} & \prod P(U'_{i_k} \times_U U'_{j_l}) \\
& & \downarrow \psi & & \downarrow \tilde{\psi}_1 & & \\
0 & \longrightarrow & \prod P(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\theta} & \prod P(U'_{i_k} \cap U'_{j_l}) & & 
\end{array}$$

Y observe que las columnas son exactas por (5), el renglón de enmedio es exacto, ya que es producto de sucesiones exactas de grupos abelianos, por (4), y todo el diagrama es conmutativo.

Ahora si  $\varphi(s) = \varphi(s')$  ésto implica que  $\psi_1(\varphi(s)) = \psi_1(\varphi(s'))$ , es decir,  $\phi(\psi(s)) = \phi(\psi(s'))$  y por la exactitud del renglón de enmedio  $\psi(s) = \psi(s')$  es decir  $s = s'$ , en particular esto prueba que  $\theta$  es inyectiva.

Sea  $s \in P(U')$  con  $\tilde{\varphi}(s) = 0$ ; de ésto se sigue que  $\psi_2(\tilde{\varphi}(s)) = 0$ , por lo que  $\phi_1(\psi_1(s)) = 0$  y así existe un  $\tilde{s} \in \prod P(U_i)$  con  $\phi(\tilde{s}) = \psi_1(s)$ . Esto implica que  $\tilde{\psi}_1(\phi(\tilde{s})) = \tilde{\psi}_1(\psi_1(s)) = 0$  y entonces se sigue que  $\theta(\tilde{\psi}(\tilde{s})) = 0$  por lo que  $\tilde{\psi}(\tilde{s}) = 0$ , y por lo tanto existe  $s' \in P(U)$  con  $\psi(s') = \tilde{s}$ . Entonces  $\phi(\psi(s')) = \phi(\tilde{s}) = \psi_1(\varphi(s')) = \psi_1(s)$ , es decir,  $s = \varphi(s')$ .  $\square$

Antes de ver ejemplos concretos de gavillas necesitaremos el lema y proposición siguientes, y para un resultado más completo véase [13] p. 16.

**Lema 2.6.** *Para todo morfismo fielmente plano  $\varphi : A \rightarrow B$ , la sucesión:*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B.$$

*es exacta, donde el morfismo  $\psi : B \rightarrow B \otimes_A B$  está dado por:  $b \mapsto 1 \otimes b - b \otimes 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. (1) El lema es cierto si  $\varphi : A \rightarrow B$  admite una sección, es decir, si existe un morfismo de anillos  $s : B \rightarrow A$  tal que  $s \circ \varphi = 1_A$ . Para probar esto, ponemos  $f : B \otimes_A B \rightarrow B$  dado en los generadores por  $b \otimes b' \mapsto b\varphi(s(b'))$ . Entonces  $f(1 \otimes b - b \otimes 1) = \varphi(s(b)) - b$ . Por lo tanto si  $1 \otimes b - b \otimes 1 = 0$ , se tiene que  $b = \varphi(s(b)) \in \varphi(A)$ , es decir,  $\ker(\psi) \subseteq \text{Im}(\varphi)$  y ciertamente  $\text{Im}(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ . Como  $\varphi$  tiene una sección entonces  $\varphi$  es inyectiva, lo cual junto con el razonamiento anterior muestra que la sucesión:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B.$$

es exacta.

(2) Si el lema es verdadero para el morfismo  $a' \mapsto a' \otimes 1 : A' \rightarrow A' \otimes_A B$ , donde  $A \rightarrow A'$  es algún morfismo fielmente plano, entonces es verdadero para

$\varphi : A \rightarrow B$ . Para ver esto, observe que si el lema es valido para  $A' \rightarrow A' \otimes_A B$  se tiene que

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A' \otimes_A B \rightarrow (A' \otimes_A B) \otimes_{A'} (A' \otimes_A B).$$

Ahora observemos que  $(A' \otimes_A B) \otimes_{A'} (A' \otimes_A B) \cong A' \otimes_A (B \otimes_A B)$  y como  $A' \rightarrow A$  es fielmente plano tenemos que la sucesión:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B.$$

es exacta.

(3) Observe ahora que el morfismo  $b \mapsto b \otimes 1 : B \rightarrow B \otimes_A B$  tiene una sección, a saber  $b \otimes b' \mapsto bb'$ .

Ahora como  $\varphi : A \rightarrow B$  es fielmente plano esto implica, por cambio de base, que  $\text{Spec}(B \otimes_A B) \rightarrow \text{Spec}(B)$  es fielmente plano, y por (1) y por (3) el lema es válido para  $\text{Spec}(B \otimes_A B) \rightarrow \text{Spec}(B)$  y por (2), utilizando el morfismo  $\varphi : A \rightarrow B$ , que es fielmente plano, se prueba que el lema es válido para  $\varphi : A \rightarrow B$ .  $\square$

**Proposición 2.7.** *Si  $F$  es una pregavilla en el sitio  $X_{\text{ét}}$  que es representable por un  $X$ -esquema afín  $Z$ , entonces  $F$  es gavilla.*

DEMOSTRACIÓN. Considere una pregavilla representable por un  $X$ -esquema afín  $Z = \text{Spec}(C)$ ; sean  $U, U_i \subseteq X$  abiertos con  $U = \bigcup U_i$ , y consideremos la sucesión:

$$\text{Hom}_X(U, Z) \rightarrow \prod \text{Hom}_X(U_i, Z) \rightrightarrows \prod \text{Hom}_X(U_i \cap U_j, Z).$$

donde los morfismos son  $\varphi \mapsto (\varphi|_{U_i}) : \text{Hom}_X(U, Z) \rightarrow \prod \text{Hom}_X(U_i, Z)$  y  $(\varphi_i) \mapsto (\varphi_i|_{U_i \cap U_j} - \varphi_j|_{U_i \cap U_j}) : \prod \text{Hom}_X(U_i, Z) \rightrightarrows \prod \text{Hom}_X(U_i \cap U_j)$ , respectivamente. Dado un morfismo  $\varphi : U \rightarrow Z$ , éste está determinado de modo único por sus restricciones  $\varphi|_{U_i} : U_i \rightarrow Z$ ; Ahora, dado un sistema de morfismos  $\varphi_i : U_i \rightarrow Z$  tales que  $\varphi_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_j|_{U_i \cap U_j}$ , existe un único morfismo  $\varphi : U \rightarrow Z$  tal que  $\varphi|_{U_i} = \varphi_i$ . Esto dice que la sucesión anterior es exacta y así se cumple la condición (1) de la proposición 2.5.

Para verificar la condición (2) de dicha proposición considere un cubriente étale  $\{Y' \rightarrow X'\}$  de esquemas afines, digamos que  $X' = \text{Spec}(A)$  y  $Y' = \text{Spec}(B)$  notando que este morfismo es fielmente plano. Por el lema 2.6 se tiene que la sucesión siguiente es exacta:

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B \otimes_A B.$$

por lo tanto la sucesión siguiente es exacta:

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(C, B) \rightarrow \text{Hom}(C, B \otimes_A B).$$

y recordando que  $\text{Hom}_A(B_1, B_2) \cong \text{Hom}_{\text{Esq}}(\text{Spec}(B_2), \text{Spec}(B_2))$  se obtiene que la sucesión:

$$\text{Hom}_X(X', Z) \rightarrow \text{Hom}_X(Y', Z) \rightrightarrows \text{Hom}_X(Y' \times_{X'} Y', Z).$$

es exacta, y ésto termina la demostración de la proposición.  $\square$

**Ejemplo 9.** Considere un esquema  $X$  y el sitio  $X_{\text{ét}}$ . Las pregavillas  $\mathbb{G}_a$  y  $\mathbb{G}_m$  son gavillas, puesto que ambas son representables. En efecto  $\mathbb{G}_a$  es representada por el esquema  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[t]) \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} X$ , ya que:

$$\mathbb{G}_a(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U) = \text{Hom}(\mathbb{Z}[t], \Gamma(U, \mathcal{O}_U)) = \text{Hom}_X(U, \text{Spec}(\mathbb{Z}[t]) \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} X).$$

y  $\mathbb{G}_m$  es representada por el esquema  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} X$ , ya que:

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_m(U) &= \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^* = \text{Hom}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}], \Gamma(U, \mathcal{O}_U)) \\ &= \text{Hom}_X(U, \text{Spec}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]) \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} X). \end{aligned}$$

y así por la proposición 2.7 las pregavillas anteriores son gavillas.

**Esquemas en grupos.** Tanto  $\mathbb{G}_a$  como  $\mathbb{G}_m$  son ejemplos de gavillas definidas por esquemas en grupos conmutativos. Recordemos que si un funtor contravariante  $F : X_{\text{ét}} \rightarrow \text{Grp}$ , donde  $\text{Grp}$  es la categoría de grupos, es *representable* por un esquema  $G \in \text{Esq}/X$ , decimos que  $G$  es un *esquema en grupos* (y algunas veces, por abuso de lenguaje, decimos que el funtor  $F$  es un esquema en grupos). Así, por definición, se tiene una equivalencia natural  $F \simeq \text{Hom}_{X_{\text{ét}}}(-, G)$ , es decir, para todo  $Y \in X_{\text{ét}}$ , se tiene que  $F(Y) \simeq \text{Hom}_{X_{\text{ét}}}(Y, G)$  y para cada morfismo  $f : Y' \rightarrow Y$  en  $X_{\text{ét}}$  se tiene que  $F(f) : F(Y) \rightarrow F(Y')$  es un homomorfismo de grupos tal que el diagrama siguiente conmuta, donde para abreviar la notación ponemos  $h_G := \text{Hom}_{X_{\text{ét}}}(-, G)$ :

$$\begin{array}{ccc} F(Y) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y') \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ h_G(Y) & \xrightarrow{f^*} & h_G(Y') \end{array}$$

Entonces, como para cada  $Y \in X_{\text{ét}}$ ,  $h_G(Y)$  es un grupo, denotemos su operación mediante  $\mu_Y : h_G(Y) \times h_G(Y) \rightarrow h_G(Y)$  y observemos que para cualquier  $X$ -morfismo  $f : Y' \rightarrow Y$ , los cuadrados siguientes conmutan

$$\begin{array}{ccc} h_G(Y) \times h_G(Y) & \xrightarrow{\mu_Y} & h_G(Y) \\ f^* \times f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ h_G(Y') \times h_G(Y') & \xrightarrow{\mu_{Y'}} & h_G(Y') \end{array}$$

por lo que las operaciones  $\mu_Y$  definen una transformación natural

$$\mu : h_G \times h_G \rightarrow h_G.$$

que, por el lema de Yoneda, corresponde a un  $X$ -morfismo  $\mu : G \times_X G \rightarrow G$  que hace de  $G$  un  $X$ -esquema en grupos. (No está de más recordar que la categoría  $X_{\text{ét}}$  tiene productos directos finitos dados por los productos fibrados y que  $X$  es un objeto final en esta categoría).

Recíprocamente, si  $G = (G, \mu, \varepsilon, \iota)$  es un objeto grupo en la categoría  $\text{Esq}/X$ , recordemos que se tienen los morfismos

$$\mu : G \times G \rightarrow G \text{ (multiplicación), } \varepsilon : X \rightarrow G \text{ (neutro), } \iota : G \rightarrow G \text{ (inverso),}$$

tales que los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times \text{id}_G} & G \times G & & G & \xrightarrow{(p, \text{id}_G)} & X \times G & \xrightarrow{\varepsilon \times \text{id}_G} & G \times G & & G & \xrightarrow{(\iota, \text{id}_G)} & G \times G \\
 \text{id}_G \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu & & \downarrow \text{id}_G & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & p \downarrow & & \downarrow \mu \\
 G \times G & \xrightarrow{\mu} & G & & G & & G & & G & & X & \xrightarrow{\varepsilon} & G
 \end{array}$$

que corresponden, respectivamente, a la asociatividad de la multiplicación, la existencia de neutro por la izquierda y la existencia de inversos izquierdos. Aquí  $p : G \rightarrow X$  es el único morfismo al objeto terminal  $X$ .

Ahora, para el morfismo  $\mu : G \times G \rightarrow G$  y para cada  $T \in X_{\text{ét}}$ , por el lema de Yoneda se tiene asociada una aplicación

$$h_G(T) \times h_G(T) \simeq h_G(T, G \times G) \xrightarrow{\mu^T} h_G(T).$$

y, similarmente, el morfismo  $\varepsilon : X \rightarrow G$  induce

$$h_G(X) \xrightarrow{\varepsilon^T} h_G(T).$$

y lo mismo para el morfismo de inversión  $\iota$ , de tal forma que se verifica fácilmente que, para cada  $T \in X_{\text{ét}}$ ,  $h_G(T) = (h_G(T), \mu_T, \varepsilon_T, \iota_T)$  es un grupo, en el sentido usual, por lo que el funtor contravariante  $h_G$  tiene codominio  $\text{Grp}$ , es decir,

$$h_G = \text{Hom}_{X_{\text{ét}}}(-, G) : \text{Esq}/X \rightarrow \text{Grp}.$$

En resumen, hemos mostrado que un objeto grupo  $G$  en  $\text{Esq}/X$  corresponde a un funtor contravariante  $h_G : X_{\text{ét}} \rightarrow \text{Grp}$ , en particular, si  $G$  es conmutativo, entonces  $h_G : X_{\text{ét}} \rightarrow \text{Ab}$ , es una pregavilla de grupos abelianos. Nótese que en el sitio étale toda pregavilla representable, en particular un esquema en grupos, es ya una gavilla, esto se sigue de la proposición 2.7.

La categoría de pregavillas sobre un sitio  $X_E$  la denotaremos por  $P(X_E)$  y la categoría de gavillas en  $X_E$  se denota por  $G(X_E)$ . Sea  $\pi : X'_{E'} \rightarrow X_E$  continuo. Dada una pregavilla  $P'$  en  $X'_{E'}$  le asociamos la pregavilla  $\pi_p(P') = P' \circ \pi^\bullet$ . De este modo tenemos un funtor, inducido por  $\pi_p$ , llamado el funtor *imagen directa*  $\pi_p : P(X'_{E'}) \rightarrow P(X_E)$ .

Considere un morfismo de esquemas  $\pi : Y \rightarrow X$ , y el morfismo de sitios correspondiente  $\pi^\bullet : X_{\text{ét}} \rightarrow Y_{\text{ét}}$ , como en la definición 2.2.

**Lema 2.8.** *Si  $F$  es una gavilla en  $Y_{\text{ét}}$  entonces  $\pi_p(F)$  es una gavilla en  $X_{\text{ét}}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\{U_i \rightarrow U\}$  un cubriente en  $X_{\text{ét}}$ . Entonces por el lema 2.3 se tiene que  $\{\pi^\bullet(U_i) \rightarrow \pi^\bullet(U)\}$  es un cubriente en  $Y_{\text{ét}}$ ; por lo tanto la sucesión siguiente es exacta:

$$F(\pi^\bullet(U)) \rightarrow \prod F(\pi^\bullet(U_i)) \rightrightarrows \prod F(\pi^\bullet(U_i) \times_Y \pi^\bullet(U_j)).$$

pero como  $\pi^\bullet(U_i) \times_Y \pi^\bullet(U_j) = \pi^\bullet(U_i \times_X U_j)$ ; entonces la sucesión siguiente es exacta:

$$(\pi_p(F))(U) \rightarrow \prod (\pi_p(F))(U_i) \rightrightarrows \prod (\pi_p(F))(U_i \times_X U_j).$$

□

El funtor *imagen inversa*  $\pi^p : P(X_E) \rightarrow P(X'_{E'})$  se define como el adjunto izquierdo de  $\pi_p$ , es decir,  $\pi^p$  verifica que

$$\mathrm{Hom}_{P(X')}(\pi^p P, P') \cong \mathrm{Hom}_{P(X)}(P, \pi_p P').$$

funtorialmente en  $P$  y  $P'$ . Para demostrar que tal funtor adjunto izquierdo existe véase el apéndice A.5.

Otra situación que nos interesa considerar es la siguiente: considere un esquema  $X$  y una inmersión abierta  $j : U \hookrightarrow X$ ; si  $P$  es una pregavilla en  $U_{\acute{e}t}$  y  $Q$  es una pregavilla en  $X_{\acute{e}t}$ ; existe una pregavilla  $P!$ , ver apéndice A.6, tal que:

$$\mathrm{Hom}_{X_{\acute{e}t}}(P!, Q) \cong \mathrm{Hom}_{U_{\acute{e}t}}(P, j^p Q).$$

funtorialmente.

**Definición 2.9.** Sea  $X$  un esquema y  $u : \bar{x} \rightarrow X$  un punto geométrico de  $X$ . Si  $P$  es una pregavilla en  $X_{\acute{e}t}$  la *fibra* de  $P$  en  $\bar{x}$ , que denotamos por  $P_{\bar{x}}$ , es el grupo abeliano  $(u_{\bar{x}}^p P)(\bar{x})$ .

**Comentario 2.10.** Se puede demostrar, véase el apéndice A.5, que  $P_{\bar{x}} = \varinjlim P(U)$  donde el límite corre sobre todos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} U & \longleftarrow & \bar{x} \\ \downarrow & \swarrow & \searrow \\ & & X \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ u_x \end{array}$$

con  $U$  étale sobre  $X$ , es decir, sobre todas las vecindades étales de  $\bar{x}$  en  $X$ .

### 2.3. La gavilla asociada a una pregavilla

Dada una pregavilla  $P$ , le podemos asociar una gavilla,  $aP$ , llamada la *gavilla asociada* a la pregavilla  $P$ . Para obtener tal gavilla necesitaremos algunos resultados preliminares.

**Lema 2.11.** *Sea  $F$  una gavilla en  $X_{\acute{e}t}$ . Si  $s \in F(U)$  cumple que  $s \neq 0$ , entonces existe un  $x \in X$  y un punto  $\bar{x}$  de  $U$  tal que  $s_{\bar{x}} \neq 0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Se probará la afirmación equivalente: si para todo punto  $\bar{x}$  de  $U$   $s_{\bar{x}} = 0$  entonces  $s = 0$ .

Sean  $\varphi : U \rightarrow X$  étale y  $u \in U$ . El morfismo  $\varphi^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_U$  induce un morfismo de campos  $k(\varphi(u)) \rightarrow k(u)$ . Por otra parte tenemos el morfismo canónico  $\mathrm{Spec}(k(u)) \rightarrow U$  y componiendo con  $\varphi$  se tiene un morfismo,  $\mathrm{Spec}(k(u)) \rightarrow X$ , y utilizando un resultado de [6] p. 102, 103, este morfismo es igual a:

$$\mathrm{Spec}(k(u)) \rightarrow \mathrm{Spec}(k(\varphi(u))) \rightarrow X.$$

Si se escoge un campo  $k$  separablemente cerrado que contenga a  $k(u)$ , entonces cada  $u \in U$  es la imagen de un punto geométrico  $\bar{x}$  de  $U$ , donde  $x = \varphi(u)$ .

Entonces, para cada  $u \in U$  se tiene que  $s_{\bar{x}} = 0$  y por lo tanto existe  $W_u \rightarrow X$ , étale, tal que  $u \in \varphi(W_u)$  y  $\rho_{W_u}^U(s) = 0$ . La familia  $\{W_u \rightarrow U\}_{u \in U}$  es un cubriente y como  $F$  es gavilla esto implica que  $s = 0$ .  $\square$

**Definición 2.12.** Sea  $F$  una gavilla (o pregavilla) en  $X_E$ , una *subpregavilla* de  $F$ , es una pregavilla,  $F_0$  en  $X_E$ , tal que para cada  $U \in X_E$   $F_0(U)$  es un subgrupo de  $F(U)$  y si  $h : W \rightarrow U$  es un morfismo en  $X_E$ , el morfismo  $F_0(h) : F_0(U) \rightarrow F_0(W)$  es la restricción del morfismo  $F(h) : F(U) \rightarrow F(W)$ , es decir si  $s \in F_0(U)$  entonces  $F_0(h)(s) = F(h)(s) \in F_0(W)$ . Una *subgavilla* de una gavilla  $F$ , es una subpregavilla de  $F$  que es gavilla.

**Ejemplo 10.** Si  $\psi : P \rightarrow F$  es un morfismo de pregavillas, con  $P$  pregavilla y  $F$  una gavilla, entonces  $\text{im}(\psi)$  es una subpregavilla de  $F$ .

**Ejemplo 11.** Si  $\psi : P \rightarrow F$  es un morfismo de pregavillas, con  $P$  pregavilla y  $F$  una gavilla, entonces  $\text{ker}(\psi)$  es una subpregavilla de  $P$ .

**Definición 2.13.** Si  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia de gavillas en  $X_E$ ,  $\prod F_\alpha$  es la pregavilla siguiente: si  $U \in X_E$  se tiene que  $\prod F_\alpha(U) = \prod F_\alpha(U)$  y, dado un morfismo  $\varphi : W \rightarrow U$  en  $X_E$  el morfismo  $(\prod F_\alpha)(\varphi) : \prod F_\alpha(U) \rightarrow \prod F_\alpha(W)$  se define por:

$$(\prod F_\alpha)(\varphi) = \prod F_\alpha(\varphi)$$

**Lema 2.14.** Sea  $X_E$  un sitio. Si  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una familia de gavillas en  $X_E$ , entonces  $\prod F_\alpha$  es una gavilla.

DEMOSTRACIÓN. Sean  $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$  un cubriente y  $s, t$  secciones de  $(\prod F_\alpha)(U)$  tales que para cada  $i$ :

$$(6) \quad \rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(t).$$

Ya que  $s = (s_\alpha)$  y  $t = (t_\alpha)$ , de la igualdad (6) vemos que, fijado  $\alpha$ ,  $F_\alpha(\varphi_i)(s_\alpha) = F_\alpha(\varphi_i)(t_\alpha)$  para cada  $i$ , lo cual implica que  $s_\alpha = t_\alpha$ , por ser  $F_\alpha$  gavilla, por lo que  $s = t$ .

Ahora, supongamos que, para cada  $i$ , se tiene una familia de  $s_i \in (\prod F_\alpha)(U_i)$  que satisface:

$$(7) \quad \rho_{U_i \times_U U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \times_U U_j}^{U_j}(s_j).$$

Considere entonces los productos fibrados siguientes:

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_U U_j & \xrightarrow{\pi_{ij}^2} & U_j \\ \pi_{ij}^1 \downarrow & & \downarrow \varphi_j \\ U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & U \end{array}$$

Fijando  $\alpha$  y recordando que  $s_i = (s_{\alpha,i})$ , de la igualdad (7) se obtiene que:

$$F_\alpha(\pi_{ij}^1)(s_{\alpha,i}) = F_\alpha(\pi_{ij}^2)(s_{\alpha,j}).$$

para cada par de índices  $i, j$ . Como  $F_\alpha$  es gavilla, existe un  $s_\alpha$ , en  $F_\alpha(U)$ , con  $F_\alpha(\varphi_i)(s_\alpha) = s_{\alpha,i}$  para cada  $i$ , por lo tanto  $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$  para cada  $i$ , y por lo tanto  $\coprod F_\alpha$  es gavilla.  $\square$

**Definición 2.15.** Sea  $X$  un esquema y considere el sitio  $X_{\text{ét}}$ . Un morfismo de gavillas (o pregavillas)  $\alpha : F \rightarrow F'$  se dice que es *localmente suprayectivo* si para todo  $U \in X_{\text{ét}}$  y  $s \in F'(U)$ , existe un cubriente  $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$  tal que  $F'(\varphi_i)(s)$  está en la imagen de  $F(U_i) \rightarrow F'(U_i)$ .

Si  $P$  es una pregavilla, dos secciones  $s_1, s_2 \in P(U)$  se dice que son *localmente iguales* si existe un cubriente  $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$  tal que  $\rho_{U_i}^U(s_1) = \rho_{U_i}^U(s_2)$ .

**Lema 2.16.** Sea  $X$  un esquema y considere el sitio  $X_{\text{ét}}$ . Sea  $i : P \rightarrow F$  un morfismo de pregavillas, con  $P$  pregavilla y  $F$  gavilla, supóngase que:

- (a) Las únicas secciones de  $P(U)$  cuyas imágenes están en  $F(U)$  son las localmente iguales.
- (b)  $i$  es localmente suprayectivo.

Entonces el par  $(F, i)$  cumple la propiedad siguiente:

Si  $i' : P \rightarrow F'$  es un morfismo de pregavillas, con  $F'$  gavilla, existe un único morfismo de gavillas  $\alpha : F \rightarrow F'$  tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i} & F \\ i' \downarrow & \swarrow \alpha & \\ F' & & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $i' : P \rightarrow F'$  un morfismo de pregavillas, con  $F'$  gavilla; sean  $U \in X_{\text{ét}}$  y  $s \in F'(U)$ . Por (b) existe un cubriente  $\{U_j \xrightarrow{\varphi_j} U\}_{j \in I}$  tal que  $F'(\varphi_j)(s)$  está en la imagen del morfismo  $P(U_j) \rightarrow F'(U_j)$  y por lo tanto existen  $s_j \in P(U_j)$  tales que  $i'_{U_j}(s_j) = F'(\varphi_j)(s)$  para todo  $j$ .

