

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

DIVISION CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

Unidad Iztapalapa



**EL PROBLEMA ROMBOIDAL DE
4-CUERPOS EN EL PLANO**

T E S I S

Que Para Obtener el Grado de

DOCTOR EN CIENCIAS

P r e s e n t a

ERNESTO PEREZ CHAVELA.

México, D. F.

Octubre 1991

El Problema Romboidal de 4-Cuerpos en el Plano

Tesis

que para obtener el grado de Doctor en Ciencias presenta

Ernesto Pérez Chavela.

bajo la dirección del Dr. Ernesto A. Lacomba Zamora

**Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa**

Contenido

1	Formulación del problema. Aspectos Generales	1
1.1	Ecuaciones de movimiento	2
1.2	Topología de las superficies de energía	3
1.3	Coordenadas de McGehee	4
1.4	Puntos de equilibrio	8
1.5	Simetrías	11
1.6	Orbitas homotéticas	11
2	Flujo sobre la Variedad de Colisión Total	20
2.1	Ecuaciones de movimiento sobre Λ	20
2.2	Proyección sobre el plano $\theta - v$	21
2.3	Estudio del caso límite	25
3	Estudio de los Escapes y Dinámica Simbólica	28
3.1	Variedad del infinito y órbitas parabólicas	29
3.2	Dinámica simbólica para valores pequeños del parámetro.	40
3.3	Dinámica simbólica para α cercano a uno.	47
4	Flujo sobre las superficies E_h con $h \geq 0$	58
4.1	Caso $h = 0$	58
4.2	Caso $h > 0$	62
5	Un modelo compacto para el problema romboidal	75
5.1	Regularización de colisiones binarias	75
5.2	Simetrías	77
5.3	Puntos de equilibrio	78
5.4	Flujo sobre la variedad de colisión total Λ	79

5.5	Flujo global	82
5.6	Conclusiones globales	88

Introducción

El problema romboidal es un caso particular del problema general de 4-cuerpos en el plano, que resulta al considerar dos parejas de masas iguales, ($m_1 = m_2$ y $m_3 = m_4$) colocadas en los vértices de un rombo. Se les dan condiciones iniciales en posiciones y velocidades simétricas respecto a las diagonales del rombo, y dejamos que se muevan bajo la ley de atracción de Newton.

El sistema de ecuaciones diferenciales resultante es bastante complicado e interesante, ya que en él se presentan singularidades de dos tipos; las que corresponden a colisiones binarias entre las partículas m_1 y m_2 y entre las partículas m_3 y m_4 , así como las que corresponden a colisión total. Si fijamos el centro de masa en el origen y tomamos a la razón de masas como parámetro, obtenemos una familia a un parámetro de ecuaciones diferenciales con dos grados de libertad, los cuales pueden escribirse en forma Hamiltoniana. El objetivo de este trabajo es dar una descripción cualitativa lo más completa posible sobre el flujo global. Ya que el Hamiltoniano es una integral primera de movimiento que representa la energía total del sistema y el comportamiento cualitativo del flujo depende del signo de esta integral primera, haremos un tratamiento diferente para los casos negativo, cero y positivo.

En el Capítulo I hacemos la formulación del problema y vemos algunos aspectos generales del mismo. La singularidad debido a colisión total es estudiada siguiendo las ideas de McGehee [Ref. 12] tal como se ven en [Ref. 3] y en [Ref. 17], que consiste en hacer una “explosión” y sustituir esta singularidad por una variedad frontera. Después de un reescalamiento del tiempo vemos que el sistema puede extenderse a esta frontera, la cual permanece invariante por el flujo. Las singularidades debidas a colisiones binarias son regularizadas en el sentido clásico de Sundman.

En este mismo capítulo se demuestra que el sistema extendido tiene exactamente dos puntos de equilibrio hiperbólicos, y que las subvariedades invariantes de dimensión dos asociados a ellos se intersectan transversalmente a lo largo de una cierta órbita particular llamada órbita homotética.

En el capítulo II se hace un estudio detallado del flujo sobre la variedad de colisión total. Ya que estamos interesados en las posibles conexiones entre

las subvariedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio, hacemos una proyección del flujo sobre uno de los planos coordenados e introducimos una nueva forma geométrica de regularizar al mismo tiempo, las colisiones binarias entre cualquier par posible de partículas.

Por medio del análisis numérico y haciendo uso de una rutina RKF-78, se pudo demostrar que existe un único valor del parámetro de masas comprendido entre cero y uno, para el cual se da la conexión buscada.

En el capítulo III se presentan los resultados más interesantes de este trabajo. Fijando un nivel de energía negativa estudiamos el conjunto de órbitas que escapan. Usando técnicas similares a la "explosión" de McGehee es posible introducir una variedad frontera que llamaremos la variedad del infinito, la cual está foliada por órbitas periódicas. Una de estas órbitas periódicas juega el papel de punto fijo degenerado, es decir sobre esta órbita existe una estructura hiperbólica formada por el conjunto de órbitas que llegan o salen de infinito con velocidad cero. Órbitas con esta propiedad son llamadas órbitas parabólicas. A partir de aquí se demuestra la existencia de un tipo especial de órbitas de expulsión-colisión. En esta primera parte del capítulo se siguen de cerca las ideas de [Ref. 17], para el problema isósceles de 3-cuerpos en el plano.

En la siguiente parte del capítulo, para valores del parámetro pequeño, se relacionan las órbitas que pasan cerca de colisión total con aquellas que pasan cerca de infinito a lo largo de una dirección, que sobre el espacio de configuración corresponde a un ángulo θ igual a $\pi/2$. Para esto, se demuestra numéricamente, que las subvariedades estables e inestables de órbitas parabólicas asociadas a la órbita periódica en infinito en esta dirección se intersectan transversalmente. Esto permite introducir Dinámica Simbólica. Debemos recalcar en este punto, que a diferencia del problema isósceles, donde solamente se presentan colisiones binarias entre una misma pareja de partículas, en el problema romboidal existen colisiones binarias entre dos distintas parejas de partículas. Esto dificulta enormemente los cálculos, sobre todo los numéricos.

Mediante el uso de Dinámica Simbólica es posible asociar a ciertas trayectorias del sistema una sucesión doblemente infinita de enteros, escogidos sobre un conjunto numerable, la cual depende de la geometría del problema romboidal. Ya que esta asociación resulta ser una función suprayectiva sobre

el conjunto de todas las posibles sucesiones doblemente infinitas, podemos deducir la gran complejidad que existe en el conjunto de curvas solución del sistema. Se muestran como ejemplo varios tipos diferentes de órbitas periódicas, así como de aquellas que escapan o vienen de infinito a lo largo de uno de los semiejes coordenados que limitan el espacio de configuración.

Para valores del parámetro próximos a uno, se demuestra que la subvariedad estable (inestable) de órbitas parabólicas asociada a la órbita periódica en infinito sobre la dirección que corresponde a $\theta = 0$ ($\theta = \pi/2$) se intersecta transversalmente con la subvariedad inestable (estable) de órbitas parabólicas asociada a la órbita periódica en infinito sobre la dirección $\theta = \pi/2$ ($\theta = 0$). Esto muestra la existencia de órbitas parabólicas que conectan los escapes a infinito en ambas direcciones posibles. La Dinámica Simbólica en este caso nos garantiza que existen órbitas cercanas a escape en dos direcciones distintas, en particular órbitas elípticas periódicas con estas características.

En el capítulo IV se tratan los casos de energía $h \geq 0$. Ya que en estos casos la energía cinética juega un papel predominante en la ecuación de energía, los escapes se producen en forma más natural. Aquí no hay tanta riqueza de movimientos como para energía negativa, pero obtenemos una descripción original de los escapes para $h > 0$. Haciendo una inversión de la coordenada radial vemos que los escapes se pueden estudiar en forma análoga a como estudiamos la singularidad debida a colisión total. Es decir, se introduce una variedad frontera invariante para el flujo, sobre cada nivel fijo de energía. En el caso $h = 0$ se obtiene que el flujo sobre la variedad del infinito coincide con el flujo que habíamos obtenido sobre la variedad de colisión total. En base a esto podemos dar una descripción completa del flujo global para todo valor del parámetro α . Para el caso $h > 0$, aparte de la inversión de la coordenada radial, regularizamos las colisiones binarias en el sentido clásico de Sundman. Esto nos permite describir el flujo sobre la variedad frontera y en una vecindad de ésta. Este comportamiento al infinito es idéntico para los problemas isósceles y colineal de 3-cuerpos. Aplicando estos resultados al problema isósceles se demuestra que por lo menos con esta forma muy natural de regularizar colisiones, se obtiene una descripción distinta a lo que se suponía en Lacomba [Ref. 9]. Los puntos de equilibrio sobre la variedad del infinito forman un conjunto conexo, que consta de una parte atractora normalmente hiperbólica, otra parte repulsora normalmente hiperbólica y dos partes que resultan ser sillars normalmente hiperbólicas,

todas ellas unidas por cuatro puntos de equilibrio totalmente degenerados.

En el capítulo V, se generaliza la regularización geométrica de colisiones binarias introducida en el capítulo II para obtener que cada nivel fijo de energía negativa es una variedad compacta con frontera. Hacemos un estudio del flujo global y del flujo sobre la variedad de colisión total en este modelo; y verificamos que este modelo y el estudiado en los capítulos anteriores son equivalentes como sistemas dinámicos. Esto nos permite demostrar en forma analítica que el conjunto de condiciones iniciales para las órbitas que van a colisión binaria, tiene dimensión 3. No es claro que este resultado pueda ser demostrado en el modelo no-compacto.

Por último quiero expresar mi agradecimiento a mi asesor, Dr. Ernesto Lacomba por haberme introducido a esta apasionante área que es la Mecánica Celeste, así como por sus atinados comentarios y críticas durante la elaboración de esta Tesis; y a los Doctores Carles Simó, Jaume Llibre y Alberto Baidier, profesores visitantes de nuestro Departamento en los últimos años, por sus brillantes sugerencias. También quiero agradecer en esta parte a mi compañero de estudios Joaquín Delgado por las muchas y muy amenas horas que pasamos discutiendo nuestros respectivos problemas; y a la Sra. Beatriz Arce, por su valiosa ayuda para la presentación de este trabajo en \LaTeX .

Capítulo 1

Formulación del problema. Aspectos Generales

Introducción

El problema romboidal de 4 cuerpos en el plano consiste en la descripción del movimiento de 4 masas puntuales m_1, m_2, m_3, m_4 en el plano, colocadas en los vértices de un rombo, donde $m_1 = m_2$ y $m_3 = m_4$. Damos posiciones y velocidades iniciales simétricas respecto a los ejes coordenados de tal manera que las partículas estén siempre en una configuración romboidal simétrica cuando se muevan bajo la ley de atracción de Newton. Si fijamos el centro de masa en el origen, el sistema tiene dos grados de libertad. En este capítulo se deducen las ecuaciones de movimiento y se describe la topología de las superficies de energía. La singularidad debida a colisión total es estudiada por medio de una explosión introducida por McGehee en [Ref. 13], mientras que las singularidades debidas a colisiones binarias son regularizadas por el método clásico de Sundman. Se demuestra que el flujo tiene exactamente dos puntos de equilibrio hiperbólicos y que las variedades invariantes de dimensión 2 asociadas a los puntos de equilibrio se intersectan transversalmente a lo largo de la órbita homotética. De aquí se deduce que el problema romboidal no tiene integrales primeras extendibles aparte del Hamiltoniano.

1.1 Ecuaciones de movimiento

Sea x la semidistancia entre las partículas de masas m_1 y m_2 y y la semidistancia entre las partículas de masas m_3 y m_4 (ver Fig.1.1) Si α es la razón de masas $\alpha = m_3/m_1$, entonces podemos suponer $m_1 = m_2 = 1$ y $m_3 = m_4 = \alpha$.

En estas coordenadas las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{1}{4x^2} - \frac{2\alpha x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \ddot{y} &= -\frac{\alpha}{4y^2} - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (1.1)$$

Sean $q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$, $p = M\dot{q}$.

Entonces las ecuaciones de movimiento (1.1) se pueden escribir en forma Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}\end{aligned}\quad (1.2)$$

donde

$$\begin{aligned}H(q, p) &= \frac{1}{2}p^t M^{-1}p - U(q) \\ U(q) &= \frac{1}{2x} + \frac{\alpha^2}{2y} + \frac{4\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Debido a que en el Hamiltoniano aparece M^{-1} y estamos interesados en estudiar los casos límites $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \pm\infty$ trabajaremos con un sistema equivalente, donde la matriz de masas no dependa de α .

Sean $x_1 = x$, $x_2 = \sqrt{\alpha}y$; las ecuaciones de movimiento toman la forma

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\frac{1}{4x_1^2} - \frac{2\alpha^{5/2}x_1}{(\alpha x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{\alpha^{5/2}}{4x_2^2} - \frac{2\alpha^{3/2}x_2}{(\alpha x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}\end{aligned}\quad (1.3)$$

En este caso, hacemos $q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $p = M\dot{q}$ y el sistema (1.3) tiene la forma Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^t M^{-1} p - U(q) \quad (1.5)$$

y

$$U(q) = \frac{1}{2x_1} + \frac{\alpha^{5/2}}{2x_2} + \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\alpha x_1^2 + x_2^2}}. \quad (1.6)$$

El sistema (1.3) tiene la simetría

$$(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \alpha) \rightarrow (x_2, x_1, \dot{x}_2, \dot{x}_1, 1/\alpha) \quad (1.7)$$

con una reparametrización del tiempo $t = \alpha^{5/4} t'$. Por lo tanto es suficiente estudiar el problema para valores de α comprendidos entre 0 y 1, $0 < \alpha \leq 1$.

1.2 Topología de las superficies de energía

De (1.4) vemos que H es una integral primera, o constante de movimiento para las ecuaciones de Hamilton, por lo tanto podemos considerar que el sistema (1.4) es un campo vectorial definido sobre la superficie de energía constante $E_h = H^{-1}(h)$, es decir, sobre el conjunto de (q, p) que satisfacen

$$\frac{1}{2} p^t M^{-1} p - U(q) = h. \quad (1.8)$$

La representación topológica de cada E_h depende del signo de h . Para ver esto consideremos primero el espacio de configuración

$$Q = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}.$$

Observemos que el semieje $x_1 > 0$ corresponde a singularidades debidas a choques entre las partículas de masa α ; el semieje $x_2 > 0$ corresponde a

singularidades debidas a choques entre las partículas de masa 1, mientras que el origen corresponde a la singularidad debida a colisión total. (Ver Fig. 1.2). Es decir las singularidades aparecen como frontera del espacio de configuración. A continuación daremos la descripción topológica de cada nivel fijo de energía h .

a) $h \geq 0$

Para cada $q \in Q$ fijo tenemos que $\frac{1}{2}p^t M^{-1}p = U(q) + h$ es topológicamente un S^1 . Como no existe ninguna restricción en Q , tenemos que

$$E_h \approx S^1 \times Q \approx S^1 \times \mathbf{R}^2$$

b) $h < 0$

Ya que $\frac{1}{2}p^t M^{-1}p \geq 0$, vemos que en este caso, el espacio de configuración está limitado por la curva $U(q) + h = 0$. Esta curva es llamada la curva de velocidad cero (Ver Fig.1.3)

Sobre $U(q) + h = 0$ tenemos que $\frac{\partial U}{\partial x_2} < 0$, así que sobre esta curva podemos resolver a x_2 como función de x_1 , $x_2 = f(x_1)$ y por tanto $U(q) = -h$ es topológicamente \mathbf{R} .

Ahora tomemos un punto arbitrario sobre la curva de velocidad cero y unamos este punto al origen por medio de un segmento de línea recta. Para cada punto interior de este segmento $\frac{1}{2}p^t M^{-1}p = U(q) + h$ es topológicamente un S^1 , y para el punto sobre la curva de velocidad cero, el S^1 se reduce a un solo punto. Por lo tanto a cada punto de \mathbf{R} le hemos asignado un haz de S^1 que se condensan en un punto, es decir por cada punto de \mathbf{R} tenemos un haz de S^1 pellizado y entonces podemos afirmar que $E_h \approx \mathbf{R} \times D^2$.

1.3 Coordenadas de McGehee

Introducir estas coordenadas en el problema romboidal permitirá entre otras cosas, analizar la singularidad en $q = 0$; es decir cuando tenemos colisión de todas las partículas.

Sean

$$\begin{aligned} r &= (q^t M q)^{1/2} \\ \underline{g} &= r^{-1} q \end{aligned} \tag{1.9}$$

observemos que r^2 es el momento de inercia y representa el tamaño del sistema, \underline{g} es un vector unitario, es decir $\underline{g}^t M \underline{g} = 1$, que representa la forma

del sistema. $S = \{q \in Q : r = 1\}$ es la esfera unitaria en Q , respecto a la métrica inducida por M . (r, \underline{s}) se puede pensar como coordenadas polares en el espacio de configuración. Descomponemos también el vector momento p en una componente radial, y una componente tangencial, que son reescaladas por el factor $r^{1/2}$. Es decir hagamos

$$\begin{aligned} v &= r^{1/2} p^t \underline{s} = r^{1/2} \langle p, \underline{s} \rangle \\ \underline{u} &= r^{1/2} (M^{-1} p - \langle p, \underline{s} \rangle \underline{s}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

En estas coordenadas las ecuaciones de movimiento (1.4) se escriben como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^{-1/2} v \\ \dot{v} &= r^{-3/2} \left[\underline{u}^t M \underline{u} + \frac{v^2}{2} - U(\underline{s}) \right] \\ \dot{\underline{s}} &= r^{-3/2} \underline{u} \\ \dot{\underline{u}} &= r^{-3/2} \left[-\frac{1}{2} v \underline{u} - (\underline{u}^t M \underline{u}) \underline{s} + M^{-1} \text{grad} U(\underline{s}) \right], \end{aligned} \quad (1.11)$$

con la relación de energía

$$\frac{1}{2} (\underline{u}^t M \underline{u} + v^2) - U(\underline{s}) = r h. \quad (1.12)$$

El sistema (1.11) ya no es Hamiltoniano, pero la ecuación (1.12) define un conjunto invariante de codimensión 1 que seguiremos llamando nivel de energía h . Las ecuaciones (1.11) definen un campo vectorial analítico sobre la variedad $(0, \infty) \times \mathbf{R} \times TS$ en coordenadas $(r, v, \underline{s}, \underline{u})$. La singularidad en $r = 0$ sigue existiendo, pero ahora esta puede ser removida por un cambio en la escala del tiempo

$$\frac{dt}{d\tau} = r^{3/2}. \quad (1.13)$$

Ya que estamos en un problema con dos grados de libertad, es posible reemplazar las coordenadas $(\underline{s}, \underline{u})$ por la coordenada polar usual θ , y por la componente de la velocidad escalada en la dirección θ , que denotaremos por u , mediante el cambio

$$\begin{aligned} \underline{s} &= M^{-1/2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix} \\ \underline{u} &= u M^{-1/2} \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Después de reescalar e introducir las nuevas coordenadas, el sistema (1.11) toma la forma

$$\begin{aligned} r' &= rv \\ v' &= u^2 + \frac{v^2}{2} - U(\theta) \\ \theta' &= u \\ u' &= -\frac{1}{2}uv + \dot{U}(\theta), \end{aligned} \quad (1.15)$$

con la relación de energía

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta) = rh, \quad (1.16)$$

donde

$$U(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} + \frac{\alpha^{5/2}}{\sqrt{2} \sin \theta} + \frac{4\sqrt{2}\alpha^{3/2}}{\sqrt{\alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}} \quad (1.17)$$

$0 < \theta < \pi/2$ y $\dot{U}(\theta)$ significa derivación respecto a la variable θ .

Tenemos entonces que la singularidad en $r = 0$ ha sido removida, hemos podido extender el campo vectorial a la frontera $r = 0$ en forma analítica. A esta frontera le llamaremos la variedad de colisión total y la denotaremos por Λ .

La relación de energía también se extiende a la frontera, donde tenemos

$$u^2 + v^2 = 2U(\theta). \quad (1.18)$$

Por lo tanto Λ está dada por

$$\Lambda = \{(r, v, \theta, u) | r = 0, \quad u^2 + v^2 = 2U(\theta)\}. \quad (1.19)$$

Ya que $r' = 0$ cuando $r = 0$ tenemos que Λ es invariante bajo el flujo. Además Λ es independiente del valor de la energía h . Así que cada superficie de energía tiene la misma frontera, que podemos pensar como el borde de un libro con una infinidad de hojas, donde cada hoja representa una superficie de energía constante. En el capítulo II se hará una descripción detallada del flujo sobre Λ .

El sistema (1.15) ya tiene sentido para $r = 0$. Sin embargo siguen existiendo las singularidades debidas a colisiones dobles. Para regularizar estas, procedemos como sigue: Primeramente multiplicamos al potencial U por el seno del ángulo doble.

Sea

$$2W(\theta) = U(\theta)\text{sen}(2\theta), \quad (1.20)$$

e introducimos una nueva variable

$$\omega = \frac{\text{sen}2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}}u. \quad (1.21)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1.16), tenemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4W(\theta)}{\text{sen}^2 2\theta} \omega^2 + v^2 \right) - U(\theta) = rh,$$

de donde vemos que la relación de energía toma la forma

$$\frac{\omega^2}{\text{sen}2\theta} - 1 = \frac{\text{sen}2\theta}{2W(\theta)} \left(rh - \frac{v^2}{2} \right). \quad (1.22)$$

Tomando un nuevo reescalamiento del tiempo

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\text{sen}2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}},$$

las ecuaciones de movimiento (1.15) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{\text{sen}(2\theta)rv}{2\sqrt{W(\theta)}} \\ \frac{dv}{ds} &= \sqrt{W(\theta)} \left(1 - \frac{\text{sen}2\theta}{4W(\theta)}(v^2 - 4rh) \right) \\ \frac{d\theta}{ds} &= \omega \\ \frac{d\omega}{ds} &= \cos 2\theta \left(1 + \frac{\text{sen}2\theta}{2W(\theta)}(2rh - v^2) \right) - \frac{1}{4} \frac{v\omega \text{sen}2\theta}{\sqrt{W(\theta)}} \\ &\quad + \frac{\dot{W}(\theta)}{2W(\theta)}(\text{sen}(2\theta) - \omega^2), \end{aligned} \quad (1.23)$$

donde $\dot{W}(\theta)$ significa derivación respecto a la variable θ . De esta forma hemos extendido el campo vectorial (1.15) sobre las dos componentes de la frontera;

$\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, que representan colisiones binarias. En estas coordenadas, la variedad de colisión Λ está dada por (Ver Fig. 1.4).

$$\Lambda = \left\{ (r, v, \theta, \omega) \mid r = 0, \omega^2 + \frac{v^2 \sin^2 2\theta}{4W(\theta)} = \sin 2\theta \right\} \quad (1.24)$$

1.4 Puntos de equilibrio

Los puntos de equilibrio del flujo son aquellos para los cuales el campo vectorial dado por (1.23) se anula.

Ya que la función $W(\theta)$ es siempre positiva, de la ecuación $\frac{dr}{ds} = 0$ tenemos que $r = 0$ ó $v = 0$ ó $\theta = 0$ ó $\theta = \pi/2$ y de $\frac{d\theta}{ds} = 0$ tenemos que $\omega = 0$.

Utilizando la relación de energía (1.22) con $\omega = 0$ en la ecuación $\frac{dv}{ds} = 0$ llegamos a que

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{W(\theta)} \left(1 - \frac{\sin 2\theta}{4W(\theta)} (v^2 - 4rh) \right) = \sqrt{W(\theta)} \left(1 - \left(\frac{v^2 - 4rh}{v^2 - 2rh} \right) \right) \\ &= \sqrt{W(\theta)} \left(\frac{2rh}{v^2 - 2rh} \right). \end{aligned}$$

por tanto $r = 0$ y $v \neq 0$.

Ahora de la ecuación $\frac{d\omega}{ds} = 0$ y puesto que $\omega = 0$ vemos que $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi/2$ y además

$$\begin{aligned} 0 &= \cos 2\theta(-1) + \frac{\dot{W}(\theta)}{2W(\theta)} \sin 2\theta \\ &= \frac{-2W(\theta) \cos 2\theta + U(\theta) \sin 2\theta \cos 2\theta}{2W(\theta)} + \frac{\dot{U}(\theta) \sin 2\theta}{4W(\theta)} \\ &= \frac{\dot{U} \sin 2\theta}{4W(\theta)}. \end{aligned}$$

De la relación de energía con $r = 0$, $\omega = 0$, llegamos a que

$$\frac{v^2}{2} = \frac{2W(\theta)}{\sin 2\theta} = U(\theta).$$

Hemos pues, demostrado el siguiente resultado:

PROPOSICION 1.1 Si $(r_0, v_0, \theta_0, \omega_0)$ es un punto de equilibrio para el flujo descrito por las ecuaciones (1.23), entonces $r_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, $\dot{U}(\theta_0) = 0$ y $v_0 = \pm \sqrt{2U(\theta_0)}$.

Es decir, por cada punto crítico θ_0 de $\dot{U}(\theta)$, hay exactamente dos puntos de equilibrio para el flujo, uno con $v_0 < 0$ y el otro con $v_0 > 0$.

Recordemos la siguiente definición:

DEFINICION. Si (r_1, \dots, r_n) es la posición de n-partículas en el instante t_0 , decimos que tal posición es una configuración central si existe un escalar real λ tal que

$$\bar{r}_i = \lambda r_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Las configuraciones centrales están caracterizadas como los puntos críticos del potencial U restringido a la esfera unitaria en la métrica dada por la matriz de masas. En nuestro caso, abusando un poco del lenguaje, a los puntos críticos del potencial (1.17) les llamaremos configuraciones centrales.

Una observación importante es que los puntos de equilibrio que nos da la proposición 1.1 son los mismos que se obtienen del sistema (1.15), con el cambio correspondiente de la coordenada u por la coordenada ω , es decir que al regularizar las singularidades debidas a colisiones binarias no creamos nuevos puntos de equilibrio.

Ahora analizando el potencial $U(\theta)$, tenemos que $\dot{U}(\theta) = 0$ si y solamente si

$$\operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta - \alpha^{5/2} \frac{\cos\theta}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{2(1-\alpha)\alpha^{3/2}\operatorname{sen}^2 2\theta}{(\alpha \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta)^{3/2}} = 0 \quad (1.25)$$

haciendo $\operatorname{tg}\theta = a$, tenemos que

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

la ecuación (1.25) es equivalente a

$$0 = (a^3 - \alpha^{5/2})(\alpha + a^2)^{3/2} - 8(1-\alpha)\alpha^{3/2}a^3 \quad (1.26)$$

dividiendo por a^3 tenemos

$$\left(1 - \frac{\alpha^{5/2}}{a^3}\right) (\alpha + a^2)^{3/2} = 8(1-\alpha)\alpha^{3/2} \quad (1.27)$$

notemos que cuando $0 \leq \theta \leq \pi/2$, el lado izquierdo de la ecuación (1.27) es estrictamente creciente y su rango es el intervalo $(-\infty, \infty)$, por lo que podemos afirmar

PROPOSICION 1.2 El potencial $U(\theta)$ tiene solamente un punto crítico para cada valor de α .

Tenemos entonces que el flujo que describe al problema romboidal tiene exactamente 2 puntos de equilibrio, que están sobre la variedad de colisión total Λ .

Tabla 1

α	v	θ
1.0	-3.9132733739	$7.8539816340 \times 10^{-1}$
1.0×10^{-1}	-1.5053851535	$4.8545169947 \times 10^{-1}$
1.0×10^{-2}	-1.2217868339	$1.7089843252 \times 10^{-1}$
1.0×10^{-3}	-1.1924761819	$5.4697977384 \times 10^{-2}$
1.0×10^{-4}	-1.1895341344	$1.7318154855 \times 10^{-2}$
1.0×10^{-5}	-1.1892398181	$5.4771511460 \times 10^{-3}$
1.0×10^{-6}	-1.1892103853	$1.7320484539 \times 10^{-3}$
1.0×10^{-7}	-1.1892074420	$5.4772248307 \times 10^{-4}$
1.0×10^{-8}	-1.1892071477	$1.7320507840 \times 10^{-4}$
1.0×10^{-9}	-1.1892071183	$5.4772255676 \times 10^{-5}$
1.0×10^{-10}	-1.1892071153	$1.7320508073 \times 10^{-5}$

Denotemos por A y B a los puntos de equilibrio que corresponden a $v_0 = -\sqrt{2U(\theta_0)}$ y $v_0 = \sqrt{2U(\theta_0)}$ respectivamente. Usando el método de Newton-Raphson encontramos los valores para θ y v en el punto de equilibrio A , para algunos valores de α ; estos se muestran en la tabla 1.

Mediante un cálculo fácil se puede checar que $\tilde{U}(\theta) \neq 0$ para estos valores de θ ; la linealización del flujo dada por (1.15) en coordenadas (v, θ, u) , para el punto de equilibrio $(v_0, \theta_0, 0)$ tiene la siguiente forma (la coordenada r puede obtenerse de la relación de energía).

$$\begin{pmatrix} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \tilde{U}(\theta_0) & -\frac{m}{2} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = v_0; \quad \lambda_2 = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 16\tilde{U}(\theta_0)}}{4}; \quad \lambda_3 = \frac{-v_0 - \sqrt{v_0^2 + 16\tilde{U}(\theta_0)}}{4}.$$

De todo lo anterior, podemos concluir

PROPOSICION 1.3 Los puntos de equilibrio A y B son hiperbólicos.

Denotaremos por $W_{A(B)}^{s(u)}$ a la variedad estable (respectivamente inestable) asociada al punto de equilibrio A (resp. B). Tenemos entonces que $\dim W_A^s = 2$, $\dim W_A^u = 1$, $\dim W_B^s = 1$ y $\dim W_B^u = 2$.

1.5 Simetrías

Observemos que nuestro Hamiltoniano original (1.5) es cuadrático en los momentos, y que en coordenadas de McGehee esta propiedad persiste para la ecuación de la energía (1.22) en las variables respectivas (v, ω) . Es decir, el problema romboidal pertenece a la clase de los sistemas reversibles, los cuales tienen la siguiente simetría, que denotaremos por L .

$$(q(t), p(t)) \xrightarrow{L} (q(-t), -p(-t)), \quad (1.29)$$

o en coordenadas de McGehee

$$(r, v, \theta, \omega, s) \xrightarrow{L} (r, -v, \theta, -\omega, -s).$$

1.6 Órbitas homotéticas

Órbitas que empiezan en colisión total son llamadas órbitas de expulsión. Órbitas que finalizan en colisión total son llamadas órbitas de colisión; órbitas que hacen ambas cosas son llamadas órbitas de expulsión-colisión. Cualquiera de estas órbitas debe ser asintótica a alguno de los puntos de equilibrio. Denotemos por E_x el conjunto de órbitas de expulsión y por C_o al conjunto de órbitas de colisión. Ya que los puntos de equilibrio son hiperbólicos, E_x y C_o forman subvariedades inmersas del espacio fase. Un tipo especial de

órbitas de expulsión-colisión lo constituyen las órbitas homotéticas, llamadas así por ser soluciones que en todo momento son una homotecia de una configuración central dada.

Es decir, las órbitas homotéticas están caracterizadas por el hecho que $\theta \equiv \theta_0$, donde $\dot{U}(\theta_0) = 0$. Considerando $\theta \equiv \theta_0$, el sistema (1.23) nos dice que $\omega = 0$. Usando nuevamente este sistema y la relación de energía con $\omega = 0$, tenemos que

$$\frac{d\theta}{ds} = 0 = \frac{d\omega}{ds}.$$

Es decir, el plano $r-v$ definido sobre los puntos de equilibrio $(0, \pm v_0, \theta_0, 0)$, donde $v_0 = \sqrt{2U(\theta_0)}$, es invariante bajo el flujo. Sobre este plano tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{ds} &= \frac{\text{sen } 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}}rv \\ \frac{dv}{ds} &= \sqrt{W(\theta)} \left(1 - \frac{\text{sen } 2\theta}{4W(\theta)}(v^2 - 4rh) \right) \\ &= \sqrt{W(\theta)} \left(1 + \frac{\text{sen } 2\theta}{2W(\theta)}(rh - \frac{v^2}{2}) + rh \frac{\text{sen } 2\theta}{2W(\theta)} \right) \\ &= \frac{rh \text{ sen } 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{dr}{dv} = \frac{v}{h},$$

de donde obtenemos

$$v^2 = 2rh + K_0 \tag{1.30}$$

En la figura 1.5 esquematizamos estas órbitas; el signo de las trayectorias se determina de la ecuación $\frac{dr}{d\tau}$.

Observemos que la ecuación (1.30) se puede obtener como la restricción de la relación de energía al plano $\omega = 0$, $\theta = \theta_0$.

$$\frac{v^2}{2} = rh + \frac{2W(\theta_0)}{\text{sen } 2\theta_0} = rh + U(\theta_0).$$

Entonces para cada $h < 0$, existe una única órbita homotética que empieza en el punto de equilibrio B , y finaliza en el punto de equilibrio A . Es

decir, esta órbita pertenece tanto a la variedad inestable del punto B (W_B^u), como a la variedad estable del punto A (W_A^s). En otras palabras, para cada $h < 0$ la órbita homotética es una solución heteroclínica que conecta los dos puntos de equilibrio A y B .

Ya que la órbita homotética es una órbita de expulsión-colisión que no pasa a través de colisiones binarias, la ecuación (1.30) también puede ser obtenida directamente de (1.15). De aquí podemos además dar la ecuación de la órbita homotética en forma paramétrica. Es decir en coordenadas (r, v, θ, u, τ) la órbita homotética está caracterizada por

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau} &= rv \\ \frac{dv}{d\tau} &= \frac{v^2}{2} - U(\theta_0) \\ \theta &\equiv \theta_0 \\ u &\equiv 0,\end{aligned}\tag{1.32}$$

de donde

$$\frac{dv}{2U(\theta_0) - v^2} = -\frac{d\tau}{2}.$$

Haciendo $v_0 = \sqrt{2U(\theta_0)}$ tenemos

$$\frac{1}{v_0} \operatorname{tgh}^{-1} \left(\frac{v}{v_0} \right) = \frac{-\tau}{2}$$

y por tanto

$$v(\tau) = -v_0 \operatorname{tgh} \left(\frac{\tau v_0}{2} \right).\tag{1.33}$$

Ahora nuevamente de (1.32)

$$\frac{dr}{r} = v(\tau) d\tau,$$

de donde

$$r(\tau) = -\frac{U(\theta_0)}{h \cosh^2 \left(\frac{\tau v_0}{2} \right)}.\tag{1.33}$$

Una vez que tenemos parametrizada la órbita homotética, estamos en posibilidad de demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 1.1 W_B^u corta transversalmente a W_A^s a lo largo de la órbita homotética.

DEMOSTRACION En coordenadas (r, v, θ, u, τ) , sabemos que $r(\tau)$ puede ser obtenida de la relación de energía (1.16). Entonces la ecuación variacional a lo largo de la órbita homotética está dada por

$$\begin{pmatrix} v' \\ \theta' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & T & -\frac{v(\tau)}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \theta \\ u \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

donde, $T = D^2U(\theta)|_{\theta=\theta_0}$, y $v(\tau)$ viene dada por la ecuación (1.33).

Tomando coordenadas polares en el plano $\theta - u$ de la forma

$$\theta = R \cos \psi, \quad u = R \sin \psi,$$

tenemos que

$$\psi' = \frac{d}{d\tau} \left(\text{Arc tg} \frac{u}{\theta} \right) = \frac{1}{u^2 + \theta^2} (\theta u' - u \theta').$$

Utilizando (1.35), podemos escribir

$$\psi' = \frac{1}{R^2} \left(T \theta^2 - \frac{u \theta v}{2} - u^2 \right).$$

Finalmente, sustituyendo los valores de θ , u y v tenemos

$$\psi' = T \cos^2 \psi + \frac{v_0}{2} (\sin \psi \cos \psi) \text{tgh} \left(\frac{\tau v_0}{2} \right) - \sin^2 \psi = F(\psi, \tau). \quad (1.36)$$

Debido a la simetría (1.29), para demostrar la transversalidad a lo largo de la órbita homotética, es suficiente resolver (1.36) para $\tau \in [0, \infty)$, y verificar que sobre este intervalo el ángulo de rotación ψ es menor que $\pi/2$.

Las condiciones iniciales de (1.36) están dadas por

$$\tau = 0, \quad \text{y} \quad \psi_0 = \text{Arc tg} \sqrt{T}.$$

Observemos que ψ_0 es el único valor en $(0, \frac{\pi}{2})$ tal que $F(\psi_0, 0) = 0$.

Hagamos

$$V_\tau(\psi) = T \cos^2 \psi + \frac{v_0}{4} \text{tgh} \left(\frac{\tau v_0}{2} \right) \sin 2\psi.$$

Para cada τ fijo en el intervalo $(0, \infty)$, existe un ángulo $\hat{\psi}(\tau) \in (0, \pi/2)$ tal que se satisface la siguiente condición (Ver Fig. 1.6).

$$F(\hat{\psi}(\tau), \tau) = 0.$$

Mediante un cálculo sencillo se verifica que $\frac{\partial F}{\partial \psi}(\psi, \tau) \neq 0$, para todo $\tau \in (0, \infty)$ y para todo $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$, de lo que concluimos que $\hat{\psi}(\tau)$ es una función diferenciable; de la Figura 1.6 observamos que además es una función creciente.

Veamos ahora que $\psi(\tau) \leq \hat{\psi}(\tau)$ para todo $\tau \in (0, \infty)$. Sabemos por construcción que $\psi(0) = \hat{\psi}(0)$. Esto implica que la pendiente de la función ψ en $\tau = 0$ es cero, y como ψ es creciente, su pendiente en $\tau = 0$ es mayor que cero. Por tanto en una vecindad a la derecha de $\tau = 0$ podemos afirmar que $\psi(\tau) < \hat{\psi}(\tau)$. Supongamos que existe $\tau_1 > 0$ tal que $\psi(\tau_1) > \hat{\psi}(\tau_1)$. Sea τ_0 el primer $\tau \in (0, \infty)$ para el cual $\psi(\tau_0) = \hat{\psi}(\tau_0)$ y $\psi(\tau) > \hat{\psi}(\tau)$ para $\tau_0 < \tau < \tau_0 + \delta$, con δ pequeño, entonces ya que $F(\psi(\tau_0), \tau_0) = 0$, tenemos que la pendiente de ψ en $\tau = \tau_0$ es cero, lo cual implica que $\psi(\tau) < \hat{\psi}(\tau)$ (la pendiente de $\hat{\psi}$ en $\tau = \tau_0$ es positiva) en una vecindad a la derecha de $\tau = \tau_0$, llegando así a una contradicción. Por lo tanto podemos afirmar que $\psi(\tau) < \hat{\psi}(\tau)$ para todo $\tau \in (0, \infty)$. Observemos de la Figura 1.6 que $F(\psi, \tau) > 0$ siempre que $\psi \in (0, \hat{\psi}(\tau))$, de donde $\psi(\tau)$ es una función creciente, por tanto

$$0 < \psi(\tau) - \psi_0 < \hat{\psi}(\tau) - \psi_0.$$

Entonces tomando el límite cuando τ tiende a ∞ de ambos lados de la desigualdad llegamos a que

$$0 < \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (\psi(\tau) - \psi_0) \leq \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (\hat{\psi}(\tau) - \psi_0) \leq \pi/2 - \psi_0 < \pi/2.$$

Con lo que el teorema queda demostrado.

De lo anterior deducimos que la órbita homotética es una órbita heteroclínica. Observemos además que el Teorema 1.1. es válido para todo valor del parámetro α .

En el trabajo de Lacombe-Llibre [Ref. 10] se define una clase especial de integrales primeras llamadas integrales extendibles, el término extendible se debe al hecho que estas integrales primeras están definidas sobre el espacio

fase extendido (\bar{E}_h). Una condición adicional que se les pide es que sean constantes en la variedad de colisión.

Ya que W_B^u corta transversalmente a W_A^s a lo largo de la órbita homotética, podemos aplicar las mismas ideas de *Lacomba-Llibre* [Ref. 10] para garantizar que excluyendo el Hamiltoniano, no existen integrales primeras extendibles en el problema romboidal.

Finalizaremos este capítulo con algunas observaciones sobre el comportamiento de x_1 y x_2 como funciones del tiempo real t . De las ecuaciones de movimiento (1.3), tenemos que $\ddot{x}_1(t) < 0$ y $\ddot{x}_2(t) < 0$, lo cual implica que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ como funciones de t son concavas hacia abajo. La figura (1.7) muestra las tres diferentes formas cualitativas que pueden tener las gráficas de estas funciones.

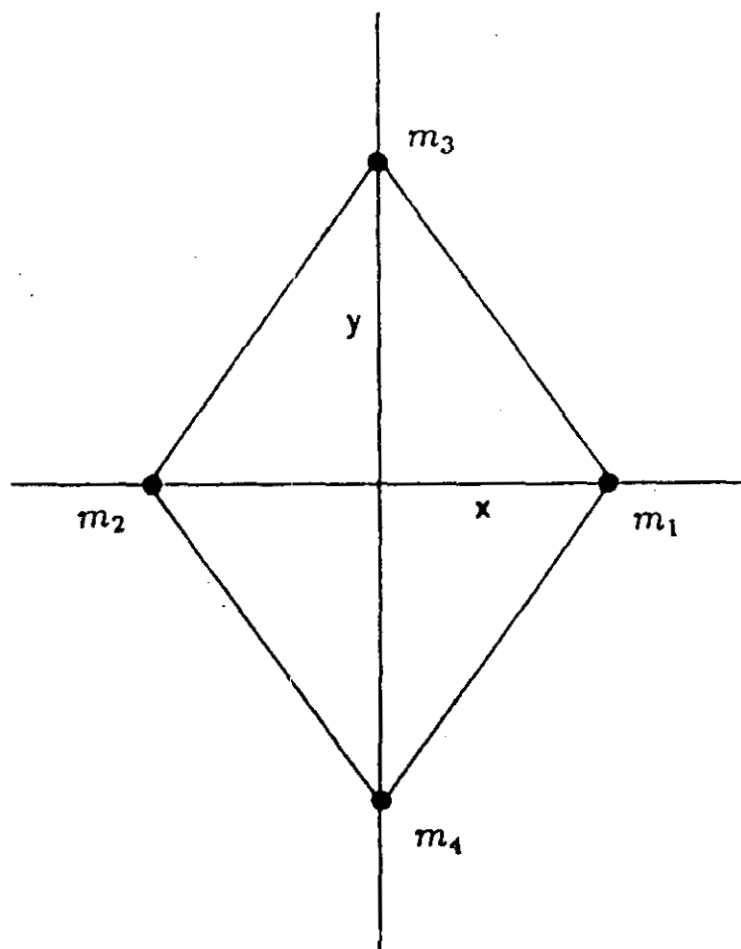


Figura 1.1 El problema romboidal.

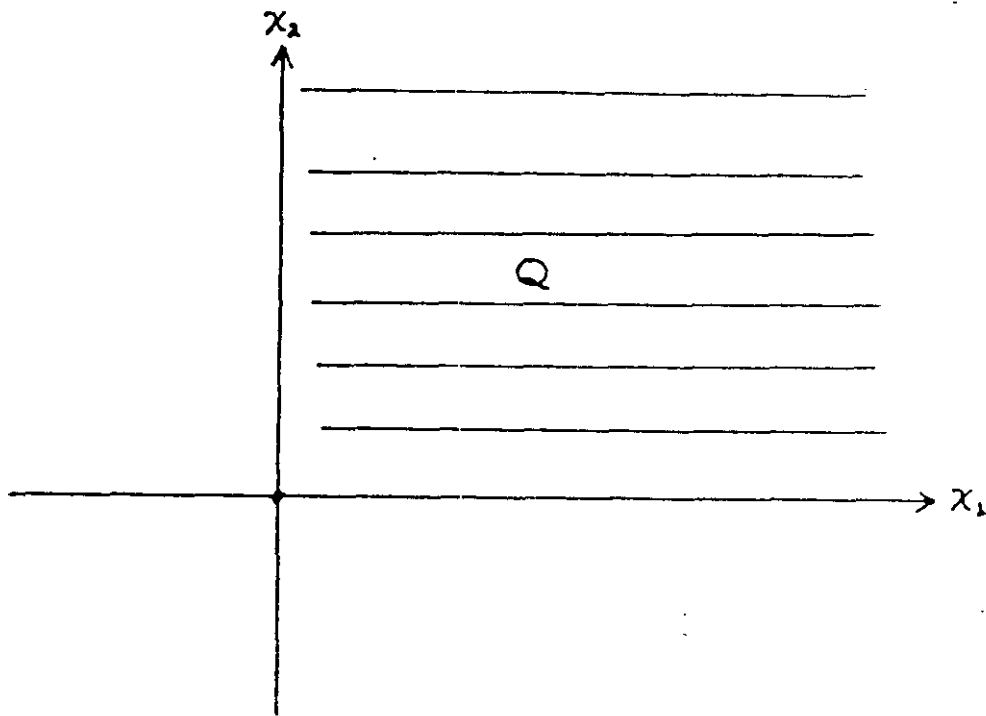


Figura 1.2 Espacio de configuración para $h \geq 0$

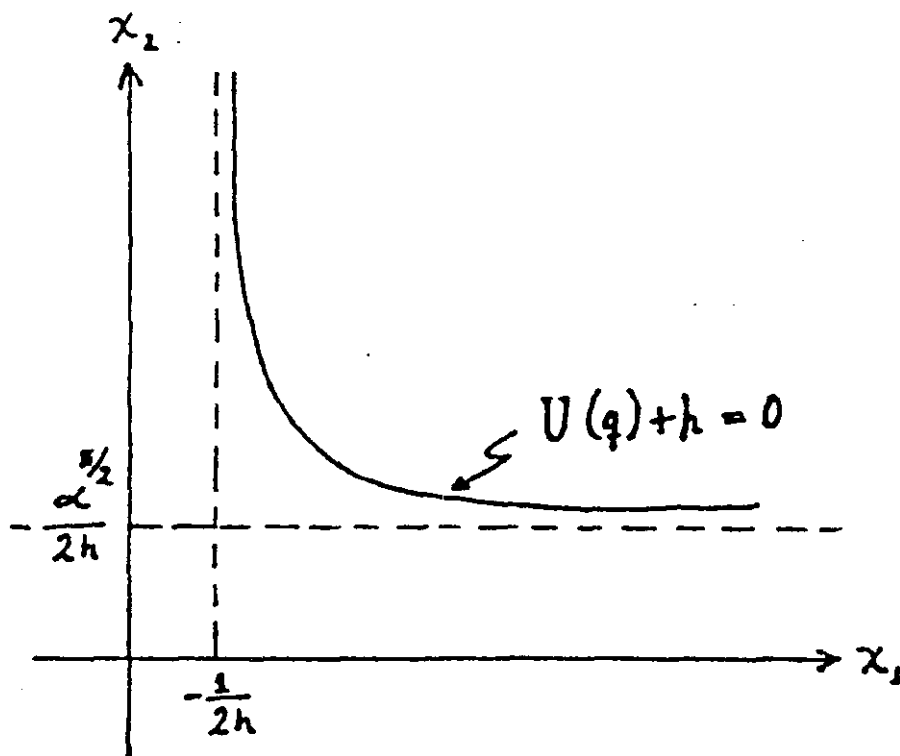


Figura 1.3 Espacio de configuración para $h < 0$.

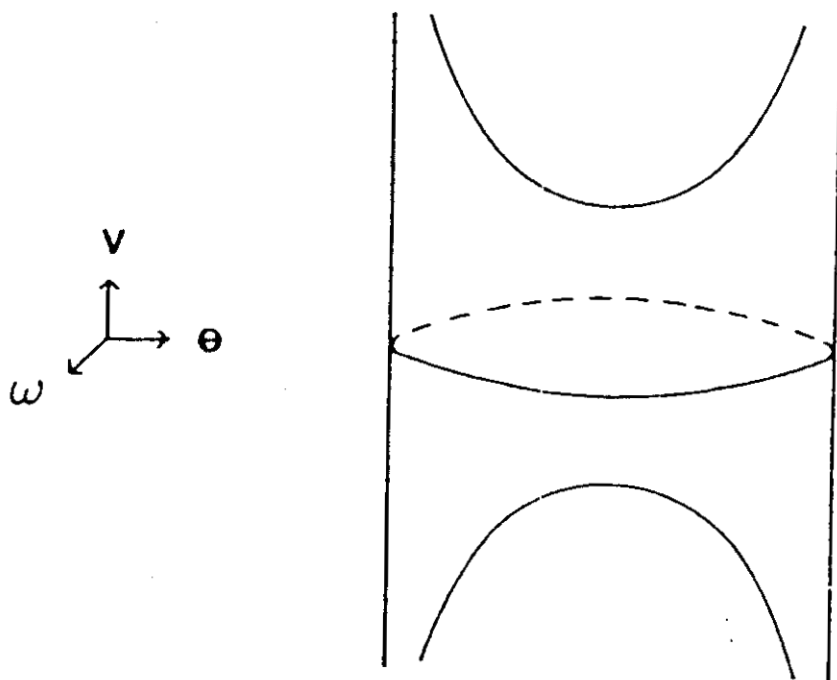


Figura 1.4 La variedad de colisión total A

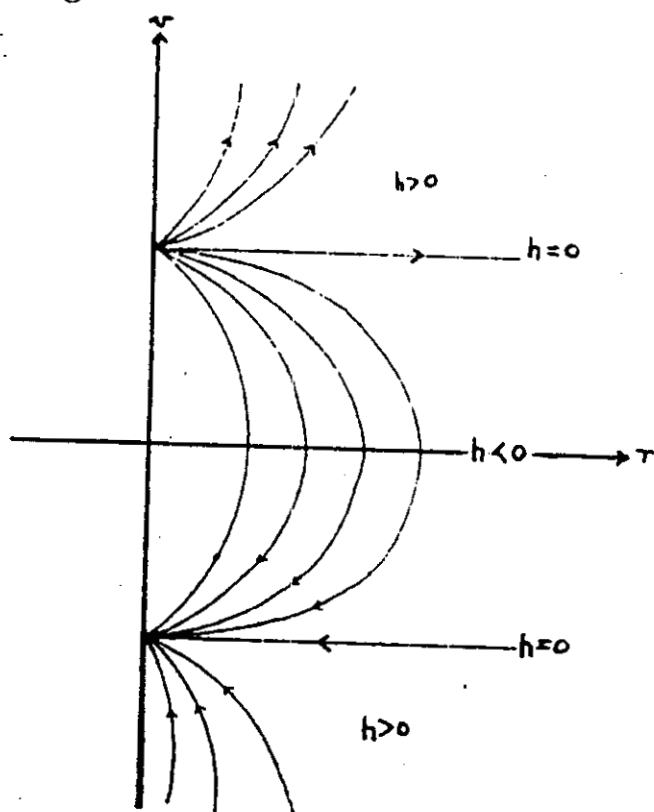


Figura 1.5 Orbitas homotéticas sobre el plano $\omega = 0, \theta = \theta_0$

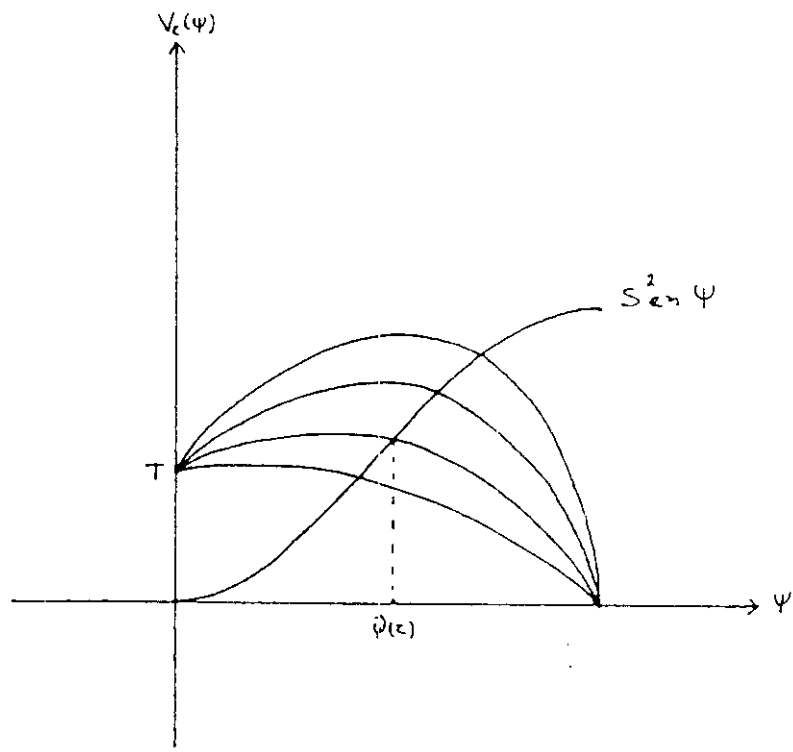


Figura 1.6 Relación entre $\text{sen}^2 \psi$ y $V_z(\psi)$ para algunos valores de τ

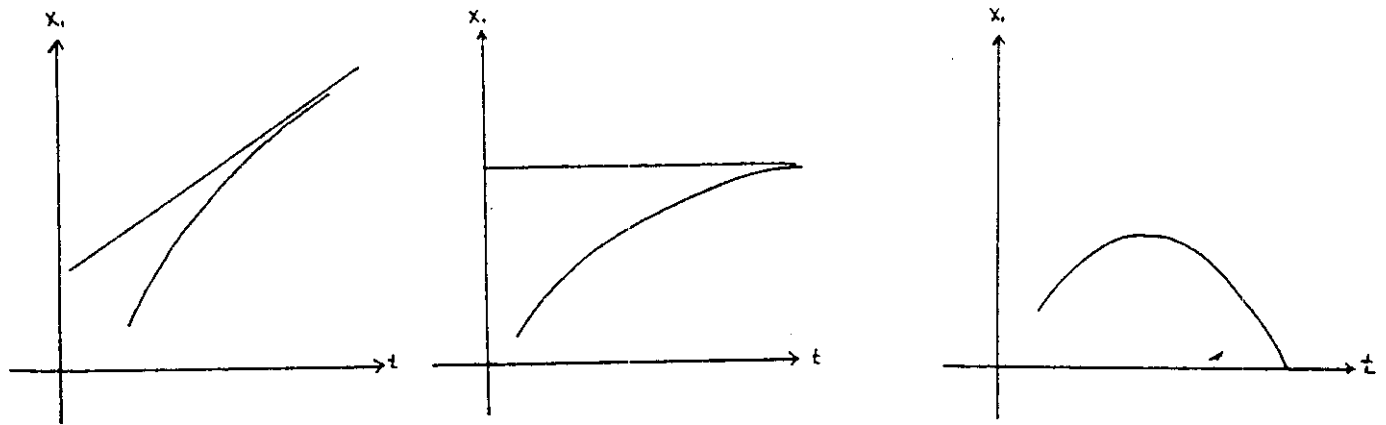


Figura 1.7 x_1 como función de t . Las tres diferentes posibilidades.

Capítulo 2

Flujo sobre la Variedad de Colisión Total

Introducción

En este capítulo haremos una descripción del flujo sobre Λ . Proyectando este flujo sobre el plano $v - \theta$, y regularizando las singularidades debidas a colisiones binarias, mostramos numericamente que existe un solo valor de $\alpha \in (0, 1]$, para el cual se tiene conexión entre las subvariedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio.

2.1 Ecuaciones de movimiento sobre Λ

En el capítulo I, vimos que la variedad de colisión total esta dada por:

$$\Lambda = \left\{ (r, v, \theta, \omega) \mid r = 0, \quad \omega^2 + \frac{v^2 \operatorname{sen}^2 2\theta}{4W(\theta)} = \operatorname{sen} 2\theta \right\}. \quad (2.1)$$

Haciendo $r = 0$ en 1.23 y utilizando la relación de energía, obtenemos

que el flujo sobre Λ esta dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\tau} &= \sqrt{W(\theta)} \left(1 - \frac{\text{sen } 2\theta}{4W(\theta)} v^2 \right) = \sqrt{W(\theta)} \left(\frac{\omega^2}{\text{sen } 2\theta} \right) \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= \omega \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= \cos 2\theta \left(1 - \frac{v^2 \text{sen}^2 \theta}{2W(\theta)} \right) - \frac{1}{4} \frac{v\omega \text{sen } 2\theta}{\sqrt{W(\theta)}} \\ &\quad + \frac{\dot{W}(\theta)}{2W(\theta)} (\text{sen } 2\theta - \omega^2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Recordemos que un campo vectorial es llamado casi- gradiente respecto a una función g , si g crece a lo largo de todas las órbitas que no son puntos de equilibrio. Ya que en (2.2), $\frac{dv}{d\tau} > 0$ siempre que $\omega \neq 0$, y $\omega = 0$ corresponde a alguno de los dos puntos de equilibrio, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICION 2.1 El flujo sobre Λ es casi- gradiente respecto a la coordenada v .