Si existieran otros elementos  $s'_j \in P(U_j)$  con  $i'_{U_j}(s'_j) = F'(\varphi_j)(s)$ , por (a) para cada  $U_j$  existe un cubriente  $\{U_{jl} \xrightarrow{\varphi_{jl}} U_j\}_{l \in I_j}$  tal que  $P(\varphi_{jl})(s_j) = P(\varphi_{jl})(s'_j)$  para todo  $l$ . De esta manera obtenemos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} P(U) & \xrightarrow{i'_U} & F'(U) \\ P(\varphi_j) \downarrow & & \downarrow F'(\varphi_j) \\ P(U_j) & \xrightarrow{i'_{U_j}} & F'(U_j) \\ P(\varphi_{jl}) \downarrow & & \downarrow F'(\varphi_{jl}) \\ P(U_{jl}) & \xrightarrow{i'_{U_{jl}}} & F'(U_{jl}) \end{array}$$

Por lo tanto  $F'(\varphi_{jl})(i'_{U_{jl}}(s_j)) = F'(\varphi_{jl})(i'_{U_{jl}}(s'_j))$  para todo  $l$  y como  $F'$  es una gavilla, y  $j$  es arbitrario, se sigue que  $(i'_{U_j}(s_j)) = (i'_{U_j}(s'_j))$  para todo  $j$ . Además

para  $j$  y  $l$  tenemos que las restricciones de  $i'_{U_j}(s_j)$  y  $i'_{U_l}(s_l)$  en  $F'(U_j \times_U U_l)$  son iguales; para ver esto considere el producto fibrado siguiente:

$$\begin{array}{ccc} U_j \times_U U_l & \xrightarrow{\pi_{jl}^2} & U_l \\ \pi_{jl}^1 \downarrow & & \downarrow \varphi_l \\ U_j & \xrightarrow{\varphi_j} & U \end{array}$$

De la condición  $i_{U_j}(s_j) = F(\varphi_j)(s)$  obtenemos que:

$$F(\pi_{jl}^1)i_{U_j}(s_j) = F(\pi_{jl}^1)F(\varphi_j)(s).$$

$$F(\pi_{jl}^2)i_{U_l}(s_l) = F(\pi_{jl}^2)F(\varphi_l)(s).$$

Por (a) existe un cubriente  $\{W_m \xrightarrow{\psi_m} U_j \times_U U_l\}$  tal que

$$P(\psi_m)P(\pi_{jl}^1)(s_j) = P(\psi_m)P(\pi_{jl}^2)(s_l).$$

y consecuentemente  $F'(\psi_m)F'(\pi_{jl}^1)(i'_{U_j}(s_j)) = F'(\psi_m)F'(\pi_{jl}^2)(i'_{U_l}(s_l))$ . Puesto que  $F'$  es gavilla entonces  $F'(\pi_{jl}^1)(i'_{U_j}(s_j)) = F'(\pi_{jl}^2)(i'_{U_l}(s_l))$  y por lo tanto existe un único  $\tilde{s} \in F'(U)$  tal que  $F'(\varphi_j)(\tilde{s}) = i'_{U_j}(s_j)$  para todo  $j$ .

Lo anterior permite definir un morfismo de gavillas  $\alpha : F \rightarrow F'$  de la manera siguiente: sea  $U \in X_{\text{ét}}$ ; dado  $s \in F(U)$  existe un cubriente  $\{U_j \xrightarrow{\varphi_j} U\}_{j \in I}$  y  $s_j \in P(U_j)$  tal que  $i_{U_j}(s_j) = F(\varphi_j)(s)$ . Por lo tanto existe un único  $\alpha_U(s) \in F'(U)$  tal que  $F'(\varphi_j)(\alpha_U(s)) = i'_{U_j}(s_j)$  para todo  $j$ .

De la descripción de  $\alpha$  se infiere que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i} & F \\ i' \downarrow & \swarrow \alpha & \\ F' & & \end{array}$$

Si existiera otro morfismo  $\alpha' : F \rightarrow F'$  que hace conmutar el diagrama anterior, sean  $U \in X_{\text{ét}}$  y  $s \in F(U)$ . Existe un cubriente  $\{U_j \xrightarrow{\varphi_j} U\}_{j \in I}$  y  $s_j \in P(U_j)$  tal que  $i_{U_j}(s_j) = F(\varphi_j)(s)$  y por lo tanto, existe un único  $\alpha_U(s) \in F'(U)$  tal que  $\rho_{U_j}^U(\alpha_U(s)) = i'_{U_j}(s_j)$  para todo  $j$ . Por lo tanto  $F'(\varphi_i)\alpha'_U(s) = F'(\varphi_i)\alpha_U(s)$  y como  $F'$  es gavilla entonces  $\alpha'_U(s) = \alpha_U(s)$ ; y como esto es válido para todo  $U \in X_{\text{ét}}$  y  $s \in F(U)$  se tiene que  $\alpha = \alpha'$ .  $\square$

**Lema 2.17.** *Sea  $P$  una subpregavilla de la gavilla  $F$ . Para cada  $U \in X_{\text{ét}}$ , sea  $P'(U)$  el conjunto formado por los  $s \in F(U)$  tales que existe un cubriente  $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$  tal que  $F(\varphi_i)(s) \in P(U_i)$  para cada  $i$ . Entonces  $P'$  es una subgavilla de  $F$  y  $P \rightarrow P'$  es un morfismo localmente suprayectivo. Decimos que  $P'$  es la subgavilla de  $F$  generada por  $P$ .*



DEMOSTRACIÓN. Sea  $\varphi : U' \rightarrow U$  un morfismo en  $X_{\text{ét}}$  y defina  $P'(\varphi) : P'(U) \rightarrow P'(U')$  de la manera siguiente: si  $s \in P'(U)$  ponemos  $P'(\varphi)(s) = F(\varphi)(s)$ . Observe que si  $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$  es un cubriente de  $U$ , entonces  $\{U_i \times_U U' \xrightarrow{\varphi_i} U'\}_{i \in I}$  es un cubriente de  $U'$ ; se sigue que  $P'$  es una subpregavilla de  $F$ .

Ahora se define  $\psi : P \rightarrow P'$  como sigue: si  $U \in X_{\text{ét}}$ , entonces  $\psi_U : P(U) \rightarrow P'(U)$  es el morfismo  $\psi_U(s) = s$ , para todo  $s \in P(U)$ . Si  $s \in P'(U)$  existe un cubriente  $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$  tal que  $F(\varphi_i)(s) \in P(U_i)$  y, ciertamente,  $P'(\varphi_i)(s)$  está en la imagen de  $P(U_i) \rightarrow P'(U_i)$ . Por lo tanto  $\psi : P \rightarrow P'$  es localmente suprayectiva.

Finalmente, sea  $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$  un cubriente y considere la sucesión:

$$P'(U) \rightarrow \prod P'(U_i) \rightrightarrows \prod P'(U_i \times_U U_j).$$

Si  $s \in P'(U)$  satisface que  $P'(\varphi_i)(s) = 0$  para cada  $i$ , entonces  $s = 0$  puesto que  $F$  es gavilla. Sea  $(s_i) \in \prod P'(U_i)$  y considere el producto fibrado siguiente:

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_U U_j & \xrightarrow{\pi_{ij}^2} & U_j \\ \pi_{ij}^1 \downarrow & & \downarrow \varphi_j \\ U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & U \end{array}$$

Si  $(s_i)$  satisface que  $P'(\pi_{jl}^1)(s_i) = P'(\pi_{jl}^2)(s_j)$  para cada par de índices  $i, j$ , entonces existe un  $s \in F(U)$  tal que  $F(\varphi_i)(s) = s_i$  por que  $F$  es gavilla. Se sigue que  $P'$  es una gavilla.  $\square$

El resultado principal en este contexto es:

**Teorema 2.18.** *Para cualquier pregavilla  $P$  en  $X_{\text{ét}}$ , existe una gavilla  $aP$ , en  $X_{\text{ét}}$ , y un morfismo de pregavillas  $\phi : P \rightarrow aP$  tal que si  $\phi' : P \rightarrow F$  es un morfismo de pregavillas, con  $F$  gavilla, entonces existe un único morfismo de gavillas  $\psi : aP \rightarrow F$  tal que el diagrama siguiente conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & aP \\ \phi' \downarrow & \swarrow \psi & \\ F & & \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Considere primero el caso cuando  $X = \text{Spec}(k)$ , con  $k$  un campo separablemente cerrado. Si  $U$  es un esquema étale sobre  $X$ , entonces por el ejemplo 2 se tiene que  $U = \bigsqcup_{i=1}^r \text{Spec}(k_i)$ , donde cada extensión  $k_i/k$  es finita y separable y, puesto que  $k$  es separablemente cerrado, se tiene que  $k_i = k$ ; por lo tanto  $U = \bigsqcup_{i=1}^r X_i$ , con  $X_i = X$  para  $i = 1, \dots, n$ .

La gavilla asociada,  $aP$ , a la pregavilla  $P$  está definida como sigue: dado  $U \in X_{\acute{e}t}$  ponemos

$$U \mapsto \prod_{i=1}^r P(X_i) = P(X)^r.$$

y  $\phi_U$  es el morfismo  $P(U) \rightarrow \prod_{i=1}^r P(X_i)$  siguiente: tenemos una inclusión natural  $\psi_i : X_i \hookrightarrow U$  y si  $s \in P(U)$  ponemos  $\phi_U(s) = (P(\psi_i)(s))$ .

Ahora, considere un esquema  $X$ , arbitrario. Para cada  $x \in X$  sea  $u_x : \bar{x} \rightarrow X$  un punto geométrico de  $X$ , y considere el isomorfismo de adjunción:

$$(8) \quad \text{Hom}(u_x^p P, P') \cong \text{Hom}(P, (u_x)_p P').$$

Considere ahora la pregavilla  $u_x^p(P)$  en  $\bar{x}_{\acute{e}t}$ . Aplicando la construcción anterior se obtiene una gavilla  $a(u_x^p(P))$  junto con un morfismo

$$(9) \quad u_x^p(P) \rightarrow a(u_x^p(P)).$$

Por el lema 2.8 se sigue que  $(u_x)_p P_{\bar{x}}^*$ , donde  $P_{\bar{x}}^* = a(u_x^p P)$ , es una gavilla, y por el lema 2.14,  $P^* = \prod_{x \in X} (u_x)_p P_{\bar{x}}^*$  es una gavilla en  $X_{\acute{e}t}$ .

De (8), con  $P' = u_x^p P$ , se obtiene que

$$\text{Hom}(u_x^p P, u_x^p P) \cong \text{Hom}(P, (u_x)_p (u_x^p P)).$$

en particular, para el morfismo identidad  $u_x^p(P) \rightarrow u_x^p(P)$  se obtiene un único morfismo  $P \rightarrow (u_x)_p (u_x^p P)$ , y de (9) se obtiene  $(u_x)_p (u_x^p(P)) \rightarrow (u_x)_p P_{\bar{x}}^*$ . De esta manera tenemos el morfismo

$$P \rightarrow (u_x)_p (u_x^p P) \rightarrow (u_x)_p P_{\bar{x}}^*.$$

que denotaremos por  $\varphi_x$ . Definimos  $\phi : P \rightarrow P^*$  como sigue:

$$\phi_U = \prod \varphi_{xU}.$$

Considere ahora la pregavilla  $\text{im}(\phi)$ , que es una subpregavilla de  $P^*$ . Aplicamos el lema 2.17 a  $\text{im}(\phi)$  y obtenemos la gavilla  $aP = \text{im}(\phi)'$ , que por el lema 2.11 cumple la condición (a) del lema 2.16; por lo tanto aplicando este último lema termina la demostración.  $\square$

**Comentario 2.19.** El teorema 2.18 puede parafrasearse como sigue: el functor de inclusión  $i : G(X_{\acute{e}t}) \rightarrow P(X_{\acute{e}t})$  tiene un functor adjunto izquierdo  $a : P(X_{\acute{e}t}) \rightarrow G(X_{\acute{e}t})$ . Es decir tenemos un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{G(X_{\acute{e}t})}(aP, F) \cong \text{Hom}_{P(X_{\acute{e}t})}(P, iF).$$

**Lema 2.20.** Si  $\psi : F \rightarrow F'$  es un morfismo de gavillas, entonces  $\ker(\psi)$  es una gavilla.

DEMOSTRACIÓN. Considere un cubriente  $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i \in I}$  y la sucesión siguiente:

$$\ker(\psi)(U) \rightarrow \prod \ker(\psi)(U_i) \rightrightarrows \prod \ker(\psi)(U_i \times_U U_j).$$

Dado un  $s \in \ker(\psi)(U)$  tal que  $\ker(\psi)(\varphi_i)(s) = 0$  para cada  $i$ , como estos morfismos de restricción son de la forma  $F(\varphi_i)$  y puesto que  $F$  es gavilla, se sigue que  $s = 0$ .

Ahora sea  $(s_i) \in \prod \ker(\psi)(U_i)$  tal que  $\ker(\psi)(\pi_{ij}^1(s_i)) = \ker(\psi)(\pi_{ij}^2(s_j))$ . Entonces, como  $F$  es gavilla, existe un  $s \in F(U)$  tal que  $F(\varphi_i)(s) = s_i$  para cada  $i$ ; ahora  $F'(\varphi_i)\psi_U(s) = \psi_{U_i}F(\varphi_i)(s) = 0$ , puesto que  $F'$  es gavilla. Se sigue que  $\psi_U(s) = 0$ .  $\square$

El teorema siguiente muestra que la categoría de gavillas de grupos abelianos en el sitio  $X_{\text{ét}}$ , es una categoría abeliana.

**Teorema 2.21.** (a) *El functor inclusión  $G(X_{\text{ét}}) \rightarrow P(X_{\text{ét}})$  es exacto izquierdo y preserva límites inversos. El functor  $a : P(X_{\text{ét}}) \rightarrow G(X_{\text{ét}})$  es exacto y preserva límites directos.*

(b) *Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- (i)  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F''$  es exacta en  $G(X_{\text{ét}})$ .
- (ii)  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F''$  es exacta en  $P(X_{\text{ét}})$ .
- (iii)  $0 \rightarrow F'(U) \rightarrow F(U) \rightarrow F''(U)$  es exacta para todo  $U$  en  $X_{\text{ét}}$ .
- (iv)  $0 \rightarrow F'_{\bar{x}} \rightarrow F_{\bar{x}} \rightarrow F''_{\bar{x}}$  es exacta para todo punto geométrico  $\bar{x} \rightarrow X$ .

(c)  $\phi : F \rightarrow F'$  es suprayectiva en  $G(X_{\text{ét}})$  si y sólo si para cada  $U \in X_{\text{ét}}$  y cada  $s \in F'(U)$ , existe un cubriente  $\{U_i \rightarrow U\}$  de  $U$  y elementos  $s_i \in F(U_i)$  tales que  $\phi(s_i) = \rho_{U_i}^U(s)$  para cada  $i$ . Esto es equivalente a que  $F_{\bar{x}} \rightarrow F'_{\bar{x}}$  sea suprayectiva para todo  $\bar{x}$ .

(d)  $G(X_{\text{ét}})$  es una categoría abeliana.

DEMOSTRACIÓN. (a) Sólo se probará la exactitud izquierda del functor  $a$ . Sea  $P \rightarrow P'$  un monomorfismo. Utilizando la notación del teorema 2.18 se tiene que  $P^* \rightarrow P'^*$  es inyectivo en  $P(X_{\text{ét}})$ , puesto que  $u_x^P$  es exacto y  $aP$  y  $aP'$  son subgavillas de  $P^*$  y  $P'^*$ , respectivamente. Así  $aP \rightarrow aP'$  es inyectiva en  $P(X_{\text{ét}})$ . Sea  $F$  el núcleo de  $aP \rightarrow aP'$  en  $G(X_{\text{ét}})$ . Como el functor de inclusión  $G(X_{\text{ét}}) \rightarrow P(X_{\text{ét}})$  es exacto izquierdo entonces  $F = 0$  y así,  $aP \rightarrow aP'$  es inyectiva en  $G(X_{\text{ét}})$ .

(b) Ahora, por (a), (i) es equivalente a (ii), de manera directa (ii) es equivalente a (iii) y, ciertamente, (iii) implica (iv), por lo que falta probar es que (iv) implica (iii).

Sea  $U \in X_{\text{ét}}$  y considere la sucesión

$$0 \longrightarrow F'(U) \xrightarrow{\varphi_U} F(U) \xrightarrow{\psi_U} F''(U).$$

Para cada punto geométrico  $\bar{u}$  de  $U$  se tienen los diagramas conmutativos siguientes:

$$(10) \quad \begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\rho_U} & F_{\bar{u}} \\ \varphi_U \uparrow & & \uparrow \varphi_{\bar{u}} \\ F'(U) & \xrightarrow{\rho'_U} & F'_{\bar{u}} \end{array}$$

$$(11) \quad \begin{array}{ccc} F''(U) & \xrightarrow{\rho_U''} & F''_{\bar{u}} \\ \psi_U \uparrow & & \uparrow \psi_{\bar{u}} \\ F(U) & \xrightarrow{\rho_U} & F_{\bar{u}} \end{array}$$

Si  $s' \in F'(U)$  satisface que  $\varphi_U(s') = 0$ , entonces, para cada punto geométrico,  $\bar{u}$ , de  $U$  se tiene que  $\varphi_{\bar{u}}(s'_{\bar{u}}) = 0$  y, como  $\varphi_{\bar{u}}$  es inyectiva, entonces  $s'_{\bar{u}} = 0$ , y así por el lema 2.11 se tiene que  $s' = 0$ , es decir,  $\varphi_U$  es inyectiva.

Ahora, considere  $s' \in F'(U)$ . De los diagramas conmutativos (10) y (11) se tiene que para cada punto geométrico,  $\bar{u}$ , de  $U$ ,  $\psi_{\bar{u}}(\varphi_{\bar{u}}(s'_{\bar{u}})) = \psi_{\bar{u}}(\rho_U(\varphi_U(s'))) = \rho_U''(\psi_U(\varphi_U(s'))) = 0$ . Finalmente aplicando el lema 2.11 a  $\psi_U(\varphi_U(s'))$  se obtiene que  $\psi_U(\varphi_U(s')) = 0$ .

Si  $s \in F(U)$  satisface que  $\psi_U(s) = 0$ , considere  $u \in U$  y un punto geométrico  $\bar{u}$ , de  $U$ , cuya imagen es  $u$ . Utilizando (11) vemos que  $\psi_{\bar{u}}(\rho_U(s)) = \psi_{\bar{u}}(s_{\bar{u}}) = 0$ , y por lo tanto existe un  $t'_{\bar{u}} \in F'_{\bar{u}}$ , único, con  $\varphi_{\bar{u}}(t'_{\bar{u}}) = s_{\bar{u}}$ . Se observa que  $t'_{\bar{u}} = \rho_{U_1}'(t')$  y  $t' \in F'(U_1)$ , donde  $U_1$  es una vecindad étale de  $\bar{u}$  y por consiguiente el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \longleftarrow & \bar{u} \\ \downarrow \phi & \swarrow & u_x \\ U & & \end{array}$$

en particular existe un  $u_1 \in U_1$  tal que  $\phi(u_1) = u$ .

Del diagrama conmutativo siguiente:

$$(12) \quad \begin{array}{ccccc} F'(U_1) & \longrightarrow & F(U_1) & \longrightarrow & F''(U_1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F'(U_1 \times_X U) & \longrightarrow & F(U_1 \times_X U) & \longrightarrow & F''(U_1 \times_X U) \end{array}$$

se tiene que:

$$\rho_{U_1 \times_X U}^{U_1}(\varphi_{U_1}(t')) = \varphi_{U_1 \times_X U}(\rho_{U_1 \times_X U}^{U_1}(t')).$$

Si se pone  $s' = \rho_{U_1 \times_X U}^{U_1}(t')$ ,  $W'_u = U_1 \times_X U$ , se observa que  $W'_u$  es una vecindad étale de  $\bar{u}$  que cubre a  $u$ ,  $\rho_{W'_u}^U(s) \in F(W'_u)$  y  $\varphi_{W'_u}(s') \in F(W'_u)$  con  $\rho_{W'_u} \varphi_{W'_u}(s') = \rho_{W'_u}^U(s)$ .

De esta manera existe un  $X$ -morfismo  $W_u \rightarrow W'_u$ , étale, tal que  $\rho_{W'_u}^{W'_u}(\varphi_{W'_u}(s')) = \rho_{W_u}^U(s)$ .

Se puede entonces suponer que  $W'_u = W_u$ , y así la condición anterior se lee como sigue:

$$(13) \quad \varphi_{W_u}(s'_u) = \rho_{W_u}^U(s).$$

Así, tenemos un cubriente  $\{W_u \rightarrow U\}_{u \in U}$  y secciones  $s'_u \in F'(W_u)$  que satisfacen (13). Sean  $s'_u$  y  $s'_{u_1}$  secciones de la familia anterior, entonces:

$$\varphi_{W_u \times_X W_{u_1}}(\rho_{W_u \times_X W_{u_1}}^{W_u}(s'_u)) = \rho_{W_u \times_X W_{u_1}}^{W_u}(\varphi_{W_u}(s'_u)) = \rho_{W_u \times_X W_{u_1}}^U(s).$$

$$\varphi_{W_u \times_X W_{u_1}}(\rho_{W_u \times_X W_{u_1}}^{W_{u_1}}(s'_{u_1})) = \rho_{W_u \times_X W_{u_1}}^{W_{u_1}}(\varphi_{W_{u_1}}(s'_{u_1})) = \rho_{W_u \times_X W_{u_1}}^U(s).$$

ambas igualdades por (13).

Por lo tanto, se tiene que  $\rho_{W_u \times_X W_{u_1}}^{W_u}(s'_u) = \rho_{W_u \times_X W_{u_1}}^{W_{u_1}}(s'_{u_1})$ . Recuerde que se ha probado que las  $\varphi_U$  son inyectivas. Como  $F'$  es gavilla, existe un  $s' \in F'(U)$  tal que  $\rho_{W_u}^U(s') = s'_u$ , y por lo tanto  $\rho_{W_u}^U \varphi_U(s') = \varphi_{W_u}(s'_u) = \rho_{W_u}^U(s)$  y como  $F'$  es gavilla ésto implica que  $\varphi_U(s') = s$  lo cual prueba (iii).

(c) Sea  $F \rightarrow F'$  un morfismo de gavillas, y  $P$  el conúcleo en  $P(X_{\text{ét}})$  del morfismo anterior. La sucesión  $F \rightarrow F' \rightarrow aP \rightarrow 0$  es exacta puesto que  $a$  es exacto. Por lo tanto  $F \rightarrow F'$  es suprayectiva si y sólo si  $aP = 0$  lo cual sucede si y sólo si  $P = P_0$  (en la notación del teorema 2.11 del capítulo II de [13]) o equivalentemente si la afirmación (c) es cierta. Entonces  $aP = 0$  si y sólo si  $(aP)_{\bar{x}} = 0$  para todo  $x \in X$ , ésto es, si y sólo si  $F_{\bar{x}} \rightarrow F'_{\bar{x}}$  es suprayectiva para todo  $x$ .

(d) En  $G(X_{\text{ét}})$  se considera un morfismo  $\phi : F \rightarrow F'$  y hay que probar que  $\bar{\phi} : \text{Coim}(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi)$  es un isomorfismo. Ahora,  $P(X_{\text{ét}})$  es una categoría abeliana y, en  $P(X_{\text{ét}})$ ,  $\bar{\phi} : \text{Coim}(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi)$  es un isomorfismo, aplicando el functor  $a$  al morfismo anterior vemos que  $\bar{\phi} : \text{Coim}(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi)$  es un isomorfismo en  $G(X_{\text{ét}})$ .  $\square$

**Ejemplo 12.** Considere un grupo abeliano  $M$  y la pregavilla constante  $P_M$ . Ponemos  $F_M = a(P_M)$ , considere el  $X$ -esquema  $M_X = \coprod_{m \in M} X_m$ , donde  $X_m = X$  para cada  $m \in M$ , por lo que tenemos una pregavilla  $\text{Hom}(\cdot, M_X)$  que, por la proposición 2.7, es gavilla. Entonces  $F_M = \text{Hom}(\cdot, M_X)$  es representable. En algunas ocasiones a esta gavilla la denotaremos simplemente por  $M$ , si no hay peligro de confusión. Para una demostración de este hecho ver [13], en especial el capítulo II sección 2.18.

**Ejemplo 13.** *La sucesión de Kummer.* Sea  $X$  un esquema entero y considere la subgavilla  $\mu_n$  de la gavilla  $\mathbb{G}_m$  definida por  $\mu_n(U) =$  grupo de raíces  $n$ -ésimas de la unidad en  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ . Entonces  $\mu_n$  es una gavilla ya que es representada por el esquema  $\text{Spec}(\mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)) \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} X$ . Consideramos la *sucesión de Kummer*:

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 0$$

donde el morfismo  $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  está dado por  $(u \mapsto u^n) : \mathbb{G}_m(U) \rightarrow \mathbb{G}_m(U)$ . La sucesión  $0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  es exacta en  $P(X_{\text{ét}})$  y, por lo tanto, en  $G(X_{\text{ét}})$ , sin embargo  $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  en general no es suprayectiva en  $P(X_{\text{ét}})$  ya que es no usual que todo elemento de  $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  sea una potencia  $n$ -ésima.