De esto deducimos que los puntos de equilibrio A y B para el flujo restringido a Λ son puntos silla, donde las subvariedades invariantes (estable e inestable) asociadas a ellos, tienen dimensión uno. Ver Figura (2.1)

2.2 Proyección sobre el plano $\theta - v$.

Haciendo uso de la relación (2.1), tenemos que:

$$\frac{\omega^2}{\text{sen } 2\theta} = 1 - \frac{\text{sen } 2\theta}{4W(\theta)} v^2.$$

Ahora utilizando (2.2)

$$\frac{\omega^2}{\text{sen } 2\theta} \sqrt{W(\theta)} = \sqrt{W(\theta)} \left(1 - \frac{\text{sen } 2\theta}{4W(\theta)} v^2 \right) = v'.$$

De donde

$$\omega = \pm \frac{\sqrt{v' \text{sen } 2\theta}}{(W(\theta))^{1/4}}. \tag{2.3}$$

Recordando la definición de la función $W(\theta)$ y de (2.2) y (2.3) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\theta} &= \frac{v'}{\omega} = \pm \frac{\sqrt{v'(W(\theta))}^{1/4}}{\sqrt{\text{sen } 2\theta}} \\ &= \pm \frac{(W(\theta))^{1/4} \left(1 - v^2 \frac{\text{sen } 2\theta}{4W(\theta)}\right)^{1/2}}{(\text{sen } 2\theta)^{1/2}} \\ &= \pm \frac{\sqrt{2U(\theta) - v^2}}{2}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Observemos que (2.4) tiene singularidades para $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ y el signo $+(-)$ corresponde a $\omega > 0$ ($\omega < 0$).

Para estudiar la posible conexión entre las subvariedades invariantes de los puntos de equilibrio introducimos un nuevo cambio de variable independiente. (ver Figura 2.2)

$$\theta = J(\gamma) = \frac{\pi}{4}(1 + \text{sen}(2\gamma)). \quad (2.5)$$

Ahora analizamos la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{d\gamma} = \pm \frac{\pi}{4} \sqrt{2U(\theta) - v^2} \cos(2\gamma) \quad (2.6)$$

Denotemos el punto crítico de $U(\theta)$ por θ_0 , y sea γ_0 el valor correspondiente de γ en el intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$.

Para la rama inestable asociada al punto de equilibrio A , donde $\theta_0 \leq \theta < \pi/2$ ó $\gamma_0 \leq \gamma < \pi/4$, tenemos que

$$\frac{dv}{d\theta} = + \frac{\sqrt{2U(\theta) - v^2}}{2} \quad \text{y} \quad \cos(2\gamma) > 0$$

por lo tanto

$$\frac{dv}{d\gamma} = \frac{\pi}{4} \sqrt{2U(\theta) - v^2} \quad |\cos(2\gamma)| = \frac{\pi}{4} \sqrt{2U(\theta) \cos^2(2\gamma) - v^2 \cos^2(2\gamma)}.$$

Para la parte de esta misma rama correspondiente a $\omega < 0$, es decir cuando los valores de θ decrecen de $\pi/2$ a 0 , tenemos que $\pi/4 < \gamma < 3\pi/4$ y $\cos(2\gamma) < 0$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\gamma} &= -\frac{\pi}{4} \sqrt{2U(\theta) - v^2} \quad \cos(2\gamma) = \frac{\pi}{4} \sqrt{2U(\theta) - v^2} \quad |\cos 2\gamma| \\ &= \frac{\pi}{4} \sqrt{2U(\theta) \cos^2(2\gamma) - v^2 \cos^2(2\gamma)}.\end{aligned}$$

Entonces en general hemos demostrado que la ambigüedad de signo desaparece, dándonos

$$\frac{dv}{d\gamma} = \pm \frac{\pi}{4} \sqrt{2U(\theta) - v^2} \cos(2\gamma) = \frac{\pi}{4} \sqrt{2U(\theta) \cos^2(2\gamma) - v^2 \cos^2(2\gamma)} \quad (2.7)$$

Observemos que la función

$$\begin{aligned} 2U(\theta) \cos^2(2\gamma) &= \frac{\sqrt{2} \cos^2(2\gamma)}{\cos(J(\gamma))} + \frac{\sqrt{2}\alpha^{5/2} \cos^2(2\gamma)}{\operatorname{sen}(J(\gamma))} \\ &+ \frac{8\sqrt{2}\alpha^{3/2} \cos^2(2\gamma)}{\sqrt{\alpha \cos^2(J(\gamma)) + \operatorname{sen}^2(J(\gamma))}} \end{aligned}$$

sigue teniendo singularidades para $\gamma = \dots - \pi/4, \pi/4, 3\pi/4, \dots$. Sin embargo estas singularidades son removibles, ya que

$$\lim_{\gamma \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} \cos^2(2\gamma)}{\cos(J(\gamma))} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \quad \text{y} \quad \lim_{\gamma \rightarrow 3\pi/4} \frac{\sqrt{2}\alpha^{5/2} \cos^2(2\gamma)}{\operatorname{sen}(J(\gamma))} = \frac{8\sqrt{2}\alpha^{5/2}}{\pi}.$$

De esta forma hemos regularizado las singularidades debidas a colisiones dobles.

Denotemos por:

$W_A^{u,+(-)}$ la rama de la subvariedad inestable en A que corresponde a $\omega > 0$ ($\omega < 0$).

$W_B^{s,+(-)}$ la rama de la subvariedad estable en B que corresponde a $\omega > 0$ ($\omega < 0$).

Debido a la simetría L estudiada en el capítulo I (1.29), tenemos que

$$L(W_A^{u,+}) = W_B^{s,-} \quad \text{y} \quad L(W_A^{u,-}) = W_B^{s,+}$$

de donde llegamos al siguiente resultado

PROPOSICION 2.2 $W_A^{u,+}$ coincide con $W_B^{s,-}$ si y solamente si $W_A^{u,+}$ llega al plano $v = 0$ con un valor de $\theta = 0$ ó $\theta = \pi/2$, o un valor de γ que sea un múltiplo impar de $\pi/4$.

Un resultado similar es aplicable para que $W_A^{u,-}$ coincida con $W_B^{s,+}$. Utilizando nuevamente la simetría (1.29), tenemos que

PROPOSICION 2.3 $W_A^{u,+} = W_B^{s,+}$ si y solamente si $W_A^{u,-} = W_B^{s,-}$.

Las proposiciones (2.2) y (2.3) nos dicen que para analizar la posible intersección de las subvariedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio, es suficiente estudiar el comportamiento de $W_A^{u,+}$ y $W_A^{u,-}$ hasta que alcancen el valor $v = 0$. Denotemos por $x(+)$ ($x(-)$), el valor de γ en el que $W_A^{u,+}$ ($W_A^{u,-}$) llega al plano $v = 0$. Usando una rutina RKF-78 llegamos a los resultados expresados en la tabla 2.1.

Tabla 2

α	$x(+)$	$x(-)$
1.0	2.100017	-2.100017
0.2230995423	1.0778347432	-2.3561945 = $-3\pi/4$
1.0×10^{-1}	1.021096	-2.537965
1.0×10^{-2}	8.357815×10^{-1}	-2.381411
1.0×10^{-3}	7.966514×10^{-1}	-2.360311
1.0×10^{-4}	7.875486×10^{-1}	-2.356926
1.0×10^{-5}	7.857881×10^{-1}	-2.356325
1.0×10^{-6}	7.854679×10^{-1}	-2.356218
1.0×10^{-7}	7.854106×10^{-1}	-2.356199
1.0×10^{-8}	7.854004×10^{-1}	-2.356195
1.0×10^{-9}	7.853985×10^{-1}	-2.356195
1.0×10^{-10}	7.853982×10^{-1}	-2.356195

Basados en estos cálculos numéricos, llegamos al siguiente resultado:

PROPOSICION 2.4 Para $\alpha = \alpha_1 = 0.2230995423 \dots$ se tiene que $W_A^{u,-} = W_B^{s,+}$.

En la Figura (2.3) se muestran los comportamientos de las subvariedades invariantes asociadas al punto de equilibrio A, para algunos valores de α .

2.3 Estudio del caso límite

Para $\alpha = 0$ tenemos un caso límite donde $\theta_0 = 0$ y $\gamma_0 = -\pi/4$. De la ecuación (1.17) para el potencial U , vemos que

$$U(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta},$$

y la ecuación (2.4) toma la forma

$$\frac{dv}{d\theta} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\cos \theta} - v^2} \quad (2.8)$$

resolviendo esta ecuación con $v(0) = \lim_{\theta_0 \rightarrow 0} (-\sqrt{2U(\theta_0)}) = -2^{1/4}$ llegamos a que

$$v(\theta) = -2^{1/4} \sqrt{\cos \theta}, \quad (2.9)$$

de donde podemos concluir que $v = 0$ si $\theta = \pi/2$. Es decir, hemos obtenido el siguiente resultado

PROPOSICION 2.5 Para α positivo, suficientemente pequeño, no existe intersección entre las subvariedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio. Una intersección ocurre en el caso límite $\alpha = 0$.

De todo lo anterior, y recordando que el problema tiene la simetría (1.7) llegamos al siguiente resultado

PROPOSICION 2.6 En el problema romboidal de cuatro cuerpos existen solamente dos valores de la razón de masas α , uno de ellos α_1 es menor que uno ($\alpha_1 < 1$) y el otro es $\alpha_2 = \alpha_1^{-1} > 1$, para los cuales existe conexión entre las subvariedades invariantes de los puntos de equilibrio.

Para finalizar este capítulo observemos que para el valor $\alpha = \alpha_1$ tenemos que $W_A^{u,-} = W_B^{s,+}$ pero que $W_A^{u,+} \neq W_B^{s,-}$, y para el valor $\alpha = \alpha_2$ $W_A^{u,+} = W_B^{s,-}$ pero $W_A^{u,-} \neq W_B^{s,+}$, por lo que podemos concluir que este problema no es regularizable. Ver [Ref. 17].

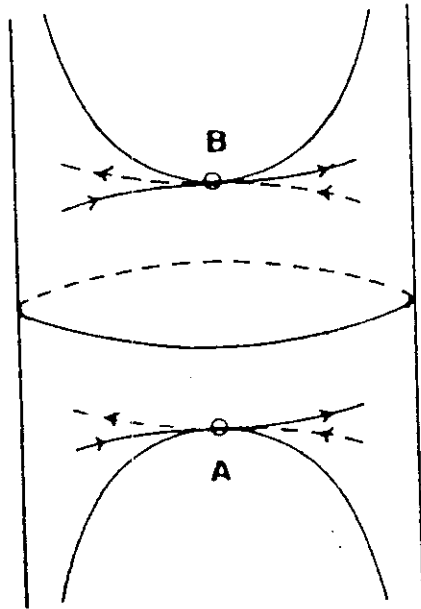


Figura 2.1 Puntos de equilibrio sobre A

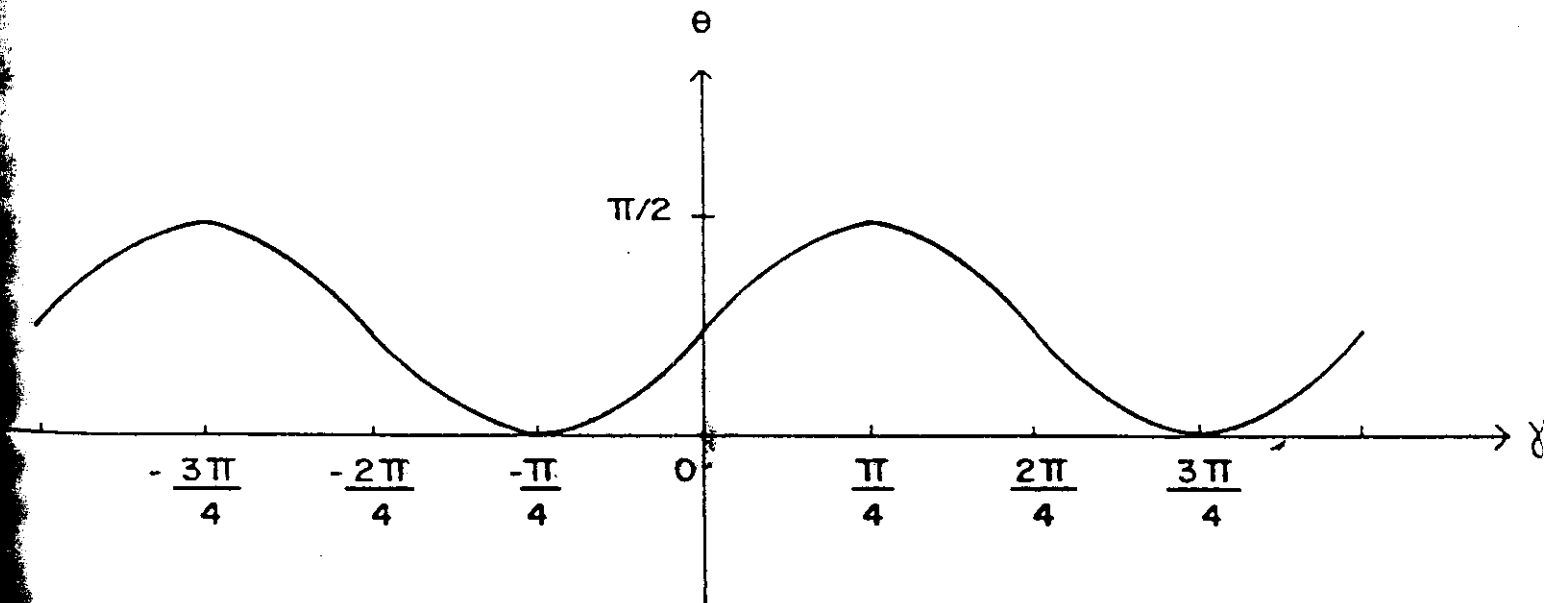


Figura 2.2 Relación entre θ y la nueva variable independiente γ

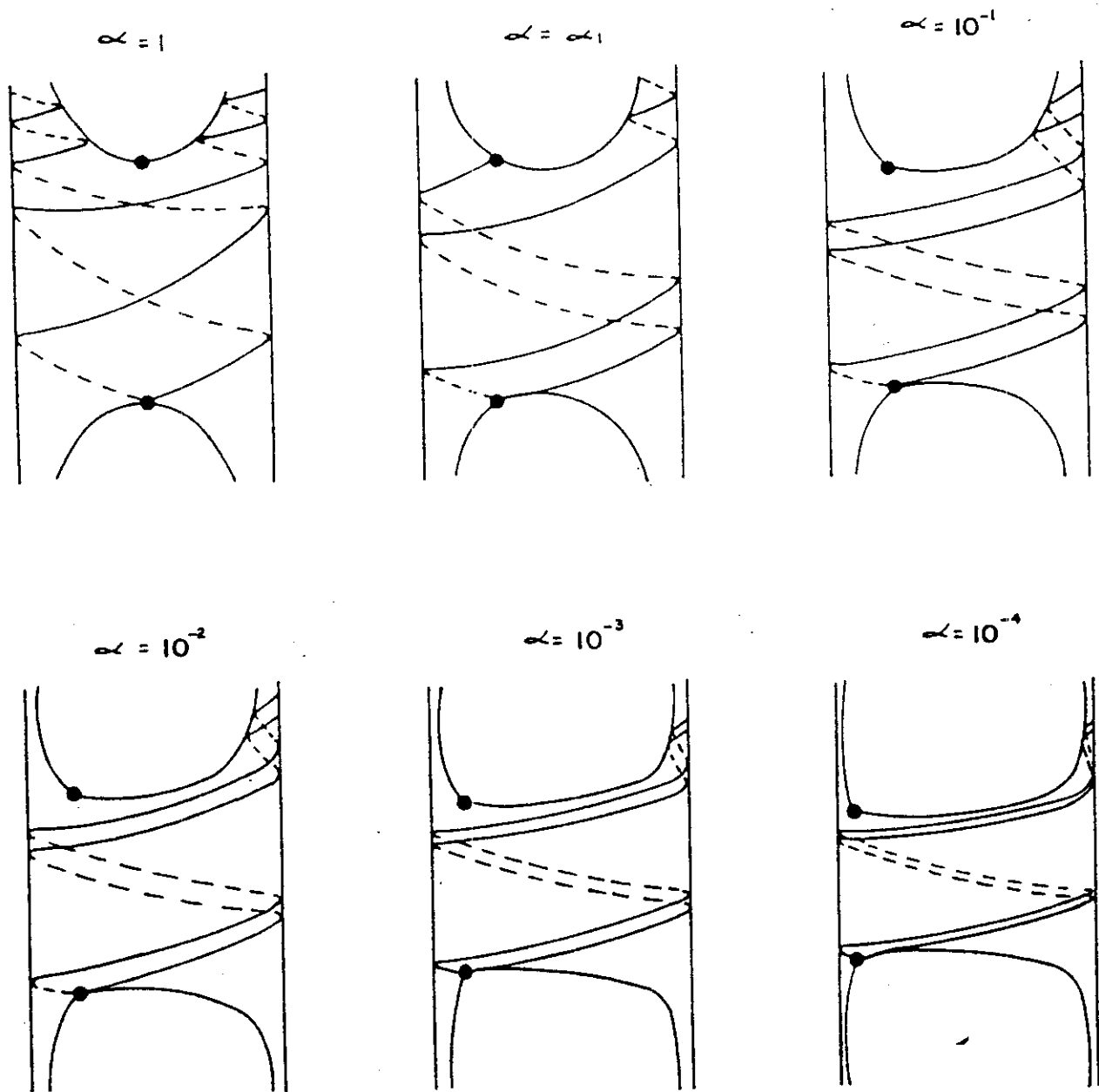


Figura 2.3 Comportamiento de las subvariedades invariantes de A sobre Λ

Capítulo 3

Estudio de los Escapes y Dinámica Simbólica

Introducción

En este capítulo haremos un estudio del flujo cerca de infinito, es decir estudiaremos el comportamiento de órbitas que escapan y de aquellas que estén próximas a éstas, en un nivel fijo de energía negativa E_h . Los escapes no son estrictamente singularidades del sistema, sino más bien soluciones donde el potencial se anula asintóticamente. Sin embargo, para su estudio usamos técnicas similares a las de McGehee. Se introduce una variedad frontera (variedad del infinito) sobre cada nivel de energía, esto nos da origen a una órbita periódica parabólica en infinito, la cual puede verse como un punto fijo degenerado, es decir esta órbita tiene como su conjunto asintótico, al conjunto de todas las órbitas parabólicas. A partir de aquí, utilizando análisis numérico, verificamos que las subvariedades invariantes estables e inestables de órbitas parabólicas se intersectan transversalmente, lo cual nos da la posibilidad de introducir dinámica simbólica. Es decir podemos asociar a ciertas trayectorias del sistema una sucesión doblemente infinita de enteros, lo cual muestra la complejidad que existe en el conjunto de curvas solución del sistema.

3.1 Variedad del infinito y órbitas parabólicas

La figura (1.3) nos muestra que el escape a infinito para energía negativa es posible en dos direcciones x_1 o x_2 . De esto deducimos que para cada nivel fijo de energía negativa E_h , la variedad al infinito debe tener dos componentes conexas.

DEFINICION. Decimos que una órbita escapa a (llega de) infinito si $x_1(t) \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$), ó $x_2(t) \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). El escape (llegada) es parabólico si $\dot{x}_1(t)$ ó $\dot{x}_2(t)$ tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). Si este límite es una constante diferente de cero, decimos que la órbita es hiperbólica.

Estudiaremos aquí los escapes a (llegada de) infinito en la dirección x_2 , es decir en el caso en que $x_2(t) \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). El estudio en la otra dirección se hace en forma análoga. Volviendo a utilizar x y y como nuevas variables, hagamos:

$$\begin{aligned}x_2 &= x^{-2} \\ \dot{x}_2 &= y\end{aligned}$$

tenemos entonces que el escape (llegada) se da cuando $x(t) \rightarrow 0$.

Para regularizar las colisiones binarias entre las partículas de masa 1 usamos el método de Levi-Civita. Sean

$$\begin{aligned}x_1 &= \xi^2 \\ \dot{x}_1 &= \eta\xi^{-1}\end{aligned}$$

y un reescalamiento del tiempo de la forma $dt = 2\xi^2 d\tau_1$. En estas nuevas coordenadas, el sistema (1.3) toma la forma:

$$\begin{aligned}x' &= -\xi^2 x^3 y \\ y' &= -\xi^2 x^4 \left(\frac{\alpha^{5/2}}{2} + \frac{4\alpha^{3/2}}{(\alpha\xi^4 x^4 + 1)^{3/2}} \right) \\ \xi' &= \eta \\ \eta' &= \xi \left[-1 - \left(y^2 - \frac{\alpha^{5/2} x^2}{2} \right) + \frac{4\alpha^{3/2} x^2}{\sqrt{\alpha\xi^4 x^4 + 1}} - \frac{4\alpha^{5/2} \xi^4 x^6}{(\alpha\xi^4 x^4 + 1)^{3/2}} \right]\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde ' significa derivación respecto a τ_1 . Si suponemos $h = -1$, la relación de energía se escribe

$$\eta^2 + \xi^2 + \xi^2 \left(y^2 - \frac{\alpha^{5/2} x^2}{2} - \frac{4\alpha^{3/2} x^2}{\sqrt{\alpha \xi^4 x^4 + 1}} \right) = \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

La variedad al infinito en la dirección x_2 está dada por:

$$N(x_2) = \left\{ (x, y, \xi, \eta) \mid x = 0, \eta^2 + \xi^2(1 + y^2) = \frac{1}{2} \right\} \quad (3.3)$$

Partiendo de la ecuación

$$\eta^2 + \xi^2(1 + y^2) = \frac{1}{2} \quad (3.4)$$

hagamos

$$\bar{\eta} = \eta \sqrt{2(1 - Y^2)}.$$

Tenemos entonces que

$$\bar{\eta}^2 + 2(1 - Y^2)(1 + y^2)\xi^2 = 1 - Y^2$$

y de aquí

$$\bar{\eta}^2 + Y^2 + 2(1 - Y^2)(1 + y^2)\xi^2 = 1.$$

Sea Y tal que $2(1 - Y^2)(1 + y^2) = 1$, es decir hagamos

$$Y = \sqrt{\frac{1 + 2y^2}{2(1 + y^2)}};$$

entonces

$$\bar{\eta}^2 + Y^2 + \xi^2 = 1.$$

Con lo anterior hemos demostrado que $N(x_2)$ es topológicamente una esfera sin sus polos $(Y, \xi, \bar{\eta}) = (\pm 1, 0, 0)$.

Así que $N(x_2)$ representa una componente conexa de la variedad al infinito que denotaremos por N , tenemos que N es la unión de dos esferas sin sus respectivos polos, $N = N(x_1) \cup N(x_2)$.

Definimos el conjunto de choques entre partículas de masa 1 como CH_1 . El conjunto de choques entre partículas de masa α , se define como CH_α .

$$CH_1 = \{(x, y, \xi, \eta) \in E_h \mid \xi = 0\}.$$

De la relación de energía (3.2) para $\xi = 0$ tenemos $\eta^2 = \frac{1}{2}$ y las coordenadas x, y pueden tomar cualquier valor.

Esto nos dice que $\dim(CH_1) = 2$.

Ahora de (3.1), para $\xi = 0$ vemos que $\xi' \neq 0$, lo cual implica que el flujo dado por (3.1) es transversal a CH_1 .

Cuando $(x, y) = (0, 0)$, el sistema (3.1) es muy simple

$$\begin{aligned}x' &= 0 \\y' &= 0 \\ \xi' &= \eta \\ \eta' &= -\xi.\end{aligned}\tag{3.5}$$

De aquí llegamos a la ecuación

$$\xi'' + \xi = 0.\tag{3.6}$$

El movimiento se ha desacoplado en un movimiento de Kepler en la dirección horizontal y un movimiento trivial en la dirección vertical. Este sistema tiene una solución 2π -periódica que llamaremos la órbita periódica parabólica en ∞ , y la denotaremos por O.P.P. Observemos que el sistema (3.1) puede ser escrito en la forma

$$\begin{aligned}x' &= -\xi^2 x^3 y \\y' &= -\xi^2 x^4 (L_0 + f_1(x, \xi)) \\ \xi' &= \eta \\ \eta' &= -\xi(1 + f_2(x, y, \xi)).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Donde $L_0 = \frac{\alpha^{3/2}}{2}(\alpha + 8)$, f_1 es una función de cuarto orden en x y ξ . De esto concluimos que el sistema (3.7) satisface las hipótesis del Teorema de la variedad estable para puntos fijos degenerados de McGehee [Ref 11]. Es decir $(x, y) = (0, 0)$ puede ser visto como un punto fijo hiperbólico degenerado, así que en una vecindad de $(0, 0)$ existen variedades estables e inestables. Estas variedades son analíticas excepto quizá en $(0, 0)$.

Las órbitas parabólicas son exactamente aquellas órbitas tales que $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). A partir de esto vemos que la órbita periódica parabólica en infinito tiene como su conjunto asintótico, el conjunto de órbitas parabólicas.

Sean P^s y P^u las subvariedades de órbitas parabólicas estables o inestables respectivamente, asociadas a O.P.P.. Para calcular P^s procedemos como sigue:

La proyección de P^s en el plano $y - x$, puede ser expresado de la siguiente manera:

$$x = \sum a_n y^n,$$

donde los a_n son coeficientes a ser determinados. Ver Fig. 3.1.

En el plano $\xi - \eta$ introducimos coordenadas polares en la forma

$$\sqrt{2}\xi = R \cos \phi$$

$$\sqrt{2}\eta = R \sin \phi$$

Haciendo uso de la relación de energía (3.2) y con ayuda del procesador algebraico Mathematica, llegamos a que

$$R^2 = 1 - (\cos^2 \phi)T + (\cos^4 \phi)T^2 - \cos^6 \phi \left(T^3 + \frac{\alpha^{5/2}}{2} x^6 \right) + \cos^8 \phi (T^4 + 2\alpha^{5/2} T x^6) - \cos^{10} \phi (T^5 + 5\alpha^{7/2} T^2 x^6 - \frac{3}{32} \alpha^{7/2} x^{10}) + \dots, \quad (3.8)$$

donde

$$T = y^2 - L_0 x^2$$

De esto deducimos que la Figura 3.2 son realmente curvas que están parametrizadas por ϕ . A su vez, O.P.P. también está parametrizada por ϕ . Es decir P^s es de la forma

$$x = F(y, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\phi) y^n \quad (3.9)$$

Para obtener P^u simplemente aplicamos la simetría (1.29), que en estas coordenadas toma la forma (Ver fig. 3.2)

$$(x, y, \phi, \tau_1) \longrightarrow (x, -y, -\phi, -\tau_1)$$

Es decir P^u está dado por

$$x = F(-y, -\phi) \quad (3.10)$$

Observando que el sistema de ecuaciones (3.1) permanece invariante si sustituimos x por $-x$, vemos que P^u se puede representar también por

$$x = -F(y, \phi) \quad (3.11)$$

Entonces de (3.10) y (3.11) llegamos al siguiente resultado:

LEMA 3.1. El coeficiente $a_n(\phi)$ es una función impar de ϕ para n par, y una función par de ϕ para n impar.

El desarrollo hasta orden 10 en x, y de $\frac{d\tau_1}{d\phi}$, viene dado por la expresión

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_1}{d\phi} = & -1 + \cos^2 \phi T - \cos^4 \phi T^2 + \cos^6 \phi \left(\frac{3}{2} \alpha^{5/2} x^6 + T^3 \right) \\ & + \cos^8 \phi \left(-6 \alpha^{5/2} x^6 T \right) + \cos^{10} \phi \left(15 \alpha^{3/2} x^6 T^2 - \frac{15}{32} \alpha^{7/2} x^{10} \right) \end{aligned}$$

De aquí, de las ecuaciones (3.1) y la regla de la cadena, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\phi} = \frac{dx}{d\tau_1} \frac{d\tau_1}{d\phi} = & \frac{\cos^2 \phi}{2} y x^3 \left(1 - 2 \cos^2 \phi T + 3 \cos^4 \phi T^2 - \cos^6 \phi [4T^3 + 2\alpha^{5/2} x^6] \right. \\ & \left. + \cos^8 \phi [5T^4 + 10\alpha^{5/2} x^6 T] \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ahora de la ecuación (3.9) tenemos que

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{\partial F}{\partial \phi} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\phi} \quad (3.13)$$

haciendo los desarrollos correspondientes, sustituyendo el valor de x dado por (3.9) e igualando coeficientes de y en (3.12) y (3.13), llegamos a que

$$a'_1(\phi) = 0; \quad a'_2(\phi) = 0; \quad a'_3(\phi) = 0.$$

De donde a_1, a_2, a_3 son constantes. Para determinar su valor procedemos como sigue:

Ya que $a_2(\phi)$ es una función impar, debe ser simétrica respecto al origen, y por tanto $a_2 \equiv 0$.

Igualando los coeficientes de y^4 en (3.12) y (3.13) vemos que

$$a'_4 = \frac{1}{2} \cos^2 \phi a_1^3 (1 - L_0 a_1^2) = \frac{1}{4} (1 + \cos 2\phi) a_1^3 (1 - L_0 a_1^2). \quad (3.14)$$

Como $a_4(\phi)$ es una función periódica de periodo 2π , su desarrollo en serie de Fourier está dado por

$$a_4(\phi) = a_{4_0} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{4_i} \cos(i\phi) + b_{4_i} \sin(i\phi)$$

De donde

$$a'_4(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} -ia_{4_i} \sin(i\phi) + ib_{4_i} \cos(i\phi) \quad (3.15)$$

Al igualar (3.14) y (3.15) tenemos que el término independiente es cero.

$$\frac{1}{4}a_1^3(1 - L_0a_1^2) = 0$$

De donde $a_1 = 0$ ó $a_1 = \frac{1}{\sqrt{L_0}}$. De hecho tenemos que

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{L_0}}$$

Ya que este valor para a_1 puede ser obtenido directamente del sistema 3.1 al efectuar el desarrollo de $\frac{dx}{dy}$, resolver la ecuación diferencial, y obtener el coeficiente lineal. Esto anula la posibilidad $a_1 = 0$.

Entonces de la ecuación (3.14) $a'_4 = 0$, lo cual implica que a_4 es constante y por ser una función impar tenemos que $a_4 \equiv 0$.

Ahora igualando los coeficientes de y^6 en (3.12) y (3.13) tenemos que

$$a'_6 = -\frac{a_3}{L_0}(1 + \cos 2\phi). \quad (3.16)$$

Desarrollando a_6 en serie de Fourier, derivando e igualando coeficientes con (3.16), llegamos a que $a_3 \equiv 0$.

Procediendo en forma análoga con cálculos cada vez más tediosos, llegamos a que

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{5\alpha^{5/2}}{32L_0^{7/2}}, & a_6 &\equiv 0, & a_7 &\equiv 0 \\ a_8 &= \frac{\alpha^{5/2}}{256L_0^{9/2}}(15 \sin 2\phi + 9 \sin 4\phi + \sin 6\phi) \\ a_9 &= \frac{115}{2048} \frac{\alpha^5}{L_0^{13/2}}, & a_{10} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Del estudio del flujo sobre la variedad de colisión Λ , (Cap. II), sabemos que existe una rama de W_B^u que escapa a infinito con valores de la variable θ mayores que θ_0 . Esta órbita tiene una infinidad de puntos en CH_1 con v arbitrariamente grande. Aquí θ_0 es el único punto crítico del potencial U .

Recordemos que W_B^u tiene dimensión 2 en E_h y que el flujo es transversal a CH_1 , entonces por la continuidad del flujo respecto a condiciones iniciales tenemos que existen órbitas en W_B^u que intersectan una infinidad de veces CH_1 con r positivo pequeño, v grande y $\theta \geq \theta_0$.

Sea $(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ una de estas órbitas, entonces existe t_0 tal que $x_1(t_0) = 0$.

En coordenadas de McGehee

$$x_2 = \frac{r}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \theta.$$

Entonces utilizando (1.15) con (1.13) y (1.21) obtenemos

$$y = \dot{x}_2 = \frac{r^{-1/2}}{\sqrt{2}} \left(v \operatorname{sen} \theta + \frac{w \sqrt{W(\theta)}}{\operatorname{sen} \theta} \right).$$

En $t = t_0$, tenemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $w = 0$.

Por tanto

$$y(t_0) = \dot{x}_2(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} r(t_0)^{-1/2} v(t_0) > 0,$$

entonces existe una sucesión creciente de tiempos t_n para los cuales $y(t_n) > 0$. Es decir para esta órbita podemos afirmar que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq 0$.

A partir de ésto podemos demostrar lo siguiente:

PROPOSICION 3.1. Existe una órbita z que sale de colisión total y escapa parabólicamente a infinito, donde las partículas de masa α no chocan entre si.

DEMOSTRACION. Si el límite anterior es cero, esa es la órbita buscada. Supongamos entonces que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) > 0$, es decir la órbita anterior es una órbita que sale de colisión total (pertenece a W_B^u) y escapa hiperbólicamente a infinito, donde las partículas de masa α no chocan entre sí. Por otro lado sabemos que dado $h < 0$ fijo, existe una única órbita homotética contenida en W_B^u , donde la coordenada $\theta = \theta_0$ es constante. Esta es una órbita elíptica

de expulsión-colisión. Ahora nuevamente de la continuidad del flujo respecto a condiciones iniciales, podemos afirmar que existe una órbita z en W_B^u que escapa parabólicamente al infinito, donde las partículas de masa α no chocan entre si.

Sea B una esfera que contiene a $N(x_2)$. La intersección de B con P^s es el círculo e^s , (Ver fig. 3.3) que determina sobre el hemisferio norte de B dos regiones, H que corresponde a órbitas hiperbólicas y E que corresponde a órbitas elípticas. La intersección de P^u con B es el círculo e^u .

Sea $S = \{(x, y, \xi, \eta) | y = 0\}$.

El flujo cerca de infinito es transversal a la superficie S . Por tanto podemos definir el difeomorfismo

$$i: E \rightarrow S$$

obtenido siguiendo el flujo.

Ya que $\dim W_B^u = 2$, la proposición anterior nos garantiza la existencia de un arco δ contenido en $W_B^u \cap E$. Veamos ahora el comportamiento de este arco al seguirlo a través del flujo.

PROPOSICION 3.2. Sea δ un arco contenido en $W_B^u \cap E$ con un punto final sobre el círculo e^s . Entonces el arco $\sigma = i(\delta)$ espiralea alrededor de OPP.

DEMOSTRACION De las ecuaciones de movimiento (3.1), regresando al tiempo real t (recordemos el reescalamiento $dt = 2\xi^2 d\tau_1$) tenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{2}x^3y \\ \dot{y} &= -\frac{x^4}{2}\left(\frac{\alpha^{5/2}}{2} + \frac{4\alpha^{3/2}}{(\alpha\xi^4x^4 + 1)^{3/2}}\right) = -\frac{x^4}{2}(L_0 + O_4) \\ \dot{\phi} &= \frac{1}{\cos^2 \phi}[-1 - 2(\cos^2 \phi)T - (\cos^4 \phi)T^4 + \dots] = \frac{1}{\cos^2 \phi}(-1 + O_2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Donde $\phi = \text{Arctg}(\frac{\eta}{\xi})$ y $\dot{\phi}$ es obtenida utilizando las ecuaciones (3.1) y la expresión para R dada en (3.8). O_n significa términos de orden n en x y y .

Hagamos ahora una nueva reparametrización del tiempo

$$d\tau_2 = \frac{x^3}{2a_1} dt \quad (3.18)$$

En este nuevo tiempo las ecuaciones (3.17) se escriben

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau_2} &= -a_1 y \\ \frac{dy}{d\tau_2} &= -a_1 L_0 x (1 + O_4)\end{aligned}\tag{3.19}$$

Teniendo en cuenta P^s y P^u definamos

$$\begin{aligned}s &= x - F(y, \phi) \\ u &= x + F(y, \phi)\end{aligned}\tag{3.20}$$

$s = 0$ y $u = 0$ corresponden a P^s y P^u respectivamente. Haciendo uso de los valores a_i encontrados anteriormente tenemos que $\frac{\partial F}{\partial \phi} = y^8 \frac{d}{d\phi}(a_8(\phi))$. Ahora mediante un cálculo sencillo llegamos a que $\frac{\partial F}{\partial \phi} = \frac{3\alpha^{5/2}}{32L_0^{9/2}}(8 \cos^6 \phi - 5 \cos^2 \phi)$. Por tanto en coordenadas (s, u) tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{d\tau_2} &= \frac{dx}{d\tau_2} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\tau_2} - \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{d\phi}{d\tau_2} = s(1 + O_2) \\ \frac{du}{d\tau_2} &= \frac{dx}{d\tau_2} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\tau_2} + \frac{\partial F}{\partial \phi} \frac{d\phi}{d\tau_2} = -u(1 + O_2)\end{aligned}\tag{3.21}$$

Del sistema (3.21) se deduce que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{ds}{d\tau_2} - s}{s} = 0 \quad \& \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{du}{d\tau_2} + u}{-u} = 0.$$

De este hecho llegamos a que dado $\epsilon > 0$ pequeño, para s y u suficientemente pequeños se tienen las siguientes desigualdades.

$$\begin{aligned}(1 - \epsilon)s &\leq \frac{ds}{d\tau_2} \leq (1 + \epsilon)s \\ -(1 + \epsilon)u &\leq \frac{du}{d\tau_2} \leq -(1 - \epsilon)u.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Dado el arco $\delta \subset W_B^u \cap E$, tomamos un segmento pequeño de este arco, siempre con un punto final sobre el círculo e^s . Sobre este subarco que seguiré llamando δ , damos condiciones iniciales s_0, u_0 , suficientemente pequeñas, (reduciendo el tamaño de la bola B si es necesario) de tal forma que se

satisfagan las desigualdades (3.22). Ahora integrando estas desigualdades obtenemos

$$\begin{aligned} s_0 e^{(1-\epsilon)\tau_2} &\leq s \leq s_0 e^{(1+\epsilon)\tau_2} \\ u_0 e^{-(1+\epsilon)\tau_2} &\leq u \leq u_0 e^{-(1-\epsilon)\tau_2} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Sumando las ecuaciones dadas en (3.20), vemos que $s + u = 2x$, y de la reparametrización del tiempo (3.18) tenemos

$$dt = 2a_1 x^{-3} d\tau_2 = 2a_1 \left(\frac{s+u}{2} \right)^{-3} d\tau_2.$$

Integrando esta última expresión de 0 a τ_0 , donde τ_0 está dado por $e^{2\tau_0} = \frac{u_0}{s_0}$, y haciendo uso de las desigualdades (3.23) obtenemos

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{\tau_0} 16a_1 (s+u)^{-3} d\tau_2 \\ &\geq 16a_1 \int_0^{\tau_0} (s_0 e^{(1+\epsilon)\tau_2} + u_0 e^{-(1-\epsilon)\tau_2})^{-3} d\tau_2. \end{aligned}$$

Introduciendo la nueva variable $\sigma = \tau_2 - \tau_0$, llegamos después de algunos cálculos a la siguiente expresión:

$$t \geq 16a_1 s_0^{-\frac{3}{2}(1-\sigma)} u_0^{-\frac{3}{2}(1+\sigma)} \int_0^{\tau_0} e^{+3\epsilon\sigma} (e^\sigma + e^{-\sigma})^{-3} d\sigma.$$

Observemos que $e^{3\epsilon\sigma} > 1$, y que $u_0^{-\frac{3}{2}(1+\sigma)} > 1$ para u_0 pequeño. Por tanto

$$t \geq 16a_1 (s_0)^{-\frac{3}{2}1-\epsilon} \int_0^{\tau_0} (e^\sigma + e^{-\sigma})^{-3} d\sigma,$$

donde sabemos que la integral converge a un número fijo cuando $\tau_0 \rightarrow \infty$.

Tenemos entonces que $t \rightarrow \infty$ cuando $s_0 \rightarrow 0$.

Sea $t^* = t^*(s_0, u_0)$ el tiempo que representa estas condiciones iniciales sobre δ . Entonces la curva imagen está representada por un tiempo t_1 , donde

$$t_1 = t^* + t(s_0, u_0) \rightarrow \infty \text{ cuando } s_0 \rightarrow 0.$$

De esto concluimos que la imagen de δ bajo el flujo espiralea alrededor de O.P.P., con lo que la proposición 3.2 queda demostrada.

Observemos que en coordenadas (x, y, ξ, η) la curva de velocidad cero puede escribirse como

$$z.v.c. = \{(x, y, \xi, \eta) \in E_h | y = 0, \quad \eta = 0\} \quad (3.24)$$

Sea σ como en la proposición anterior. Parametricemos σ por un parámetro $l \in [0, \infty)$ tal que $\sigma(l)$ tiende a O.P.P. cuando l tiende a ∞ . Entonces por las propiedades de espiraleo descritas en (3.2) y ya que el flujo es transversal a CH_1 , podemos asegurar la existencia de una sucesión creciente $\{l_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ tal que

$$\sigma \cap z.v.c. = \cup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \{P_{2i}\} \quad \text{y} \quad \sigma \cap CH_1 = \cup_{i \in \mathbb{N}} \{P_{2i-1}\}$$

donde $P_i = \sigma(l_i)$.

Sean:

T_j el segmento abierto de $z.v.c.$ acotado por los puntos P_{2j} y P_{2j+2} .

T'_j el segmento abierto de colisiones binarias acotado por P_{2j+1} y P_{2j+3} .

D la región de S acotada por el arco $\{\sigma(l) : l_0 \leq l \leq l_2\}$, T_0 y O.P.P.

$D_1 = L(D)$.

Donde L es la simetría definida en (1.29) Ver Fig. 3.4

En $D \cup D_1$ definimos una familia de conjuntos cerrados $\{Q_j\}$, donde Q_j es el conjunto cerrado acotado por los arcos $\sigma_j = \{\sigma(l) : l_{j-1} \leq l \leq l_j\}$ y $\sigma'_j = L(\sigma_j)$.

Definamos:

$$S_{\theta_0} = \{(r, v, \theta, \omega) \in E_h | \theta = \theta_0\}$$

$$t_+ = \min\{t > 0 | \phi(t, (q, p)) \in S_{\theta_0}\}$$

$$t_- = \max\{t < 0 | \phi(t, (q, p)) \in S_{\theta_0}\}$$

Donde $\phi(t, (q, p))$ representa el punto de la órbita que pasa por $(q, p) \in E_h$ en el tiempo 0, evaluado al tiempo t . Ya que $\sigma \subset W_B^u$, aplicando la simetría L tenemos que $L(\sigma) \subset W_A^s$; por tanto si $(q, p) \in D \cup D_1 - L(\sigma)$, entonces la órbita por (q, p) debe cruzar S_{θ_0} . Análogamente se puede verificar que si $(q, p) \in D \cup D_1 - \sigma$, entonces t_- existe. Notemos además que si $(q, p) \in \text{int}(Q_j)$ para algún $j \in \mathbb{N}$, el arco

$$a = \{\phi(t, (q, p)) | t_- < t < t_+\}$$

cruza $j + M$ veces CH_1 . Aquí M es una constante que depende del tamaño de la vecindad B que contiene a $N(x_2)$, y está relacionada con un número finito de colisiones binarias. Otra observación que debemos puntualizar es que los puntos de la intersección $\sigma \cap L(\sigma)$ pertenecen a $W_B^u \cap W_A^s$ y que las órbitas por estos puntos no intersectan S_{θ_0} . Hemos pues demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 3.1 Para todo entero positivo n suficientemente grande, existe una órbita de expulsión-colisión tal que las partículas de masa 1 chocan exactamente n -veces entre si, mientras las partículas de masa α permanecen sin chocar.

3.2 Dinámica simbólica para valores pequeños del parámetro.

El objetivo de esta sección es construir una función de Poincaré P sobre una superficie π , de tal forma que podamos garantizar la existencia de un conjunto invariante $I \subset \pi$, sobre el cual P es conjugada a un homeomorfismo corrimiento $\hat{\sigma}$, (llamado comunmente shift) sobre el espacio de sucesiones doblemente infinitas, definidas sobre el conjunto de símbolos de un alfabeto infinito numerable \mathcal{A} .

Con este propósito vamos a seguir P^u a través del flujo hasta intersectar la superficie $v = 0$. La idea es colocarnos sobre el círculo $e^u \subset P^u$ y movernos a través del flujo hasta intersectar la superficie $v = 0$. Para las condiciones iniciales, es decir para determinar el círculo e^u sobre P^u procedemos como sigue. Ya que sobre el plano $\xi - \eta$ hemos introducido coordenadas polares (R, ϕ) , y como la coordenada ϕ toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$, dividimos este intervalo en 250 partes iguales. Para tomar el valor de la coordenada y , ensayamos en la computadora con varios valores de y comprendidos entre 0.1 y 1.2 observando que empezando con un valor de $y = 0.5$ obtenemos prácticamente los mismos resultados que empezando con un valor más pequeño, por tanto este es el valor que asignamos a la coordenada y . De la ecuación (3.9) calculamos R para cada valor de ϕ , y a partir de esto obtenemos las condiciones iniciales para las coordenadas ξ y η .

El paso siguiente es expresar estas condiciones iniciales en coordenadas de McGehee, (r, v, θ, ω) . Utilizando el flujo descrito por el sistema (1.23)

continuamos el círculo e^u hasta intersectar la superficie $v = 0$.

Para esto utilizamos una rutina RKF-78, con un tamaño de paso máximo de 10^{-2} , un tamaño de paso mínimo de 10^{-9} y una tolerancia para el error de 10^{-12} . En las figuras 3.5a y 3.5b, se muestra la intersección de P^s y P^u sobre la superficie $v = 0$, para varios valores del parámetro α . Obsérvese que como era de esperar las curvas de intersección resultantes son simétricas respecto a la curva de velocidad cero, esta simetría corresponde a la simetría L introducida en (1.29). A partir de todo lo anterior llegamos al siguiente resultado.

TEOREMA 3.2 Para casi todo valor del parámetro α comprendido entre 0 y 0.6 las subvariedades invariantes P^s y P^u se intersectan transversalmente sobre la superficie $v = 0$.

Antes de demostrar que es posible introducir dinámica simbólica en el problema romboidal, y con ello caracterizar la existencia de ciertas órbitas para el flujo normal, es necesario recordar algunos hechos básicos sobre estos conceptos. (Las demostraciones y demás detalles sobre los mismos se pueden encontrar en [Ref 14]).

Tomemos $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, y llamémosle a \mathcal{A} un alfabeto.

Sea X el conjunto de las sucesiones doblemente infinitas de elementos de \mathcal{A}

$$X = \{s = (\dots - s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \dots) \mid s_k \in \mathcal{A}\}.$$

Damos una topología en X tomando como base de vecindades de un elemento $s^* = (\dots s_{-1}^*, s_0^*; s_1^*, s_2^*, \dots)$ los conjuntos

$$U_j = \{s \in X \mid s_k = s_k^* \text{ para } |k| \leq j\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

De esta forma podemos definir el homeomorfismo shift sobre X como

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} : X &\rightarrow X \\ (\hat{\sigma}(s))_k &= s_{k-1}. \end{aligned}$$

Los elementos de X representarán soluciones que satisfacen ciertas propiedades en el problema romboidal. Ya que estamos interesados en representar soluciones que escapan o vienen de infinito, debemos encajar X en un nuevo

conjunto \hat{X} que admita elementos del siguiente tipo

$$a) \quad s = (\infty, s_k, \dots, s_{-1}; s_0; s_1, s_2, \dots)$$

$$b) \quad s = (\dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, s_\lambda, \infty)$$

$$c) \quad s = (\infty, s_k, \dots, s_{-1}; s_0; s_1, \dots, s_\lambda, \infty)$$

donde $k, \lambda \in \mathbf{Z}$, $k \leq 0$, $\lambda \geq 0$.

Una base de vecindades para el elemento

$$s^* = (\dots, s_{-1}^*, s_0^*; s_1^*, \dots, s_\lambda^*, \infty),$$

la constituyen los elementos de la forma

$$U_j = \{s \in X \mid s_k = s_k^* \text{ para } -j \leq k < \lambda; s_{-k} \geq j\} \text{ para } j = 1, 2, \dots$$

Similarmente se constituyen base de vecindades para las sucesiones de los tipos a) y c).

El shift $\hat{\sigma}$ se extiende sobre \hat{X} de manera natural. A este nuevo homeomorfismo le seguiré llamando $\hat{\sigma}$ para evitar complicaciones con la notación. Observemos que el nuevo $\hat{\sigma}$ ya no está definido sobre todo \hat{X} ; de hecho su dominio es $D(\hat{\sigma}) = \{s \in \hat{X} \mid s_0 \neq \infty\}$, y su rango está dado por $R(\hat{\sigma}) = \{s \in \hat{X} \mid s_{-1} \neq \infty\}$.

Volviendo al problema romboidal, observemos de la proposición 3.2 que existe un arco δ contenido en $W_B^u \cap E$ con un punto final sobre e^s , tal que la imagen de este arco bajo el flujo espirolea alrededor de P^u . Aplicando la simetría L definida en (1.29) podemos afirmar la existencia de un arco $\delta_1 = L(\delta)$ contenido en $W_A^s \cap E$ con un punto final sobre e^u , tal que la imagen de este arco bajo el flujo en tiempo negativo, espirolea alrededor de P^s .

Sea r_0 un punto en la intersección transversal de P^s con P^u sobre la curva de velocidad cero. Cerca de r_0 construimos un cuadrilátero R , dos de sus lados consisten de partes de P^s y P^u , y los otros dos lados δ y δ_1 son arcos contenidos en $W_B^u \cap E$ y en $W_A^s \cap E$ respectivamente. La observación anterior y el λ -lema [Ref. 16] nos garantizan que siempre es posible tomar arcos con estas características tan próximos como queremos a P^u y P^s en la topología C^1 . Es decir no solamente podemos afirmar que δ (resp. δ_1) y un segmento de P^s (resp. P^u) están próximos en la métrica euclídeana, sino que además sus direcciones tangentes también están próximas. Ver Fig. 3.5.

De la construcción de R tenemos que todo punto en el interior de este cuadrilátero está muy próximo de las subvariedades estables e inestables asociadas a los puntos de equilibrio A y B , que como vimos en el capítulo 1, están sobre la variedad de colisión total Λ . Es decir a partir de esta construcción podemos afirmar que la órbita por todo punto de R , o es de expulsión, o es de colisión, o pasa muy cerca de colisión total.

Nuevamente por la proposición 3.2 podemos afirmar que la imagen de R bajo el flujo ϕ espiralea alrededor de OPP. Entonces $\phi(R)$ y R se intersectan en un número infinito de componentes. Estas componentes serán denotadas por U_1, U_2, U_3, \dots y las ordenamos de tal forma que U_{k+1} está más próxima a OPP que U_k . En forma análoga denotamos por V_1, V_2, V_3, \dots a las componentes de $\phi^{-1}(R) \cap R$. (Ver Fig. 3.6). $\{U_k\}$ y $\{V_k\}$ forman familias de tiras horizontales y verticales como las dadas en el teorema de Moser para el problema de Sitnikov. [Ref 14].

Los conjuntos V_k describen posiciones iniciales de aquellas órbitas que entran en una vecindad del infinito y las partículas de masa 1 chocan exactamente $k + M$ veces entre si, antes que la órbita cruce S_{θ_0} . M es una constante fija que depende de la vecindad del infinito. (Recordar la demostración del teorema 3.1).

Sabemos del capítulo II que existe un único valor α_1 de $\alpha \in (0, 1]$ para el cual hay conexión entre las subvariedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio A y B sobre la variedad de colisión total Λ . En la figura 2.3 se muestra el comportamiento de tales subvariedades para distintos valores de α . Entonces para $0 < \alpha < \alpha_1$, recordando que $\dim W_A^s = 2$, tenemos que las órbitas que pasan cerca de colisión total se representan en el espacio de configuración como en la figura 3.7. Las dos posibilidades cualitativamente diferentes a) ó b) dependen de la rama de W_A^u por la que la órbita deja una vecindad de colisión total.

Después de lo expresado anteriormente estamos en posibilidad de caracterizar ciertas las órbitas de R que pasan cerca de colisión total, donde el valor del parámetro α varia entre 0 y α_1 . Para esto procedemos como sigue.

Definamos ahora los siguientes símbolos (enteros)

$$s_{k+1} = (k + M) + 1, \quad s_{k+3} = (k + M) + 1 + 1 + 1.$$

El símbolo s_{k+1} representa posiciones iniciales en V_k , para un segmento de órbita que entra en la vecindad B del infinito, donde las partículas de masa

1 chocan $k + M$ veces entre sí, después existe un choque entre las partículas de masa α , y la órbita regresa a la vecindad del infinito.

El símbolo s_{k+3} representa posiciones iniciales en V_k , para aquellos segmentos de órbita que entran en la vecindad de infinito B , donde las partículas de masa 1 chocan $k + M$ veces entre sí y enseguida las partículas de masa α chocan una vez entre sí enseguida las partículas de masa 1 vuelven a chocar exactamente una vez entre sí y antes que la órbita regrese a una vecindad del infinito las partículas de masa α chocan una vez más entre sí.

Definamos los conjuntos

$$S_{+1} = \{s_{k+1} | k \in \mathbf{N}\}, \quad S_{+3} = \{s_{k+3} | k \in \mathbf{N}\}.$$

Para introducir dinámica simbólica tomamos como alfabeto a la unión de los conjuntos anteriores. A este conjunto le seguiré llamando \mathcal{A} , y con este alfabeto construimos \hat{X} .

$$\mathcal{A} = S_{+1} \cup S_{+3}.$$

De esta forma vemos que existe un conjunto de órbitas a las que podemos asociarle una sucesión de enteros. Este es uno de los principales resultados del capítulo.

TEOREMA 3.3 Para $0 < \alpha < \alpha_1$, toda sucesión s en \hat{X} corresponde a una solución del problema romboidal.

DEMOSTRACION Para demostrar este resultado es suficiente observar que nuestro sistema satisface las hipótesis del teorema de Moser en la forma establecida por Devaney [Ref. 5].

Sean:

$$\begin{aligned} \pi &= \{(r, v, \theta, w) \in E_h | v = 0\} \\ V'_0 &= \{(r, v, \theta, w) \in \pi | v' = 0\}. \end{aligned}$$

El flujo es transversal a π excepto en los puntos de V'_0 . De (1.23) obtenemos que sobre π

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{r \operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}} v' \quad (3.25)$$

Entonces tenemos que la curva V'_0 divide a la superficie π en 2 regiones, una interior ($V'_0 < 0$) que llamaremos M_i , y que corresponde a máximos de r a lo largo de órbitas y la otra exterior ($V'_0 > 0$) que llamaremos M_e y que

corresponde a mínimos de r . Ya que para las órbitas del cuadrilátero R se tiene que la coordenada r o es cero o es muy pequeña, podemos suponer (reduciendo la vecindad del infinito si es necesario) que el cuadrilátero R está contenido en Me .

Dado un punto $(q, p) \in E_h$, definamos

$$t_1(q, p) = \min\{t > 0 \mid \phi(t_1, (q, p)) \in R\}$$

$$t_2(q, p) = \max\{t < 0 \mid \phi(t_2, (q, p)) \in R\}$$

Si $(q, p) \in R$ y t_1 y t_2 existen, definamos dos funciones

$$f(q, p) = \phi(t_1, (q, p))$$

$$g(q, p) = \phi(t_2, (q, p)).$$

Las funciones f y g son difeomorfismos ya que son obtenidas siguiendo el flujo. Entonces la función de Poincare P definida sobre R está dada por

$$P = g^{-1} \circ f.$$

Tomando coordenadas locales, en virtud del teorema del flujo tubular podemos suponer $R = [0, 1] \times [0, 1]$. (Ver Fig. 3.6).

Entonces por construcción de las familias $\{U_i\}$ y $\{V_i\}$ sabemos que ellas son familias disjuntas y que satisfacen

$$P(V_i) = U_i.$$

Además dado un punto p contenido en la familia $\{V_i\}$, definamos los siguientes sectores de haces

$$S_p^+ = \{(a_0, b_0) \in T_p \mathbf{R}^2 \mid |b_0| \leq |a_0|\}$$

$$S_p^- = \{(a_0, b_0) \in T_p \mathbf{R}^2 \mid |b_0| \geq |a_0|\}$$

Entonces aplicando una vez más el λ -lema [Ref. 16] a la función P , obtenemos que la diferencial dP de P contrae vectores en S_p^+ mientras que dP^{-1} contrae vectores en S_p^- .

Aplicando el teorema de Moser obtenemos que existe I subconjunto de R , sobre el que P es topológicamente conjugada al homeomorfismo shift $\hat{\sigma}$, definido sobre \hat{X} . Es decir existe un homeomorfismo $h : I \rightarrow \hat{X}$ tal que $h \circ P = \hat{\sigma} \circ h$. Esto demuestra el teorema 3.3.