Sin embargo si  $n$  cumple que  $\text{car}(k(x)) \nmid n$  para todo  $x \in X$ , consideremos  $Y$  un  $X$ -esquema étale arbitrario y  $s \in \mathbb{G}_m(Y)$ . Sea  $U = \text{Spec}(A) \subseteq Y$  un abierto afín no vacío cualquiera y  $a_U = \rho_U^Y(s)$ . Entonces se tiene que  $V_{a_U} =$

$\text{Spec}(A[T]/(T^n - a_U))$  es étale sobre  $U$ , ya que tal  $A$ -álgebra es de rango finito sobre  $A$  y el morfismo  $\psi_{a_U} : V_{a_U} \rightarrow U$  es no ramificado, además este morfismo es suprayectivo. Obsérvese que el elemento  $T + (T^n - a_U)$  satisface que  $(T + (T^n - a_U))^n = a_U + (T^n - a_U)$  y  $a_U + (T^n - a_U)$  es la imagen de  $s$  en  $V_{a_U}$ , y note también que la familia  $\{\varphi_{V_{a_U}} : V_{a_U} \rightarrow Y\}$ , donde  $\varphi_{V_{a_U}}$  es la composición de la inmersión abierta, que induce  $U$ , con  $\psi_{a_U}$ , es un cubriente étale de  $Y$ , recordemos que los abierto afines forman una cubierta abierta de  $Y$ . Así aplicando el inciso (c) del teorema 2.21, con el cubriente  $\{\varphi_{V_{a_U}} : V_{a_U} \rightarrow Y\}$ , concluimos que la sucesión:

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 0.$$

es exacta.

**Definición 2.22.** Supongamos que  $\pi : X' \rightarrow X$  define un morfismo de sitios  $(C'/X')_{E'} \rightarrow (C/X)_E$ . La *imagen directa* de una gavilla  $F'$  en  $X'_{E'}$ , está dada por  $\pi_* F' = \pi_p F'$ .

Si  $F$  es una gavilla en  $X_E$ , la *imagen inversa* de  $F$  en  $X'_{E'}$ , viene dada por  $\pi^* F = a(\pi^p F)$ , donde  $a$  es el funtor definido en el teorema 2.18.

Obsérvese que se tienen isomorfismos naturales

$$\text{Hom}_{G(X_E)}(F, \pi_* F') \cong \text{Hom}_{P(X'_{E'})}(\pi^p F, F') \cong \text{Hom}_{G(X'_{E'})}(\pi^* F, F')$$

el primer isomorfismo es por adjunción entre  $\pi_p$  y  $\pi^p$  y el segundo isomorfismo por el comentario 2.19. Por lo tanto  $\pi_*$  y  $\pi^*$  son funtores adjuntos. De este modo  $\pi_*$  es exacto izquierdo y conmuta con límites inversos, y  $\pi^*$  es exacto derecho y conmuta con límites derechos. Además si  $\pi^p$  es exacto entonces  $\pi^*$  es exacto izquierdo.

Si  $j : U \hookrightarrow X$  es una inmersión abierta, se define la *extensión por cero* de la gavilla  $F$ , en  $U_{\text{ét}}$ , por  $j_!(F) = a(F_!)$ . Obsérvese que si  $G$  es una gavilla en  $X_{\text{ét}}$  tenemos isomorfismos canónicos

$$\text{Hom}_{G(X_{\text{ét}})}(j_!(F), G) \cong \text{Hom}_{P(X_{\text{ét}})}(F_!, G) \cong \text{Hom}_{G(U_{\text{ét}})}(F, j^* G)$$

por lo tanto  $j_!$  es adjunto izquierdo de  $j^*$ .

**Comentario 2.23.** Sea  $\pi : Y \rightarrow X$  un morfismo étale y considere el funtor  $\pi^p$ . Si  $P$  es una pregavilla en  $X_{\text{ét}}$ , de la demostración del teorema A.5 del apéndice C vemos que el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{1_V} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

es un objeto final en el conjunto dirigido definido en dicha demostración. De esta manera  $\pi^p P(V) = P(V)$ . En particular, si  $P$  es una gavilla se tiene que  $\pi^p P$  es una gavilla y por lo tanto  $\pi^* P = \pi^p P$ . A esta gavilla la denotaremos por  $P|_Y$  y diremos que es *la restricción de  $P$  a  $Y$* .

## 2.4. Cubrientes de Galois

Sea  $k$  un campo y considere el sitio étale en  $X = \text{Spec}(k)$ . Sabemos que si  $U \in X_{\text{ét}}$ , entonces  $U = \coprod_{i=1}^n U_i$  con cada  $U_i = \text{Spec}(k_i)$  y cada  $k_i$  es una extensión finita y separable de  $k$ . Si consideramos una cerradura algebraica de  $k$ , se obtiene una extensión  $k^{\text{sep}}/k$ , donde  $k^{\text{sep}}$  es una cerradura separable de  $k$ . En ésta sección se fija esta cerradura.

Considere  $G = \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$  y las familias siguientes:

$$\tilde{I} = \{E : k \subseteq E \subseteq k^{\text{sep}}, [E : k] < \infty \text{ y } E/k \text{ es de Galois}\}.$$

y

$$\tilde{N} = \{N \subseteq G : N = \text{Gal}(k^{\text{sep}}/E) \text{ para algún } E \in \tilde{I}\}.$$

La topología de Krull en  $G$  se define de la manera siguiente:  $X \subseteq G$  es abierto si  $X = \emptyset$  o  $X = \bigcup_i \sigma_i N_i$  para algunos  $\sigma_i \in G$  y  $N_i \in \tilde{N}$ . Entonces  $G$  es un grupo topológico, más aún, un grupo profinito. Para la demostración de estos resultados ver, por ejemplo, [24] p 84-92.

Sea  $P$  una pregavilla en  $X_{\text{ét}}$ . Si  $k'$  es una extensión finita y separable, con  $k \subseteq k' \subseteq k^{\text{sep}}$ , se escribe  $P(k')$  en lugar de  $P(\text{Spec}(k'))$ .

Se observa que, dadas extensiones finitas y separables,  $k'_1, k'_2$ , de  $k$ , se tiene que la composición de los campos  $k'_1, k'_2$  es finita y separable, además:

$$(14) \quad k'_1 \subseteq k'_1 k'_2 \text{ y } k'_2 \subseteq k'_1 k'_2.$$

De esta manera la definición siguiente tiene sentido:

$$M_P = \varinjlim P(k').$$

donde el límite se toma sobre todos los subcampos  $k'$  de  $k^{\text{sep}}$  tal que  $k'/k$  es finita y separable. Es decir, si dados  $k', k''$  subcampos de  $k^{\text{sep}}$  tales que las extensiones  $k'/k, k''/k$  son finitas y separables, definimos  $k' \leq k''$  si y sólo si  $k' \subseteq k''$ . La relación  $\leq$  es reflexiva y transitiva y por (14) el conjunto de subcampos  $k'$  de  $k^{\text{sep}}$ , que contienen a  $k$  y tales que  $k'/k$  es finita y separable, es un conjunto dirigido. Con este conjunto indexamos a  $P(k')$  y los morfismos entre ellos.

Se tiene definida una acción de  $G$  en  $P(k')$ , si la extensión  $k'/k$  es finita y de Galois, del modo siguiente: sea  $\sigma \in G$ , entonces  $\sigma|_{k'}: k' \rightarrow k^{\text{sep}}$ , y como la extensión  $k'/k$  es finita y de Galois, en particular, normal, de aquí se deduce que  $\sigma|_{k'}(k') = k'$ , por teoría de Galois. Si  $u \in P(k')$  se define  $\sigma \odot u = P(\sigma|_{k'})(u)$ . Note que  $1 \odot u = P(1|_{k'})(u) = u$ , y si  $\tau, \sigma \in G$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (\tau \circ \sigma) \odot u &= P(\sigma|_{k'} \circ \tau|_{k'})(u) \\ &= P(\sigma|_{k'})(\tau|_{k'}(u)) \\ &= P(\sigma|_{k'})P(\tau|_{k'})(u) \\ &= \tau \odot (\sigma \odot u). \end{aligned}$$

De esto se sigue que tenemos una acción izquierda de  $G$  en  $P(k')$ .

Hemos visto que  $M_P = \varinjlim P(k')$  está bien definido, ahora considere  $\sigma \in G$  y  $w \in M_P$ . Así  $w = \rho_{k'}(u')$  con  $u' \in P(k')$ , y ya podemos suponer que  $k'/k$  es una extensión finita y de Galois. Ponemos  $\sigma \bullet w = \rho_{k'}(\rho \odot u')$ .

Si  $w = \rho_{k''}(u'')$  con  $u'' \in P(k'')$  y  $k''/k$  finita y de Galois, entonces  $\sigma \bullet w = \rho_{k''}(\rho \odot u'')$  y hay que ver que estas dos definiciones coinciden.

Existe un campo  $\tilde{k}$ , con  $k', k'' \subseteq \tilde{k} \subseteq k^{\text{sep}}$  tal que  $\rho_{\tilde{k}}^{k'}(u') = \rho_{\tilde{k}}^{k''}(u'')$ , esto es por la igualdad  $w = \rho_{k'}(u') = \rho_{k''}(u'')$ . Note además que podemos suponer que  $\tilde{k}/k$  es una extensión finita de Galois.

Se sigue que

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{k}}^{k'}(\sigma \odot u') &= \rho_{\tilde{k}}^{k'}(P^a(\sigma|_{k'})(u')) \\ &= P^a(i)(P^a(\sigma|_{k'})(u')) \\ &= P^a(\sigma|_{\tilde{k}} \circ i)(u') = P^a(\sigma|_{\tilde{k}})\rho_{\tilde{k}}^{k'}(u') \\ &= P^a(\sigma|_{\tilde{k}})\rho_{\tilde{k}}^{k''}(u'') = \rho_{\tilde{k}}^{k''}(\sigma \odot u''). \end{aligned}$$

es decir,  $\sigma \bullet w$  está bien definida y además  $1 \bullet w = w$  y

$$(\tau \circ \sigma) \bullet w = \rho_{k'}((\tau \circ \sigma) \odot u') = \rho_{k'}(\tau \odot (\sigma \odot u')) = \tau \bullet \rho_{k'}(\sigma \odot u') = \tau \bullet (\sigma \bullet w).$$

Esto demuestra que  $G$  actúa sobre  $M_P$ , y así,  $M_P$  es un  $G$ -módulo. Notemos ahora que si  $w \in M_P$ ,  $w = \rho_{k'}(u')$  y  $H = \text{Gal}(K^{\text{sep}}/k')$ , con  $k'/k$  finita y de Galois, dado  $\sigma \in H$  esto implica que  $\sigma \bullet w = \rho_{k'}(\sigma \odot u) = \rho_{k'}(u) = w$  y esto es válido para cada  $\sigma \in H$  y por lo tanto,  $w \in M_P^H$ . De esto se sigue que  $M_P = \bigcup M_P^H$ , donde  $H$  recorre todos los subgrupos abiertos de  $G$ , es decir,  $M_P$  es un  $G$ -módulo discreto.

Ahora, supongamos dado un  $G$ -módulo discreto  $M$ . Si  $U \in X_{\text{ét}}$ , definimos

$$F(U) = \text{Hom}_X(\bar{x}, U).$$

Notemos que  $F(U)$  es un  $G$ -conjunto, por tanto  $F_M(U) = \text{Hom}_G(F(U), M)$  es el conjunto de todas las  $G$ -funciones y, como  $M$  es un  $G$ -módulo,  $F_M(U)$  tiene estructura de grupo abeliano. Nótese que:

- (1)  $F(k') = G/H$  con  $H = \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k')$ , ya que  $F(k') = \text{Hom}_X(\bar{x}, \text{Spec}(k'))$  se puede identificar con  $\text{Gal}(k'/k)$  que es isomorfo a  $G/H$ , ver [24] p. 82.
- (2)  $F(\prod k_i) = \prod F(k_i)$ , puesto que  $\text{Hom}_X(\bar{x}, \text{Spec}(\prod k_i)) \cong \prod \text{Hom}_X(\bar{x}, k_i)$ .

De aquí se sigue que

- (a)  $F_M(k') = M^H$ .
- (b)  $F_M(\prod k_i) = \prod F_M(k_i)$ .

Antes de probar que la pregavilla  $F_M$  es gavilla, necesitamos unos preliminares.

Sean  $\varphi : Y \rightarrow X$  un morfismo de esquemas y  $G$  un grupo finito; al grupo de  $X$ -automorfismos de  $Y$  lo denotamos por  $\text{Aut}_X(Y)$ . Una acción derecha de  $G$  en  $Y$  sobre  $X$  es una función  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}_X(Y)$ , tal que  $\alpha(e) = 1_Y$  y  $\alpha(gh) = \alpha(h) \circ \alpha(g)$  para todo  $g, h \in G$ .



Sean  $\varphi : Y \rightarrow X$  un morfismo de esquemas y  $G$  es un grupo finito que actúa en  $Y$  sobre  $X$ . Denotamos por  $Y \times G$  al esquema  $\coprod_{g \in G} Y_g$ , donde  $Y_g = Y$  para todo  $g \in G$ .

**Comentario 2.24.** Se tiene el diagrama conmutativo siguiente, para cada  $g \in G$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y_g & & & & \\
 \downarrow h_g & \searrow \alpha(g) & & & \\
 Y \times_X Y & \xrightarrow{\pi^2} & Y & & \\
 \downarrow \pi^1 & & \downarrow & & \\
 Y & \longrightarrow & X & & \\
 \uparrow 1_Y & & & & \\
 Y_g & & & & 
 \end{array}$$

Por lo tanto existe un único  $h_g : Y_g \rightarrow Y \times_X Y$ , tal que  $\pi^1 \circ h_g = 1_Y$  y  $\pi^1 \circ h_g = \alpha(g)$ . Además, tenemos un morfismo canónico de esquemas, para cada  $g \in G$ , ver [6] capítulo I 3.1:

$$\varphi_g : Y_g \rightarrow Y \times G.$$

Entonces, existe un único morfismo  $\psi : Y \times G \rightarrow Y \times_X Y$  con  $\psi \circ \varphi_g = h_g$  para cada  $g \in G$ , ver [6] p. 104.

**Definición 2.25.** Sean  $\varphi : Y \rightarrow X$  un morfismo de esquemas fielmente plano y  $G$  un grupo finito que actúa en  $Y$  sobre  $X$  por la derecha. Diremos que  $\varphi : Y \rightarrow X$  es un *cabriente de Galois* si el morfismo  $\psi : Y \times G \rightarrow Y \times_X Y$ , anteriormente definido, es un isomorfismo.

**Ejemplo 14.** Sean  $k$  un campo,  $k^{\text{sep}}$  una cerradura separable de  $k$ , que en este ejemplo permanecera fija, y  $k'$  una extensión finita de Galois de  $k$ , contenida en  $k^{\text{sep}}$ . Considere el morfismo  $\text{Spec}(k') \rightarrow \text{Spec}(k)$ , y pongamos  $Y = \text{Spec}(k')$ ,  $X = \text{Spec}(k)$ . El anterior morfismo es fielmente plano y poniendo  $G = \text{Gal}(k'/k)$  y  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}_X Y$  dada por  $\alpha(g) = {}^a g$  se observa que  $\alpha(gh) = {}^a(gh) = {}^a h \circ {}^a g = \alpha(h) \circ \alpha(g)$  y que  $\alpha(e) = 1$ , por lo tanto  $\alpha$  es una acción derecha. Del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
 k' & & & & \\
 \downarrow \theta_g & \swarrow g & & & \\
 k' \otimes_k k' & \longleftarrow & k' & & \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 k' & \longleftarrow & k & & \\
 \uparrow 1_{k'} & & & & \\
 k' & & & & 
 \end{array}$$

Se sigue que existe un único  $\theta_g : k' \otimes_k k' \rightarrow k'$  que hace conmutar el diagrama anterior, y esto ocurre para toda  $g \in G$ .

Definimos  $\theta : k' \otimes_k k' \rightarrow \prod_{g \in G} k'$  como  $\theta = (\theta_{g_1}, \dots, \theta_{g_n})$ . Y notemos que  $\dim_k(k' \otimes_k k') = n^2 = \dim_k \prod k'$ , donde  $n = [k' : k] = |G|$ .

Si  $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n$  es una base de  $k'$  sobre  $k$ , la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} g_1(\tilde{a}_1) & \dots & g_1(\tilde{a}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_n(\tilde{a}_1) & \dots & g_n(\tilde{a}_n) \end{pmatrix}$$

es invertible. Por lo tanto, dado un vector  $(a_1, \dots, a_n)$  en  $\prod_{g \in G} k'$  el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

tiene solución única. Entonces  $\theta$  es un isomorfismo de  $k$ -álgebras y  $\psi = {}^a\theta$  es un isomorfismo.  $\square$

**Comentario 2.26.** Supongamos que  $Y \rightarrow X$  es de Galois, con grupo  $G$  y considere una pregavilla,  $P$ , en  $X_{\text{ét}}$ . Dados  $u \in P(Y)$  y  $g \in G$  definimos:

$$g \cdot u = P(\alpha(g))(u) \in P(Y).$$

Observe que  $e \cdot u = u$  y también que:

$$(gh) \cdot u = P(\alpha(gh))(u) = P(\alpha(h) \circ \alpha(g))(u) = P(\alpha(g))P(\alpha(h))(u) = g \cdot (h \cdot u).$$

Por lo tanto,  $G$  actúa en  $P(Y)$  por la izquierda.

**Proposición 2.27.** Sea  $Y \rightarrow X$  un cubriente de Galois con grupo finito  $G$ . Sea  $P$  una pregavilla en  $X_{\text{ét}}$  que lleva uniones disjuntas en productos, y supongamos que si  $X_j \rightarrow \coprod X_i$  es el morfismo canónico, entonces  $P(\coprod X_i) = \prod P(X_i) \rightarrow P(X_j)$  es la proyección natural. Entonces,  $P$  satisface la condición de gavilla para el cubriente  $Y \rightarrow X$ , es decir:

$$(15) \quad P(X) \rightarrow P(Y) \rightrightarrows P(X \times_X Y).$$

es una sucesión exacta, si y sólo si  $P(X) \rightarrow P(Y)$  identifica  $P(X)$  con  $P(Y)^G$ .

DEMOSTRACIÓN. Considere el producto fibrado siguiente

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Y & \xrightarrow{\pi^2} & Y \\ \pi^1 \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Pongamos  $\theta_1 = \pi^1 \circ \psi$  y  $\theta_2 = \pi^2 \circ \psi$ , donde  $\psi$  es el morfismo que se obtiene en 2.24, que es un isomorfismo, ya que  $Y \rightarrow X$  es un cubriente de Galois. Entonces el diagrama conmutativo siguiente es un producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} Y \times G & \xrightarrow{\theta^2} & Y \\ \theta^1 \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

De estos últimos diagramas derivamos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
P(X) & \longrightarrow & P(Y) & \longrightarrow & P(Y \times_X Y) \\
\downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow \\
P(X) & \longrightarrow & P(Y) & \longrightarrow & \prod_{g \in G} P(Y)
\end{array}$$

Ahora,  $\theta_1 \circ \varphi_g = 1_Y$  para cada  $g \in G$ , ya que  $\theta_1 = \pi^1 \circ \psi$  y esto implica que  $\theta_1 \circ \varphi_g = (\pi^1 \circ \psi) \circ \varphi_g = \pi^1 \circ h_g = 1_Y$ .

Del mismo modo  $\theta_2 \circ \varphi_g = \alpha(g)$ .

De esto se sigue que  $P(\theta_1)(u) = (u, \dots, u)$  y  $P(\theta_2)(u) = (g_1 \cdot u, \dots, g_n \cdot u)$ . De esta manera 15 es exacta si y sólo si  $P(X) \rightarrow P(Y)$  identifica a  $P(X)$  con  $P(Y)^G$ .  $\square$

**Proposición 2.28.**  $F_M$  es una gavilla en  $X_{\text{ét}}$ .

DEMOSTRACIÓN. Basta verificar que  $F_M$  satisface la condición de la proposición 2.5. De la definición de  $F_M$ , propiedad (b), y recordando que  $\prod F_M(k_i) \rightarrow F_M(k_j)$  es la proyección natural, vemos que  $F_M$  es gavilla en  $X_{\text{Zar}}$ . Recordar aquí que  $U \rightarrow X$  se escribe como  $U = \coprod U_i$ .

De la demostración de la proposición 2.5, vemos que para verificar (b) de la proposición 2.5, basta tomar  $U'$  y  $U$  que sean pequeños y afines y, para esto, sean  $U' = \text{Spec}(L')$  y  $U = \text{Spec}(L)$ , con  $L' \supseteq L$  extensiones finitas y separables de  $k$ , contenidas en  $k^{\text{sep}}$ . Sea  $L''$  una extensión finita de Galois de  $L$  que contiene a  $L'$ . Entonces  ${}^a\tilde{\theta}_1 : \text{Spec}(L'') \rightarrow \text{Spec}(L)$  es un morfismo de Galois con grupo de Galois  $\tilde{G} = \{{}^a\tau \mid \tau \in \text{Gal}(L''/L)\}$ , por lo tanto podemos considerar el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
F_M(L) & \xrightarrow{\theta_1} & F_M(L') & \longrightarrow & F_M(L' \otimes_L L') \\
\downarrow 1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \\
F_M(L) & \xrightarrow[{}^a\tilde{\theta}_1]{} & F_M(L'') & \longrightarrow & F_M(L'' \otimes_L L'')
\end{array}$$

La acción de  $\tilde{G}$  en  $F_M(L'')$ , descrita en el comentario 2.26, es la siguiente: sea  $\alpha \in F_M(L'')$  y  ${}^a\tau \in \tilde{G}$ . Entonces  ${}^a\tau \cdot \alpha = \alpha \circ F({}^a\tau)$ . Por lo tanto se tiene que  $F_M(L) = F_M(L'')^{\tilde{G}}$  y de la proposición 2.27 el renglón inferior es exacto, y también  $F_M(L) \rightarrow F_M(L')$  y  $\varphi : F_M(L) \rightarrow F_M(L'')$  son inyectivos.

Sea  $x \in F_M(L')$  con  $\rho_1(x) = \rho_2(x)$ . Entonces  $\tilde{\rho}_1\varphi(x) = \tilde{\rho}_2\varphi(x)$  y existe un  $z \in F_M(L)$ , único, con  $x = \tilde{\theta}_1(z)$  y como  $\varphi(x - \theta_1(z)) = 0$  entonces  $x = \theta_1(z)$ .

Por lo tanto, el renglón superior es exacto y esto termina la demostración.  $\square$

Si  $\varphi : M \rightarrow M'$  es un morfismo de  $G$ -módulos discretos, éste induce un morfismo de gavillas como sigue: dados  $U \in X_{\text{ét}}$  y  $\alpha \in F_M(U)$  ponemos  $\varphi_U(\alpha) = \varphi \circ \alpha$ . Por lo tanto, de esta última observación y de la proposición 2.28, se tiene definido

un funtor de la categoría de  $G$ -módulos discretos a la categoría de gavillas en  $X_{\text{ét}}$ ; y de modo natural tenemos un morfismo:

$$(16) \quad \text{Hom}_G(M, M') \rightarrow \text{Hom}_{G(X_{\text{ét}})}(F_M, F_{M'}).$$

Ahora si  $\psi : F \rightarrow F'$  es un morfismo de gavillas, éste induce un morfismo de  $G$ -módulos discretos del modo siguiente: puesto que  $M_F = \varinjlim F(k')$  y  $M_{F'} = \varinjlim F'(k')$  tenemos un morfismo natural  $\varinjlim \psi_{k'} : M_F \rightarrow M_{F'}$ . Sea  $H$  un subgrupo abierto de  $G$  y pongamos  $k' = (k^{\text{sep}})^H$  y sean  $\tau \in G$  y  $u \in F(k')$ . Tenemos que  $\tau \bullet u = F((\tau |_{k'})^a)(u)$  y de esto se sigue que:

$$\psi_{k'}(\tau \bullet u) = \psi_{k'}(F((\tau |_{k'})^a)(u)) = F'((\tau |_{k'})^a)(\psi_{k'}(u)) = \tau \bullet \psi_{k'}(u).$$

Es decir,  $\psi_{k'}$  conmuta con la acción de  $G$ , y por lo tanto  $\varinjlim \psi_{k'} : M_F \rightarrow M_{F'}$  es un  $G$ -morfismo. De esto se sigue que tenemos definido un funtor de la categoría de gavillas a  $X_{\text{ét}}$  a la categoría de  $G$ -módulos discretos. Se sigue que:

**Teorema 2.29.** *Las correspondencias  $F \leftrightarrow M_F$  y  $M \leftrightarrow F_M$  inducen una equivalencia entre la categoría  $G(X_{\text{ét}})$  y la categoría de  $G$ -módulos discretos.*

DEMOSTRACIÓN. Utilizando [12] teorema 1, p. 91, para mostrar la equivalencia deseada bastará probar que el morfismo (16) es un isomorfismo para cada par de  $G$ -módulos discretos  $M$  y  $M'$  y que para cada gavilla  $F_1$  en  $X_{\text{ét}}$  existe un isomorfismo  $F_1 \rightarrow F_{M_{F_1}}$  de gavillas.

Ahora, dados  $M$  y  $M'$ ,  $G$ -módulos discretos, considere el morfismo

$$\theta : \text{Hom}_G(M, M') \rightarrow \text{Hom}(F_M, F_{M'}).$$

Si  $\theta(\varphi) = 0$ , en particular en cada  $H \subseteq G$  abierto se tiene que  $\varphi|_{M^H} = 0$  y, puesto que  $M = \bigcup_U M^H$ , donde  $H$  recorre la familia de subgrupos abiertos de  $G$ , tenemos que  $\varphi = 0$  y así  $\theta$  es inyectiva.

Si  $\varphi : F_M \rightarrow F_{M'}$  es un morfismo, entonces para cada  $k' = (k^{\text{sep}})^H$ , se tiene un morfismo  $\varphi_{k'} : M^H \rightarrow (M')^H$ .

La familia de todos los subgrupos abiertos de  $G$  es un conjunto dirigido. Puesto que  $M \cong \varinjlim M^H$ , se tiene un morfismo de  $G$ -módulos  $\tilde{\varphi} = \varinjlim \varphi_{k'} : M \rightarrow M'$  y este verifica que  $\theta(\tilde{\varphi}) = \varphi$ .

Si  $F_1$  es gavilla se define un morfismo de gavillas  $\phi_{F_1} : F_1 \rightarrow F_{M_{F_1}}$  como sigue: sea  $k'/k$  una extensión finita y separable. Dado  $s' \in F_1(k')$ , si  ${}^a\tau \in F(k')$  se tiene que  $\rho_{\text{Im}(\tau)}(s') \in M_{F_1}$ . De esta manera se define una función  $\phi_{F_1}(k')(s) : F(k') \rightarrow M_{F_1}$  mediante  $\phi_{F_1}(k')(s)({}^a\tau) = \rho_{\text{Im}(\tau)}(s')$ . Por lo tanto hemos definido un morfismo de gavillas  $\phi_{F_1}$  y este es un isomorfismo.  $\square$



# Capítulo 3

## La cohomología étale

### 3.1. Cohomología

Para la existencia de los funtores derivados del funtor dado por las secciones globales de una gavilla en el sitio étale, necesitaremos el resultado siguiente:

**Proposición 3.1.** *La categoría  $G(X_{\text{ét}})$  tiene suficientes inyectivos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $u_x : \bar{x} \rightarrow X$  un punto geométrico de  $X$ . La categoría  $G(\bar{x}_{\text{ét}})$  es isomorfa a  $\text{Ab}$  y ésta última tiene suficientes inyectivos. Ahora, sea  $F \in G(X_{\text{ét}})$  y tómesese, para cada  $x \in X$ , un inyectivo  $F'_x$  en  $G(\bar{x}_{\text{ét}})$ , y un monomorfismo  $u_x^* F \rightarrow F'_x$ . Se definen  $F^* = \prod (u_{x*} u_x^* F)$  y  $F^{**} = \prod u_{y*} F'_y$ .

Por el lema A.3  $F^{**}$  es una gavilla inyectiva, como  $u_{y*}$  es exacto, se tiene un monomorfismo  $F^* \rightarrow F^{**}$  y un monomorfismo  $F \rightarrow F^*$  (recordar la construcción del funtor  $a$  que asocia una gavilla a una pregavilla).  $\square$

**Ejemplo 15.** El funtor  $\Gamma(X, \cdot) : G(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}$  con  $\Gamma(X, F) = F(X)$ , es exacto izquierdo y sus funtores derivados derechos se denotan por:

$$R^i \Gamma(X, \cdot) = H^i(X_{\text{ét}}, \cdot).$$

El grupo abeliano  $H^i(X_{\text{ét}}, F)$ , que a veces denotaremos por  $H^i(X, F)$  si no hay peligro de confusión, se llama *el  $i$ -ésimo grupo de cohomología de  $X_{\text{ét}}$  con valores en  $F$* .

**Ejemplo 16.** Para cada  $U \rightarrow X$  en  $X_{\text{ét}}$ , el funtor  $F \mapsto F(U) : G(X_{\text{ét}}) \rightarrow \text{Ab}$  es exacto izquierdo, y sus funtores derivados derechos se denotan por  $H^i(U_{\text{ét}}, F)$ .

**Ejemplo 17.** El funtor de inclusión  $i : G(X_{\text{ét}}) \rightarrow P(X_{\text{ét}})$  es exacto izquierdo. Sus funtores derivados derechos se denotan por  $\underline{H}^i(X_{\text{ét}}, F)$  o simplemente por  $\underline{H}^i(F)$ .

**Ejemplo 18.** Para cada morfismo de esquemas  $\pi : Y \rightarrow X$ , el funtor  $\pi_* : X_{\text{ét}} \rightarrow Y_{\text{ét}}$  es exacto izquierdo, sus funtores derivados derechos se denotan por  $R^i \pi_*$ . Las gavillas  $R^i \pi_* F$  se dicen que son *las imágenes directas superiores de  $F$* .

**Ejemplo 19.** Sea  $k$  un campo y  $X = \text{Spec}(k)$ . Sabemos, por el teorema 2.29, que la categoría de gavillas en  $X_{\text{ét}}$  es equivalente a la categoría de  $G$ -módulos discretos, donde  $G = \text{Gal}(k^{\text{sep}}/k)$ . Por lo tanto dada una gavilla  $F$  en  $X_{\text{ét}}$  ésta tiene asociada un  $G$ -módulo discreto  $M$ , y se tiene que  $\Gamma(X, F) = M^G$  por lo que:

$$H^i(X_{\text{ét}}, F) \cong H^i(G, M) = H^i(k, M)$$

donde los grupos de la derecha son los grupos de *cohomología de Galois de  $G$*  con coeficientes en  $M$ , ver [24].

**Comentario 3.2.** Dada una gavilla  $F$  en  $X_{\text{ét}}$  se tiene que  $\text{Hom}_X(\mathbb{Z}, F) \cong F(X)$ , y así  $\text{Ext}_X^r(\mathbb{Z}, F) \cong H^r(X, F)$  para cada  $r \geq 0$ , ver [14] p. 65 ejemplo 9.5.

Ahora se considera el problema de calcular las fibras de las imágenes directas superiores de una gavilla, para ello empezamos demostrando la proposición siguiente.

**Proposición 3.3.** *Sea  $\pi : Y \rightarrow X$  un morfismo de esquemas. Sea  $F$  una gavilla en  $Y_{\text{ét}}$ , entonces  $R^i\pi_*F$  es la gavilla asociada, en  $X_{\text{ét}}$ , a la pregavilla  $U \mapsto H^i(U', F)$ , donde  $U' = U \times_X X'$*

DEMOSTRACIÓN. Por definición  $\pi_* = a\pi_p i$ , donde  $i : G(X_{\text{ét}}) \rightarrow P(X_{\text{ét}})$  es la inclusión. Sea  $F \rightarrow I^\bullet$  una resolución inyectiva de  $F$  en  $G(X')$ . Entonces  $R^i\pi_*F$  es el  $i$ -ésimo grupo de cohomología del complejo de gavillas  $a\pi_p(iI^\bullet)$ . Pero  $a$  es exacto, por el teorema 2.21, y  $\pi_p$  es exacto, y ambos conmutan con la formación de cohomología. De esta manera se tiene que:

$$R^i\pi_*F = H^i(a\pi_p(iI^\bullet)) = a\pi_p(H^i(iI^\bullet)) = a\pi_p(\underline{H}^i(F)).$$

□

De aquí obtenemos el teorema siguiente

**Teorema 3.4.** *Sea  $\pi : Y \rightarrow X$  un morfismo cuasi compacto y sea  $F$  una gavilla en  $Y_{\text{ét}}$ . Sea  $\bar{x}$  un punto geométrico de  $X$  tal que  $k(\bar{x})$  es la cerradura separable de  $k(x)$ . Ponemos  $\tilde{X} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \bar{x}})$  y  $\tilde{Y} = Y \times_X \tilde{X}$ . Sea  $\tilde{F}$  la imagen inversa de  $F$  en  $\tilde{Y}$ :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \longleftarrow & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longleftarrow & \tilde{X} \end{array}$$

entonces  $(R^p\pi_*(F))_{\bar{x}} \rightarrow H^p(\tilde{Y}, \tilde{F})$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Se tiene por 3.3 y (capítulo II comentario 2.14c de [13]), que:

$$(R^p\pi_*(F))_{\bar{x}} = \varinjlim H^p(U \times_X Y, F | U \times_X Y).$$

donde el límite se toma sobre todos los esquemas afines  $U$  tales que  $\tilde{X} = \varprojlim U$ .

También se nota que

$$\tilde{Y} = (\varprojlim U) \times_X Y = \varprojlim (U \times_X Y).$$

y que los morfismos de transición, del límite inverso, son morfismos afines de esquemas casi compactos. Como la cohomología étale conmuta con límites inversos de esquemas, se tiene el resultado deseado. □

**Comentario 3.5.** Considere un esquema  $X$  y  $U$  un subesquema abierto de  $X$ , de esta manera se tiene un subesquema cerrado de  $X$ ,  $Z$ , cuyo espacio topológico subyacente es  $X - U$ , así pues se tienen morfismos de inclusión  $i : Z \rightarrow X$  y  $j : U \rightarrow X$ . Se demuestra, ver [13] p. 74, teorema 3.10, que la categoría de gavillas en  $X_{\acute{e}t}$  es equivalente a la categoría  $\mathbf{T}(X)$ , cuyos objetos son ternas  $(F_1, F_2, \phi)$ , donde  $F_1 \in G(Z_{\acute{e}t})$ ,  $F_2 \in G(U_{\acute{e}t})$  y  $\phi$  es un morfismo  $F_1 \rightarrow i^*j_*F_2$ ; y dados dos objetos  $(F_1, F_2, \phi)$  y  $(F'_1, F'_2, \phi')$  un morfismo  $(F_1, F_2, \phi) \rightarrow (F'_1, F'_2, \phi')$ , es un par  $(\psi_1, \psi_2)$ , con  $\psi_1$  un morfismo  $F_1 \rightarrow F'_1$ ,  $\psi_2$  un morfismo  $F_2 \rightarrow F'_2$  tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\phi} & i^*j_*F_2 \\ \psi_1 \downarrow & & \downarrow i^*j_*\psi_2 \\ F'_1 & \xrightarrow{\phi'} & i^*j_*F'_2 \end{array}$$

De este modo es posible definir seis funtores:

$$\begin{array}{ccccc} & \xleftarrow{i^*} & & \xleftarrow{j!} & \\ G(Z_{\acute{e}t}) & \xrightarrow{i_*} & G(X_{\acute{e}t}) & \xrightarrow{j^*} & G(U_{\acute{e}t}) \\ & \xleftarrow{i^!} & & \xleftarrow{j_*} & \end{array}$$

cuya descripción es la siguiente:

$$\begin{aligned} i^* : (F_1, F_2, \phi) &\mapsto F_1 & j! : F_2 &\mapsto (0, F_2, 0) \\ i_* : F_1 &\mapsto (F_1, 0, 0) & j^* : (F_1, F_2, \phi) &\mapsto F_2 \\ i^! : (F_1, F_2, \phi) &\mapsto \ker(\phi) & j_* : F_2 &\mapsto (i^*j_*F_2, F_2, 1) \end{aligned}$$

ver [13] p. 76. En particular se tiene la sucesión exacta siguiente para toda gavilla  $F$  en  $X_{\acute{e}t}$ :

$$0 \rightarrow j!j^*F \rightarrow F \rightarrow i_*i^*F \rightarrow 0.$$

**Definición 3.6.** Sea  $X$  un esquema  $Z \rightarrow X$  un subesquema cerrado de  $X$  y  $U = X - Z$ . Sea  $F$  una gavilla en  $X_{\acute{e}t}$ . El grupo:

$$\Gamma(Z, i^!F) = \ker(F(X) \rightarrow F(U)).$$

se conoce como *el grupo de secciones de  $F$  con soporte en  $Z$* . El funtor  $F \mapsto \Gamma(Z, i^!F) : G(X_{\acute{e}t}) \rightarrow Ab$ , es exacto izquierdo y sus funtores derivados derechos, que se denotan por  $H_Z^i(X, F)$ , son llamados *los grupos de cohomología de  $F$  con soporte en  $Z$* .

Una propiedad importante de estos grupos de cohomología es:

**Proposición 3.7** (Escisión). *Sean  $Z \subseteq X$  y  $Z' \subseteq X'$  subesquemas cerrados y  $\pi : X' \rightarrow X$  un morfismo étale tal que la restricción a  $Z'$  es un isomorfismo  $\pi|_{Z'} : Z' \rightarrow Z$  y  $\pi(X' - Z') \subseteq X - Z$ , entonces se tienen isomorfismos  $H_Z^i(X, F) \rightarrow H_{Z'}^i(X', \pi^*F)$ , para toda  $i \geq 0$  y cualquier gavilla  $F$  en  $X_{\acute{e}t}$ .*



DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $\pi^*$  es exacto y preserva inyectivos, es suficiente probar la proposición para  $i = 0$ . Pongamos  $U = X - Z$  y  $U' = X' - Z'$ . Si  $W \rightarrow X'$  es un objeto de  $X'_{\text{ét}}$ , entonces, componiendo con  $\pi$ , tenemos un objeto de  $X_{\text{ét}}$ ,  $W \rightarrow X' \rightarrow X$ , y  $\pi^*F(W) = F(W)$ , viendo a  $W$  como un elemento de  $X_{\text{ét}}$ .

De esta manera se tiene el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H_Z^0(X, F) & \longrightarrow & \Gamma(X, F) & \xrightarrow{\theta_1} & \Gamma(U, F) \\ & & \theta \downarrow & & \varphi \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_{Z'}^0(X', F|_{X'}) & \longrightarrow & \Gamma(X', F) & \xrightarrow{\theta_2} & \Gamma(U', F) \end{array}$$

Notemos que  $H_Z^0(X, F) = \ker(\theta_1 : \Gamma(X, F) \rightarrow \Gamma(U, F))$  y  $H_{Z'}^0(X', F|_{X'}) = \ker(\theta_2 : \Gamma(X', F) \rightarrow \Gamma(U', F))$  y  $\theta$  es la restricción de  $\varphi$  a los núcleos de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , respectivamente.

Queremos ver que  $\theta$  es un isomorfismo. Para ello sea  $\gamma \in H_Z^0(X, F)$  con  $\theta(\gamma) = 0$ , considere a  $\gamma$  como un elemento de  $\Gamma(X, F)$ , esto es por la exactitud del primer renglón. Considere el cubriente  $\{U \rightarrow X, X' \rightarrow X\}$ ; note que es un cubriente puesto que si  $x \in X$  y  $x$  no pertenece a  $U$  entonces  $x \in Z = \pi(Z')$ .

Ahora, puesto que  $\gamma|_U = 0 = \gamma|_{X'}$  y  $F$  es gavilla, se sigue que  $\gamma = 0$ .

Supongamos que  $\gamma' \in H_{Z'}^0(X', F|_{X'})$  y note que este se puede considerar como un elemento de  $\Gamma(X', F)$ . Considere ahora el producto fibrado siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X' \times_X U & \xrightarrow{\pi^2} & U \\ \pi^1 \downarrow & & \downarrow i \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Ahora,  $\pi^{-1}(U) = U'$ , y se sabe que  $(\pi^1)^{-1}(U') \cap (\pi^2)^{-1}(U)$  es el producto fibrado  $U' \times_U U = U'$ . Entonces

$$\begin{aligned} (\pi^1)^{-1}(U') \cap (\pi^2)^{-1}(U) &= (\pi^1)^{-1}(\pi^{-1}(U)) \cap (\pi^2)^{-1}(i^{-1}(X)) \\ &= (\pi^2)^{-1}(i^{-1}(U)) \cap (\pi^2)^{-1}(i^{-1}(X)) \\ &= (\pi^2)^{-1}(i^{-1}(X)) \cap (\pi^2)^{-1}(i^{-1}(X)) \\ &= X' \times_X U. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el diagrama anterior se transforma en:

$$\begin{array}{ccc} U' & \xrightarrow{\pi|_{U'}} & U \\ \downarrow & & \downarrow i \\ X' & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

Así, las secciones  $\gamma' \in \Gamma(X', F)$  y  $0 \in \Gamma(U, F)$  son iguales en sus restricciones a  $X' \times_X U = U'$ , y como  $F$  es gavilla, existe una sección  $\gamma \in \Gamma(X, F)$  con  $\theta(\gamma) = \gamma'$ .  $\square$

También necesitaremos la noción de grupos de cohomología con soporte compacto que a continuación definiremos

**Definición 3.8.** Sea  $X$  un esquema de tipo finito y separado sobre un campo  $k$ . Por un teorema de Nagata, ver [19] y [20], o [11], existe un esquema  $\overline{X}$  propio sobre  $k$  y una inmersión abierta  $j : X \rightarrow \overline{X}$ . Si  $F$  es una gavilla de grupos abelianos en  $X_{\text{ét}}$  se definen *los grupos de cohomología con soporte compacto* como:

$$H_c^q(X, F) = H^q(\overline{X}, j_!F)$$

para cada  $q \geq 0$ .

**Proposición 3.9.** Con las hipótesis en  $X$ ,  $\overline{X}$  y  $F$  como antes:

- (a) Los funtores  $H_c^p(X, -)$  forman un  $\delta$  funtor.
- (b) Para toda subvariedad completa  $Z$  de  $X$ , existe un isomorfismo canónico de  $\delta$ -funtores  $H_Z^p(X, -) \rightarrow H_c^p(X, -)$ .

DEMOSTRACIÓN. (a) Como  $j_!$  es exacto, dada una sucesión exacta  $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$  en  $X$ , esta da lugar a una sucesión exacta  $0 \rightarrow j_!F' \rightarrow j_!F \rightarrow j_!F'' \rightarrow 0$  en  $\overline{X}$  y esto da la propiedad requerida.

(b) Existe un morfismo canónico  $H_Z^0(X, F) \rightarrow H_c^0(X, F)$  para cada gavilla  $F$ , esto se sigue de [13] p. 93 en especial la definición del grupo  $\Gamma_c(X, F)$ , aplicando la propiedad universal de los funtores derivados se obtiene el morfismo canónico deseado.  $\square$

**Comentario 3.10.** Nótese que en esta definición los grupos de cohomología dependen de la inmersión abierta utilizada. Se probará despues que tales grupos no dependen de la inmersión abierta utilizada, siempre que nos restrinjamos a gavillas de torsión  $F$ , donde decimos que  $F$  es de *torsión* si  $F(U)$  es un grupo de torsión, para cada  $U \in X_{\text{ét}}$  casi compacto.

En el sitio  $X_{\text{ét}}$  podemos considerar gavillas no sólo de grupos abelianos, sino también gavillas más generales que definiremos a continuación.

**Definición 3.11.** Considere una gavilla de anillos conmutativos  $A$  en  $X_{\text{ét}}$ , y denotamos con  $G(X_{\text{ét}}, A)$  la categoría de  $A$ -módulos en  $X_{\text{ét}}$ . Dadas dos gavillas de  $A$ -módulos  $F_1$  y  $F_2$ ,  $\underline{\text{Hom}}_A(F_1, F_2)$  es la gavilla definida por:

$$U \mapsto \text{Hom}_{G(U, A|_U)}(F_1|_U, F_2|_U).$$

Dadas dos gavillas de  $A$ -módulos  $F_1$  y  $F_2$ , definimos la gavilla  $F_1 \otimes F_2$  como la gavilla asociada a la pregavilla  $U \mapsto F_1(U) \otimes_{A(U)} F_2(U)$ .

Para cada gavilla  $F_0$  de  $A$ -módulos, en  $X_{\text{ét}}$ , el funtor  $F \mapsto F \otimes_A F_0 : G(X_{\text{ét}}) \rightarrow G(X_{\text{ét}})$  es exacto derecho. Para una demostración de este hecho ver [13], en especial el capítulo II, proposición 3.20. La gavilla  $F_0$  de  $A$ -módulos se dice que es

plana si el funtor anterior es exacto izquierdo, así  $F_0$  es plana si y sólo si en las fibras es plana.

Finalmente se dice que una gavilla de  $A$ -módulos es *pseudocoherente* en un punto geométrico  $\bar{x}$  de  $X$  si existe una vecindad étale  $U \rightarrow X$  de  $\bar{x}$  y una sucesión exacta

$$(A|_U)^m \rightarrow (A|_U)^n \rightarrow F|_U \rightarrow 0$$

de gavillas en  $U_{\text{ét}}$ , con  $m, n \in \mathbb{Z}$  y  $n, m \geq 0$ .

La sucesión espectral siguiente es útil en el cálculo de grupos de cohomología étale, para una demostración de la existencia de tal sucesión espectral ver [13] capítulo III, teorema 1.18.

**Teorema 3.12** (La sucesión espectral de Leray). *Sea  $\pi : Y \rightarrow X$  un morfismo de esquemas. Para toda gavilla  $F$  en  $Y_{\text{ét}}$ , existe una sucesión espectral:*

$$H^r(X_{\text{ét}}, R^s \pi_* F) \Rightarrow H^{r+s}(Y_{\text{ét}}, F).$$

□

**Ejemplo 20.** Sea  $X$  un esquema entero, reducido, de dimensión 1 y propio sobre un campo  $k$  algebraicamente cerrado, es decir una curva completa y  $n$  un entero tal que  $\text{car}(k) \nmid n$ . Así,  $X$  tiene un punto genérico  $\eta$  y por lo tanto se tiene el morfismo canónico  $j : \eta \rightarrow X$ , además  $\mathbb{G}_{m,\eta}$  es el grupo de unidades del campo de fracciones  $k(X)$  de  $X$ , cuyo grado de trascendencia sobre  $k$  es 1. Para cada punto cerrado  $x$  de  $X$ , sea  $i_x : x \rightarrow X$  el morfismo canónico y  $\mathbb{Z}_x$  la gavilla constante de valor  $\mathbb{Z}$  en  $x$ . De este modo la sucesión siguiente, ver [13] capítulo II ejemplo 3.9 p. 73, es exacta:

$$(17) \quad 0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_{m,\eta} \rightarrow \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x \rightarrow 0.$$

**Lema 3.13.** *Para cada  $q > 0$  se tiene que  $R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta} = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Será suficiente probar que la fibra de  $R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta}$  en cada punto geométrico  $\bar{x}$  de  $X$ , es nula. Por el teorema 3.4 se tiene que

$$(R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta})_{\bar{x}} = H^q(\eta \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}}), \mathbb{G}_m).$$

Ahora si  $K$  es el campo de fracciones del anillo  $\mathcal{O}_{X,\bar{x}}$  entonces  $\text{Spec}(K) = \eta \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,\bar{x}})$ , además  $K$  es una extensión algebraica de  $k(X)$  de grado de trascendencia 1 sobre  $k$ , y aplicando el teorema Tsen, ver [2] p. 31, se tiene que  $H^q(\text{Spec}(K), \mathbb{G}_m) = 0$  y esto termina la demostración. □

**Lema 3.14.** *Para cada  $q > 0$ , se tiene que  $H^q(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) = 0$*

DEMOSTRACIÓN. Del lema 3.13 y de la sucesión espectral de Leray para  $j$ :

$$H^p(X, R^q j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) \Rightarrow H^{p+q}(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta}).$$

se tiene que  $H^q(X, j_* \mathbb{G}_{m,\eta}) = H^q(\eta, \mathbb{G}_{m,\eta})$  para cada  $q \geq 0$ , donde los grupos de la derecha son nulos por el teorema Tsen. □

**Lema 3.15.** *Para cada  $q > 0$  se tiene que  $H^q(X, \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x) = 0$ .*

DEMOSTRACIÓN. Considere un punto cerrado  $x$  de  $X$ , entonces la gavilla  $R^q i_{x*} \mathbb{Z}_x = 0$ , para  $q > 0$ , ya que por el teorema 3.4 se tiene que:

$$(R^q i_{x*} \mathbb{Z}_x)_{\overline{x_1}} = H^q(\widetilde{X}, \widetilde{\mathbb{Z}_x}).$$

donde  $\widetilde{X} = x \times_X \text{Spec}(\mathcal{O}_{X, \overline{x_1}})$ . Puesto que  $i_x$  es finito se tiene que, ver [2] p. 24 proposición 3.6,  $H^q(\widetilde{X}, \widetilde{\mathbb{Z}_x}) = 0$  para cada punto geométrico  $\overline{x_1}$  de  $X$ ; esto prueba la afirmación anterior.

De la sucesión espectral de Leray para  $i_x$ :

$$H^p(X, R^q i_{x*} \mathbb{Z}_x) \Rightarrow H^{p+q}(x, \mathbb{Z}_x).$$

se tiene que  $H^q(X, i_{x*} \mathbb{Z}_x) = H^q(x, \mathbb{Z}_x)$  y como  $x = \text{Spec}(k(x))$  y  $k(x)$  es algebraicamente cerrado, entonces  $H^q(x, \mathbb{Z}_x) = 0$ . Puesto que la cohomología conmuta con sumas directas, ver [13] capítulo III comentario 3.6 inciso (d), se tiene que  $H^q(X, \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x) = \bigoplus_{x \in X} H^q(X, i_{x*} \mathbb{Z}_x) = 0$  para cada  $q > 0$ .  $\square$

**Proposición 3.16.** *Sea  $k$  un campo algebraicamente cerrado y  $X$  una curva proyectiva no singular conexa sobre  $k$ . Entonces*

- (a)  $H^0(X, \mathbb{G}_m) = k^*$ .
- (b)  $H^1(X, \mathbb{G}_m) = \text{Pic}(X)$ .
- (c)  $H^q(X, \mathbb{G}_m) = 0$  para  $q \geq 2$ .

DEMOSTRACIÓN. De la sucesión exacta (17) y de los lemas 3.14 y 3.15 se obtiene, por medio de la sucesión larga exacta de cohomología, las igualdades  $H^q(X, \mathbb{G}_m) = 0$  para cada  $q \geq 2$ .

Y también la sucesión exacta siguiente:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^0(X, j_* \mathbb{G}_m, \eta) \rightarrow H^0(X, \bigoplus_{x \in X} i_{x*} \mathbb{Z}_x) \rightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow 0.$$

que se puede reescribir como sigue

$$0 \rightarrow k^* \rightarrow k(X)^* \rightarrow \text{Div}(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow 0.$$

y de esta última sucesión exacta se sigue que  $H^1(X, \mathbb{G}_m) = \text{Pic}(X)$ .  $\square$

En lo que sigue, a menos que se especifique otra cosa, la palabra gavilla quiere decir gavilla de grupos abelianos.