En el libro de Moser [Ref. 15], se demuestra en general que si un difeomorfismo P posee un punto homoclínico r_0 , entonces en toda vecindad de este punto, P tiene como subsistema al automorfismo $\hat{\sigma}$ definido sobre el espacio de las sucesiones sobre \mathbf{N} . Algunas consecuencias del teorema 3.3 son:

1. Existe un conjunto infinito de órbitas periódicas. Para checar esto es suficiente observar que $\hat{\sigma}$ tiene un número infinito de órbitas periódicas, lo cual es inmediato, pues toda sucesión $s \in \hat{X}$ formada por un mismo bloque de elementos de \mathcal{A} , que se repite a la derecha y a la izquierda del bloque original constituye una órbita periódica. En particular en el problema romboidal para $0 < \alpha < \alpha_1$, tenemos órbitas periódicas de los siguientes tipos:

Dados cualesquier k números naturales suficientemente grandes n_1, n_2, \dots, n_k existen

- Órbitas donde las partículas de masa 1 chocan exactamente n_1 veces entre sí, después las partículas de masa α chocan una vez entre sí, enseguida las partículas de masa 1 chocan n_2 veces entre sí, ahora las partículas de masa 1 chocan una vez entre sí, etc. Después que las partículas de masa 1 chocan n_k veces entre sí, existe un choque entre partículas de masa 1, y el comportamiento anterior se repite.
 - Órbitas periódicas donde entre cada n_j y n_{j+1} choques entre partículas de masa 1, existe un choque entre partículas de masa α , después un choque entre partículas de masa 1, y enseguida las partículas de masa α vuelven a chocar.
 - Órbitas periódicas que son combinación de las dos anteriores.
2. Existen órbitas de escape, (aquellas donde las partículas de masa α escapan a infinito en tiempo positivo) órbitas de captura (aquellas donde las partículas de masa α escapan a infinito en tiempo negativo) y órbitas de escape-captura. Estas son representadas simbólicamente por sucesiones de la forma:

$$\begin{aligned}
& (\dots, \dots, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, s_\lambda, \infty) \\
& (\infty, s_{-k}, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, \dots, \dots) \\
& (\infty, s_{-k}, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, \dots, \infty).
\end{aligned}$$

Para valores de α comprendidos en el intervalo $[\alpha_1, 0.6]$, sólo es posible garantizar la existencia de órbitas periódicas del primer tipo. La dificultad en este caso estriba en que existen puntos en el cuadrilátero R tales que al tomar sus órbitas por el flujo, se tiene que éstas órbitas escapan a lo largo de la dirección $\theta = 0$.

3.3 Dinámica simbólica para α cercano a uno.

Para $\alpha = 1$, aparte de la simetría L obtenida del hecho que el flujo es reversible, existe otra simetría L_2 que consiste en una reflexión del flujo a través de la dirección $\theta = \frac{\pi}{4}$, la cual en coordenadas de McGehee (r, v, θ, ω) viene dada por:

$$L_2 : (r, v, \theta, \omega, \tau) \rightarrow (r, v, \pi/2 - \theta, -\omega, \tau).$$

A partir de L y L_2 obtenemos una nueva simetría L_3 que es la composición de ambas

$$L_3 = L_2 \circ L : (r, v, \theta, \omega, \tau) \rightarrow (r, -v, \pi/2 - \theta, \omega, -\tau).$$

Esta simetría nos permitirá relacionar los escapes a infinito (para $\alpha = 1$), en las dos direcciones posibles $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

Para hacer esto procedemos como sigue:

Primeramente observemos que el mismo estudio que se hizo al inicio de este capítulo para estudiar los escapes a infinito en la dirección x_2 ($\theta = \pi/2$), puede hacerse para estudiar los escapes a infinito en la dirección x_1 , ($\theta = 0$), de hecho para $\alpha = 1$ las ecuaciones resultan ser exactamente las mismas con los correspondientes cambios de dirección. Por tanto se tiene una órbita periódica parabólica en ∞ con una estructura hiperbólica para la dirección $\theta = 0$ que le llamaremos OPP_0 . Denotemos por $P_0^{s(u)}$ a la variedad estable (inestable) de órbitas parabólicas asociadas a OPP_0 .

Para evitar posibles confusiones, renombramos a las subvariedades estable (s) e inestable (u) de órbitas parabólicas asociadas a la órbita periódica en infinito para la dirección $\theta = \pi/2$, como

$$P_{\pi/2}^{s(u)}.$$

Aplicando la simetría L_3 a estas subvariedades invariantes obtenemos:

$$L_3(P_{\pi/2}^u) = P_0^s \quad L_3(P_{\pi/2}^s) = P_0^u.$$

Por tanto $P_{\pi/2}^u$ interseca transversalmente a P_0^s sobre la sección $v = 0$, si la intersección de $P_{\pi/2}^u$ con la sección $v = 0$ interseca la dirección $\theta \equiv \pi/4$ en un ángulo que no sea múltiplo de $\pi/2$. Observemos que si $P_{\pi/2}^u$ y P_0^s se intersecan transversalmente sobre la sección $v = 0$, entonces debido a que el flujo es reversible (simetría L), $P_{\pi/2}^s$ y P_0^u también se intersecan transversalmente sobre la línea $\theta = \pi/4$.

Desgraciadamente no se pudo obtener una demostración analítica de este hecho. Basados en los mismos resultados numéricos descritos anteriormente sobre la intersección de $P_{\pi/2}^u$ con la sección $v = 0$, se verifica que efectivamente para $\alpha = 1$, el ángulo que forman $P_{\pi/2}^u \cap \{v = 0\}$ con la dirección $\theta = \pi/4$ no es múltiplo de $\pi/2$. Ver Figura 3.8. De esto y de la continuidad del flujo respecto al parámetro α , obtenemos el siguiente resultado.

PROPOSICION 3.3. Para valores del parámetro α próximos a uno, $P_{\pi/2}^u$ y P_0^s se intersecan transversalmente sobre la sección $v = 0$. Lo mismo ocurre con $P_{\pi/2}^s$ y P_0^u .

En lo que resta de este capítulo supondremos que el valor del parámetro α está próximo a 1. Procediendo en forma análoga a como estudiamos los escapes a lo largo de la dirección $\theta = \pi/2$, en la primera parte de este capítulo, es posible mostrar la existencia de un arco δ_0 contenido en $W_B^u \cap E_0$ con un punto final sobre P_0^s , donde E_0 representa el conjunto de órbitas elípticas en la dirección $\theta = 0$. Al conjunto de órbitas elípticas en la dirección $\theta = \pi/2$ lo denotaremos $E_{\pi/2}$.

Sea r_1 un punto en la intersección transversal de P_0^s con $P_{\pi/2}^u$ (sobre la sección $v = 0$). Cerca de r_1 construimos un cuadrilátero R_1 , dos de sus lados consisten de partes de P_0^s y $P_{\pi/2}^u$ y los otros dos lados δ_1 y δ_2 son arcos contenidos en $W_B^u \cap E_{\pi/2}$ y en $W_A^s \cap E_0$ respectivamente. Entonces todo punto

en el interior de R representa una órbita que ó pasa muy cerca de colisión total, ó es de expulsión, ó es de colisión.

Por la proposición 3.2 podemos afirmar que la imagen de R bajo el flujo ϕ en tiempo positivo espiralea alrededor de OPP_0 y en tiempo negativo espiralea alrededor de $OPP_{\pi/2}$. Es decir la imagen de R por el flujo espiralea tanto alrededor de la órbita periódica parabólica en infinito que se encuentra en la dirección $\theta = 0$, (t positivo) como la que se encuentra en la dirección $\theta = \pi/2$. ($OPP_{\pi/2}$), (t negativo). Entonces $\phi(R)$ y R se intersectan en un número infinito de componentes. Como antes estas componentes serán denotadas por U_1, U_2, U_3, \dots y las ordenamos de tal forma que U_{k+1} está más próxima a OPP_0 que U_k . V_1, V_2, V_3, \dots denotarán las componentes de $\phi^{-1}(R) \cap R$.

Sea γ_1 la órbita por r_1 , esta es una órbita que viene de infinito en la dirección $\theta = \pi/2$ con las partículas de masa 1 chocando entre si, y las partículas de masa α permaneciendo sin chocar, después, cuando γ_1 pasa cerca de colisión total hay un choque entre partículas de masa α , seguido de otro choque entre partículas de masa 1, finalmente la órbita escapa a infinito en la dirección $\theta = 0$, con las partículas de masa α chocando entre si, y las partículas de masa 1 permaneciendo sin chocar (ver Figura 3.9). Esta deducción se sigue del comportamiento de las subvariedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio A y B sobre la variedad de colisión total cuando el valor del parámetro α está próximo a 1.

Por tanto la órbita por un punto del cuadrilátero R , que no sea una órbita de expulsión ni de colisión deja una vecindad de infinito en la dirección $\pi/2$, las partículas de masa 1 chocan s_1 veces entre sí después pasa cerca de colisión total un choque entre partículas de masa α , seguido de un choque entre partículas de masa 1, ahora la órbita entra en una vecindad de infinito en la dirección $\theta = 0$ con t_1 choques entre las partículas de masa α y regresa a una vecindad de colisión total con un choque entre partículas de masa α , para volver a entrar a una vecindad de infinito en la dirección $\theta = \pi/2$, etc.

En base a esto definimos los siguientes símbolos:

El símbolo $s_{k_1+t_1+k_2}$ representa un pedazo de trayectoria que deja una vecindad de infinito en la dirección $\theta = \pi/2$, con $k_1 + M_1$ choques entre las partículas de masa 1, después hay un choque entre las partículas de masa α seguido de un choque dentro las partículas de masa 1, entonces ocurren $t_1 + M_2$ choques entre las partículas de masa α seguido de un choque entre

las partículas de masa 1 y otro entre las partículas de masa α para finalmente regresar a la vecindad de infinito en la dirección $\pi/2$ con $k_2 + M_1$ choques entre las partículas de masa 1.

El símbolo $s_{k_1+\infty}$ representa un pedazo de trayectoria donde después de $k_1 + M_1$ choques entre las partículas de masa 1, hay un choque entre partículas de masa α seguido de un choque entre las partículas de masa 1, entonces la órbita escapa a ∞ en la dirección $\theta = 0$, con las partículas de masa α chocando entre si.

El símbolo $s_{k_1+t_1+\infty}$ representa un pedazo de trayectoria donde hay $k_1 + M_1$ choques entre partículas de masa 1, un choque entre partículas de masa α , un choque entre partículas de masa 1, $t_1 + M_2$ choques entre las partículas de masa α , para que finalmente después de un choque entre las partículas de masa 1 y un choque entre las partículas de masa α , la órbita escapa a ∞ en la dirección $\theta = \pi/2$, con las partículas de masa 1 chocando entre si.

Las constantes M_1 y M_2 dependen de las vecindades de infinito en las direcciones $\theta = \pi/2$ y $\theta = 0$ respectivamente, y representan un número finito de colisiones binarias entre partículas de masa 1 (constante M_1), y entre partículas de masa α (constante M_2).

En este caso el alfabeto \mathcal{A} lo constituye el conjunto

$$\mathcal{A} = \{s_{k_1+t_1+k_2} | k_1, t_1, k_2 \in \mathbb{N}\}.$$

Sea X el conjunto de sucesiones doblemente infinitas de elementos de \mathcal{A} .

Queremos encajar X en un nuevo conjunto \tilde{X} que admita elementos del siguiente tipo

$$\begin{aligned} s &= (s_{(k_1+\infty)}, s_{-k}, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, \dots, \dots) \\ s &= (\dots, \dots, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, s_l, s_{k_2+\infty}) \\ s &= (s_{-k_1+\infty}, s_{-k}, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, s_l, s_{k_2+\infty}) \\ \\ s &= (s_{(k_1+t_1+\infty)}, s_{-k}, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, \dots, \dots) \\ s &= (\dots, \dots, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, s_l, s_{k_2+t_2+\infty}) \\ s &= (s_{-k_1+t_1+\infty}, s_{-k}, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, s_l, s_{k_2+t_2+\infty}) \\ \\ s &= (s_{-k_1+\infty}, s_{-k}, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, s_l, s_{k_2+t_2+\infty}) \\ s &= (s_{-k_1+t_1+\infty}, s_{-k}, \dots, s_{-1}, s_0; s_1, \dots, s_l, s_{k_2+\infty}) \end{aligned}$$

Donde $s_j \in \mathcal{A}$.

Construimos una base de vecindades para estos elementos en forma análoga a como lo hicimos en la primera parte de este capítulo. De la misma forma también extendemos de homeomorfismo shift sobre \hat{X} .

El dominio de $\hat{\sigma}$ es el conjunto $D(\hat{\sigma}) = \{s \in \hat{X} \mid s_0 \neq s_{k_1+\infty}, s_{k_2+t_2+\infty}\}$ y su rango está dado por el conjunto $R(\hat{\sigma}) = \{s \in \hat{X} \mid s_{-1} \neq s_{-(k_1+\infty)}, s_{-(k_1+t_1+\infty)}\}$.

Después de estas consideraciones estamos en posibilidades de enunciar el siguiente resultado:

TEOREMA 3.4 Para valores del parámetro α cercanos a 1, existe I subconjunto del cuadrilátero R_1 sobre el que la función de Poincaré definida sobre R_1 es conjugada al homeomorfismo shift $\hat{\sigma}$, definido sobre \hat{X} .

La demostración de esta afirmación consiste en aplicar el teorema de Moser [Ref.], en forma análoga a como lo hicimos en el teorema 3.3.

Observemos que para valores del parámetro α próximo a 1, este último resultado nos garantiza, la existencia de órbitas que pasan cerca de infinito en las dos direcciones posibles, $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. De hecho dentro de este conjunto tenemos un subconjunto infinito de órbitas periódicas, (las formadas por un mismo bloque de elementos de \mathcal{A} , que se repite a lo largo de la sucesión en \hat{X}). El teorema también asegura la existencia de órbitas de escape ó captura en ambas direcciones.

Finalmente para terminar este capítulo observemos que la información que obtendríamos al aplicar Dinámica Simbólica sobre la itersección transversal de P_0^u con $P_{\pi/2}^s$ es la misma que obtenemos al aplicar la simetría L a las órbitas dadas por el teorema 3.4. Es decir, la existencia de ciertas órbitas a las que podemos asociarle una sucesión de enteros por el hecho que P_0^u intersekte transversalmente a $P_{\pi/2}^s$, está garantizada cuando aplicamos la reversibilidad del sistema a las órbitas dadas por el teorema 3.4. Así por ejemplo, una órbita de captura en la dirección $\theta = \pi/2$ corresponde, al aplicar la simetría L a una órbita de escape en la dirección $\theta = \pi/2$.

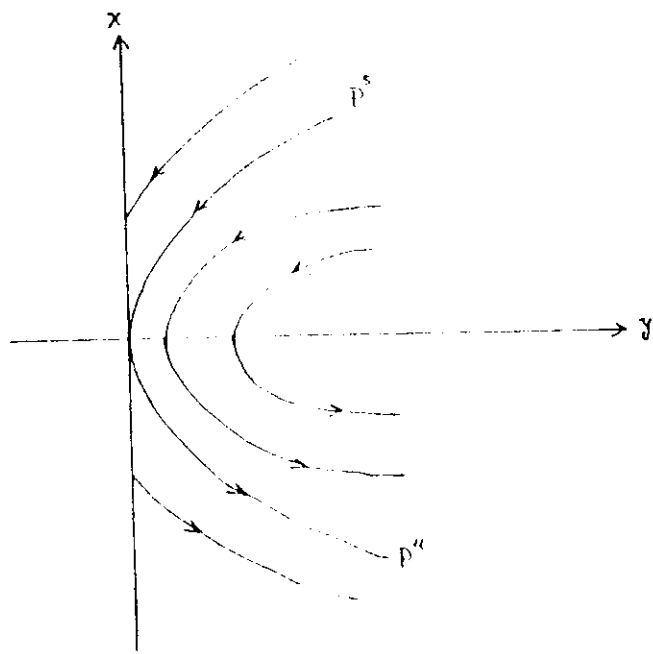


Figura 3.1 x expresado en potencias de y

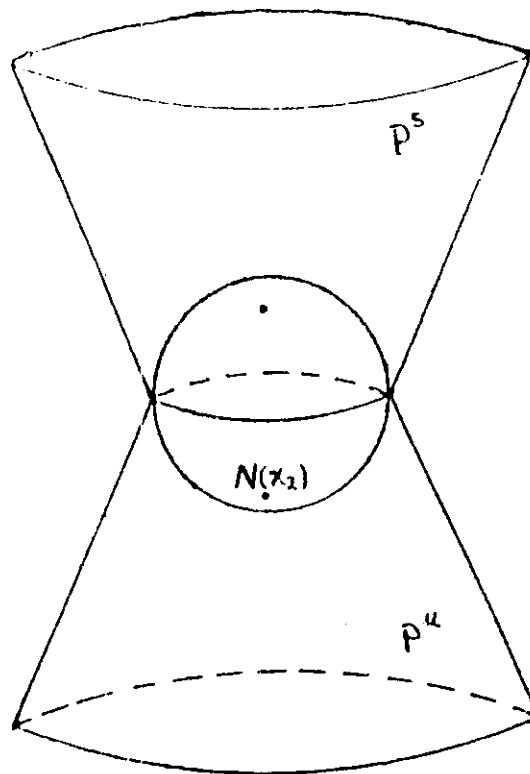


Figura 3.2 Las subvariedades de órbitas parabólicas P^s y P^u .

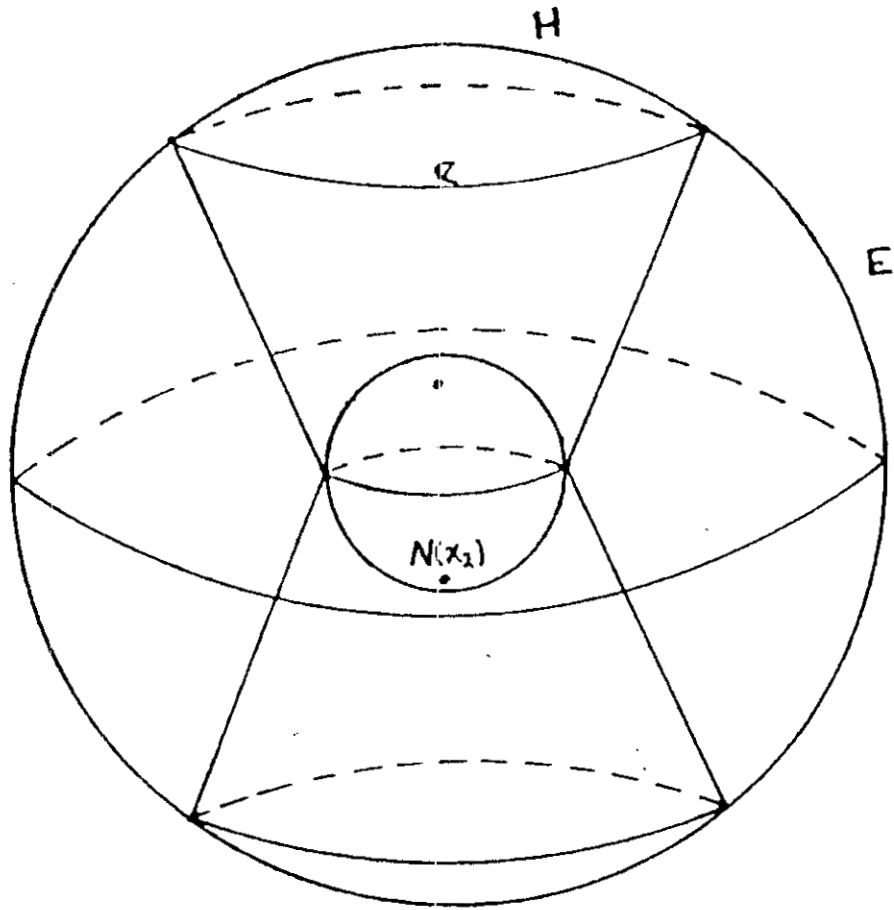


Figura 3.3 Una vecindad B que contiene a $N(x_2)$.

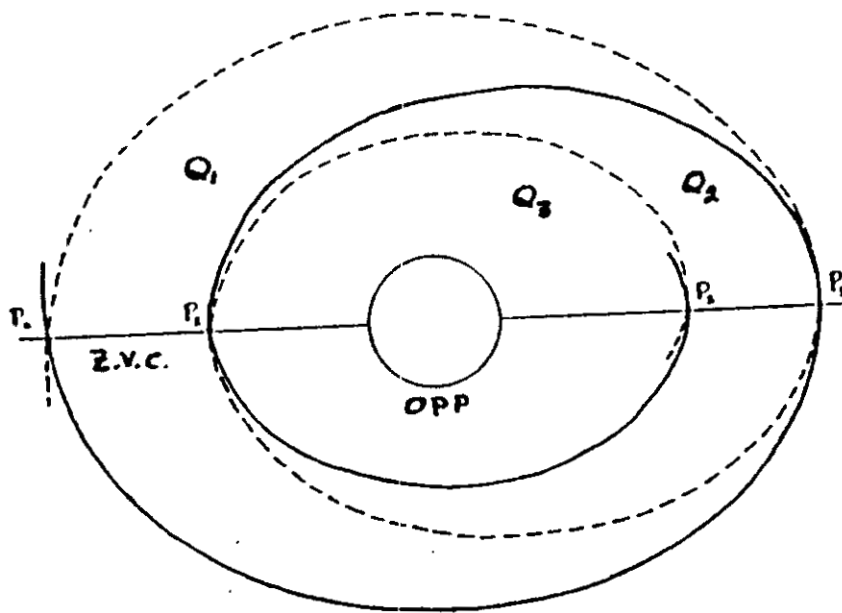


Figura 3.4 Espiraleo alrededor de OPP

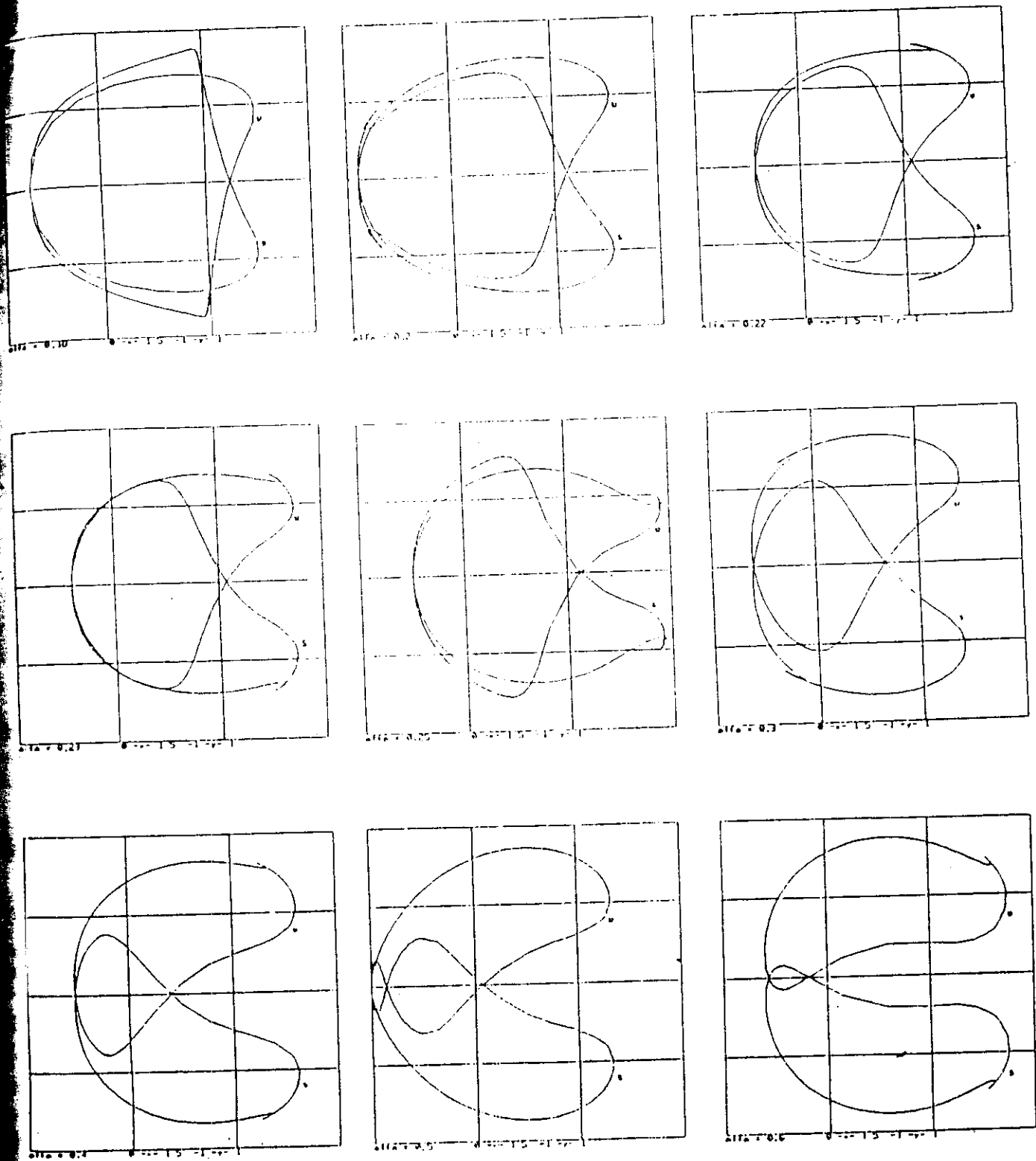


Figura 3.5a Intersección transversal de P^s y P^u para ciertos valores de α .

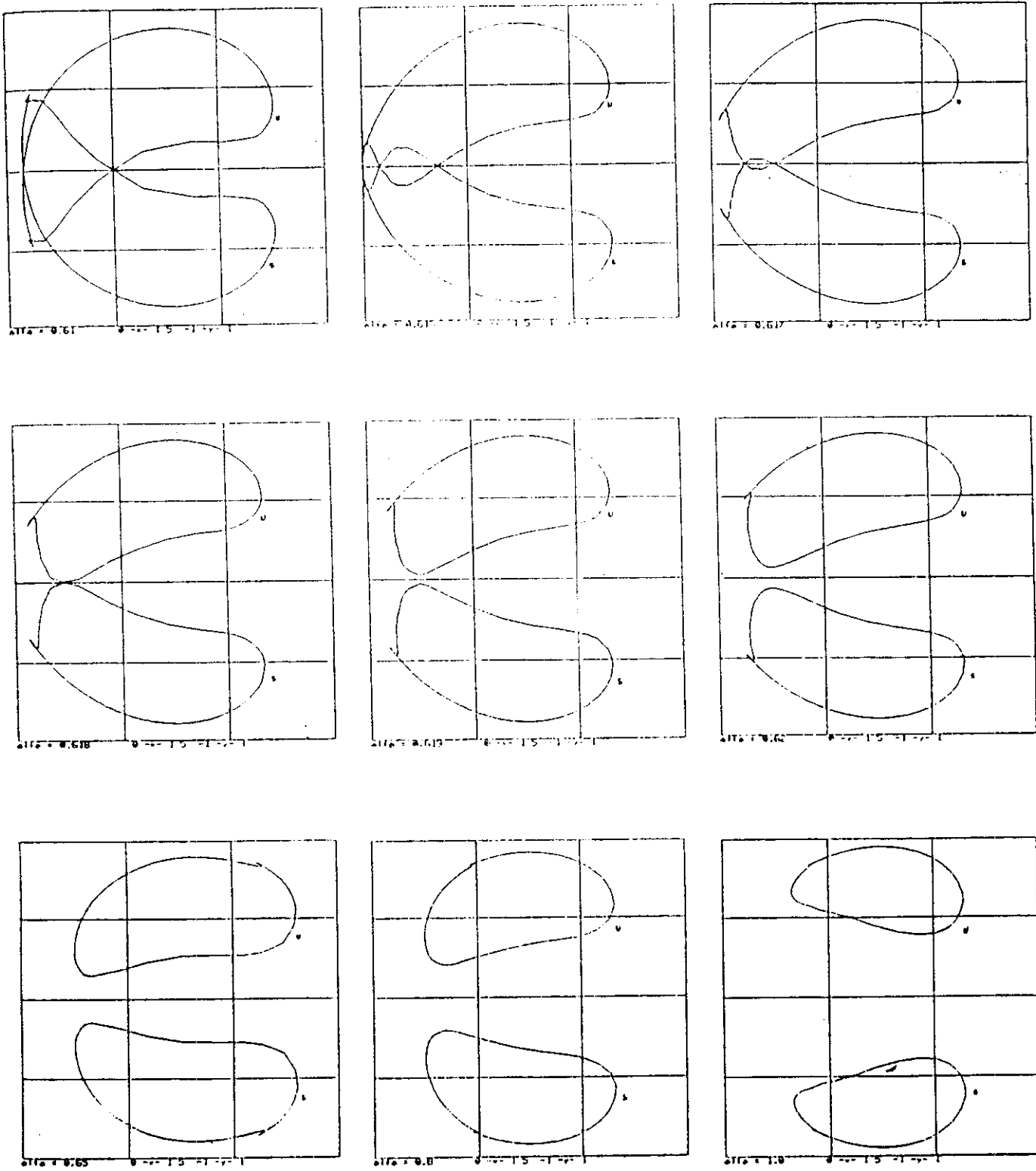


Figura 3.5b Intersección transversal de P^s y P^u para ciertos valores de α .