**Definición 3.17.** Una gavilla  $F$ , en  $X_{\text{ét}}$ , es *finita* si  $F(U)$  es finito para cada  $U \in X_{\text{ét}}$  cuasi compacto. Se dice que  $F$  tiene *fibras finitas* si  $F_{\overline{x}}$  es finito para todo punto geométrico  $\overline{x}$  de  $X$ . Diremos que  $F$  es *localmente constante* si existe un cubriente  $\{U_i \rightarrow X\}$ , en  $X_{\text{ét}}$ , tal que  $F|_{U_i}$  es la gavilla constante.

**Lema 3.18.** *Sea  $F$  localmente constante en  $X_{\text{ét}}$ . Si  $F$  tiene fibras finitas, entonces  $F$  es finita.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\{U_i \rightarrow X\}$  un cubriente tal que las restricciones  $F|_{U_i}$  son constantes. Entonces el grupo abstracto que corresponde a  $F|_{U_i}$  es finito, puesto que una pregavilla constante tiene fibras isomorfas al grupo abeliano que define a tal pregavilla y, su gavilla asociada tiene fibras isomorfas a las fibras de la pregavilla constante considerada. Ahora dado  $U \in X_{\text{ét}}$ , cuasi compacto, entonces  $\{W_i = U_i \times_X U \rightarrow X\}$  es un cubriente de  $U$ . Por la cuasi compactidad de  $U$ , podemos suponer que el cubriente es finito, es decir sólo tiene un número finito de  $W_i$ , y como  $F$  es gavilla la sucesión siguiente es exacta:

$$F(U) \rightarrow \prod F(W_i) \rightrightarrows \prod F(W_i \times_U W_j)$$

Además se observa, del producto fibrado siguiente

$$\begin{array}{ccc} W_i & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_i & \longrightarrow & X \end{array}$$

que  $F(W_i) = F|_{U_i}(W_i)$ , es decir,  $F(U)$  es un subgrupo de un producto finito de grupos finitos, y así  $F$  es finita.  $\square$

**Definición 3.19.** Una gavilla  $F$  en  $X_{\text{ét}}$  se dice que es *construible* si:

- (a) Para toda inmersión cerrada  $i : Z \hookrightarrow X$ , con  $Z$  irreducible, existe un subesquema no vacío  $U \subseteq Z$ , tal que  $(i^*F)|_U$  es localmente constante.
- (b)  $F$  tiene fibras finitas.

En particular, del lema anterior se sigue que una gavilla construible es finita.

Ahora, considere la categoría  $G(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/(n))$  de gavillas de  $\mathbb{Z}/(n)$ -módulos. Una gavilla  $F$  de  $\mathbb{Z}/(n)$ -módulos es *localmente constante (construible)*, si la gavilla  $F$ , vista como gavilla de grupos abelianos, es localmente constante (construible). Es *localmente libre* (de rango finito) si existe un cubriente  $\{U_i \rightarrow X\}$ , en  $X_{\text{ét}}$ , tal que  $F|_{U_i}$  es una gavilla constante definida por un módulo libre (de rango finito) para cada  $i$ . Si  $F$  es localmente constante y construible, se define

$$F^\vee = \underline{\text{Hom}}(F, \mathbb{Z}/(n)).$$

**Definición 3.20.** Sea  $X$  un esquema cuyas características residuales no sean divisibles por  $n$ . Entonces  $\mu_n$  es una gavilla localmente libre de  $\mathbb{Z}/(n)$ -módulos de rango uno, en  $X_{\text{ét}}$ , y definimos:

$$(\mathbb{Z}/(n))(r) = \begin{cases} \overbrace{\mu_n \otimes \dots \otimes \mu_n}^{r \text{ veces}} & \text{si } r > 0. \\ \mathbb{Z}/(n) & \text{si } r = 0. \\ \mathbb{Z}/(n)(-r)^\vee & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

Para cada gavilla  $F$ , de  $\mathbb{Z}/(n)$ -módulos, el *r-ésimo torcimiento (de Tate)* de  $F$  se define por  $F(r) = F \otimes (\mathbb{Z}/(n))(r)$ .

Sea  $\ell$  un número primo. Una *gavilla  $\ell$ -ádica* (o gavilla de  $\mathbb{Z}_\ell$ -módulos) en  $X_{\text{ét}}$  es un sistema proyectivo  $F = (F_n, \varphi_n : F_{n+1} \rightarrow F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de gavillas y morfismos

de gavillas, en  $X_{\text{ét}}$ , tal que los morfismos dados  $\varphi_n : F_{n+1} \rightarrow F_n$  inducen isomorfismos  $\psi_n : F_{n+1}/\ell^n F_{n+1} \rightarrow F_n$ . Nótese que el isomorfismo anterior indica que cada  $F_n$ ,  $n \geq 1$ , es una gavilla de  $\mathbb{Z}/(\ell^n)$ -módulos, ya que si  $U \in X_{\text{ét}}$  y  $s \in F_n(U)$  entonces  $(\psi_{n\bar{x}})^{-1}(\ell^n s_{\bar{x}}) = 0$  por lo tanto  $\ell^n s_{\bar{x}} = 0$  para cada punto geométrico,  $\bar{x}$ , de  $X$ , así, por el lema 2.11, se tiene que  $\ell^n s = 0$ , es decir,  $F_n(U)$  es un  $\mathbb{Z}/(\ell^n)$ -módulo, esto prueba la afirmación anterior.

Los grupos de cohomología de una gavilla  $\ell$ -ádica,  $F$ , se definen mediante

$$H^r(X_{\text{ét}}, F) = \varprojlim H^r(X_{\text{ét}}, F_n).$$

donde  $H^r(X_{\text{ét}}, F_n)$  son los grupos de cohomología étale de  $X$  con coeficientes en  $F_n$ .

Una gavilla  $\ell$ -ádica  $F$  es *construible* si cada  $F_n$  es construible. Si  $F = (F_n)$  es una gavilla construible de  $\mathbb{Z}_\ell$ -módulos entonces  $F \otimes \mathbb{Q}_\ell = (F_n \otimes \mathbb{Q}_\ell)$  es una gavilla de  $\mathbb{Q}_\ell$ -espacios vectoriales y es una gavilla construible. Una gavilla construible de  $\mathbb{Q}_\ell$ -espacios vectoriales es una gavilla de la forma  $F \otimes \mathbb{Q}_\ell$ , con  $F$  una gavilla de  $\mathbb{Z}_\ell$ -módulos. Para estas últimas gavillas definimos sus grupos de cohomología de la manera siguiente:

$$H^r(X_{\text{ét}}, F \otimes \mathbb{Q}_\ell) = (\varprojlim H^r(X_{\text{ét}}, F_n)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

**El morfismo de traza.** Antes de probar el teorema de dualidad de Poincaré, necesitaremos definir el morfismo de traza, lo cual se hará en los lemas siguientes.

**Lema 3.21.** *Sea  $\pi : X' \rightarrow X$  un morfismo étale finito de grado constante  $d$ . Para cada gavilla  $F$  en  $X$  existe el morfismo de traza  $\text{tr} : \pi_* \pi^* F \rightarrow F$ , que es functorial en  $F$ , y tal que  $\phi \mapsto \text{tr} \circ \pi_*(\phi)$  es un isomorfismo*

$$\text{Hom}_{X'}(F', \pi^* F) \rightarrow \text{Hom}_X(\pi_* F', F)$$

para cada  $F'$  en  $X'$ . Así,  $\pi_* = \pi_!$ , es decir,  $\pi_*$  es el adjunto izquierdo de  $\pi^*$  y  $\text{tr}$  es el morfismo de adjunción. Las composiciones

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{-d-} & F \\ \downarrow & \nearrow \text{tr} & \\ \pi_* \pi^* F & & \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} H^r(X, F) & \xrightarrow{-d-} & H^r(X, F) \\ \downarrow & \nearrow \text{tr} & \\ H^r(X', F|_{X'}) & & \end{array}$$

son multiplicaciones por  $d$ , donde  $\pi_* \pi^* F \rightarrow F$  es  $\text{tr}$  y  $H^r(X', F|_{X'}) \rightarrow H^r(X, F)$  es inducido por  $\text{tr}$ .

DEMOSTRACIÓN. Por el lema (4.4.1.8) de [18] p. 77, existe un morfismo de Galois  $X'' \rightarrow X$  con grupo  $G$  y un morfismo  $X'' \rightarrow X'$  tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{array}{ccc} X'' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \pi & \\ X' & & \end{array}$$

Entonces  $X'' \rightarrow X'$  es un morfismo de Galois, con grupo  $H \subseteq G$ , y nótese que  $[G : H] = d$ . Para cada  $U$  étale sobre  $X$  considere el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} U'' = X'' \times_X U & \xrightarrow{\psi'} & U' = X' \times_X U & \xrightarrow{\psi} & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X'' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & X \end{array}$$

De este diagrama se sigue que  $\psi \circ \psi' : U'' \rightarrow U$  es un morfismo de Galois con grupo  $G$  y que  $\psi' : U'' \rightarrow U'$  es un morfismo de Galois con grupo  $H$ . Por lo tanto se obtienen los siguientes morfismos inyectivos:

$$\Gamma(U, F) \hookrightarrow \Gamma(U', F) \hookrightarrow \Gamma(U'', F)$$

y, por la proposición 2.27, se tiene que

$$\Gamma(U, F) \cong \Gamma(U'', F)^G$$

y

$$(18) \quad \Gamma(U', F) \cong \Gamma(U'', F)^H$$

Para  $s \in \Gamma(U, \pi_* \pi^* F) = \Gamma(U', F)$  definimos:

$$\text{tr}(s) = \sum_{\sigma \in G/H} \sigma(s|_{U''})$$

donde  $\sigma(s|_{U''}) = F(\alpha(\sigma))F(\psi')(s)$ , (ver definición de morfismo de Galois). Este elemento es fijado por  $G$  y puede identificarse con un elemento de  $\Gamma(U, F)$ . Nótese que  $\text{tr}$  está bien definido y define un morfismo  $\pi_* \pi^* F \rightarrow F$  cuya composición con  $F \rightarrow \pi_* \pi^* F$  es multiplicación por  $d$ , ya que si  $s \in F(U)$  entonces:

$$\text{tr}(F(\psi)(s)) = \sum \sigma(F(\psi)(s) | U'') = \sum_{\sigma \in G/H} s = ds$$

donde en la penúltima igualdad utilizamos el isomorfismo (18), y en la última el hecho de que  $[G : H] = d$ .

Para mostrar que  $\pi_* \cong \pi_!$  ver [3], en especial capítulo I sección 8 lema 8.4.

Sea  $F$  una gavilla en  $X_{\text{ét}}$ . Sea

$$0 \rightarrow F \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

una resolución inyectiva de  $F$ , así se tienen resoluciones inyectivas para  $\pi^*F$  y  $\pi_*\pi^*F$ , de este modo obtenemos el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow \dots \\
& & \text{adj} \downarrow & & \text{adj} \downarrow & & \text{adj} \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \pi_*\pi^*F & \longrightarrow & \pi_*\pi^*I^0 & \longrightarrow & \pi_*\pi^*I^1 \longrightarrow \dots \\
& & \text{tr} \downarrow & & \text{tr} \downarrow & & \text{tr} \downarrow \\
0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow \dots
\end{array}$$

donde  $\text{adj}$  es el morfismo de adjunción, nótese que la composición  $\text{tr} \circ \text{adj}$  es multiplicar por  $d$ . Aplicando el funtor de secciones globales al diagrama anterior obtenemos que:

$$H^r(X, F) \rightarrow H^r(X, \pi_*\pi^*F) \rightarrow H^r(X, F) \text{ es multiplicar por } d$$

pero como  $H^r(X, \pi_*\pi^*F) = H^r(X', F|_{X'})$ , entonces

$$H^r(X, F) \rightarrow H^r(X', F|_{X'}) \rightarrow H^r(X, F) \text{ es multiplicar por } d$$

y esto termina la demostración.  $\square$

**Proposición 3.22.** *Sea  $\pi : X' \rightarrow X$  un morfismo étale separado y sea  $X' \hookrightarrow \overline{X'} \hookrightarrow X$  una factorización de  $\pi$ , con  $j : X' \hookrightarrow \overline{X'}$  una inmersión abierta y  $\overline{\pi} : \overline{X'} \hookrightarrow X$  finito. Entonces  $\pi_! = \overline{\pi}_*j_!$  y definimos  $\text{tr} : \pi_!\pi^*F \rightarrow F$  como el morfismo de adjunción. Para gavillas  $F$  en  $X$  y  $F'$  en  $X'$ ,*

$$\text{Ext}_{X'}^r(F', \pi^*F) \rightarrow \text{Ext}_X^r(\pi_!F', \pi_!\pi^*F) \rightarrow \text{Ext}_{X'}^r(\pi_!F', F)$$

es un isomorfismo y el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H^r(\overline{X'}, j_!F') \times \text{Ext}_{X'}^s(F', \pi^*F) & \longrightarrow & H^{r+s}(\overline{X'}, j_!\pi^*F) \\
\approx \uparrow & & \approx \downarrow \\
H^r(X, \pi_!F') \times \text{Ext}_X^s(\pi_!F', F) & \longrightarrow & H^{r+s}(X, F)
\end{array}$$

conmuta. Los morfismos verticales en el diagrama anterior son isomorfismos.

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $F_1$  una gavilla en  $X$ ,  $F_2$  y  $F_3$  gavillas en  $\overline{X'}$ , y  $\phi : F_1 \hookrightarrow \pi_*F_2$ ,  $\psi : F_2 \rightarrow F_3$  morfismos. Entonces la composición de los morfismos siguientes

$$\text{adj} : F_1 \rightarrow \pi_*\pi^*F_1 \text{ y } \overline{\pi}_*(\psi\phi') : \pi_*\pi^*F_1 \rightarrow \pi_*F_3$$

es el morfismo siguiente

$$\overline{\pi}_*(\psi)\phi : F_1 \rightarrow \pi_*F_3$$

donde  $\phi' : \pi^*F_1 \rightarrow F_2$  corresponde, por adjunción, a  $\phi$ . En efecto,  $\phi'$  es el único morfismo  $\pi^*F_1 \rightarrow F_2$  tal que  $\overline{\pi}_*(\phi') \circ \text{can} = \phi$ , por lo tanto el diagrama siguiente



$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\overline{X'}}(\overline{\pi}^* F_1, F_2) \times \mathrm{Hom}_{\overline{X'}}(F_2, F_3) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\overline{X'}}(\overline{\pi}^* F_1, F_3) \\
\uparrow \approx & & \downarrow \approx \\
\mathrm{Hom}_X(F_1, \overline{\pi}_* F_2) \times \mathrm{Hom}_X(\overline{\pi}_* F_2, \overline{\pi}_* F_3) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(F_1, \overline{\pi}_* F_3)
\end{array}$$

conmuta, donde los apareamientos están dados por la composición de morfismos, es decir, para el renglón de arriba  $(\alpha, \beta) \mapsto \beta \circ \alpha$  y para el renglón inferior el apareamiento se define de modo similar.

Sean  $F \rightarrow I^\bullet$  y  $j_! F' \rightarrow J^\bullet$  resoluciones inyectivas de  $F$  y  $j_! F'$ , respectivamente. Considérese el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\overline{X'}}(\mathbb{Z}, J^\bullet[r]) \times \mathrm{Hom}_{\overline{X'}}(J^\bullet[r], j_! \pi^* I^\bullet[r+s]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\overline{X'}}(\mathbb{Z}, j_! \pi^* I^\bullet[r+s]) \\
\uparrow \approx & & \downarrow \approx \\
\mathrm{Hom}_X(\mathbb{Z}, \overline{\pi}_* J^\bullet[r]) \times \mathrm{Hom}_X(\overline{\pi}_* J^\bullet[r], \pi_! \pi^* I^\bullet[r+s]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(\mathbb{Z}, \pi_! \pi^* I^\bullet[r+s]) \\
\parallel & & \downarrow \mathrm{tr} \\
\mathrm{Hom}_X(\mathbb{Z}, \overline{\pi}_* J^\bullet[r]) \times \mathrm{Hom}_X(\overline{\pi}_* J^\bullet[r], I^\bullet[r+s]) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_X(\mathbb{Z}, I^\bullet[r+s])
\end{array}$$

Por los comentarios anteriores, la parte superior del diagrama anterior conmuta, y la parte inferior conmuta por la funtorialidad de  $\mathrm{tr}$ . Pasando a clases de homotopía en todo el diagrama anterior y usando el hecho de que  $\pi_! F' \rightarrow \overline{\pi}_* J^\bullet$  es una resolución inyectiva de  $\pi_! F'$ , se obtiene el diagrama requerido.

Para demostrar que  $\pi_! \cong \overline{\pi}_* j_!$  ver la referencia [3], en especial capítulo I sección 8 lema 8.4.  $\square$

**Comentario 3.23.** Sea  $\pi : X' \rightarrow X$  un morfismo finito y étale de grado constante  $d$  que es parte de un cuadrado cartesiano (producto fibrado)

$$\begin{array}{ccc}
X' & \xrightarrow{j'} & \overline{X}' \\
\pi \downarrow & & \downarrow \overline{\pi} \\
X & \xrightarrow{j} & \overline{X}
\end{array}$$

con  $\overline{\pi}$  finito, de grado constante  $d$ , y  $j, j'$  inmersiones abiertas. Para cada gavilla  $F$  en  $X$  se tiene que, por el lema 3.21:

$$\left( F \rightarrow \pi_* \pi^* F \rightarrow F \right) = \text{multiplicar por } d$$

Obsérvese que  $\overline{\pi}_* j'_! = j_! \pi_*$ , para ver esto considere una gavilla  $G$  en  $X'_{\text{ét}}$ , sea  $\overline{z} \rightarrow \overline{X}$  un punto geométrico de  $\overline{X}$ , entonces  $\overline{\pi}_* j'_!(G)_{\overline{z}} = (j'_!(G)_{\overline{z}'})^d$ , por lo tanto tenemos dos casos:  $z \in X$  o  $z \in \overline{X}' - X'$ , en el primer caso se tiene que  $(j'_!(G)_{\overline{z}'})^d = G_{\overline{z}'}^d = j_! \pi_* G_{\overline{z}}$ , en el segundo tenemos que  $(j'_!(G)_{\overline{z}'})^d = 0 =$

$j_! \pi_* G_{\bar{z}}$ , esto prueba lo afirmado, y por lo tanto

$$\left( j_! F \rightarrow \bar{\pi}_* j'_! \pi^* F \rightarrow j_! F \right) = \text{multiplicación por } d.$$

Si  $\bar{X}$  es una variedad completa, esto último implica que estos morfismos inducen morfismos en cohomología:

$$\left( H_c^r(X, F) \rightarrow H_c^r(X', F|_{X'}) \rightarrow H_c^r(X, F) \right) = \text{multiplicación por } d.$$

Además, el mismo argumento de la proposición 3.22 muestra que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H_c^r(X', F') \times \text{Ext}_{X'}^s(F', \pi^* F) & \longrightarrow & H_c^{r+s}(X', \pi^* F) \\ \uparrow \approx & & \downarrow \text{tr} \\ H_c^r(X, \pi_* F') \times \text{Ext}_X^s(\pi_* F', F) & \longrightarrow & H_c^{r+s}(X, F) \end{array}$$

conmuta.

### 3.2. Dualidad de Poincaré

En lo que sigue, a menos que se especifique otra cosa,  $X$  denota una curva proyectiva lisa.

Usamos la notación  $\text{Ext}_{U_{\text{ét}}}^r(F, F')$  en lugar de  $\text{Ext}_{\mathbb{G}(U_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/(n))}^r(F, F')$

**Teorema 3.24** (Dualidad de Poincaré para curvas). *Supongamos que  $k$  es un campo algebraicamente cerrado y que  $n$  es un entero coprimo con  $\text{car}(k)$ .*

(a) *Para cada subesquema abierto, no vacío,  $U$  de  $X$  existe un isomorfismo canónico*

$$\eta(U) : H_c^2(U, \mu_n) \rightarrow \mathbb{Z}/(n)$$

(b) *Para cada gavilla construible  $F$  de  $\mathbb{Z}/(n)$ -módulos, dado un subesquema abierto, no vacío,  $U$  de  $X$ , los grupos  $H_c^r(U, F)$  y  $\text{Ext}_U^{2-r}(F, \mu_n)$  son finitos para todo  $r$  y se anulan para  $r > 2$ . El apareamiento canónico*

$$H_c^r(U, F) \times \text{Ext}_U^{2-r}(F, \mu_n) \rightarrow H_c^2(U, \mu_n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/(n)$$

*es no degenerado.*

DEMOSTRACIÓN. (a): Primero se define  $\eta(X)$ . Se recuerda que la función grado

$$\text{gr} : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

es suprayectiva con núcleo  $J_X(k)$ , donde  $J_X$  es la Jacobiana de  $X$  y que  $J_X(k)$  es divisible por  $n$ , ver [16] p. 42. Puesto que  $H^1(X, \mathbb{G}_m) = \text{Pic}(X)$  y  $H^2(X, \mathbb{G}_m) = 0$  (ver [13] p. 107 y 108), utilizando la sucesión de Kummer y la sucesión larga de cohomología asociada se obtiene el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(X, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{n} & H^1(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(X, \mu_n) & \longrightarrow & 0 \\ \text{gr} \downarrow & & \text{gr} \downarrow & & \eta(X) \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{n} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow 0 \end{array}$$

y, por el lema de la serpiente, se tiene la sucesión exacta

$$\ker(\text{gr}) \rightarrow \ker(\text{gr}) \rightarrow \ker(\eta(X)) \rightarrow \text{coker}(\text{gr}) \rightarrow \text{coker}(\text{gr}) \rightarrow \text{coker}(\eta(X)) \rightarrow 0$$

ahora  $\text{coker}(\text{gr}) = 0$ , puesto que la función  $\text{gr}$  es suprayectiva, además como  $\ker(\text{gr})$  es divisible por  $n$  se tiene que la imagen del primer morfismo de la sucesión anterior es 0, así la sucesión anterior se transforma en la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \ker(\eta(X)) \rightarrow 0 \rightarrow \text{coker}(\eta(X)) \rightarrow 0$$

por lo tanto  $\eta(X)$  es un isomorfismo.

Si  $U \subseteq X$  es abierto, tenemos la sucesión exacta siguiente, que se obtiene del comentario 3.5

$$\dots \rightarrow H_c^r(U, \mu_n) \rightarrow H^r(X, \mu_n) \rightarrow H^r(X, i_* i^* \mu_n) \rightarrow \dots$$

donde  $i$  es la inmersión cerrada  $X - U \hookrightarrow X$ . Esta sucesión muestra que  $H_c^2(U, \mu_n) \rightarrow H^2(X, \mu_n)$  es un isomorfismo, puesto que  $X - U$  es discreto y  $H^r(X, i_* i^* \mu_n) \cong H^r(X - U, i^* \mu_n) = 0$  para  $r > 0$ , y se define  $\eta(U)$  como la composición de  $\eta(X)$  y este último isomorfismo. De esta manera  $\eta(U)$  es el único isomorfismo que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccc} H_c^1(U, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\text{canon}} & H^1(X, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\text{gr}} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & & & \downarrow \text{canon} \\ H_c^2(U, \mu_n) & \xrightarrow{\eta(U)} & & & \mathbb{Z}/(n) \end{array}$$

Si  $V \subseteq U \subseteq X$ , entonces se tiene que

$$\begin{array}{ccc} H_c^2(V, \mu_n) & \xrightarrow{\eta(V)} & \mathbb{Z}/(n) \\ \downarrow & & \parallel \\ H_c^2(U, \mu_n) & \xrightarrow{\eta(U)} & \mathbb{Z}/(n) \end{array}$$

conmuta.

Será necesaria otra descripción de  $\eta(U)$ . Sea  $i : z \hookrightarrow U$  la inclusión de algún punto cerrado en  $U$ , y sea  $g : \text{Spec}(K) \hookrightarrow U$  el punto genérico. Entonces  $R^s g_* \mathbb{G}_{m,K} = 0$  para  $s > 0$ , ver [13] capítulo III 2.22, e  $i^! g_* = 0$ , la última afirmación se sigue de la definición del funtor  $i^!$ , ver el comentario 3.5. De esto y la sucesión espectral

$$R^r i^! R^s g_* \mathbb{G}_{m,K} \Rightarrow R^{r+s} (i^! g_*) \mathbb{G}_{m,K} = 0$$

se sigue que  $(R^r i^!)(g_* \mathbb{G}_{m,K}) = 0$  para todo  $r$ . Un argumento similar demuestra que:

$$(R^s i^!) i_* \mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } s = 0, \\ 0 & \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

Así, de la sucesión exacta siguiente, ver [13] p. 73

$$0 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow g_* \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \bigoplus i_{x*} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

se sigue que:

$$R^s i^! \mathbb{G}_m = \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{si } s = 1. \\ 0 & \text{si } s \geq 2. \end{cases}$$

La sucesión espectral

$$H^r(z, R^s i^! \mathbb{G}_m) \Rightarrow H_z^{r+s}(U, \mathbb{G}_m)$$

demuestra que  $H_z^r(U, \mathbb{G}_m) = 0$  para  $r \neq 1$  y que existe un isomorfismo  $\zeta : H_z^1(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Si se identifica  $H_z^1(U, \mathbb{G}_m)$  con  $H_z^1(X, \mathbb{G}_m)$ , por la proposición 3.7, entonces  $\zeta$  es el único isomorfismo que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma(X - z, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_z^1(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^1(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^1(X - z, \mathbb{G}_m) \\ \downarrow & & \downarrow \zeta & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(X - z, \mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\text{ord}_z} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(X - z) \end{array}$$

Donde  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}(X)$  lleva 1 a la clase de divisores de  $z$ . Como

$$H_z^1(U, \mathbb{G}_m) (= H_z^1(X, \mathbb{G}_m)) \rightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m)$$

es la composición

$$H_z^1(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_c^1(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m)$$

y  $\zeta$  es la composición

$$H_z^1(U, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow \mathbb{Z}$$

vemos que  $\eta(U)$  es el único morfismo que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} H_z^1(U, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_z^2(U, \mu_n) & \longrightarrow & H_c^2(U, \mu_n) \xrightarrow{\eta(U)} \mathbb{Z}/(n) \end{array}$$

(b): Para una gavilla  $F$  en  $U$  se escribe  $\phi^r(U, F)$  o simplemente  $\phi^r(F)$  para el morfismo  $\text{Ext}_U^{2-r}(F, \mu_n) \rightarrow H_c^r(U, F)^\vee$  ( $\vee = \text{dual}$ ) definido por el apareamiento en (b). La prueba consta de varios pasos:

*Paso 1.* Sea  $\pi : U' \rightarrow U$  un morfismo de Galois de curvas. Para una gavilla  $F$  en  $U'$ ,  $\phi^r(U', F)$  es un isomorfismo si y sólo si  $\phi^r(U, \pi_* F)$  es un isomorfismo

**DEMOSTRACIÓN.** El morfismo anterior se extiende a un morfismo finito plano  $\pi : X' \rightarrow X$  de las cerraduras proyectivas lisas de  $U'$  y  $U$ , respectivamente. Utilizando el comentario 3.23, se obtiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_c^r(U', F) \times \text{Ext}_{U'}^{2-r}(F, \mu_n) & \longrightarrow & H_c^2(U', \mu_n) \\ \uparrow \approx & & \downarrow \text{tr} \\ H_c^r(U, \pi_* F) \times \text{Ext}_U^{2-r}(\pi_* F, \mu_n) & \longrightarrow & H_c^2(X, \mu_n) \end{array}$$

por lo que basta probar que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_c^2(U', \mu_n) & \xrightarrow{\eta(U')} & \mathbb{Z}/(n) \\ \text{tr} \downarrow & & \parallel \\ H_c^2(U, \mu_n) & \xrightarrow{\eta(U)} & \mathbb{Z}/(n) \end{array}$$

conmuta. Para esto, note que existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_c^1(U', \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \text{Pic}(X') \\ \text{tr} \downarrow & & \downarrow \text{tr} \\ H_c^1(U, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \text{Pic}(X) \end{array}$$

donde  $\text{tr} : \text{Pic}(X') \rightarrow \text{Pic}(X)$  es inducida por la función en los divisores

$$\sum n_z z \mapsto \sum n_z \bar{\pi}(z)$$

La conmutatividad del diagrama anterior se sigue de la igualdad  $\text{tr}(\text{div}(f)) = \text{div}(\text{norm}(f))$ . Puesto que  $\text{tr} : \text{Pic}(X') \rightarrow \text{Pic}(X)$  preserva grados, la conmutatividad del diagrama requerido se sigue de la primera descripción del morfismo  $\eta(U)$ .  $\square$

*Paso 2.* El teorema es verdadero si  $F$  tiene soporte en un subesquema cerrado propio de  $U$ .

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que tenemos la gavilla  $i_*F$ , donde  $i : z \hookrightarrow U$  es la inclusión de un punto cerrado y  $F$  es una gavilla en  $z_{\text{ét}}$ . Puesto que  $i$  es un morfismo finito se tiene que:

$$H_c^r(U, i_*F) = H^r(X, j_!i_*F) = H^r(X, i_*F) \approx H^r(z, F) = 0$$

para  $r \neq 0$ . Así, debemos mostrar que  $\text{Ext}_U^s(i_*F, \mu_n) = 0$ , para  $s \neq 2$ . Se tiene que

$$R^s i^! \mathbb{G}_m = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } s = 1, \\ 0 & \text{si } s \neq 1. \end{cases}$$

(ver la demostración de (a)). Además

$$R^s i^! \mu_n = \begin{cases} \mathbb{Z}/(n) & \text{si } s = 2, \\ 0 & \text{si } s \neq 2. \end{cases}$$

De la sucesión espectral

$$\text{Ext}_z^r(F, R^s i^! \mu_n) \Rightarrow \text{Ext}_U^{r+s}(i_*F, \mu_n)$$

se sigue que  $\text{Ext}_U^2(i_*F, \mu_n) \rightarrow \text{Hom}_z(F, \mathbb{Z}/(n))$  es un isomorfismo y que  $\text{Ext}_U^2(i_*F, \mu_n) = \text{Ext}_U^{s-2}(F, \mathbb{Z}/(n)) = 0$ , para  $s \neq 2$ .

Considere ahora el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
H_c^0(U, i_*F) \times \text{Ext}_U^2(i_*F, \mu_n) & \longrightarrow & H_c^2(U, \mu_n) & \xrightarrow{\eta(U)} & \mathbb{Z}/(n) \\
\uparrow \approx & & \uparrow \approx & & \parallel \\
H_z^0(U, i_*F) \times \text{Ext}_U^2(i_*F, \mu_n) & \longrightarrow & H_z^2(U, \mu_n) & & \parallel \\
\approx \downarrow & & \approx \downarrow & & \parallel \\
H^0(z, F) \times \text{Hom}_z(F, \mathbb{Z}/(n)) & \longrightarrow & H^0(z, \mathbb{Z}/(n)) & = & \mathbb{Z}/(n)
\end{array}$$

Los apareamientos son los apareamientos canónicos de los Ext definidos anteriormente (nótese que  $H_z^r(U, G) = \text{Ext}_U^r(i_*\mathbb{Z}/(n), G)$ , esto se debe al comentario 3.2 y a la proposición 3.14 de [13] capítulo II). Puesto que el apareamiento inferior es no degenerado, resta mostrar que el diagrama conmuta. Que los apareamientos superiores son iguales puede verse interpretando todo como Ext en  $X$ ; que los apareamientos inferiores son iguales se sigue de que el morfismo  $\text{Ext}_U^2(i_*F, \mu_n) \rightarrow \text{Hom}_z(F, \mathbb{Z}/(n))$  es functorial en  $F$ . Y que el rectángulo derecho conmuta se sigue de la segunda descripción de  $\eta(U)$ .  $\square$

*Paso 3.* Sea  $V$  una subvariedad abierta de  $U$ ;  $\phi^r(U, F)$  es un isomorfismo si  $\phi^r(V, F | V)$  es un isomorfismo y  $\phi^{r+1}(V, F | V)$  es suprayectiva;  $\phi^r(V, F | V)$  es un isomorfismo si  $\phi^r(U, F)$  es un isomorfismo y  $\phi^{r-1}(U, F)$  es inyectiva

DEMOSTRACIÓN. Sea  $j : V \hookrightarrow U$  una inmersión abierta e  $i : Z \hookrightarrow U$  la inmersión cerrada complementaria. La sucesión exacta de gavillas en  $U$ ,

$$0 \rightarrow F_V \rightarrow F \rightarrow F_Z \rightarrow 0$$

donde  $F_V = j_!(F | V)$  y  $F_Z = i_*i^*F$ , que se obtiene de la sucesión 3.5, da lugar al diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \text{Ext}_U^{2-r}(F_Z, \mu_n) & \longrightarrow & \text{Ext}_U^{2-r}(F, \mu_n) & \longrightarrow & \text{Ext}_U^{2-r}(F_V, \mu_n) \longrightarrow \cdots \\
& & \phi^r(F_Z) \downarrow & & \downarrow \phi^r(F) & & \downarrow \phi^r(F_V) \\
\cdots & \longrightarrow & H_c^r(U, F_Z)^\vee & \longrightarrow & H_c^r(U, F)^\vee & \longrightarrow & H_c^r(U, F_V)^\vee \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Por definición  $H_c^r(U, F_V) = H_c^r(V, F | V)$  y  $\text{Ext}_U^r(F_V, \mu_n) = \text{Ext}_V^r(F | V, j^*\mu_n)$  puesto que  $j^*$  es exacto, preserva inyectivos y es adjunto a  $j_!$ . Además,  $\phi^r(U, F_V)$  se puede identificar con  $\phi^r(V, F | V)$  puesto que  $\eta(V)$  y  $\eta(U)$  son compatibles. Como  $\phi^r(F_Z)$  es un isomorfismo, para cada  $r$ , por el paso 2, así el lema del quinto termina la demostración.  $\square$

*Paso 4.* El grupo  $H^r(U, F) = 0$  para  $r > 2$ . Así  $H_c^r(U, F) = 0$  para  $r > 2$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $g : \text{Spec}(K) \hookrightarrow U$  la inclusión del punto genérico, y considere una gavilla construible  $F_0$  en  $\text{Spec}(K)$ . Ya sabemos que  $(R^s g_* F_0)_{\bar{x}} = H^s(K_{\bar{x}}, F_0)$  para todo  $x \in X$ , donde  $K_{\bar{x}}$  es el campo de fracciones del anillo estrictamente local en  $x$ . Como  $K_{\bar{x}} = K^{sep}$  si  $x$  es el punto genérico, toda sección de  $R^s g_* F_0$  tiene soporte en un subconjunto propio y cerrado de  $U$  para  $s > 0$ , y  $K_{\bar{x}}$  tiene grado de trascendencia uno sobre  $k$ ; un teorema de Tate, [21], Thm. 28,

p. 119, muestra que  $R^s g_* F_0 = 0$  para  $s > 1$ . Así en la sucesión espectral de Leray  $H^r(U, R^s g_* F_0) \Rightarrow H^{r+s}(K, F_0)$ , casi todos los términos del lado izquierdo son cero con excepción, tal vez, de  $s = 0$  o  $(r, s) = (0, 1)$ . Como  $H^r(K, F_0) = 0$  para  $r > 1$ , ver [21], esto muestra que  $H^r(U, g_* F_0) = 0$  para  $r > 2$ . Se aplica este resultado con  $F_0 = g^* F$ . Como el núcleo y conúcleo de  $F \rightarrow g_* g^* F$  tiene soporte en un subconjunto propio, cerrado, de  $U$ ,  $H^r(U, F) = H^r(U, g_* g^* F)$  para  $r > 1$ , esto prueba la primera afirmación, la segunda es un caso especial de la primera con  $(U, F) = (X, j_! F)$ .  $\square$

*Paso 5.* Si  $F$  es localmente constante, entonces  $\text{Ext}_U^r(F, \mu_n) = 0$  para  $r > 2$ .

DEMOSTRACIÓN.  $F$  es pseudocoherente y  $\underline{\text{Ext}}^s(F, \mu_n) = 0$  para  $s > 0$ , por lo que

$$\text{Ext}^r(F, \mu_n) = H^r(U, \underline{\text{Hom}}(F, \mu_n)) = 0$$

para  $r > 2$ .  $\square$

*Paso 6.* Si  $\phi^{r_0}(X, \mathbb{Z}/(n))$  es un isomorfismo y si  $\phi^r(U, F)$  es un isomorfismo para todo  $U$ , y toda gavilla localmente constante  $F$ , y todo  $r < r_0$ , entonces  $\phi^{r_0}(U, F)$  es un isomorfismo para todo  $U$  y toda gavilla localmente constante  $F$ .

DEMOSTRACIÓN. El paso 3 muestra  $\phi^{r_0}(X, \mathbb{Z}/(n))$  es un isomorfismo para todo  $U$ . Primero supondremos que  $F$  es constante. Entonces existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow F \rightarrow F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow 0$$

donde  $F_0$  es libre, es decir, de la forma  $\mathbb{Z}/(n) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(n)$ , y  $F_1$  es constante.

Considere el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Ext}_U^{2-r_0}(F_1, \mu_n) & \longrightarrow & \text{Ext}_U^{2-r_0}(F_0, \mu_n) & \longrightarrow & \text{Ext}_U^{2-r_0}(F, \mu_n) & \longrightarrow & \text{Ext}_U^{2-r_0+1}(F_1, \mu_n) & \longrightarrow & \text{Ext}_U^{2-r_0+1}(F_0, \mu_n) \\ \downarrow \phi^{r_0}(F_1) & & \downarrow \phi^{r_0}(F_0) & & \downarrow \phi^{r_0}(F) & & \downarrow \phi^{r_0-1}(F_1) & & \downarrow \phi^{r_0-1}(F_0) \\ H_c^{r_0}(U, F_1)^\vee & \longrightarrow & H_c^{r_0}(U, F_0)^\vee & \longrightarrow & H_c^{r_0}(U, F)^\vee & \longrightarrow & H_c^{r_0-1}(U, F_1)^\vee & \longrightarrow & H_c^{r_0-1}(U, F_0)^\vee \end{array}$$

Puesto que  $\phi^{r_0}(\mathbb{Z}/(n))$  es un isomorfismo, también lo es  $\phi^{r_0}(F_0)$ , y por el lema del quinto se tiene que  $\phi^{r_0}(F_1)$  es suprayectiva, y ahora el argumento del lema del quinto muestra que  $\phi^{r_0}(F)$  es inyectiva. Si  $F$  es localmente constante, existe un morfismo finito étale (que puede tomarse como un morfismo de Galois)  $\pi : U' \rightarrow U$  tal que  $\pi^* F$  es constante; entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow F \rightarrow \pi_* \pi^* F \rightarrow F_1 \rightarrow 0$$

con  $F_1$  localmente constante; por el paso 1 se tiene que  $\phi^{r_0}(\pi_* \pi^* F)$  es un isomorfismo, y el argumento anterior del lema del quinto puede ser aplicado para concluir la demostración.  $\square$

*Paso 7.* Si  $F$  es localmente constante, entonces  $\phi^r(U, F)$  es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Por el paso 5,  $\phi^r(U, F)$  es un isomorfismo para  $r < 0$ . Para  $(U, F, r) = (X, \mathbb{Z}/(n), 0)$  el apareamiento

$$\mathbb{Z}/(n) \times H^2(X, \mu_n) \rightarrow H^2(X, \mu_n) \cong \mathbb{Z}/(n)$$

es no degenerado. Así  $\phi^0(X, \mathbb{Z}/(n))$  es un isomorfismo y la afirmación, para  $r = 0$ , se sigue del paso 6.

Sea  $\gamma \in H^1(X, \mathbb{Z}/(n))$  y  $\pi : X' \rightarrow X$  el cubriente de Galois que corresponde a  $\gamma$ , ver ([13] capítulo III sección 4, p. 121). Entonces  $\gamma \mapsto 0$  bajo el morfismo

$$H^1(X, \mathbb{Z}/(n)) \rightarrow H^1(X, \pi_*\pi^*\mathbb{Z}/(n)) (= H^1(X', \mathbb{Z}/(n)))$$

Ahora empezando con la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/(n) \rightarrow \pi_*\pi^*\mathbb{Z}/(n) \rightarrow F_1 \rightarrow 0$$

se induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(X, \pi_*\pi^*\mathbb{Z}/(n)) & \longrightarrow & H^0(X, F_1) & \longrightarrow & H^1(X, \mathbb{Z}/(n)) & \longrightarrow & H^1(X, \pi_*\pi^*\mathbb{Z}/(n)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Ext}^2(\pi_*\pi^*\mathbb{Z}/(n), \mu_n)^\vee & \longrightarrow & \text{Ext}^2(F_1, \mu_n)^\vee & \longrightarrow & \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/(n), \mu_n)^\vee & \longrightarrow & \text{Ext}^1(\pi_*\pi^*\mathbb{Z}/(n), \mu_n)^\vee \end{array}$$

y una cacería en el diagrama anterior muestra que la imagen de  $\gamma$  bajo

$$\phi^1(X, \mathbb{Z}/(n))^\vee : H^1(X, \mathbb{Z}/(n)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathbb{Z}/(n), \mu_n)^\vee$$

es distinto de cero, De esta manera  $\phi^1(X, \mathbb{Z}/(n))^\vee$  es inyectiva y  $\phi^1(X, \mathbb{Z}/(n))$  es suprayectiva. Este es un isomorfismo puesto que  $H^1(X, \mathbb{Z}/(n))$  y  $H^1(X, \mu_n)$  tiene el mismo orden finito  $n_{2g}$ , ya que la gavilla  $\mathbb{Z}/(n)$  es isomorfa a  $\mu_j$  porque  $X$  es completa y  $K$  es algebraicamente cerrado. Para esta última afirmación ver [2] p. 35 corolario 3.5. Así, la afirmación, para  $r = 1$ , se sigue del paso 6.

Para  $(U, F, r) = (X, \mathbb{Z}/(n), 2)$  el apareamiento

$$H^2(X, \mathbb{Z}/(n)) \times \mu_n(k) \rightarrow H^2(X, \mu_n) \cong \mathbb{Z}/(n)$$

es no degenerado. Así el caso  $r = 2$  se ha probado. Para  $r > 2$ , el paso 4 muestra que  $\phi^r$  es igual al morfismo  $0 \rightarrow 0$ .  $\square$

Finalmente de acuerdo a 3.19 existe un subconjunto abierto  $V$ , de  $U$ , tal que  $F|_V$  es localmente constante. El paso 7 muestra que  $\phi^r(V, F|_V)$  es un isomorfismo para cada  $r$ , y por el paso 3  $\phi^r(U, F)$  es un isomorfismo para cada  $r$ .  $\square$

Será necesaria la definición siguiente:

**Definición 3.25.** Sea  $f : X \rightarrow S$  un morfismo de esquemas. Una *compactación* de  $f$  es un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \\ & \searrow f & \downarrow \bar{f} \\ & & S \end{array}$$

donde  $j$  es una inmersión abierta y  $\bar{f}$  es un morfismo propio. Un morfismo de esquemas  $f : X \rightarrow S$  se dice que es *compactable* si  $f$  admite una compactación.



El teorema y corolario siguientes son importantes ya que demuestran, entre otras cosas, que si  $F$  es una gavilla de torsión, la definición 3.8 de los grupos de cohomología con soporte compacto es independiente de la compactación usada.

**Teorema 3.26.** *Si  $\pi : Y \rightarrow X$  es un morfismo de esquemas propio y  $F$  es una gavilla construible en  $X_{\acute{e}t}$ , entonces  $R^i\pi_*F$  es una gavilla construible en  $X_{\acute{e}t}$  para  $i \geq 0$*

□

Y el corolario al que nos referimos es el siguiente:

**Corolario 3.27.** *Sea  $\pi : Y \rightarrow X$  un morfismo propio, sea  $\bar{x} \rightarrow X$  un punto geométrico de  $X$ , y sea  $Y_{\bar{x}} \rightarrow \bar{x}$  la fibra geométrica de  $\pi$  sobre  $\bar{x}$ . Si  $F$  es una gavilla de torsión en  $Y_{\acute{e}t}$ , entonces existe un isomorfismo canónico  $(R^i\pi_*F)_{\bar{x}} \rightarrow H^i(Y_{\bar{x}}, F|_{Y_{\bar{x}}})$  para  $i \geq 0$ . Si, adicionalmente, todas las fibras de  $Y/X$  tiene dimensión  $\leq n$  entonces  $R^i\pi_*F = 0$  para  $i > 2n$ ; si  $X$  tiene característica  $p$  y  $F$  es de  $p$ -torsión, entonces  $R^i\pi_*F = 0$  para  $i > n$ .*

□

Una demostración del teorema y corolario anterior puede encontrarse en [13] (capítulo VI sección 2).

**Corolario 3.28.** *La definición 3.8 de los grupos de cohomología con soporte compacto es independiente de la compactación usada.*

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar el corolario considere dos compactaciones del morfismo  $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ , es decir:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_1} & \overline{X}_1 \\ & \searrow f & \downarrow \overline{f}_1 \\ & & \text{Spec}(k) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_2} & \overline{X}_2 \\ & \searrow q & \downarrow \overline{f}_2 \\ & & \text{Spec}(k) \end{array}$$

De esto se deriva el diagrama de producto fibrado siguiente

$$\begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow h & & \searrow j_2 & \\ & \overline{X}_1 \times_{\text{Spec}(k)} \overline{X}_2 & \xrightarrow{p_2} & \overline{X}_2 & \\ & \downarrow p_1 & & \downarrow \overline{f}_2 & \\ & \overline{X}_1 & \xrightarrow{\overline{f}_1} & \text{Spec}(k) & \end{array}$$

y de aquí deducimos que  $h$  es una inmersión cerrada. Ponemos  $\overline{X}_3 = h(X)$ , entonces se tiene la compactación siguiente para  $f : X \rightarrow \text{Spec}(k)$ :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & X \\
 & \searrow f & \downarrow \overline{f_2 \circ p_2} \\
 & & \text{Spec}(k)
 \end{array}$$

Así se obtiene el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 & & \overline{X_1} \\
 & \nearrow j_1 & \uparrow p_1 \\
 X & \xrightarrow{h} & \overline{X_3} \\
 & \searrow j_2 & \downarrow p_2 \\
 & & \overline{X_1}
 \end{array}$$

Por lo tanto, es suficiente considerar un diagrama conmutativo de la forma:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{j_2} & \overline{X_2} \\
 j_1 \downarrow & & \nearrow p \\
 \overline{X_1} & & 
 \end{array}$$

Con  $j_1$  y  $j_2$  inmersiones abiertas y  $p$  un morfismo propio.

**Lema 3.29.** *En la situación anterior se tiene que*

$$p_*((j_2)_!F) = (j_1)_!F \quad \text{y} \quad R^q p_*((j_2)_!F) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario 3.27 basta calcular  $H^q(X_s, F)$ , pero como  $p$  es un morfismo étale entonces del producto fibrado siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 X_s & \longrightarrow & \overline{X_2} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \overline{s} & \longrightarrow & \overline{X_1}
 \end{array}$$

se infiere que  $X_s \rightarrow \overline{s}$  es étale, y puesto que  $\overline{s} = \text{Spec}(k)$  y  $k$  es un campo separablemente cerrado, entonces  $H^q(X_s, F) = 0$ .  $\square$

Considere la sucesión espectral de Leray, para  $p$ :

$$H^r(\overline{X_1}, R^s p_* G) \Rightarrow H^{r+s}(\overline{X_2}, G)$$

donde  $G$  es una gavilla en  $\overline{X_2}$ . Poniendo  $G = (j_2)_!F$  del lema anterior se obtiene que  $H^r(\overline{X_2}, (j_2)_!F) = H^r(\overline{X_1}, (j_1)_!F)$ .  $\square$

### 3.3. Variedades Jacobianas

Esta sección sólo se presenta un bosquejo de variedades abelianas y jacobianas, para más detalles consultar [1] capítulos V y VII.

Sea  $k$  un campo, una *variedad en grupos* es un variedad sobre  $k$  que es un esquema en grupos, ver definición 2.2. Una variedad en grupos sobre  $k$ , que es completa, se dice que es una *variedad abeliana*. Ahora considérese una curva completa,  $C$ , no singular sobre  $k$ , se define un funtor,  $P_C^0$ , de la categoría de los esquemas sobre  $k$  a la categoría de grupos abelianos como sigue

$$P_C^0(T) = \{\mathcal{L} \in \text{Pic}(C \times T) \mid \text{gr}(\mathcal{L}_t) = 0 \text{ para cada } t\} / q^* \text{Pic}(T)$$

el funtor anterior es representable, lo cual es el contenido principal del teorema siguiente:

**Teorema 3.30.** *Existe una variedad abeliana  $J$ , sobre  $k$ , y un morfismo de funtores  $\iota : P_C^0 \rightarrow J$  tal que  $\iota : P_C^0(T) \rightarrow J(T)$  es un isomorfismo cuando  $C(T)$  es no vacío.*

□

A la variedad  $J$ , del teorema anterior, se le llama la *variedad jacobiana* de  $C$ . Para una demostración del teorema anterior consultar [1], en especial capítulo VII, secciones 1, 2, 3 y 4.

Utilizando las propiedades de  $J$  es posible construir un morfismo canónico

$$f^P : C \rightarrow J$$

El morfismo anterior satisface la propiedad siguiente:

Cada morfismo  $\alpha : C \rightarrow C$  induce un morfismo  $\alpha' : J \rightarrow J$  tal que  $f^P \circ \alpha = \alpha' \circ f^P$  para cada punto  $P$  en  $C(\bar{k})$ , para las pruebas se puede consultar [1] capítulo VII, sección 2 p. 171 y sección 11, p. 200.

La variedad  $J$  tiene varias propiedades, entre ellas se tienen

- (1) La dimensión de  $J$  es  $g$ , donde  $g$  denota el genero de la curva  $C$ .
- (2) La variedad  $J$  es completa.

Para una demostración de las propiedades anteriores consultar [1] capítulo VII, sección 2, proposición 2.1 y sección 7, proposición 7.4, respectivamente. Para nuestros propósitos cabe resaltar el teorema y corolario siguientes:

**Teorema 3.31.** *Sea  $A$  una variedad abeliana de dimension  $g$  sobre un campo algebraicamente cerrado  $k$ , y sea  $\ell$  un número primo diferente de  $\text{car}(k)$ . Entonces*

- (a) *Existe un isomorfismo canónico  $H^1(A_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(T_\ell A, \mathbb{Z}_\ell)$ .*
- (b) *Los apareamientos producto cup definen isomorfismos, para cada  $r$*

$$\Lambda^r H^1(A_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\sim} H^r(A_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell)$$

*En particular,  $H^r(A_{\text{ét}}, \mathbb{Z}_\ell)$  es un  $\mathbb{Z}_\ell$ -módulo libre de rango  $\binom{2g}{r}$ .*

□

**Corolario 3.32.** *Para todos los primos  $\ell$ , el morfismo  $f^P : C \rightarrow J$  induce un isomorfismo en los grupos de cohomología étale*

$$H^1(J, \mathbb{Z}_\ell) \rightarrow H^1(C, \mathbb{Z}_\ell)$$

□

Para las demostraciones de los hechos anteriores consultar [1] capítulo V, sección 15, teorema 15.1 y capítulo VII, sección 9, corolario 9.6, respectivamente.