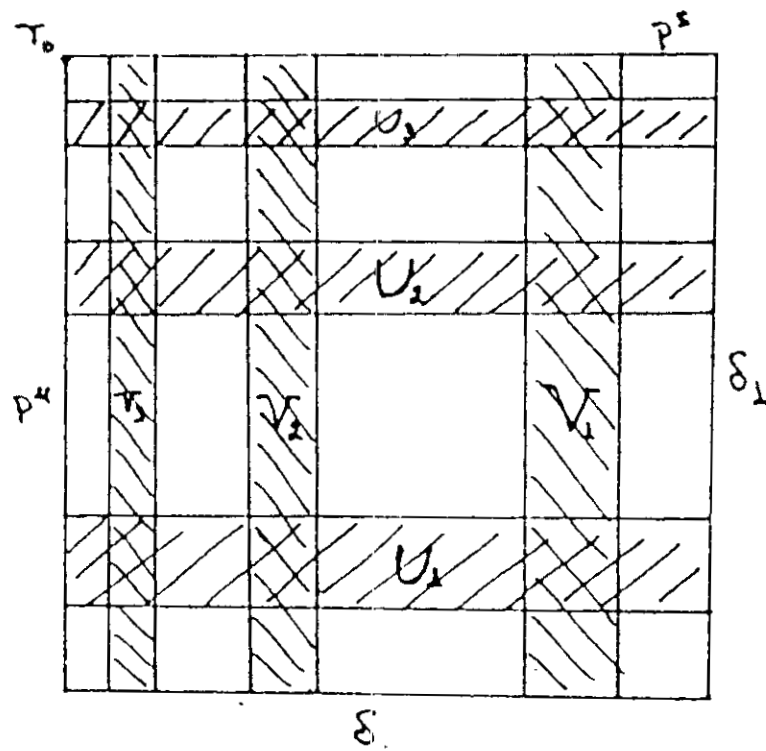


Figura 3.6 Familias de tiras horizontales y verticales

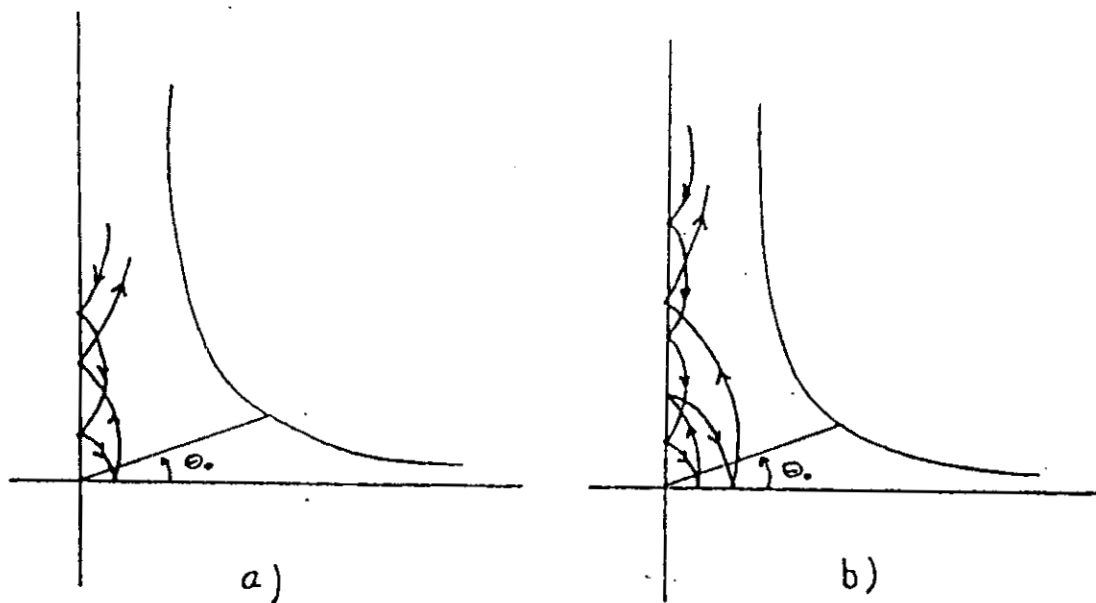


Figura 3.7 Orbits que pasan cerca de colisión total en el espacio de configuración para $0 < \alpha < \alpha_1$.

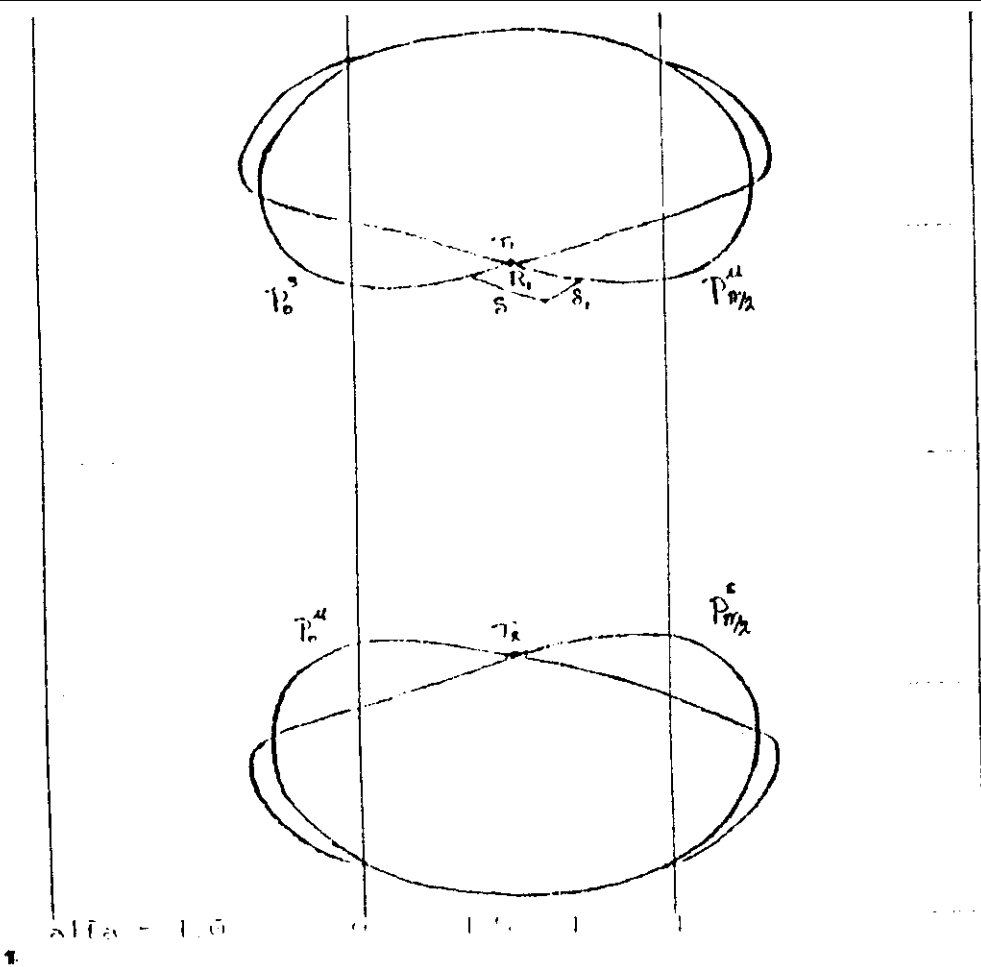


Figura 3.8 Intersección transversal de $P_0^{s(u)}$ y $P_{\pi/2}^{u(s)}$ para $\alpha = 1$.

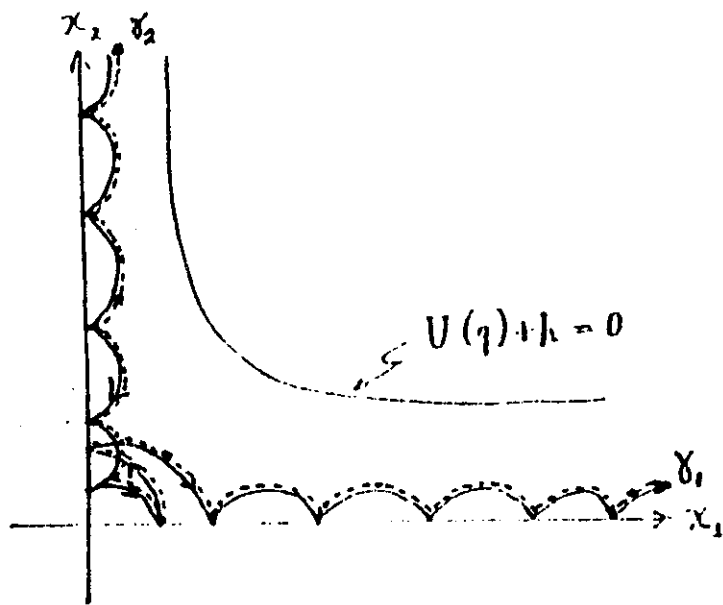


Figura 3.9 Orbitas parabólicas conectando ambos infinitos.

Capítulo 4

Flujo sobre las superficies E_h con $h \geq 0$

Introducción

En el capítulo 1, señalamos que para $h \geq 0$, la energía cinética predomina en la ecuación de la energía, (1.5) haciendo más fácil el escape de partículas. Con una inversión de la coordenada radial vemos que estos escapes pueden tratarse en forma análoga a como estudiamos las colisiones totales (Cap. 2). Es decir añadimos una variedad frontera a cada superficie de energía E_h , llamada la variedad al infinito. De esta forma en el caso $h = 0$, damos una descripción completa del flujo global para todo valor del parámetro α . En el caso $h > 0$, describimos el flujo sobre la variedad frontera, y en una vecindad de ésta, mostrando que la dinámica en los casos $h = 0$ y $h > 0$ es totalmente diferente. De hecho la transformación de coordenadas requerida es también ligeramente diferente (véase [Ref. 7]).

4.1 Caso $h = 0$

En (1.9) definimos el momento de inercia como $r^2 = q^t M q$. Ya que ahora estamos interesados en los escapes, haremos una explosión en el infinito. Para esto, sea

$$\rho = r^{-1} = (q^t M q)^{-1/2}$$

Las variables $v, \theta, w, W(\theta)$ se definen en la misma forma que (1.10)-(1.14)-(1.21), haciendo la sustitución de r por ρ^{-1} . Las singularidades debidas a colisiones binarias también son regularizadas en la forma como lo hicimos en el capítulo 1.

En estas coordenadas la ecuación de la energía está dada por

$$\frac{w^2}{\text{sen } 2\theta} = 1 - v^2 \frac{\text{sen } 2\theta}{4W(\theta)}. \quad (4.1)$$

Haciendo un reescalamiento de tiempo de la forma

$$\frac{dt}{ds} = \rho^{-3/2} \frac{\text{sen } 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}}. \quad (4.2)$$

Las ecuaciones de movimiento (1.3) se escriben como:

$$\begin{aligned} \rho' &= -\rho v \frac{\text{sen } 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}} \\ v' &= \sqrt{W(\theta)} \left(1 - \frac{\text{sen } 2\theta v^2}{4W(\theta)} \right) = \sqrt{W(\theta)} \left(\frac{w^2}{\text{sen } 2\theta} \right) \\ \theta' &= w \\ w' &= \cos 2\theta \left(1 - \frac{v^2 \text{sen } 2\theta}{2W(\theta)} \right) - \frac{1}{4} \frac{vw \text{sen } 2\theta}{\sqrt{W(\theta)}} + \frac{\dot{W}(\theta)}{2W(\theta)} (\text{sen } 2\theta - w^2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Definimos a la variedad del infinito N_0 como:

$$N_0 = \left\{ (\rho, v, \theta, w) \mid \rho = 0, \quad w^2 + v^2 \frac{\text{sen}^2 2\theta}{4W(\theta)} = \text{sen } 2\theta \right\} \quad (4.4)$$

Observemos que en este caso ($h = 0$), N_0 tiene exactamente la misma forma que la variedad de colisión total Λ definida en (1.24). Además el flujo sobre N_0 es el mismo que sobre Λ , por lo que tiene los mismos puntos de equilibrio y las mismas propiedades estudiadas en el capítulo 2.

Otra observación importante es que la relación de energía (4.1) no depende de ρ . Por tanto conociendo el flujo sobre N_0 , conocemos el flujo sobre $E_0 \cup N_0$, ya que ρ es obtenido resolviendo la primera ecuación en (4.3). En

otras palabras las trayectorias sobre E_0 son obtenidas levantando las trayectorias sobre N_0 en la dirección radial. Cuando esto sucede se dice que el flujo es proyectable sobre N_0 .

En el capítulo 1, sección 7 estudiamos las órbitas homotéticas. Vimos que la ecuación de éstas órbitas sobre el plano $r - v$ (que es invariante por el flujo sobre los puntos de equilibrio) está dada por: (Ver fig. 1.5)

$$\frac{v^2}{2} = rh + U(\theta_0). \quad (4.5)$$

Donde como siempre θ_0 es el único punto crítico del potencial U . Entonces para $h = 0$ tenemos que

$$v^2 = 2U(\theta_0). \quad (4.6)$$

Es decir la órbita homotética conecta Λ con N_0 y es la única solución en E_0 tal que su proyección sobre N_0 ó Λ es un punto. Además esta órbita escapa a (viene de) ∞ con velocidad radial constante $|v| = \sqrt{2U(\theta_0)}$.

Observando el flujo sobre Λ (Ver fig. 2.3), podemos afirmar que el escape asintótico a ∞ solo se puede dar en la dirección de la órbita homotética (configuración central), o por las direcciones $\theta = 0$ ó $\theta = \pi/2$.

Finalmente usaremos el hecho de que el flujo es proyectable para mostrar la existencia de cierto tipo de órbitas en el flujo global.

Sobre la variedad N_0 o sobre Λ definamos las siguientes regiones, para un valor de α comprendido entre α_1 y 1.

- Región I: Región abierta comprendida entre $W_A^{u,+}$ y $W_B^{s,+}$
- Región II: Región abierta comprendida entre $W_B^{s,+}$ y $W_A^{u,-}$
- Región III: Región abierta comprendida entre $W_A^{u,-}$ y $W_B^{s,-}$
- Región IV: Región abierta comprendida entre $W_B^{s,-}$ y $W_A^{u,+}$

Donde α_1 es el único valor de $\alpha \in [0, 1]$ para el cual existe conexión sobre las subvariedades invariantes de los puntos de equilibrio. Ver Fig. 4.1.

Observemos que como una consecuencia del Teorema 2.1, para $\alpha = \alpha_1$ la región II es vacía.

Para valores de α comprendidos entre 0 y α_1 las regiones correspondientes sobre N_0 ó Λ son definidas como:

- Región I: Región abierta comprendida entre $W_A^{u,+}$ y $W_A^{u,-}$
- Región II: Región abierta comprendida entre $W_A^{u,-}$ y $W_B^{s,+}$

Región III: Región abierta comprendida entre $W_B^{s,+}$ y $W_B^{s,-}$

Región IV: Región abierta comprendida entre $W_B^{s,-}$ y $W_A^{u,+}$

TEOREMA 4.1 Para cada valor de α comprendido en los tres casos siguientes:

- i) $\alpha_1 < \alpha \leq 1$
- ii) $\alpha = \alpha_1$
- iii) $0 < \alpha < \alpha_1$

Las regiones I, II, III y IV dan lugar a soluciones en E_0 , que se comportan cualitativamente diferentes unas de otras. La proyección de estas soluciones sobre el espacio de configuración son mostradas en las figuras 4.2, 4.3 y 4.4.

DEMOSTRACION Se sigue directamente del comportamiento sobre Λ (y por tanto sobre N_0) de las subvariedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio, y al hecho que el flujo es proyectable.

Las figuras 4.2, 4.3 y 4.4, representan órbitas en el espacio de configuración cuya proyección sobre Λ o N_0 está en las regiones I, II, III ó IV, para valores de α comprendidos en los tres casos dados en el teorema 4.1.

Las figuras 4.5, 4.6 y 4.7 representan el comportamiento de las órbitas, (en el espacio de configuración) cuya proyección sobre Λ o N_0 coincide con las subvariedades invariantes de los puntos de equilibrio.

Ya que toda órbita en E_0 se proyecta sobre alguna de las regiones dadas en el teorema 4.1, sobre los puntos de equilibrio, ó sobre las subvariedades invariantes asociadas a estos puntos, podemos dar una caracterización completa del flujo global para todo valor de $\alpha \in (0, 1]$.

TEOREMA 4.2.

1. Para $\alpha \in (\alpha_1, 1]$ existen exactamente nueve tipos de órbitas cualitativamente diferentes. La órbita homotética, y aquellas que en el espacio de configuración se representan en las figuras 4.2 y 4.5.
2. Para $\alpha = \alpha_1$ existen exactamente siete tipos de órbitas cualitativamente diferentes. La órbita homotética y aquellas que en el espacio de configuración se representan en las figuras 4.3 y 4.6.
3. Para $0 < \alpha < \alpha_1$ existen exactamente nueve tipos de órbitas cualitativamente diferentes. La órbita homotética y aquellas que en el espacio de configuración se representan en las figuras 4.4 y 4.7.

COROLARIO 4.1. Para cada valor de α se tiene que en toda órbita del flujo global en E_0 excepto en la órbita homotética, las partículas de masa 1 y las partículas de masa α chocan al menos una vez entre sí.

4.2 Caso $h > 0$

Si procedemos de la misma manera que en la sección anterior, llegamos a que la ecuación de la energía tiene la forma:

$$\frac{w^2}{\sin 2\theta} = 1 - \frac{\sin 2\theta}{4W(\theta)} \left(v^2 - \frac{2h}{\rho} \right)$$

la cual tiene una singularidad para $\rho = 0$; por lo tanto tendremos que modificar aquellos cambios de coordenadas.

Con este propósito hagamos:

$$\begin{aligned} \rho &= r^{-1} = (q^t M q)^{-1/2} \\ \underline{s} &= \rho q \\ \hat{v} &= \langle p, \underline{s} \rangle \\ \hat{u} &= M^{-1} p - \langle P, \underline{s} \rangle \underline{s}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Haciendo una parametrización del tiempo en la forma

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\rho}. \tag{4.8}$$

Las ecuaciones de movimiento (1.3) se escriben como:

$$\begin{aligned} \rho' &= -\rho \hat{v} \\ \hat{v}' &= \hat{u}^t M \hat{u} - \rho U(\underline{s}) \\ \underline{s}' &= \hat{u} \\ \hat{u}' &= -\hat{v} \hat{u} + (\hat{u}^t M \hat{u}) \underline{s} + \rho [M^{-1} \text{grad}(\underline{s}) + U(\underline{s}) \underline{s}]. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Donde ' denota $\frac{d}{d\tau}$. Al igual que hicimos en el cap. 1, reemplazamos (\underline{s}, \hat{u}) por la coordenada polar usual θ , y por la componente de la velocidad en la

dirección θ que denotaremos por \hat{u} . Para esto sean:

$$\underline{s} = M^{-1/2} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = \hat{u} M^{-1/2} \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

En estas coordenadas el sistema (4.9) se escribe:

$$\begin{aligned} \rho' &= -\rho \hat{v} \\ \hat{v}' &= \hat{u}^2 - \rho U(\theta) \\ \theta' &= \hat{u} \\ \hat{u}' &= -\hat{v} \hat{u} + \rho \dot{U}(\theta) \end{aligned} \quad (4.10)$$

La relación de la energía tiene la forma:

$$\frac{1}{2}(\hat{u}^2 + \hat{v}^2) - \rho U(\theta) = h. \quad (4.11)$$

Estudiaremos primeramente que sucede cuando hay escape total, es decir cuando las cuatro partículas escapan a ∞ . En este caso no es necesario regularizar las singularidades debidas a colisiones binarias, así que podemos trabajar directamente con el sistema (4.10).

Si hacemos $\rho = 0$ en la ecuación de energía (4.11), obtenemos

$$\hat{u}^2 + \hat{v}^2 = 2h. \quad (4.12)$$

Lo cual significa que en escape total, la norma de la velocidad del sistema tiende a un valor constante $\sqrt{2h}$. (recordemos que \hat{v} y \hat{u} son las componentes radial y tangencial de la velocidad del sistema).

Este valor constante es llamado la velocidad hiperbólica en el infinito. La variedad del infinito N_h se define como el conjunto:

$$N_h = \{(\rho, \hat{v}, \theta, \hat{u}) \in E_h \mid \rho = 0, \hat{u}^2 + \hat{v}^2 = 2h\}. \quad (4.13)$$

Ya que para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, $\hat{u}^2 + \hat{v}^2 = 2h$ es un círculo, tenemos que topológicamente N_h representa un cilindro sin tapas.

N_h y la variedad de colisión total Λ aparecen como componentes de la frontera de la superficie de energía E_h , sin embargo, el flujo ya no es proyectable sobre N_h ni sobre Λ .

Los puntos de equilibrio del flujo dado por (4.10), están dados por:

$$\rho = 0, \hat{u} = 0, \hat{v}^2 = 2h, \theta \in (0, \pi/2) \text{ arbitrario.}$$

Observemos que el conjunto de estos puntos de equilibrio que denotaremos por S_h ; forman una subvariedad (con dos componentes conexas) de N_h , de dimensión igual a la mitad de dimensión de N_h . Este es un caso particular del resultado obtenido por Lacomba-Simo [Ref. 7]. Antes de continuar recordemos la siguiente definición.

DEFINICION Sea ϕ_t un flujo suave sobre una variedad M . Supongamos que N es una subvariedad de M que consiste enteramente de puntos de equilibrio para el flujo. Decimos que N es normalmente hiperbólica si el haz tangente de M sobre N se descompone en 3 subhaces TN , E^s y E^u invariantes bajo $d\phi_t$ y que satisfacen

1. $d\phi_t$ contrae E^s exponencialmente.
2. $d\phi_t$ expande E^u exponencialmente.
3. TN es el haz tangente de N .

Sean S_h^+ y S_h^- las componentes conexas de S_h que corresponden a $v = \sqrt{2h}$ y $v = -\sqrt{2h}$ respectivamente. Aplicando el resultado de Lacomba [Ref. 9], podemos afirmar que el flujo sobre $E_h \cup N_h$ definido por el sistema (4.10) tiene a S_h^+ como un atractor normalmente hiperbólico y a S_h^- como un repulsor normalmente hiperbólico. (Ver fig. 4.8)

Del sistema (4.10) se verifica fácilmente que el flujo sobre N_h es casi-gradiente respecto a v . Entonces sobre N_h todas las órbitas nacen en S_h^- y mueven en S_h^+ , interrumpiéndose en $\theta = 0$ y en $\theta = \pi/2$.

Ya que para toda aproximación asintótica a N_h tiene lugar en puntos de equilibrio, de las observaciones anteriores llegamos al siguiente resultado.

PROPOSICION 4.1. El escape total a infinito puede hacerse en cualquier dirección, la única limitante es que llegue a (salga de) infinito con una velocidad fija hiperbólica.

Para analizar los casos en que dos partículas escapan a infinito y las dos restantes permanecen acotadas, es necesario regularizar las singularidades

debidas a colisiones binarias. Para esto hagamos:

$$\begin{aligned} 2W(\theta) &= U(\theta) \operatorname{sen} 2\theta \\ w &= \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}} \hat{u} \end{aligned} \quad (4.14)$$

La relación de energía (4.11) toma la forma:

$$w^2 + \frac{\hat{v}^2 \operatorname{sen}^2 2\theta}{4W(\theta)} - \rho \operatorname{sen} 2\theta = h \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{2W(\theta)}. \quad (4.15)$$

Haciendo una nueva reparametrización del tiempo

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}}, \quad (4.16)$$

las ecuaciones de movimiento (4.10) se escriben como:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{ds} &= \frac{-\rho \hat{v} \operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}} \\ \frac{d\hat{v}}{ds} &= \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}} (2h - \hat{v}^2) + \rho \sqrt{W(\theta)} \\ \frac{d\theta}{ds} &= w \\ \frac{dw}{ds} &= \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4W(\theta)} (2h - \hat{v}^2) + \rho \cos 2\theta - \hat{v} w \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\sqrt{W(\theta)}} \\ &\quad + \frac{\dot{W}(\theta)}{4W(\theta)} (\rho \operatorname{sen} 2\theta - 2w^2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

En este caso la variedad del infinito N_h está definida por

$$N_h = \left\{ (\rho, \hat{v}, \theta, w) \in E_h \mid \rho = 0, w^2 + \hat{v}^2 \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4W(\theta)} = 2h \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4W(\theta)} \right\} \quad (4.18)$$

Ahora, para cada $\theta \in (0, \pi/2)$, $w^2 + \hat{v}^2 \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4W(\theta)} = 2h \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{4W(\theta)}$ es una elipse. Para $\theta = 0$ ó $\theta = \pi/2$, la elipse degenera en una recta. Entonces topológicamente N_h representa una esfera S^2 . (Ver Fig. 4.9).

Observemos que la velocidad radial \hat{v} aún permanece acotada por la misma constante, es decir $|\hat{v}| \leq \sqrt{2h}$.

Del sistema (4.17) obtenemos que los puntos de equilibrio o puntos críticos están dados por la unión de los siguientes tres conjuntos:

$$\begin{aligned} S_h &= \{(\rho, \hat{v}, \theta, w) \in E_h | \rho = 0, w = 0, \hat{v}^2 = 2h, \theta \in [0, \pi/2] \text{ arbitrario}\}, \\ S_0 &= \{(\rho, \hat{v}, \theta, w) \in E_h | \rho = 0, w = 0, \theta = 0, \hat{v} \in [-\sqrt{2h}, \sqrt{2h}] \text{ arbitrario}\}, \\ S_{\pi/2} &= \{(\rho, \hat{v}, \theta, w) \in E_h | \rho = 0, w = 0, \theta = \pi/2, \hat{v} \in [-\sqrt{2h}, \sqrt{2h}] \text{ arbitrario}\}. \end{aligned}$$

Comparando con 4.13, vemos que en este caso aparecen muchos nuevos puntos de equilibrio, y que la unión de todos ellos forman un conjunto conexo y cerrado que llamaremos P.C., es decir $P.C. = S_h \cup S_0 \cup S_{\pi/2}$ es topológicamente un S^1 . (Ver Fig. 4.9).

La matriz \hat{A} de la parte lineal del sistema 4.17, en el punto $(0, v_0, \theta_0, 0)$, con $\theta \in (0, \pi/2)$ está dada por

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\text{sen } 2\theta_0}{2\sqrt{W(\theta_0)}} v_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{W(\theta_0)}} & -\frac{\text{sen } 2\theta_0}{\sqrt{W(\theta_0)}} v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1 & K_2 & 0 & -\frac{\text{sen } 2\theta_0}{2\sqrt{W(\theta_0)}} v_0 \end{pmatrix}$$

Donde K_1 y K_2 son funciones analíticas de θ .

Ya que ρ puede ser obtenido de la relación de energía (4.15), calculamos el polinomio característico a la matriz que resulta de omitir el primer renglón y la primera columna de \hat{A} , este tiene la forma:

$$\lambda \left(\lambda + \frac{\text{sen } 2\theta_0 v_0}{\sqrt{W(\theta_0)}} \right) \left(\lambda + \frac{\text{sen } 2\theta_0 v_0}{2\sqrt{W(\theta_0)}} \right) = 0 \quad (4.19)$$

En forma análoga calculamos los polinomios característicos para la parte lineal del sistema (4.17) en los puntos de la forma $(0, v_0, 0, 0)$ y $(0, v_0, \pi/2, 0)$. Estos tienen la forma:

$$\lambda[\lambda^2 - F(a)(2h - v_0^2)] = 0 \quad (4.20)$$

Donde $F(a) = \frac{1}{W(a)}$ y $a = 0$ ó $a = \pi/2$.

En (4.19) y (4.20) el valor propio $\lambda = 0$ corresponde a la dirección sobre P.C.

Si $v_0 \neq \pm\sqrt{2h}$ entonces $F(a)(2h - v_0^2) = T_a^2 > 0$, ($a = 0$ ó $a = \pi/2$) y el polinomio característico dado por (4.20) tiene una raíz positiva T_a y otra negativa $-T_a$.

Denotemos por:

$$\begin{aligned} S_h^+ &= \{(\rho, \hat{v}, \theta, w) \in E_h | \rho = 0, w = 0, \hat{v} = \sqrt{2h}, \theta \in (0, \pi/2) \text{ arbitrario}\}, \\ S_h^- &= \{(\rho, \hat{v}, \theta, w) \in E_h | \rho = 0, w = 0, \hat{v} = -\sqrt{2h}, \theta \in (0, \pi/2) \text{ arbitrario}\} \\ S_0^0 &= \{(\rho, \hat{v}, \theta, w) \in E_h | \rho = 0, \hat{v} \in (-\sqrt{2h}, \sqrt{2h}) \text{ arbitrario}\}, \\ S_{\pi/2}^0 &= \{(\rho, \hat{v}, \theta, w) \in E_h | \rho = 0, w = 0, \theta = \pi/2, \hat{v} \in (-\sqrt{2h}, \sqrt{2h}) \text{ arbitrario}\}. \end{aligned}$$

De todo lo anterior, llegamos al siguiente resultado.

TEOREMA 4.3. El conjunto de puntos críticos sobre N_h se descompone en cuatro subvariedades normalmente hiperbólicas, S_h^+ que es un atractor normalmente hiperbólico, S_h^- que es un repulsor normalmente hiperbólico y S_0^0 y $S_{\pi/2}^0$ que son sillars normalmente hiperbólicas. Sobre los cuatro puntos críticos ($v = \pm 2h, \theta = 0$ o $\theta = \pi/2, \rho = 0, w = 0$) que conectan estas subvariedades, el flujo es totalmente degenerado.

A partir de este teorema podemos concluir que el escape a (llegada de) el infinito sigue siendo posible en cualquier dirección. Sobre las direcciones $\theta = 0$, ó $\theta = \pi/2$ no tenemos ninguna limitante sobre la velocidad radial \hat{v} . En cualquier otra dirección ($\theta \in (0, \pi/2)$), la velocidad hiperbólica en infinito satisface $|\hat{v}| = \sqrt{2h}$.

Para completar la descripción del flujo en una vecindad de N_h , analizamos primeramente la proyección del flujo en N_h sobre el plano $\hat{v} - \theta$. Haciendo uso de (4.15) y (4.17) con $\rho = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{v}}{ds} &= \frac{2\sqrt{W(\theta)}}{\text{sen } 2\theta} w^2 \\ \frac{d\theta}{ds} &= w. \end{aligned} \tag{4.21}$$

La primera de estas ecuaciones nos dice que el flujo sobre N_h , después de regularizar las colisiones binarias sigue siendo casi gradiente respecto a la coordenada \hat{v} .

Ahora de (4.21) y (4.14) vemos que

$$\frac{d\hat{v}}{d\hat{\theta}} = \pm \sqrt{2h - v^2}. \quad (4.22)$$

El signo $+(-)$ corresponde a la órbita sobre N_h con $w > 0$ ($w < 0$).

Integrando la última ecuación a partir del punto $v = -\sqrt{2h}$, $\theta = \theta_1 \in (0, \pi/2)$ tenemos

$$\pm \text{Arc sen } \frac{v}{\sqrt{2h}} \Big|_{-\sqrt{2h}}^v = \theta \Big|_{\theta_1}.$$

Lo cual implica que

$$v = -\sqrt{2h} \cos(\theta - \theta_1) \quad (4.23)$$

Fijemos ahora un punto de equilibrio en $S_{\pi/2}$, es decir un punto de equilibrio de la forma $\rho = 0$, $w = 0$, $\theta = \pi/2$, $\hat{v} \in [-\sqrt{2h}, \sqrt{2h}]$ fijo. Supongamos que el flujo global tiene lugar en el exterior de N_h . Entonces de las ecuaciones de movimiento (4.17) tenemos que las órbitas que llegan a este punto lo hacen con la coordenada θ decreciendo, es decir $\frac{d\theta}{ds} = \omega < 0$, de lo que deducimos que para esta órbita, la coordenada w tiende a cero por la izquierda, mientras que por la misma razón las órbitas que salen de este punto lo hacen con $w > 0$. La ecuación (4.22) nos dice que sobre N_h este comportamiento se invierte, es decir las órbitas sobre N_h llegan a este punto de equilibrio con $w > 0$ y salen de él con $w < 0$. Un análisis semejante puede hacerse sobre cada punto de equilibrio de S_0 . De esta manera se forman las sillas normalmente hiperbólicas descritas en el teorema 4.3. Ver Fig. 4.10.

Finalizamos este capítulo con las siguientes observaciones:

1. De la ecuación (4.23) tenemos que cada órbita sobre N_h que nace en el punto de equilibrio S_h^- con $\theta = \theta_1 \in (0, \pi/2)$ y con $w > 0$, muere en el punto de equilibrio de $S_{\pi/2}$. Esta órbita puede ser continuada sobre N_h a través de la órbita que sale de este mismo punto de $S_{\pi/2}$ con $w < 0$. Esta muere en un punto de S_0 , y la podemos continuar con la órbita que sale de este mismo punto en S_0 con $w > 0$ y muere en el punto de equilibrio de S_h^+ que corresponde a $\theta = \theta_1$. Con la órbita que nace en S_h^- con $\theta = \theta_1$ y $w < 0$ procedemos en forma análoga. (Ver Fig. 4.10). Con esta forma de continuar órbitas sobre N_h , tenemos que todas las trayectorias sobre N_h nacen en S_h^- y mueren en el punto correspondiente de S_h^+ después de dar una vuelta completa sobre N_h .

2. En un trabajo de Lacomba [Ref. 9], se demuestra que el conjunto de puntos de equilibrio sobre la variedad al infinito para el problema isósceles con $h > 0$, consta de dos componentes conexas normalmente hiperbólicas, una atractora y la otra repulsora. Aplicando los resultados obtenidos en este capítulo al problema isósceles, es posible demostrar que por lo menos con esta forma muy natural de regularizar colisiones, aquel resultado es falso, ya que el conjunto de puntos de equilibrio forman un conexo que consta de una parte atractora normalmente hiperbólica, una parte repulsora normalmente hiperbólica y dos secciones que resultan ser sillanormalmente hiperbólicas, unidas todas ellas por cuatro puntos de equilibrio totalmente degenerados.

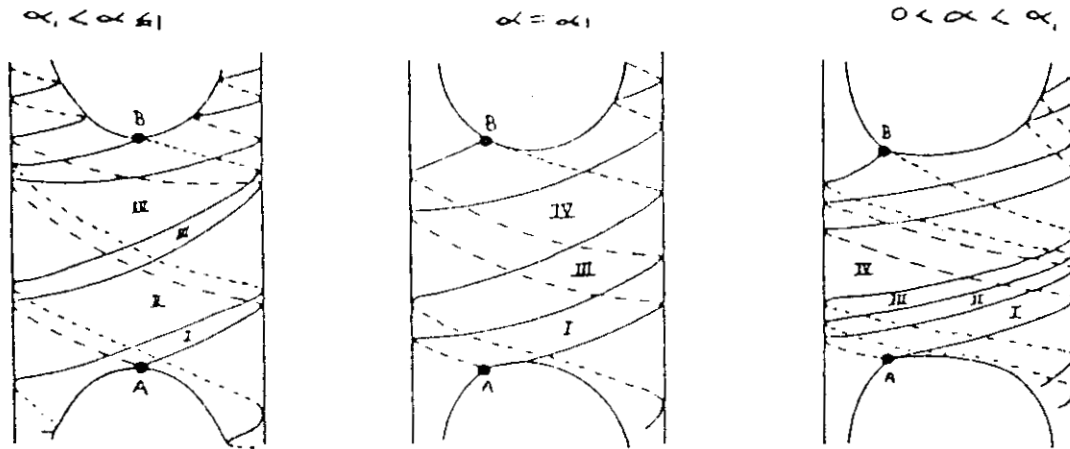


Figura 4.1 Regiones I, II, III y IV para distintos valores de α

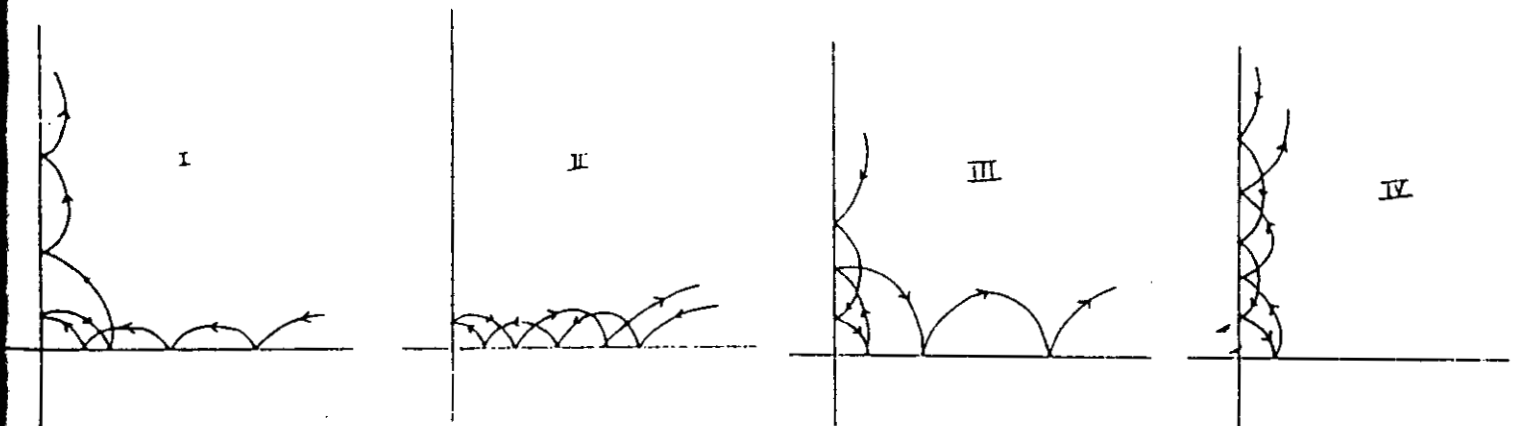


Figura 4.2 Caso i) $\alpha_1 < \alpha \leq 1$

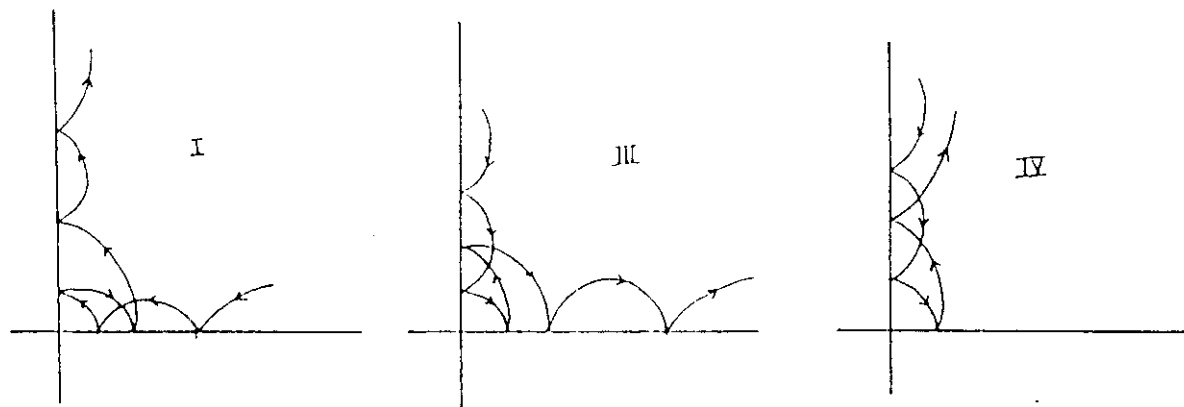


Figura 4.3 Caso ii) $\alpha = \alpha_1$

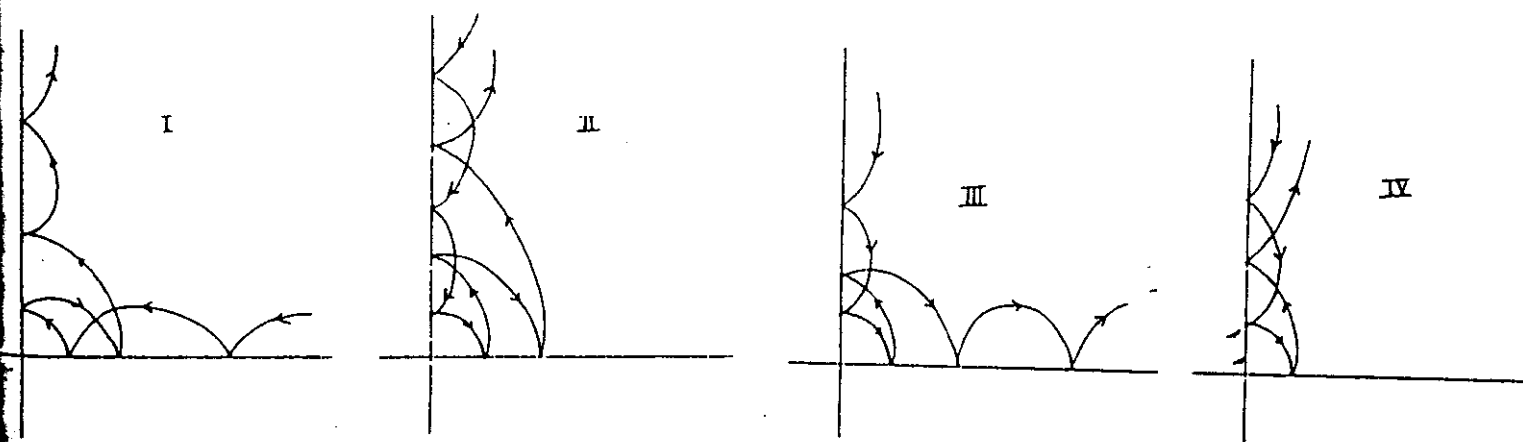


Figura 4.4 Caso iii) $0 < \alpha < \alpha_1$

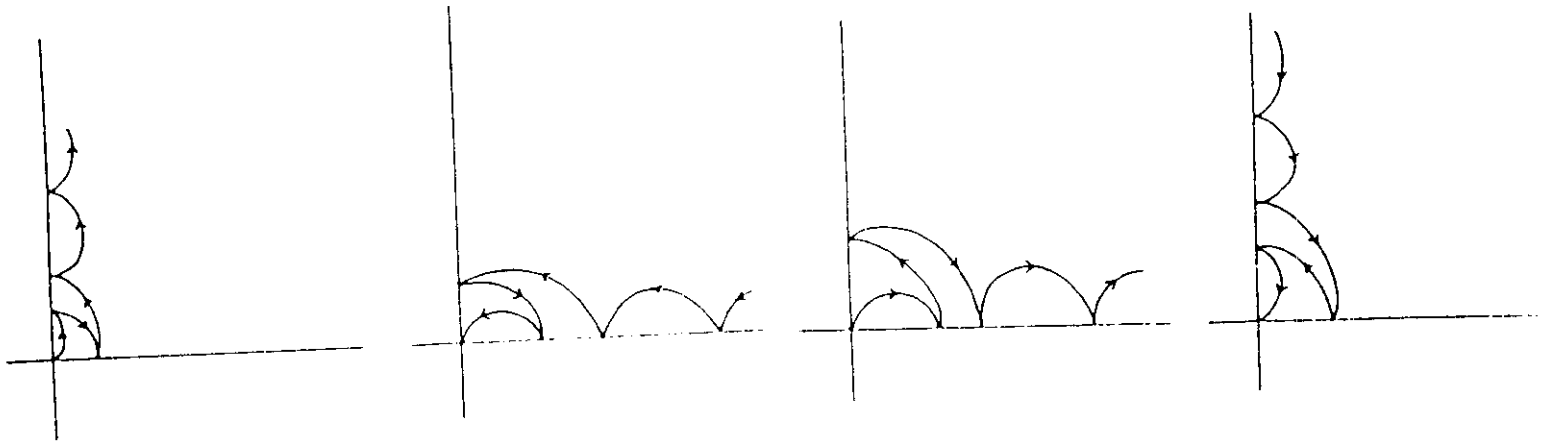


Figura 4.5 Orbitas que se proyectan sobre $W_A^{u,+}$, $W_B^{s,+}$, $W_A^{u,-}$ y $W_B^{s,-}$ respectivamente, para $\alpha_1 < \alpha \leq 1$.

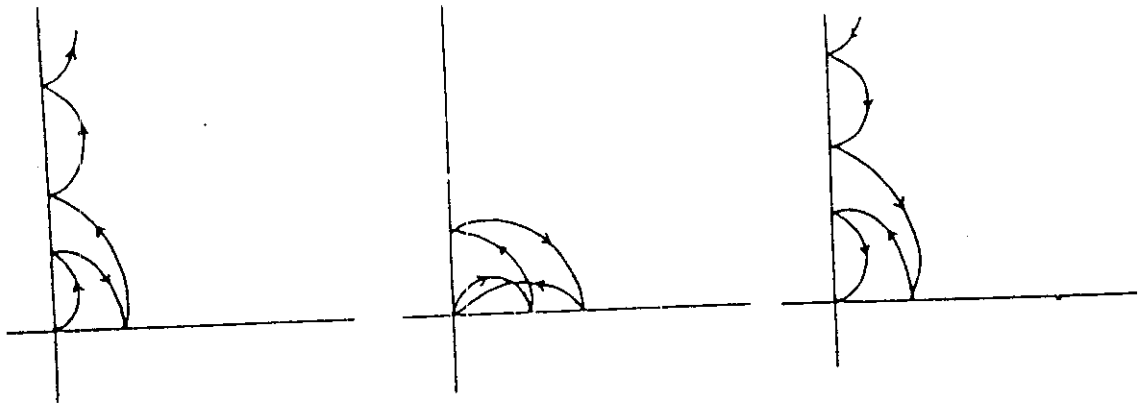


Figura 4.6 Orbitas que se proyectan sobre $W_A^{u,+}$, $W_B^{s,+}$, $W_A^{u,-}$ y $W_B^{s,-}$ respectivamente, para $\alpha = \alpha_1$.

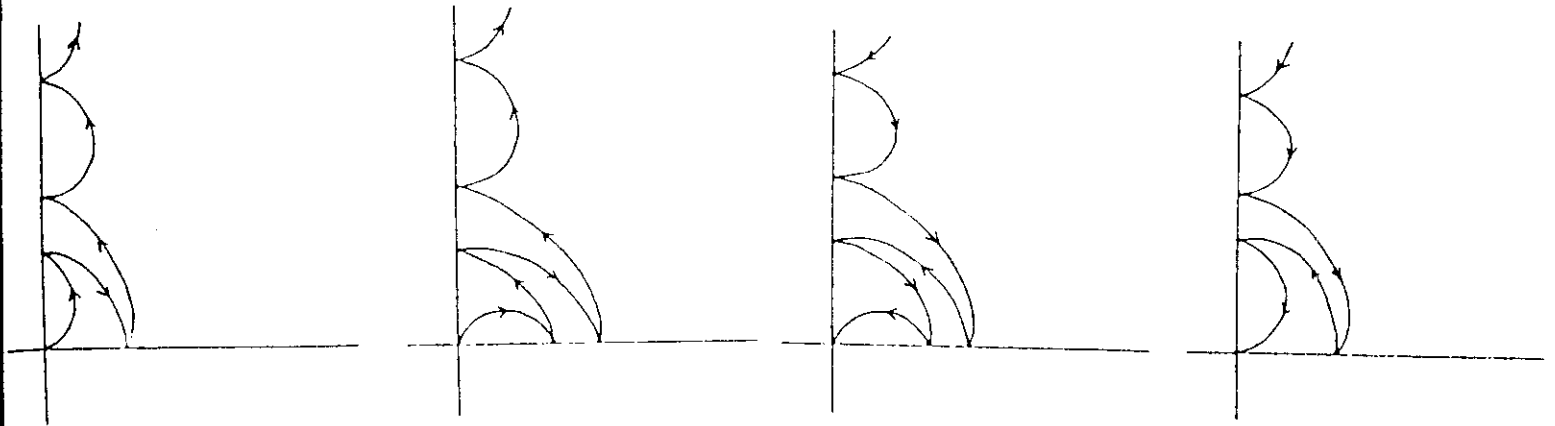


Figura 4.7 Orbitas que se proyectan sobre W_A^{u+} , W_A^{u-} , W^{s+v} y W_B^{s-} respectivamente, para $0 < \alpha < \alpha_1$.

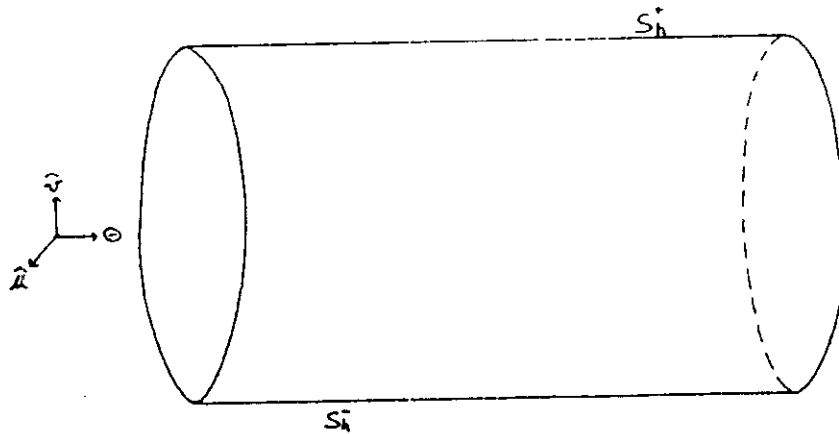


Figura 4.8 La variedad del infinito N_h antes de regularizar colisiones binarias.

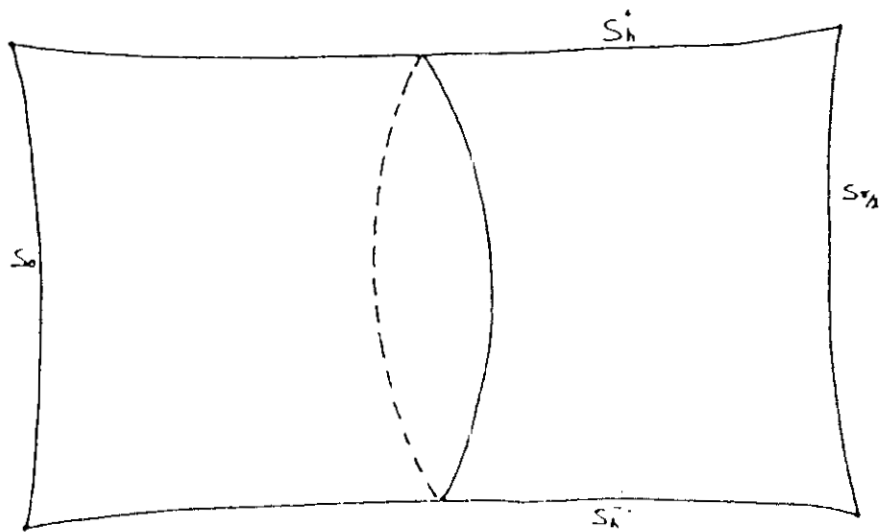


Figura 4.9 La variedad del infinito N_h después de regularizar colisiones binarias.

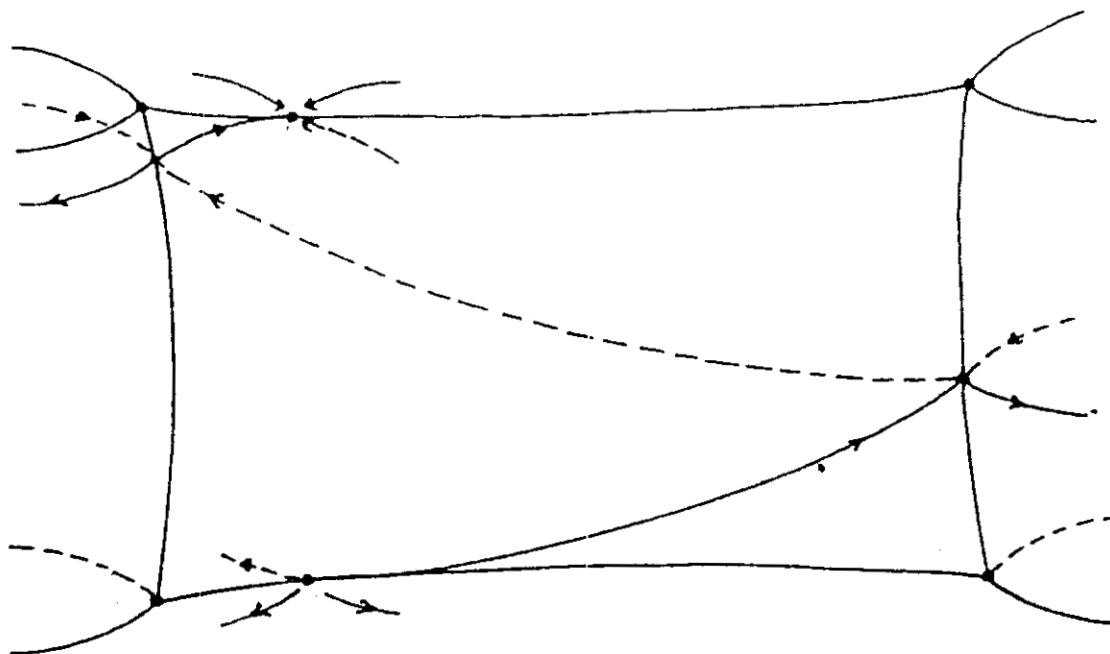


Figura 4.10 Flujo en una vecindad de N_h .

Capítulo 5

Un modelo compacto para el problema romboidal

Introducción

En este capítulo introducimos un nuevo cambio de coordenadas para regularizar las singularidades debidas a colisiones binarias, de tal forma que el nuevo modelo resultante es una variedad compacta. Estudiamos el flujo total y sobre la variedad de colisión en este nuevo modelo, viendo la relación que éste tiene con el modelo no compacto estudiado en los capítulos anteriores.

5.1 Regularización de colisiones binarias

Partamos de las ecuaciones de movimiento en coordenadas de McGehee antes de regularizar las singularidades debidas a colisiones binarias. Estas se escriben en la forma

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau} &= rv \\ \frac{dv}{d\tau} &= u^2 + \frac{v^2}{2} - U(\theta) \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= u \\ \frac{du}{d\tau} &= -\frac{1}{2}uv + \dot{U}(\theta),\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde

$$U(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} + \frac{\alpha^{5/2}}{\sqrt{2} \sin \theta} + \frac{4\sqrt{2}\alpha^{3/2}}{\sqrt{\alpha \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}},$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r^{3/2},$$

y $\dot{U}(\theta)$ significa derivación respecto a la variable θ .

La relación de energía está dada por

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) - U(\theta) = rh. \quad (5.2)$$

Como en los capítulos anteriores, trabajaré en un nivel fijo de energía h , que seguiré denotando por E_h .

Para regularizar las colisiones binarias procedemos como sigue:

Hacemos el cambio en la variable angular θ Capítulo II. (Ver figura [2.2])

$$\theta = J(\gamma) = \frac{\pi(1 + \sin 2\gamma)}{4}. \quad (5.3)$$

Ahora multiplicamos la relación de energía por $\cos^2 2\gamma$, es decir

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) \cos^2 2\gamma - U(J(\gamma)) \cos^2 2\gamma = rh \cos^2 2\gamma.$$

En el Capítulo II se demuestra que $U(J(\gamma)) \cos^2 2\gamma$ todavía tiene singularidades para $\gamma = \dots, -\pi/4, \pi/4, 3\pi/4, \dots$. Sin embargo, estas son removibles.

Definamos las nuevas variables

$$\begin{aligned} r_1 &= r \cos^2 2\gamma \\ u_1 &= u \cos 2\gamma \\ v_1 &= v \cos 2\gamma \end{aligned} \quad (5.4)$$

En estas coordenadas la relación de energía toma la forma:

$$u_1^2 + v_1^2 - 2U(J(\gamma)) \cos^2 2\gamma = 2r_1 h. \quad (5.5)$$

Con la nueva reparametrización del tiempo

$$\frac{d\tau}{ds} = \cos^3 2\gamma,$$

a esta propiedad y al hecho que $P(\gamma)$ es una función periódica de periodo π , vemos que es suficiente estudiar el flujo dado por (5.6) para valores de γ comprendidos entre $-\pi/4$ y $\pi/4$. ($-\pi/4 \leq \gamma \leq \pi/4$).

5.3 Puntos de equilibrio

Se verifica fácilmente que el flujo descrito por (5.6) tiene 6 puntos de equilibrio, que en coordenadas (r_1, v_1, γ, u_1) están dados por:

$$\begin{aligned}
 A &= (0, -\sqrt{2U(J(\gamma_0)) \cos^2 2\gamma_0}, \gamma_0, 0) \\
 B &= (0, +\sqrt{2U(J(\gamma_0)) \cos^2 2\gamma_0}, \gamma_0, 0) \\
 C &= (0, 0, -\pi/4, \frac{4\alpha^{5/4}}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}}) \\
 D &= (0, 0, -\pi/4, -\frac{4\alpha^{5/4}}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}}) \\
 E &= (0, 0, \pi/4, \frac{4}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}}) \\
 F &= (0, 0, \pi/4, -\frac{4}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}}).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Donde γ_0 es el único valor de $\gamma \in [-\pi/4, \pi/4]$ tal que $\dot{U}(J(\gamma_0)) = 0$ (Ver Prop. 1.2). Ya que r_1 puede ser obtenido de la relación de energía (5.5), basta estudiar la linealización del flujo en los puntos de equilibrio en coordenadas (v_1, γ, u_1) . Para los puntos de equilibrio C, D, E y F . Tenemos

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\pi}u_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{\pi}u_0 & 0 \\ 0 & K & -\frac{8}{\pi}u_0 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

donde

$$\begin{aligned}
 u_0 &= -\frac{4\alpha^{5/4}}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}} \text{ en } C, & u_0 &= \frac{4\alpha^{5/4}}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}} \text{ en } D, \\
 u_0 &= \frac{4}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}} \text{ en } E, & u_0 &= -\frac{4}{\sqrt{\sqrt{2\pi}}} \text{ en } F,
 \end{aligned}$$

y K es un valor fijo que depende del punto de equilibrio.