# Capítulo 4

## Racionalidad de la función zeta de una curva

### 4.1. Introducción

En este capítulo, siguiendo a Grothendieck y usando métodos cohomológicos se demostrará una de las conjeturas de Weil, a saber, la racionalidad de la función zeta de una curva<sup>1</sup>. Necesitaremos algunos resultados preliminares.

**Lema 4.1.** *Sea  $k$  un campo finito con  $q$  elementos, entonces la cardinalidad de  $\mathbb{P}^n(k)$  es  $1 + q + \dots + q^n$ .*

DEMOSTRACIÓN. Defina  $\varphi : k^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$  como sigue:

$$\varphi(x_0, \dots, x_n) = [x_0, \dots, x_n].$$

Entonces,  $\varphi$  es suprayectiva y dado  $[x_0, \dots, x_n]$  en  $\mathbb{P}^n(k)$  se tiene que  $\varphi^{-1}[x_0, \dots, x_n] = \{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) : \lambda \in k - \{0\}\}$ . Por lo tanto el conjunto  $\varphi^{-1}[x_0, \dots, x_n]$  tiene  $q - 1$  elementos y puesto que  $\varphi$  es suprayectiva, se tiene que  $q^{n+1} - 1 = (q - 1)N(\mathbb{P}^n(k))$ , donde  $N(\mathbb{P}^n(k))$  denota el número de elementos del espacio proyectivo considerado, es decir,  $N(\mathbb{P}^n(k)) = 1 + q + \dots + q^n$ .  $\square$

Sea  $k$  es un campo finito, con  $q$  elementos, para cada  $s \in \mathbb{N}$  existe un campo,  $K$ , y sólo uno, tal que  $k \subseteq K$  y  $N(K) = q^s$ , estos campos los denotaremos por  $k_s$ .

Sea  $X$  una variedad proyectiva en  $\mathbb{P}^n(k)$ . Como los polinomios homogéneos que definen a  $X$  pertenecen a  $k[x_0, \dots, x_n]$ , podemos pensar a  $X$  como una variedad proyectiva en  $\mathbb{P}^n(k_s)$ , de esta manera  $N_s =$  número de puntos de la variedad  $X$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}^n(k_s)$  tiene sentido.

**Definición 4.2.** La función zeta de la variedad proyectiva  $X$  es la serie:

$$Z_X(u) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \frac{N_s u^s}{s}\right).$$

donde  $\exp(u) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u^s}{s!}$ .

---

<sup>1</sup>De hecho, esto había sido demostrado por Weil.

La variable  $u$  toma valores en  $\mathbb{C}$ , por lo tanto podemos pensar a  $Z_X$  como una serie formal de potencias o, utilizando la desigualdad (que se obtiene del lema 4.1):

$$N_s \leq \frac{q^{s(n+1)} - 1}{q^s - 1} \leq (n+1)q^{sn}.$$

de este modo  $Z_X$  define una función holomorfa, en el disco abierto  $|u| < \frac{1}{2q^n}$  aplicar el criterio M de *Weierstrass* con  $M_s = \frac{1}{s2^s}$ .

Antes de continuar recordemos la formulación de las conjeturas de Weil. Sea  $X$  una variedad proyectiva lisa de dimensión  $n$  definida sobre  $k = \mathbb{F}_q$ , sea  $Z_X(u)$  la función zeta de  $X$ . Entonces las conjeturas de Weil son:

- (1) **La racionalidad de la función zeta**  $Z_X$  es una función racional, es decir, es un cociente de polinomios con coeficientes racionales.
- (2) **Ecuación funcional** Sea  $E$  el número de autointersección de la diagonal  $\Delta$  de  $X \times X$ , entonces  $Z_X$  satisface la ecuación funcional siguiente:

$$Z\left(\frac{1}{q^n u}\right) = \pm q^{n\frac{E}{2}} u^E Z_X(u).$$

- (3) **Analogía con la hipótesis de Riemann** Es posible escribir

$$Z_X(U) = \frac{P_1(u)P_3(u) \dots P_{2n-1}(u)}{P_0(u)P_2(u) \dots P_{2n}(u)}$$

donde  $P_0(u) = 1 - u$ ;  $P_{2n} = 1 - q^n u$ ; y para cada  $1 \leq i \leq 2n - 1$ ,  $P_i(u)$  es un polinomio con coeficientes enteros, que se puede escribir de la forma siguiente:

$$P_i(u) = \prod (1 - \alpha_{ij}u).$$

donde los  $\alpha_{ij}$  son enteros algebraicos con  $|\alpha_{ij}| = q^{\frac{1}{2}}$ .

**Ejemplo 21.** Calculamos la función zeta de  $\mathbb{P}^n(k)$  usando el lema 4.1; ya que el resultado es independiente del campo finito usado, se tiene que  $N_s = 1 + q^s + \dots + q^{sn}$ , por lo que:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(1+q^s+\dots+q^{sn})u^s}{s} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{u^s}{s} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(uq)^s}{s} + \dots + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(uq^n)^s}{s}$$

Y recordando que  $-\ln(1-u) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{u^s}{s}$  obtenemos:

$$Z_{\mathbb{P}^n}(u) = \frac{1}{(1-u)(1-qu) \dots (1-q^n u)}$$

En particular esto afirma que  $Z_{\mathbb{P}^n}$  es una función racional, en concordancia con la conjetura de Weil sobre la racionalidad de la función zeta.

## 4.2. La racionalidad de la función zeta

En esta sección se demostrará la racionalidad de la función zeta de una curva lisa proyectiva,  $X$ , sobre un campo finito  $k$ . En lo que sigue  $\ell$  denotará un número primo.

Recordemos que si  $k$  es un campo algebraicamente cerrado, entonces  $H^0(X, \mathbb{Q}_\ell) = \mathbb{Q}_\ell$ , también se tiene que:

$$H^1(X, \mathbb{Q}_\ell(1)) = V_\ell(J_X(k)) = \text{Hom}(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell, J(k)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

y

$$H^2(X, \mathbb{Q}_\ell(1)) = \varprojlim (\text{Pic}(X)/\ell^n \text{Pic}(X)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell.$$

**Teorema 4.3** (Fórmula de traza de Lefschetz). *Supongamos que  $k$  es algebraicamente cerrado. Sea  $\phi : X \rightarrow X$  un morfismo no constante y  $(\Gamma_\phi \cdot \Delta)$  el número de puntos fijos de  $\phi$  (donde  $\Gamma_\phi$  es la gráfica de  $\phi$  y  $\Delta$  es la diagonal de  $X$ ). Entonces, para cada  $\ell \neq \text{car}(k)$*

$$(\Gamma_\phi \cdot \Delta) = \sum (-1)^r \text{tr}_\ell^r(\phi).$$

**Comentario 4.4.** En topología diferencial se pueden estudiar los puntos fijos de una función lisa  $f : X \rightarrow X$ , donde  $X$  es una variedad diferencial, para ello se puede considerar la variedad  $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ , conocida como la *diagonal* y la *gráfica* de  $f$ , que denotaremos, en este contexto, por  $\Gamma_f$ , donde  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ , que también es una variedad diferencial. Entonces  $x \in X$  es un punto fijo de  $f$  si  $(x, f(x))$  pertenece a  $\Gamma_f \cap \Delta = \Gamma_f \cdot \Delta$ , así se puede utilizar la teoría de intersección para contar los puntos comunes de  $\Delta$  y  $\Gamma_f$ , este número lo denotaremos por  $I(\Delta, \Gamma_f)$ , que puede considerarse el análogo a  $(\Gamma_\phi \cdot \Delta)$ , y se le llama el *número de Lefschetz global* de  $f$  y lo denotaremos por  $L$ ; por lo tanto se tiene el teorema:

**Teorema 4.5** (Teorema liso de punto fijo de Lefschetz). *Sea  $f : X \rightarrow X$  una función lisa sobre una variedad compacta orientable. Si  $L(f) \neq 0$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo.*

□

Este último teorema es el análogo, parcialmente, del teorema 4.3. Para las definiciones y demostraciones de los hechos anteriores, consultar [9].

DEMOSTRACIÓN. (De (4.3)): Primero note que  $\text{tr}^0(\phi) = 1$ . Como

$$H^r(X, \mathbb{Q}_\ell(1)) = H^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell(1)$$

$\text{tr}_\ell^r(\phi)$  es también la traza de endomorfismo de  $H^r(X, \mathbb{Q}_\ell(1))$  definida por  $\phi$ . De esta manera  $H^1(X, \mathbb{Q}_\ell(1)) = V_1(J(k))$  y  $\text{tr}_\ell^1(\phi)$  se puede identificar con la traza del endomorfismo  $J(\phi)$  de  $J$  definida por  $\phi$ . También  $\text{tr}_\ell^2(\phi) = \text{gr}(\phi)$ , por lo que tenemos que mostrar que

$$(\Gamma_\phi \cdot \Delta) = 1 - \text{tr}(J(\phi)) + \text{gr}(\phi)$$

pero este es un caso especial de la igualdad  $\sigma(X) = \text{tr}(\tau)$  de Lang, para esta última afirmación consultar [15] capítulo II sección 11, proposición 11.2. □



Antes de probar el corolario siguiente, que nos da la racionalidad de la función zeta, necesitaremos un lema:

**Lema 4.6.** *Sea  $\alpha$  un endomorfismo de un  $k$ -espacio vectorial de dimensión finita  $V$ , entonces  $\log(\det(1 - \alpha t \mid V)^{-1}) = \sum_{n>0} \text{tr}(\alpha^n \mid V)t^n/n$ .*

DEMOSTRACIÓN. Si  $V$  tiene dimensión uno entonces  $\alpha$  actúa como multiplicación por  $a$ , para algún  $a \in k$ , entonces la fórmula es la identidad

$$\log(1 - at) = - \sum \frac{a^n t^n}{n}$$

La fórmula general es la suma de  $\dim(V)$  de tales identidades, puesto que se puede escoger una base de  $V$  de tal modo que la matriz de tal endomorfismo sea triangular superior.  $\square$

**Corolario 4.7.** *Ponemos  $k = \mathbb{F}_q$  y sea  $F : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$  el morfismo de Frobenius de  $\bar{X} = X \otimes_k k^{\text{sep}}$ . Entonces la función zeta de  $X$ ,  $Z(X, t)$ , es igual a*

$$\frac{P_1(X, T)}{P_0(X, t)P_2(X, t)}$$

donde  $P_r(X, t) = \det(1 - Ft \mid H^r(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell))$  para cada  $\ell \neq \text{car}(k)$ .

DEMOSTRACIÓN. Se recuerda que  $Z(X, t)$  es la serie formal

$$\exp \left( \sum_{n>0} \nu_n(X)t^n/n \right)$$

donde  $\nu_n(X)$  es el número de puntos de  $\bar{X}$  con coordenadas en  $k_n = \mathbb{F}_{q^n}$ . Por  $F$  denotamos el  $\bar{k}$ -morfismo  $F_{X/\bar{k}} \otimes 1$  donde  $F_{X/k}$  es el  $k$ -morfismo  $X \rightarrow X$  que es la identidad en el espacio subyacente de  $X$  y es el morfismo  $q$ -ésima potencia en  $\mathcal{O}_X$ . Este actúa en  $\bar{X}(k^{\text{sep}})$  elevando las coordenadas de cualquier punto a la  $q$ -ésima potencia. Así  $\nu_n(X)$  es el número de puntos fijos de  $F^n : \bar{X}(k^{\text{sep}}) \rightarrow \bar{X}(k^{\text{sep}})$ . Pero este es también el número de puntos fijos de  $F^n$  puesto que todo punto de  $\Gamma_{F^n} \cdot \Delta$  tiene multiplicidad uno. Por el teorema 4.3 se tiene que

$$\nu_n(X) = Tr_l^0(F^n) - Tr_l^1(F^n) + Tr_l^2(F^n)$$

y el corolario se sigue del lema 4.6.  $\square$

# Apéndice A

## Generalidades de categorías abelianas

### A.1. Categorías aditivas y abelianas

**Definición A.1.** Una categoría  $\mathcal{A}$  se dice que es *aditiva* si satisface que:

- Para cada par de objetos  $A, B \in \mathcal{A}$  el conjunto  $\text{Hom}(A, B)$  tiene estructura de grupo abeliano tal que la composición de morfismos es bilineal.
- El producto y la suma de dos objetos de  $\mathcal{A}$  existe en  $\mathcal{A}$ .
- $\mathcal{A}$  tiene un objeto cero, es decir, un objeto que es inicial y final.

Si  $\mathcal{A}$  es una categoría aditiva y  $\phi : A \rightarrow B$  es un morfismo en  $\mathcal{A}$ , un *núcleo* para  $\phi$  es un par  $(A', i)$  donde  $A' \in \mathcal{A}$  e  $i : A' \rightarrow A$  es un monomorfismo de la categoría  $\mathcal{A}$ , de modo que  $\phi \circ i = 0$  y dado cualquier morfismo  $\psi : C \rightarrow A$  que verifica  $\phi \circ \psi = 0$  existe un morfismo  $f : C \rightarrow A'$  tal que  $i \circ f = \psi$ , si el núcleo de  $\phi$  existe, este es único salvo isomorfismo y se denota por  $\ker \phi$ .

De modo similar se define un *conúcleo* de  $\phi$ , como un par  $(B', j)$ , donde  $B' \in \mathcal{A}$  y  $j : B \rightarrow B'$  es un epimorfismo de  $\mathcal{A}$  tal que  $j \circ \phi = 0$  y todo morfismo que anula a  $\phi$  se factoriza por medio de  $j$ .

Definimos la *imagen* y *coimagen* de un morfismo  $\phi$  como  $\text{Im}(\phi) = \ker(\text{Coker}(\phi))$  y  $\text{Coim}(\phi) = \text{Coker}(\ker(\phi))$ , respectivamente, si existen la imagen y coimagen de un morfismo  $\phi$ , existe un único morfismo:

$$\bar{\phi} : \text{Coim}(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi)$$

tal que la composición siguiente es el morfismo  $\phi$ :

$$A \rightarrow \text{Coim}(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi) \rightarrow B.$$

si además  $\mathcal{A}$  satisface las condiciones siguientes:

- Cada morfismo en  $\mathcal{A}$  tiene núcleo y conúcleo.
- Para cada morfismo  $\varphi$  en  $\mathcal{A}$  el morfismo canónico  $\bar{\varphi} : \text{Coim}(\varphi) \rightarrow \text{Im}(\varphi)$  es un isomorfismo.

diremos que  $\mathcal{A}$  es una *categoría abeliana*.

**Ejemplo 22.** si  $A$  es un anillo conmutativo con 1 entonces la categoría de  $A$ -modulos es una categoría abeliana.

**Definición A.2.** Sea  $\mathcal{A}$  una categoría abeliana. Un objeto  $I$  de  $\mathcal{A}$  es *inyectivo*, si el funtor  $M \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, I) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  es exacto. Se dice que  $\mathcal{A}$  tiene *suficientes inyectivos* si para cada objeto  $M$  de  $\mathcal{A}$  existe un monomorfismo de  $M$  en un objeto inyectivo de  $\mathcal{A}$ .

En el capítulo 3 usamos el resultado siguiente:

**Lema A.3.** (1) *Un producto directo arbitrario de objetos inyectivos es inyectivo.*  
 (2) *Si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es un funtor que tiene un adjunto izquierdo  $G$  que es exacto izquierdo, entonces  $F$  preserva inyectivos.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Si  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  es una familia de objetos inyectivos, como

$$\text{Hom}(-, \prod I_\alpha) \simeq \prod \text{Hom}(-, I_\alpha)$$

entonces  $\prod I_\alpha$  es inyectivo.

(2) Sea  $I$  un objeto inyectivo en  $\mathcal{A}$ . Como  $G$  es adjunto izquierdo de  $F$ , entonces  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(G(-), I) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{B}}(-, F(I))$ , y como el primer funtor es la composición de los funtores  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I)$  y  $G$  que son exactos izquierdos, entonces  $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(-, F(I))$  también lo es y así  $F(I)$  es inyectivo.  $\square$

**Definición A.4.** Si una categoría  $\mathcal{A}$  tiene suficientes inyectivos y  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es un funtor exacto izquierdo, con  $\mathcal{B}$  una categoría abeliana; entonces existe una sucesión única de funtores  $R^i F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$   $i \geq 0$ , llamados los *funtores derivados derechos* de  $F$ , que cumplen las siguientes propiedades:

- (a)  $R^0 F = F$ .
- (b)  $R^i F(I) = 0$  si  $I$  es inyectivo e  $i > 0$ .
- (c) Para toda sucesión exacta  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  en  $\mathcal{A}$ , existen morfismos  $\delta^i : R^i F(M'') \rightarrow R^{i+1} F(M')$   $i \geq 0$ , tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\dots \rightarrow R^i F(M) \rightarrow R^i F(M'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1} F(M') \rightarrow \dots$$

- (d) La correspondencia de (c) que asocia a una sucesión exacta corta en la sucesión exacta larga es  $\delta$ -funtorial, es decir, si:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

es un diagrama conmutativo en  $\mathcal{A}$ , con renglones exactos, entonces el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & R^i F(M) & \longrightarrow & R^i F(M'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1} F(M') & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & R^i F(N) & \longrightarrow & R^i F(N'') & \xrightarrow{\delta^i} & R^{i+1} F(N'') & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Se dice entonces que los funtores derivados  $R^i F$  son  $\delta$ -funtores.

**Ejemplo 23.** Considere una categoría abeliana  $\mathcal{A}$  con suficientes inyectivos. Para un objeto  $B$  de  $\mathcal{A}$  sabemos que el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, -)$  es exacto izquierdo por lo que tiene asociada una familia de funtores derivados a los que se denota por  $\text{Ext}^r(B, -)$  y que explícitamente se definen, para un objeto  $C$  de  $\mathcal{A}$  tomando una resolución inyectiva de  $C$ ,  $C \rightarrow I^\bullet$ , y formando los  $r$ -ésimos grupos de cohomología del complejo

$$\text{Hom}(B, I^0) \rightarrow \text{Hom}(B, I^1) \rightarrow \dots$$

Necesitamos otra descripción de estos grupos y para este propósito, se recuerda que una *morfismo de complejos de grado  $r$* ,  $\phi : B^\bullet \rightarrow C^\bullet$ , es una familia de morfismos  $\phi^s : B^s \rightarrow C^{r+s}$  tal que  $\phi^{s+1}d_B^s = (-1)^r d_C^{r+s}\phi^s$ , es decir, el siguiente diagrama conmuta, excepto por un factor  $(-1)^r$ :

$$\begin{array}{ccc} B^s & \xrightarrow{d_B^s} & B^{s+1} \\ & \searrow \phi^s & \searrow \phi^{s+1} \\ \dots & \longrightarrow & C^{r+s} \xrightarrow{d_C^{r+s}} C^{r+s+1} \end{array}$$

En otras palabras  $\phi$  es un morfismo de complejos  $B^\bullet \rightarrow C^\bullet[r]$ , donde  $C^\bullet[r]$  es el siguiente complejo:  $(C^\bullet[r])^s = C^{r+s}$  y  $d_{C^\bullet[r]} = (-1)^r d_{C^\bullet}$ . Dos tales morfismos  $\phi$  y  $\psi$  son homotópicos si existe una familia de morfismos  $\theta^s : B^s \rightarrow C^{s+r-1}$  tal que  $\phi^s - \psi^s = d\theta^s + \theta^{s+1}d$ , es decir, el siguiente diagrama conmuta, donde los morfismos verticales son  $\phi^s$  y  $\psi^s$ :

$$\begin{array}{ccccc} \dots & \longrightarrow & B^s & \xrightarrow{d_B^s} & B^{s+1} \\ & & \downarrow \theta^s & & \downarrow \theta^{s+1} \\ C^{r+s-1} & \xrightarrow{d_C^{r+s-1}} & C^{r+s} & & \end{array}$$

**Ejemplo 24.** Si  $B^\bullet$  es el complejo con  $B^0 = B$  y  $B^s = 0$  para cada  $s \neq 0$ , entonces un morfismo de grado  $r$ ,  $B^\bullet \rightarrow I^\bullet$ , es un morfismo  $\phi : B \rightarrow I^r$  tal que  $d \circ \phi = 0$ . Además,  $\phi$  es *homotópico a cero* si y sólo si existe un morfismo  $\psi : B \rightarrow I^{r-1}$  tal que  $d^{r-1} \circ \psi = \phi$ .

Por lo tanto, si  $I^\bullet$  es una resolución inyectiva de  $C$ , el grupo de clases de homotopía de los morfismos  $B \rightarrow I^\bullet[r]$  es  $\text{Ext}^r(B, C)$ . Nótese que por el ejemplo anterior podemos definir una relación entre los morfismos  $f, g : B \rightarrow I^\bullet[r]$  como sigue:  $f \sim g$  si existe un morfismo  $\psi : B \rightarrow I^{r-1}$  tal que  $d^{r-1} \circ \psi = f - g$ , esta es una relación de equivalencia, por lo que tiene sentido considerar las clases de homotopía. También se puede mostrar que si  $B \rightarrow B^\bullet$  es cualquier resolución de  $B$ , es decir,  $0 \rightarrow B \rightarrow B^0 \rightarrow B^1 \rightarrow \dots$  es exacta pero los  $B^s$  no tienen por que ser objetos inyectivos, entonces el grupo de clases de homotopía de los morfismos  $B^\bullet \rightarrow I^\bullet[r]$  es isomorfo al grupo de clases de homotopía de los morfismos  $B^\bullet \rightarrow I^\bullet[r]$  y por lo tanto a  $\text{Ext}^r(B, C)$ .

Lo anterior permite definir un apareamiento canónico:

$$\mathrm{Ext}^r(A, B) \times \mathrm{Ext}^s(B, C) \rightarrow \mathrm{Ext}^{r+s}(A, C)$$

de la siguiente manera:

Se toman resoluciones inyectivas  $B \rightarrow B^\bullet$  y  $C \rightarrow C^\bullet$  de  $B$  y  $C$ , respectivamente, e interpretamos  $\mathrm{Ext}$  como grupos de clases de homotopía de morfismos  $A \rightarrow B^\bullet[r]$ ,  $B^\bullet[r] \rightarrow C^\bullet[r+s]$ , y  $A \rightarrow C^\bullet[r+s]$ , y definimos el apareamiento como la composición de los morfismos  $A \rightarrow B^\bullet[r]$  y  $B^\bullet[r] \rightarrow C^\bullet[r+s]$ . Para un tratamiento más detallado de estas cuestiones ver [13] capítulo V, sección 1.

## A.2. Algunos funtores importantes

Dado un morfismo de esquemas  $\pi : Y \rightarrow X$ , en este apéndice se demostrará la existencia del funtor adjunto izquierdo al funtor imagen directa  $\pi_p$ .

**Teorema A.5.** *Si  $P$  es una pregavilla en  $X_{\acute{e}t}$  y  $G$  una pregavilla en  $Y_{\acute{e}t}$ , entonces existe un funtor  $\pi^p : P(X_{\acute{e}t}) \rightarrow P(Y_{\acute{e}t})$  y un isomorfismo natural*

$$\mathrm{Hom}(\pi^p(P), G) \rightarrow \mathrm{Hom}(P, \pi_p G)$$

*functorial en  $P$  y  $G$ .*

DEMOSTRACIÓN. Para cada  $V \rightarrow Y$  étale considere los diagramas conmutativos siguientes:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

con  $U \rightarrow X$  étale. Diremos que el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\theta'} & U' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

domina al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\theta} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

si existe un  $X$ -morfismo, en  $X_{\acute{e}t}$ ,  $\varphi : U' \rightarrow U$  tal que  $\varphi \circ \theta' = \theta$ . Se observa que la relación de dominación es simétrica y transitiva. Además si tenemos dos diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

existe un tercer diagrama conmutativo que domina a ambos, a saber:

$$\begin{array}{ccc} U' \times_X U & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' & \longrightarrow & X \end{array}$$

Ahora tal colección es un conjunto y la relación de dominación da lugar a un conjunto dirigido. Podemos entonces definir:

$$\pi^p(P)(V) = \varinjlim P(U)$$

donde el límite se toma sobre los diagramas anteriores. Por lo tanto tenemos morfismos naturales  $\eta_U^V : P(U) \rightarrow \pi^p(P)(V)$  para cada uno de los diagramas anteriores.

Si se da un morfismo  $V' \rightarrow V$  en  $Y_{\text{ét}}$  y tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

se obtiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{1} & Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Por lo tanto tenemos un morfismo  $\pi^p P(V) \rightarrow \pi^p P(V')$  que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \pi^p P(V) & \longrightarrow & \pi^p P(V') \\ \rho_U^V \uparrow & & \rho_U^{V'} \uparrow \\ P(U) & \xrightarrow{1} & P(U) \end{array}$$

De esta manera tenemos una pregavilla  $\pi^p P$  en  $Y_{\text{ét}}$ . Considere ahora una pregavilla  $G$  en  $Y_{\text{ét}}$ , y un morfismo de pregavillas  $\psi : \pi^p P \rightarrow G$ . Si  $V \rightarrow Y$  es étale se tienen morfismos  $P(U) \rightarrow G(V)$  indexados por los diagramas

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

a saber  $\psi_U^V = \psi_V \circ \eta_U^V : P(U) \rightarrow G(V)$ . Estos morfismos cumplen las propiedades siguientes:

(1) Si se da un morfismo  $V' \rightarrow V$  en  $Y_{\acute{e}t}$  el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} P(U) & \xrightarrow{\psi_U^V} & G(V) \\ \downarrow 1 & & \downarrow \rho_{V'}^V \\ P(U) & \xrightarrow{\psi_U^{V'}} & G(V) \end{array}$$

(2) Si se da un morfismo  $U' \rightarrow U$  en  $X_{\acute{e}t}$  el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} P(U) & \xrightarrow{\psi_U^V} & G(V) \\ \downarrow \rho_{U'}^U & & \downarrow 1 \\ P(U') & \xrightarrow{\psi_{U'}^V} & G(V) \end{array}$$

Recíprocamente, si se da una familia de morfismos  $P(U) \rightarrow G(V)$ , indexada por los diagramas

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

que verifican las condiciones (1) y (2) anteriores se obtiene un morfismo  $\psi : \pi^P(P) \rightarrow G$ . Esto es, utilizando (1) para definir un morfismo  $\psi_V : \pi^P(P)(V) \rightarrow G(V)$  y con la condición (2) verificamos que con los morfismos  $\psi_V$  se obtiene el morfismo deseado. Observamos que esta asociación es biunívoca.

Ahora si, para cada  $V \rightarrow Y$  étale, damos una familia de morfismos  $P(U) \rightarrow G(V)$  indexada por los diagramas

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

que verifican las condiciones (1) y (2) anteriores queremos definir un morfismo de pregavillas  $\psi : P \rightarrow \pi_* G$  para ello procedemos como sigue: sea  $U \rightarrow X$  étale, por lo que se tiene un diagrama conmutativo de la forma:

$$\begin{array}{ccc} U \times_X Y & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Poniendo  $V = U \times_X Y$  se tiene un morfismo  $\psi_U : P(U) \rightarrow \pi_* G(U)$ , si se da un morfismo  $U' \rightarrow U$  en  $X_{\acute{e}t}$ , tenemos un morfismo  $U' \times_X Y \rightarrow U \times_X Y$ , ver la

definición de  $u \times v$  en este apéndice; de esta manera utilizando (1) y (2) se obtiene  $\psi : P \rightarrow \pi_*G$ .

Si se da un morfismo de pregavillas  $\psi : P \rightarrow \pi_*G$ , se considera  $V \rightarrow Y$  étale y sus cuadrados conmutativos asociados:

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

considerando uno de tales cuadrados conmutativos se obtiene:

$$\begin{array}{ccc} U \times_X Y & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

Del diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccc} V & & U \\ \downarrow & \searrow h & \downarrow \\ Y & \times_X U & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

obtenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{h} & U \times_X Y & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{1} & Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

De aquí obtenemos morfismos  $P(U) \rightarrow G(U \times_X Y) \rightarrow G(V)$  y se cumplen las condiciones (1) y (2). De esto se concluye que tenemos una biyección

$$\text{Hom}(\pi^P(P), G) \rightarrow \text{Hom}(P, \pi_*(G))$$

que es funtorial en  $P$  y  $G$ . □

Considere, ahora, un esquema  $X$  y una inmersión abierta  $j : U \hookrightarrow X$ . Se tiene el resultado siguiente.

**Teorema A.6.** *Existe el adjunto izquierdo del funtor  $j^P$ , es decir, existe un funtor  $(\cdot)_! : P(U_{\text{ét}}) \rightarrow P(X_{\text{ét}})$  tal que*

$$\text{Hom}_{X_{\text{ét}}}(P_!, Q) \cong \text{Hom}_{U_{\text{ét}}}(P, j^P Q)$$

*es un isomorfismo funtorial.*



DEMOSTRACIÓN. Sea  $P$  una pregavilla en  $U_{\text{ét}}$ . Para cada  $\varphi : V \rightarrow X$  étale se define

$$P_!(V) = \begin{cases} P(V) & \text{si } \varphi(V) \subseteq U. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y los morfismos de restricción se dan como sigue: sean  $\varphi_V : V \rightarrow X$ ,  $\varphi_{V'} : V' \rightarrow X$ , morfismos étales y  $\psi : V' \rightarrow V$  un  $X$ -morfismo en  $X_{\text{ét}}$ . Si  $\varphi_V(V) \subseteq U$  y  $\varphi_{V'}(V') \subseteq U$ , entonces  $P_!(\psi) = P(\psi)$ . En el caso  $\varphi(V) \not\subseteq U$  se pone  $P_!(\psi) = 0$ , el morfismo cero. Por lo tanto  $P_!$  es una pregavilla.

Considere un morfismo de pregavillas  $\psi : P \rightarrow j^p Q$ . Este define un morfismo de pregavillas  $\phi : P_! \rightarrow Q$  de la manera siguiente: si  $\varphi : V \rightarrow X$  es étale

$$\phi_V = \begin{cases} \psi_V & \text{si } \varphi(V) \subseteq U. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y si tenemos un morfismo de pregavillas  $\phi : P_! \rightarrow Q$  se obtiene un morfismo de pregavillas  $\psi : P \rightarrow j^p Q$  de la manera siguiente: dado  $W \rightarrow U$  étale, componemos este morfismo con la inmersión abierta  $j$  y de esta manera tenemos un morfismo étale  $W \rightarrow X$  y ponemos  $\psi_W = \phi_W$ .

Por lo tanto las funciones anteriores son inversas una de la otra.  $\square$

### A.3. Algunos diagramas útiles

En este apéndice se recolectarán algunos diagramas categóricos, necesarios en el cuerpo principal del texto.

Empezaremos con el siguiente lema.

**Lema A.7.** *Si tenemos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C \\ \beta_1 \downarrow & & \beta_2 \downarrow & & \beta_3 \downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{e_1} & B_1 & \xrightarrow{e_2} & C_1 \end{array}$$

donde el rectángulo exterior y el cuadrado de la derecha son productos fibrados, entonces el cuadrado de la izquierda es un producto fibrado.

DEMOSTRACIÓN. Se considera el diagrama conmutativo:

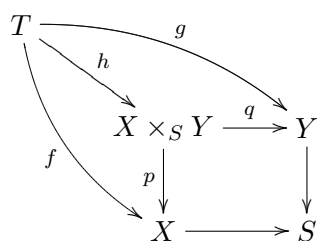
$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi_1} & B \\ \varphi_2 \searrow & & \downarrow \\ & A & \longrightarrow B \\ & \downarrow & \downarrow \\ & A_1 & \longrightarrow B_1 \end{array}$$

Así  $\beta_2 \circ \varphi_1 = e_1 \circ \varphi_2$  y esto implica  $e_2 \circ (\beta_2 \circ \varphi_1) = e_2 \circ (e_1 \circ \varphi_2)$ , es decir  $\beta_3 \circ (f_2 \circ \varphi_1) = (e_2 \circ e_1) \circ \varphi_2$ .

Por lo tanto, como el rectángulo es un producto fibrado, existe un único morfismo  $h : D \rightarrow A$  tal que  $\beta_1 \circ h = \varphi_2$  y  $(f_2 \circ f_1) \circ h = f_2 \circ \varphi_1$ . Ahora  $f_2 \circ (f_1 \circ h) = f_2 \circ \varphi_1$  y  $\beta_2 \circ (f_1 \circ h) = (e_1 \circ \beta_1) \circ h = e_1 \circ \varphi_2 = \beta_2 \circ \varphi_1$ ; puesto que el cuadrado derecho es un producto fibrado se sigue que  $f_1 \circ h = \varphi_1$ .

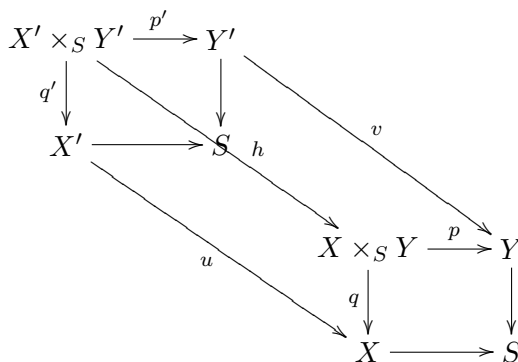
Si existiera otro morfismo  $h' : D \rightarrow A$  con  $f_1 \circ h' = \varphi_1$  y  $\beta_1 \circ h' = \varphi_2$  entonces  $(f_2 \circ f_1) \circ h' = f_2 \circ \varphi_1$  y  $\beta_1 \circ h' = \varphi_2$  y por lo tanto  $h = h'$ .  $\square$

Dados dos  $S$ -morfismos  $f : T \rightarrow X, g : T \rightarrow Y$  se denota por  $(f, g)$  el morfismo,  $h$ , obtenido del diagrama de producto fibrado siguiente:

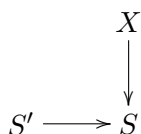


En particular si  $f : X \rightarrow Y$  es un morfismo de esquemas, el *morfismo diagonal* es  $\Delta_f = (1_X, 1_X) : X \rightarrow X \times_Y X$ ; por simplicidad alguna veces se escribiera  $\Delta$  por  $\Delta_f$ , cuando no haya peligro de confusión.

También, dados dos  $S$ -morfismos  $u : X' \rightarrow X, v : Y' \rightarrow Y$  se define el morfismo  $u \times v$ , llamado *el producto de  $u$  por  $v$* , como el morfismo,  $h$ , inducido por el diagrama siguiente:

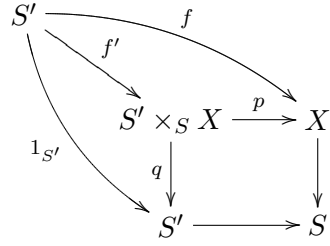


Sea  $f : S' \rightarrow X$  un  $S$ -morfismo, y considere un diagrama de la forma:



donde las flechas no etiquetadas indican los morfismos estructurales.

Se forma el producto fibrado:

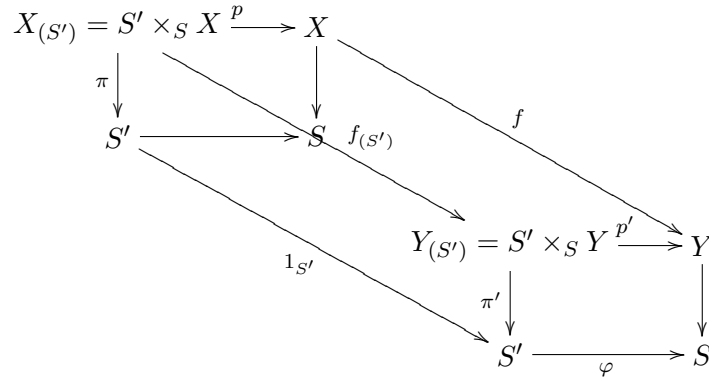


y al morfismo inducido  $(1_{S'}, f) : S' \rightarrow S' \times_S X$  que verifica:

$$\begin{aligned} p \circ (1_{S'}, f) &= f \\ q \circ (1_{S'}, f) &= 1_{S'} \end{aligned}$$

se le llama la *grafica del morfismo*  $f$  y se denota por  $\Gamma_f$ .

Sea  $f : X \rightarrow Y$  un  $S$ -morfismo y  $\varphi : S' \rightarrow S$  es un morfismo de esquemas. Considere el diagrama siguiente:

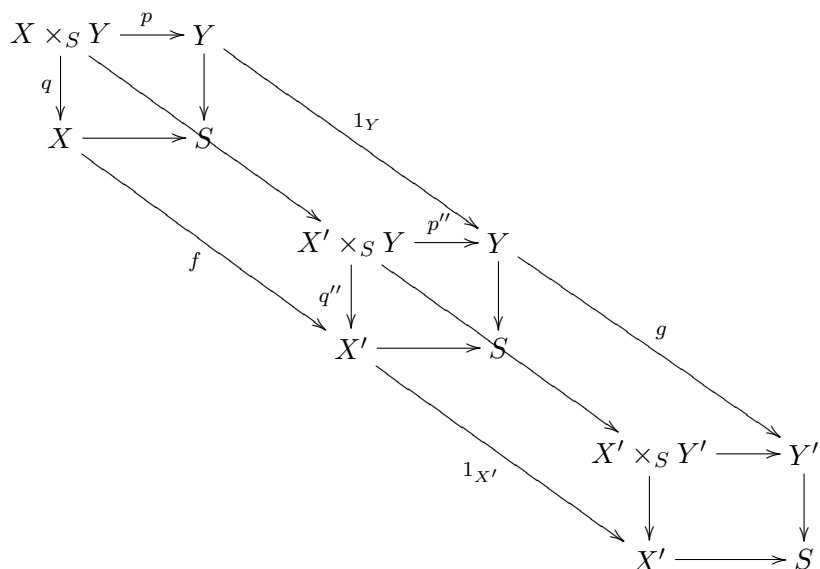


Por definición tenemos que  $f_{(S')} = f \times 1_{S'}$ .

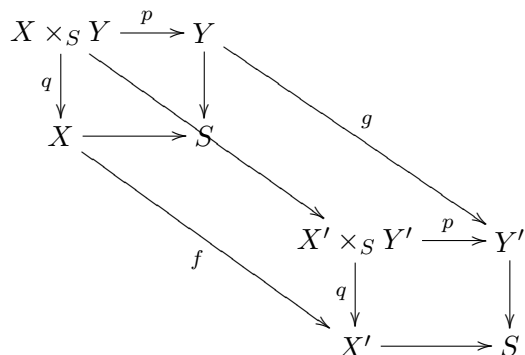
**Comentario A.8.** Se observa que por el lema A.7 se puede considerar a  $f_{(S')}$  como un cambio de base del morfismo  $f$ .

**Lema A.9.** Sean  $f : X \rightarrow X'$ ,  $g : Y \rightarrow Y'$  dos  $S$ -morfismos, entonces  $f \times g = (1_{X'} \times g) \circ (f \times 1_{Y'})$ .

DEMOSTRACIÓN. Considere los diagramas siguientes:



Estos diagramas se reducen al diagrama siguiente:



Como

$$\begin{aligned}
 p' \circ (1_{X'} \times g) \circ (f \times 1_Y) &= 1_{X'} \circ p'' \circ (f \times 1_Y) = p'' \circ (f \times 1_Y) = f \circ p \\
 q' \circ (1_{X'} \times g) \circ (f \times 1_Y) &= (q' \circ (1_{X'} \times g)) \circ (f \times 1_Y) = (g \circ q'') \circ (f \times 1_Y) = \\
 &= g \circ (q'' \circ (f \times 1_Y)) = g \circ q.
 \end{aligned}$$

Por unicidad se tiene que  $f \times g = (1_{X'} \times g) \circ (f \times 1_Y)$  □

**Lema A.10.** Sea  $\varphi : X \rightarrow S$  es un morfismo de esquemas y considere el producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_S S & \xrightarrow{\pi_2} & X \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 S & \xrightarrow{1_S} & S
 \end{array}$$

entonces  $X \cong X \times_S S$ .

DEMOSTRACIÓN. El siguiente cuadrado es un producto fibrado para  $X$  y  $S$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & S \\ 1_X \downarrow & & \downarrow 1_S \\ X & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

Para probar ésta última afirmación sea  $T$  un  $S$ -esquema y  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son  $S$ -morfismos. Considere el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \searrow^{\varphi_1} & & & \\ & & X & \xrightarrow{\varphi} & S \\ & \searrow^{\tilde{h}} & \downarrow 1_X & & \downarrow 1_S \\ & & X & \xrightarrow{\varphi} & S \\ & \searrow_{\varphi_2} & & & \end{array}$$

Supongamos que  $1_S \circ \varphi_1 = \varphi \circ \varphi_2$ , si ponemos  $\tilde{h} = \varphi_2 : T \rightarrow X$  entonces:

$$1_X \circ \tilde{h} = \varphi_2, \varphi \circ \tilde{h} = \varphi \circ \varphi_2 = \varphi_1$$

puesto que el diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\varphi_2} & X \\ \varphi_1 \downarrow & \searrow^{\varphi} & \\ S & & \end{array}$$

Además, si  $\tilde{h}' : T \rightarrow X$  cumple que:

$$1_X \circ \tilde{h}' = \varphi_2 \text{ y } \varphi \circ \tilde{h}' = \varphi_1 \text{ entonces } \tilde{h}' = \varphi_2 = \tilde{h}.$$

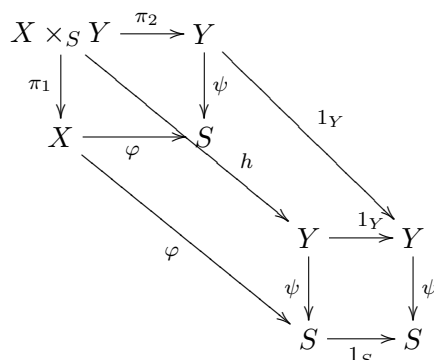
Por lo tanto, el cuadrado anterior es un producto fibrado, en particular  $X \cong X \times_S S$ .  $\square$

**Lema A.11.** Sean  $\psi : Y \rightarrow S$  y  $\varphi : X \rightarrow S$  morfismos de esquemas; considere el producto fibrado:

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{\pi_2} & Y \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \psi \\ S' & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

entonces podemos identificar  $\pi_2$  con  $f \times 1_Y$ .

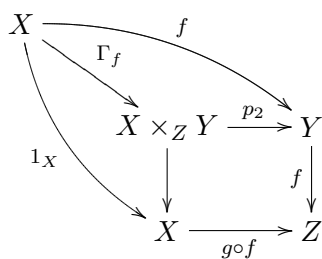
DEMOSTRACIÓN. Considere el producto  $h = \varphi \times 1_Y$ , por el lema A.10 se obtiene el diagrama conmutativo siguiente:



Por lo tanto  $\varphi \times 1_Y = h = \pi_2$ . □

De modo análogo se prueba que  $X \times_S Y \rightarrow Y$  se identifica con  $\varphi \times 1_Y$ .

De esto último deducimos lo siguiente: supongamos que tenemos dos morfismos de esquemas  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$ , se puede formar el producto fibrado siguiente



Por el lema A.11, identificamos  $p_2$  con  $g \circ f \times 1_Y$ , por lo tanto,  $f$  se factoriza como  $f = (g \circ f \times 1_Y) \circ \Gamma_f$  y esto lo podemos expresar como un lema:

**Lema A.12.** Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos de esquemas, entonces podemos factorizar a  $f$  como sigue  $f = (g \circ f \times 1_Y) \circ \Gamma_f$ .

□

De todas estas observaciones se tiene que:

- Proposición A.13.**
- (a) El producto cartesiano de dos morfismos no ramificados es no ramificado.
  - (b) Si  $g \circ f$  es no ramificado, entonces  $f$  es no ramificado.
  - (c) Si  $f$  es no ramificado, lo es también  $f_{\text{red}}$ .

□



## Notaciones

$\text{End}(E)$	Anillo de endomorfismos de una curva elíptica $E$ , VI
$\text{gr}(\varphi)$	Grado del morfismo de variedades proyectivas $\varphi : V \rightarrow W$ , VI
$\psi_\ell$	Representación de $\psi \in \text{End}(E)$ en el módulo de Tate $T_\ell(E)$ , VI
$f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y$	Morfismo entre las gavillas estructurales, 1
$\Gamma(U, G)$	Funtor de secciones locales o globales de una gavilla $G$ , 1
$\text{Spec}(A)$	El espectro de un anillo $A$ , 2
$\mathcal{O}_{X,x}$	Fibra de un esquema, 4
$f_y^\# : \mathcal{O}_{X,f(y)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$	Morfismo entre fibras, 4
$f = (f, f^\#) : Y \rightarrow X$	Morfismo de esquemas, 4
$f^*F$	Imagen inversa de una gavilla (en la topología de Zariski), 8
$\coprod_{i \in I} X_i$	Suma directa de la familia de esquemas, $\{X_i\}_{i \in I}$ , 14
$\Gamma_g$	Gráfica del morfismo $g$ , 11
$\text{Esq}/X$	La categoría de esquemas sobre $X$ , 17
$\text{Spec}(k(x)) \xrightarrow{\text{can}} X$	El morfismo canónico, 19
$\text{Ab}$	Categoría abeliana, 20
$\text{Hom}_X(U, V)$	El conjunto de $X$ morfismos de esquemas de $U$ a $V$ , 25
$\approx$	Isomorfismo entre los grupos considerados, 59
$\mathbb{P}^n(k)$	Espacio proyectivo de dimensión $n$ sobre $k$ , 69
$X \otimes_k k^{\text{sep}}$	Producto fibrado $X \times_{\text{Spec}(k)} \text{Spec}(k^{\text{sep}})$ , 72
$F_{X/k} \otimes 1$	Extensión del morfismo de Frobenius a $X \otimes_k k^{\text{sep}}$ , 72





## Bibliografía

1. Cornell, G., Silverman, J. (Eds.), *Arithmetic Geometry*. Springer-Verlag, New York, (1986).
2. Deligne, P. et al, SGA 4 1/2: *Cohomologie étale*. Lecture Notes in Mathematics **569**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
3. Freitag, E., Kiehl, R., *Étale Cohomology and the Weil Conjecture*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
4. Fulton W., *Algebraic Curves*. Addison-Wesley, Reading (1989).
5. Greenberg, M. and Harper, J., *Algebraic Topology, A First Course*. Addison-Wesley, Reading, 1980.
6. Grothendieck, A., Dieudonne, J., *Eléments de Géométrie Algébrique I*. Publ. Math. IHES **4**, (1960).
7. Grothendieck, A., Dieudonne, J., *Eléments de Géométrie Algébrique IV*. Publ. Math. IHES **32**, (1967).
8. Grothendieck, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), 119-221.
9. Guillemin V., Pollack A., *Topología diferencial*. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2003.
10. Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.
11. Lütkebohmert, W., On compactification of schemes. *Manuscripta Math.* **80** (1993), 95-111.
12. McLane, S., *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
13. Milne, J., *Étale Cohomology*. Princeton University Press. Princeton, 1980.
14. Milne, J., *Lectures on étale cohomology*. v2.10 (20 de mayo 2008).
15. Milne J., *Abelian Varieties*. v2.00 (17 de marzo 2008).
16. Mumford, D., *Abelian Varieties*. Oxford University Press (1970).
17. Mumford, D., *The Red Book of Varieties and Schemes*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
18. Murre, J. P., *An Introduction to Grothendieck's Theory of the Fundamental Group*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1967).
19. Nagata, M., Imbedding of an abstract variety in a complete variety. *J. Math. Kyoto Univ.* **2** (1962), 1-10.
20. Nagata, M., A generalization of the imbedding problem of an abstract variety in a complete variety. *J. Math. Kyoto Univ.* **3** (1963), 89-102.
21. Shatz, S., *Profinite Groups, Arithmetic, and Geometry*. Annals of Math. Studies 67, Princeton University Press, Princeton, 1972.

22. Silverman J. H., *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Springer-Verlag, New York (1986).
23. Tamme, G., *Introduction to Étale Cohomology*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
24. Zaldívar, F., *Cohomología de Galois de campos locales*. Sociedad Matemática Mexicana, México, 2001.

## Índice alfabético

apareamiento  
  canónico, 76

### B

categoría  
  abeliana, 34, 73  
  aditiva, 73  
  de gavillas, 27, 34  
  de pregavillas, 21  
coimagen, 73  
compactable, 63  
compactación, 63  
conúcleo, 73  
cubriente, 17  
  de Galois, 40

### C

$\delta$ -functor, 74  
derivación, 6  
diferenciales de Kähler, 6  
dualidad de Poincaré, 57

### D

$E$ -cubriente, 17  
 $E$ -morfismo, 17  
 $E$ -sitio, 17  
 $E$ -topología, 17  
escisión, 47  
esquema  
  algebraico, 2  
  en grupos, 26  
extensión por cero, 37

### E

functor  
  imagen inversa, 28  
  representable, 21  
funtores derivados derechos, 74

### F

gavilla, 21  
   $\ell$ -ádica, 52  
   $\ell$ -ádica construible, 53

Hom, 49

asociada, 28, 32  
con fibras finitas, 51  
construible, 52  
finita, 51  
localmente constante, 51, 52  
localmente libre, 52  
plana, 50  
producto tensorial, 49  
pseudocoherente, 50  
grupos de cohomología  
   $\ell$ -ádicos, 53  
  étale, 45  
  con soporte compacto, 49  
  con soporte en un esquema, 47  
  de Galois, 46

### G

igualador, 22  
imagen, 73  
  directa, 37  
  directa superior, 45  
  inversa, 28, 37  
inmersión  
  abierta, 1  
  cerrada, 1  
inyectivo, 74

### H

módulo  
  de diferenciales relativas, 6  
morfismo  
  étale, 14  
  afín, 1  
  continuo, 27  
  de gavillas, 22  
  de pregavillas, 20  
  de restricción, 20  
  de sitios, 27  
  de tipo finito, 2  
  de traza, 53  
  fielmente plano, 4  
  finito, 1

localmente de tipo finito, 2  
no ramificado, 6  
plano, 4  
propio, 4  
morfismos cubrientes, 18

**I**

núcleo, 73

**J**

pregavilla  
aditiva, 21  
constante, 21  
en un sitio, 20  
Hom, 21  
multiplicativa, 21

**K**

sección, 20  
sitio, 17  
étale, 18

de Zariski, 18  
grande, 17  
pequeño, 17  
plano, 18  
subesquema abierto, 1  
sucesión espectral de Leray, 50  
suficientes inyectivos, 74

**L**

topología  
étale, 18  
de Grothendieck, 18  
de Krull, 38  
de Zariski, 19  
torcimiento de Tate, 52

**M**

variedad abeliana, 66  
variedad en grupos, 66  
variedad Jacobiana, 66