Los puntos de equilibrio A y B corresponden a los que habíamos obtenido en la proposición 1.2, que como aquellos son hiperbólicos. (Ver Proposición 1.3). De todo lo anterior llegamos al siguiente resultado.

TEOREMA 5.1: Todos los puntos de equilibrio en el modelo compacto son hiperbólicos. A y B son puntos silla, C y F son repulsores globales o fuentes. D y E son atractores globales o sumideros.

De este teorema se deduce en forma inmediata el siguiente resultado, el cual dada su importancia lo enunciamos como un corolario. Observemos que este resultado sería muy difícil de demostrar en el modelo no-compacto.

COROLARIO 5.1. En el problema romboidal de 4-cuerpos en el plano con $h < 0$, el conjunto de condiciones iniciales para los que las órbitas correspondientes van a (vienen de) colisión binaria entre cualesquier par de partículas de masas 1 ó α tiene dimensión 3.

DEMOSTRACION Se sigue directamente del hecho que el espacio fase tiene dimensión 3 y que los puntos de equilibrio asociados a colisiones binarias C , F y D , E son respectivamente repulsores globales y atractores globales.

5.4 Flujo sobre la variedad de colisión total Λ .

Recordemos de 5.7 que Λ está dada por el conjunto

$$\Lambda = \{(r_1, v_1, \gamma, u_1) | r_1 = 0, u_1^2 + v_1^2 = P(\gamma)\}.$$

Entonces para cada $\gamma \in [-\pi/4, \pi/4]$ fijo, $u_1^2 + v_1^2 = P(\gamma)$ es un círculo S^1 . Tenemos entonces que:

$$\Lambda \approx S^1 \times [-\pi/4, \pi/4] = \text{cilindro}.$$

Es decir, en estas coordenadas Λ es una 2-variedad compacta con frontera. Ver figura 5.2.

Ya que E y F están en la intersección de Λ con la sección invariante $\gamma = \pi/4$, para continuar las órbitas que mueren o nacen respectivamente en estos puntos de equilibrio, procedemos de la siguiente manera:

Toda órbita que muere en el punto E , lo hace con una dirección o una inclinación en el plano $v_1 - \gamma$ determinada en forma única. Por tanto a la órbita que muere en E con una cierta dirección λ , le asociamos la órbita que nace en F con la misma dirección λ . Para los puntos de equilibrio C y D que están sobre $\Lambda \cap \{\text{Sección } \gamma = -\pi/4\}$ procedemos en forma análoga.

Estudiamos ahora qué sucede en la vecindad del punto de equilibrio E . Haciendo uso de la relación de energía con $\tau_1 = 0$, vemos que la proyección del flujo sobre el plano $v_1 - \gamma$ en una vecindad de E está dado por

$$\frac{dv_1}{d\gamma} = \frac{\pi}{4} \cos 2\gamma \sqrt{P(\gamma) - v_1^2} - 2v_1 \frac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma}. \quad (5.10)$$

Mediante el cambio $\delta = \pi/4 - \gamma$ trasladamos la proyección del punto de equilibrio E al origen. La ecuación (5.10) toma la forma

$$\frac{dv_1}{d\delta} = -\frac{\pi}{4} \sin 2\delta \sqrt{\hat{P}(\delta) - v_1^2} - \frac{2v_1 \cos 2\delta}{\sin 2\delta}. \quad (5.11)$$

donde $\hat{P}(\delta) = 2U(J(\pi/4 - \delta)) \sin^2 2\delta$.

Ahora hagamos un nuevo cambio de coordenadas esta vez de tipo proyectivo.

Sea $z = \frac{v_1}{\delta}$.

De donde tenemos que

$$\delta \frac{dz}{d\delta} = \frac{dv_1}{d\delta} - z.$$

Sustituyendo la expresión para $\frac{dv_1}{d\delta}$ dada en (5.11) y poniendo todo en términos de las nuevas variables z y δ llegamos a que:

$$\delta \frac{dz}{d\delta} = z \left(\frac{2\delta}{\sin 2\delta} \cos 2\delta - 1 \right) - \frac{\pi}{4} \sin 2\delta \sqrt{\hat{P}(\delta) - z^2 \delta^2} \quad (5.12)$$

Definamos

$$F(z, \delta) = z \left(\frac{2\delta}{\sin 2\delta} \cos 2\delta - 1 \right) - \frac{\pi}{4} \sin 2\delta \sqrt{\hat{P}(\delta) - z^2 \delta^2}$$

F es una función analítica en una vecindad de $(0,0)$. Sabemos que dada una condición inicial $z(0) = \lambda$, la ecuación (5.12) tiene una única solución, que se puede expresar como una función analítica de δ si se satisfacen las siguientes condiciones [Ref.6].

1. $F(\lambda, 0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial z}(z, \delta)|_{(z=\lambda, \delta=0)}$ no es un entero positivo.

En nuestro caso ya que

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2\delta}{\sin 2\delta} \cos 2\delta - 1 + \frac{\pi}{4} \sin 2\delta \left(\frac{z\delta^2}{\sqrt{\hat{P}(\delta) - z^2 \delta^2}} \right)$$

tenemos que para todo valor de λ

1. $F(\lambda, 0) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{(z=\lambda, \delta=0)} = 0$

Hemos pues demostrado la siguiente proposición:

PROPOSICION 5.1: Para todo valor real de λ , existe una única solución analítica para el flujo sobre Λ que muere en el punto de equilibrio E , con dirección λ .

Un resultado similar es obtenido alrededor de los puntos de equilibrio F , C y D .

Observemos que de la proposición anterior, tenemos que para cada dirección λ

$$\begin{aligned} \lambda = z_0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{v_1}{\delta} \\ &= \lim_{\gamma \rightarrow \pi/4} \frac{v \cos 2\gamma}{\pi/4 - \gamma} \\ &= 2 \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} v. \end{aligned}$$

En el capítulo II, cuando estudiamos el flujo sobre la variedad de colisión total, vimos que una órbita típica sobre esta variedad para $0 < \alpha < \alpha_1$, es aquella que empieza en el punto de equilibrio A , continua con un choque entre partículas de masa 1, después un choque entre partículas de masa α ; enseguida la órbita escapa por la dirección $\theta = \pi/2$ con las partículas de masa 1 chocando entre sí, y las de masa α permaneciendo sin chocar. (Ver figura 2.)

Para poder identificar esta órbita en nuestro modelo compacto, es necesario poder continuar las soluciones que mueren o nacen en los puntos de equilibrio respectivos. Para esto procedemos como sigue:

Toda órbita que muere en el punto de equilibrio E , lo hace con una única dirección en el plano $v_1 - \gamma$, y con un único valor $u_1 > 0$. A esta órbita le asociamos la única órbita que nace en el punto de equilibrio F con la misma dirección en el plano $v_1 - \gamma$, y con un valor $u_1 < 0$. Hacemos una correspondencia análoga para los puntos de equilibrio C y D . La proposición 5.2 nos garantiza que esto es posible.

Por lo tanto, en el modelo compacto (coordenadas (v_1, γ, u_1)), la órbita descrita anteriormente, viene dada por la siguiente sucesión de trayectorias:

- 1). Trayectoria que nace en A y muere en E .
- 2). Trayectoria que nace en F con la misma dirección sobre el plano $v_1 - \gamma$ con que muere la trayectoria 1) y que muere en D .

3). Trayectoria que nace en C con la misma dirección sobre $v_1 - \gamma$ con que mueve la trayectoria 2) y muere en E .

4). Trayectoria que nace en F con la misma dirección sobre $v_1 - \gamma$ con que mueve la trayectoria 3) y muere en E .

5). 6. 7.... son definidas en forma análoga a como se definió la trayectoria 4). Ver Fig. 5.3

Con esta forma de continuar órbitas en el modelo compacto, y por la observación que sigue a la proposición 5.1, llegamos al siguiente resultado.

PROPOSICION 5.2: Existe una biyección entre el flujo sobre la variedad de colisión en el modelo compacto, y el flujo sobre Λ estudiado en el capítulo 2. Donde a cada dirección de aproximación asintótica a los puntos atractores y repulsores le asociamos dos veces la altura v .

5.5 Flujo global

Para estudiar el flujo global nos restringiremos a un nivel fijo de energía negativa h , que denotamos E_h .

De (5.5) vemos que $u_1^2 + v_1^2 = 2\tau_1 h + 2U(J(\gamma)) \cos^2 2\gamma \leq 0$, de donde $0 \leq \tau_1 \leq -\frac{U(J(\gamma)) \cos^2 2\gamma}{h}$ y por tanto, al igual que en el capítulo I podemos suponer que el flujo global se da en el interior de Λ , por lo que E_h junto con su frontera Λ que denotaremos \bar{E}_h , resulta ser un cilindro sólido con sus tapas, es decir una 3-variedad compacta con frontera.

El flujo sobre las tapas (secciones invariantes $\gamma = -\pi/4$ y $\gamma = \pi/4$) es muy simple, todas las órbitas nacen en el punto de equilibrio repulsor y mueren en el punto de equilibrio atractor. Observemos que este flujo es ficticio, pues no representa nada en el problema original.

El flujo global será analizado en coordenadas (v_1, γ, u_1) . La coordenada τ_1 es obtenida de la relación de energía (5.5).

Procediendo en forma análoga a lo estudiado en la sección anterior, vemos que es necesario poder continuar las órbitas (hacia adelante o hacia atrás) que mueren o nacen en los puntos de equilibrio asociadas a colisiones binarias. Nuevamente haremos el análisis alrededor del punto de equilibrio E . Ya que $\dim \bar{E}_h = 3$, para poder determinar en forma única las órbitas que mueren en E necesitamos determinar la "dirección" de estas órbitas sobre el plano $v_1 - \gamma$, y sobre el plano $u_1 - \gamma$. Es decir para describir las órbitas en el flujo global que mueren en E necesitamos dos datos.

Ahora observemos lo siguiente. De (5.10) sabemos que los valores propios asociados a E son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda_3}{2} \text{ donde } \lambda_1 = -\frac{16}{\pi\sqrt{\sqrt{2}\pi}}.$$

Debido a que el módulo del valor propio λ_3 asociado a la dirección u_1 es exactamente el doble que el módulo de los otros dos valores propios, sabemos que todas las órbitas mueren en E con una dirección asintótica al eje u_1 . Entonces para poder distinguir cada una de las órbitas que mueren en E , es necesario hacer una explosión de tipo proyectivo alrededor del punto E , tomando en cuenta esta observación.

Para esto procedemos como sigue:

Primeramente trasladamos el punto E al origen, mediante el cambio

$$\delta = \frac{\pi}{4} - \gamma > 0, \quad u_2 = u_0 - u_1 > 0,$$

donde $u_0 = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{2}\pi}}$. Tomando a δ como variable independiente del sistema (5.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{d\delta} &= -\frac{2\pi((u_0 - u_2)^2 + v_1^2 \sin 2\delta)}{4(u_0 - u_2)} + \frac{\pi U(J(\pi/4 - \delta)) \sin^3 2\delta}{2(u_0 - u_2)} + \frac{2v_1 \cos 2\delta}{\sin 2\delta} \\ \frac{du_2}{d\delta} &= -\frac{\pi}{4} v_1 \sin 2\delta + \frac{\pi \dot{U}(J(\pi/4 - \delta)) \sin^3 2\delta}{2(u_0 - u_2)} - \frac{2(u_0 - u_2) \cos 2\delta}{\sin 2\delta}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Haciendo uso de Mathematica, obtenemos la expansión en serie de potencias alrededor del origen del sistema (5.14), el cual después de sustituir el valor de u_0 toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{d\delta} &= \frac{v_1}{\delta} - 2^{3/4} \sqrt{\pi} \delta - \frac{4}{3} v_1 \delta + \frac{3\pi}{2} u_2 \delta - \frac{2^{1/4} \pi^{3/2}}{8} v_1^2 \delta + \frac{2^{1/4} \pi^{3/2}}{8} u_2^2 \delta \\ &\quad - \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{32} v_1^2 u_2 \delta - \frac{\pi^{5/2} 2^{3/4}}{128} v_1^2 u_2^2 \delta + \dots \\ \frac{du_2}{d\delta} &= \frac{2u_2}{\delta} + \frac{2^{1/4} \sqrt{\pi}}{4\delta} u_2^2 - \frac{\pi}{2} v_1 \delta - \frac{8}{3} u_2 \delta - \frac{2^{1/4} \sqrt{\pi}}{3} u_2^2 \delta + \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ahora hacemos un cambio de coordenadas de tipo proyectivo.

Para esto sean:

$$V = \frac{v_1}{\delta}, \quad U = \frac{u_2}{\delta^2}.$$

De donde

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{d\delta} &= V + \delta \frac{dV}{d\delta} \\ \frac{du_2}{d\delta} &= 2\delta U + \delta^2 \frac{dU}{d\delta}\end{aligned}\tag{5.16}$$

Sustituyendo (5.15) en esta última expresión obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\delta} &= -2^{3/4}\sqrt{\pi} - \frac{4}{3}V\delta + \frac{3\pi}{2}U\delta^2 - \frac{2^{1/4}\pi^{3/2}}{8}V^2\delta^2 + \frac{2^{1/4}\pi^{3/2}}{8}U^2\delta^4 \\ &\quad - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{32}V^2U\delta^4 - \frac{\pi^{5/2}2^{3/4}V^2U^2}{128}\delta^6 + \dots \\ \frac{dU}{d\delta} &= -\frac{\pi}{2}V - \frac{8}{3}U\delta + \frac{2^{1/4}\sqrt{\pi}}{4}U^2\delta - \frac{2^{1/4}\sqrt{\pi}}{3}U^2\delta^3 + \dots\end{aligned}\tag{5.17}$$

El cual es un sistema de ecuaciones diferenciales que ya tiene sentido para $\delta = 0$, de hecho podemos afirmar que tomando condiciones iniciales $\delta = 0$ y $V(0)$, $U(0)$ arbitrarios existe una única curva solución de (5.17), es decir toda órbita que tiene a E como su ω -límite, se aproxima al origen, (en el sistema coordenado trasladado y reflejado) con una única dirección en el plano $v_1 - \delta$ y una única dirección en el plano $u_2 - \delta^2$.

En forma similar trasladamos el punto de equilibrio F al origen a través del cambio de coordenadas

$$\bar{\delta} = \gamma - \frac{\pi}{4} < 0, \quad \bar{u}_2 = -u_0 - u_1 < 0.$$

La elección de el signo de estas coordenadas es conveniente para la identificación de órbitas que vamos a hacer posteriormente.

El siguiente paso consiste en hacer un cambio de coordenadas de tipo proyectivo, tal como hicimos con el punto E .

$$\bar{V} = \frac{v_1}{\bar{\delta}}, \quad \bar{U} = \frac{\bar{u}_2}{\bar{\delta}^2}.$$

Esto nos da nuevamente un sistema analítico de ecuaciones diferenciales para \bar{U} y \bar{V} alrededor de $\bar{\delta} = 0$. De esto deducimos que toda órbita que tiene a F como su α -límite se aproxima al origen con una única dirección en el plano $v_1 - \bar{\delta}$, y una única dirección en el plano $\bar{u}_2 - \bar{\delta}^2$.

Entonces, dada una órbita η_1 que tiene a E como su ω -límite, una vez que es trasladada al origen tiene una únicas direcciones límite U y V . A esta órbita le asociamos la única órbita η_2 que tiene a F como su α -límite y que una vez que es trasladada al origen tiene como únicas direcciones límite $\bar{U} = -U$ y $\bar{V} = V$.

Para los puntos de equilibrio C y D continuamos las órbitas de manera similar. Recordemos que a lo largo de las órbitas

$$\lim_{\gamma \rightarrow \frac{\pi}{4}} = \frac{v_1}{\pi/2 - 2\gamma} = v. \quad (5.18)$$

Este límite nos da la relación entre la parte no acotada del modelo no-compacto con un conjunto de direcciones en el modelo compacto. De hecho con la forma de continuar trayectorias en el modelo compacto definida anteriormente, tenemos que a cada órbita en el modelo no-compacto le corresponde una única sucesión de órbitas en el modelo compacto. En este sentido decimos que los dos modelos son equivalentes.

Para finalizar este capítulo recordemos que en el problema general de 4-cuerpos en el plano puede existir la posibilidad de singularidades que no provienen de colisión entre partículas. Haciendo uso del modelo compacto, demostramos de forma sencilla que esto no es posible en el problema romboidal de 4-cuerpos en el plano.

PROPOSICION 5.3. En el problema romboidal de 4-cuerpos en el plano, toda singularidad de las ecuaciones diferenciales proviene de colisión de al menos 2-partículas.

DEMOSTRACION. Si hay escape de al menos dos partículas sabemos del Capítulo III, que el flujo cerca de infinito en la dirección de escape x_1 ó x_2 es transversal a una pared de choques dobles, CH_α ó CH_1 respectivamente.

Ahora dada una órbita $(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t))$ del sistema (1.3), acotada en posiciones y velocidades, se tiene que $\dot{x}_1(t)$ ó $\dot{x}_2(t)$ cambian de signo. Supongamos que $\dot{x}_1(0) > 0$ y que existe $t_1 > 0$ tal que $\dot{x}_1(t_1) < 0$, entonces ya que $x_1(t)$ es cóncava hacia abajo como función de t , (ver Fig. 1.7) existe $t_2 > 0$ finito tal que $x_1(t_2) = 0$. De esto concluimos que el α -límite y el ω -límite de toda órbita son puntos de equilibrio, lo cual implica el resultado.

CONJETURA. En el problema romboidal de 4-cuerpos en el plano todas las órbitas, excepto la órbita homotética pasan por colisión de al menos 2-partículas.

OBSERVACION. De la proposición anterior es suficiente demostrar la conjetura para las órbitas de expulsión-colisión distintas de la órbita homotética.

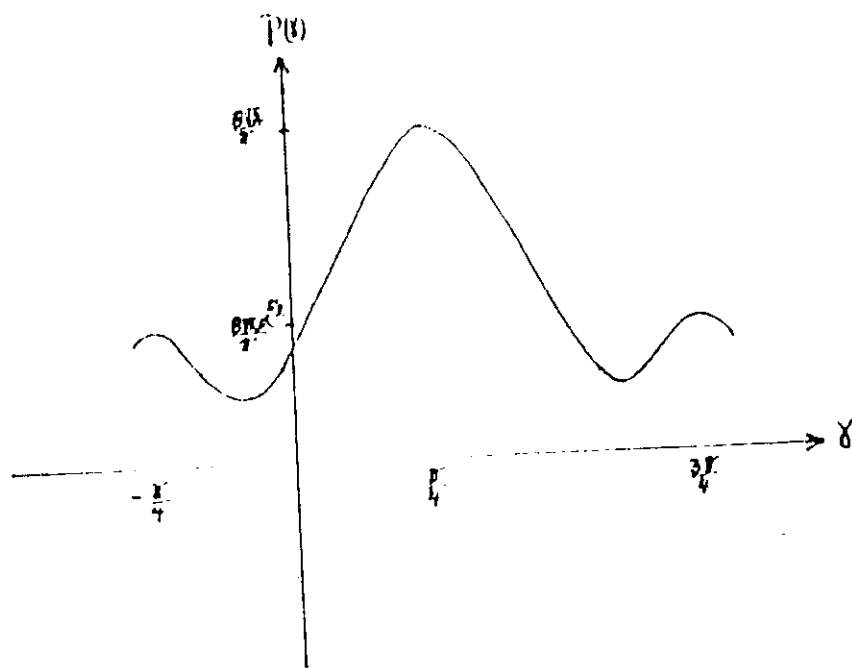


Figura 5.1 La función $P(\gamma)$

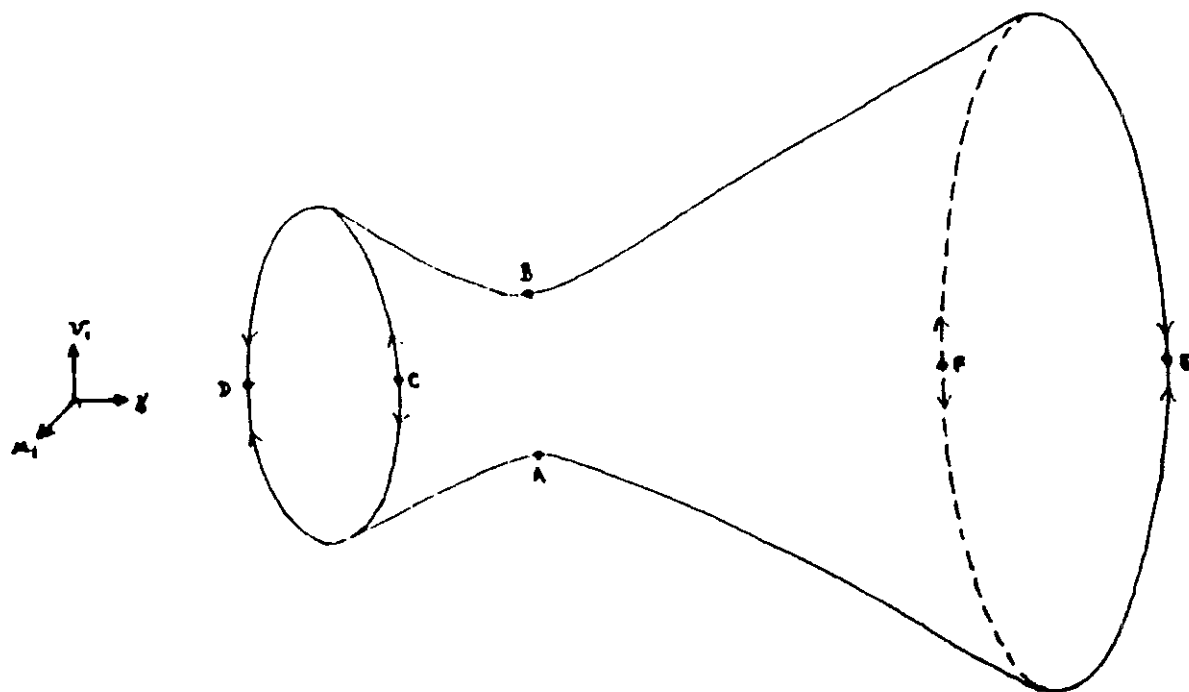


Figura 5.2 La variedad de colisión total Λ .

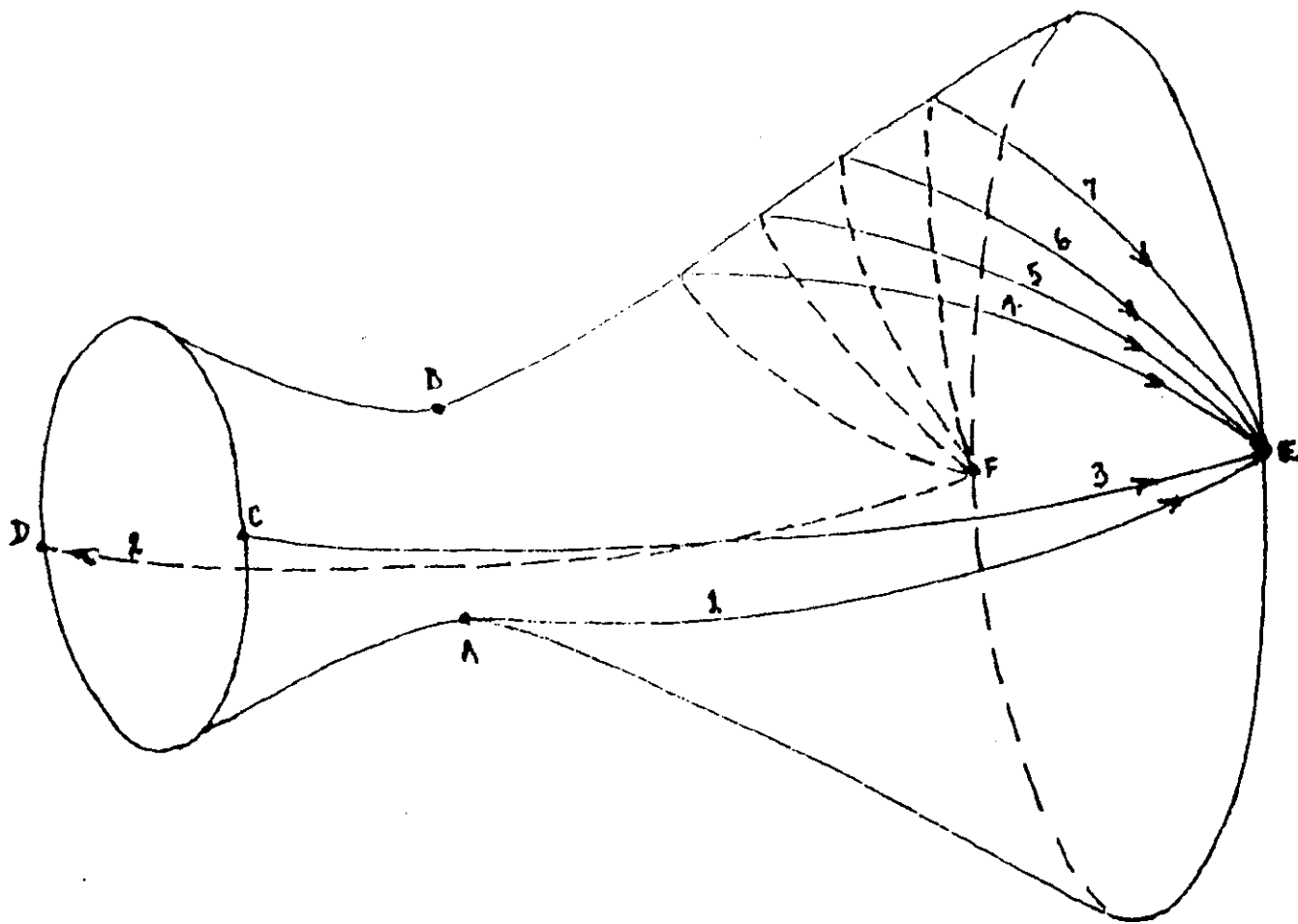


Figura 5.3 Flujo sobre Λ

5.6 Conclusiones globales

A continuación se dan los principales resultados obtenidos en esta tesis.

Se demuestra la existencia de una órbita homotética transversal, lo cual permite garantizar la no existencia de las llamadas integrales extendibles.

Se prueba numéricamente que existe un solo valor del parámetro de masas α , en el intervalo $(0, 1]$ para el cual existe conexión entre las subvariedades invariantes asociadas a los puntos de equilibrio sobre la variedad de colisión total.

Se estudia el comportamiento de las órbitas cerca del infinito, introduciendo la variedad del infinito. Usando resultados de McGehee se verifica la existencia de una órbita periódica parabólica sobre la variedad del infinito la cual posee una estructura hiperbólica, de esta forma se tiene que las órbitas parabólicas separan las órbitas que escapan a infinito de las que no lo hacen.

Se prueba numéricamente que las subvariedades estables e inestables de órbitas parabólicas asociadas a la órbita periódica parabólica en infinito en la dirección $\theta = \pi/2$ se intersectan transversalmente.

Para valores pequeños del parámetro α , se introduce dinámica simbólica a través de un shift de Bernoulli mostrando la gran riqueza de movimientos que presenta el problema romboidal, para cierto tipo de órbitas que pasan muy cerca tanto de infinito en la dirección $\theta = \pi/2$ como de colisión total.

Cuando el valor del parámetro α es uno se tienen dos simetrías, la obtenida por el hecho de que el flujo es reversible, y la que consiste en una reflexión a través de la dirección $\theta = \pi/4$. Utilizando este hecho, se demuestra que para valores del parámetro próximos a uno, la subvariedad estable (inestable) de órbitas parabólicas asociada a la órbita periódica al infinito sobre la dirección que corresponde a $\theta = 0$ ($\theta = \pi/2$) se intersecta transversalmente con la subvariedad inestable (estable) de órbitas parabólicas asociadas a la dirección $\theta = \pi/2$ ($\theta = 0$).

Para valores del parámetro próximo a uno se introduce dinámica simbólica, la cual nos garantiza que existen órbitas cercanas a escape en las dos direcciones posibles, $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$, en particular órbitas elípticas periódicas con estas características.

Se da un estudio global del flujo para el caso de energía $h = 0$, para el caso de energía $h > 0$ este estudio global se hace sólo en una vecindad de infinito.

Se da una nueva regularización de tipo geométrico para las colisiones binarias, obteniendo de esta forma una compactificación del espacio fase.

Se demuestra que el conjunto de condiciones iniciales que determinan órbitas con colisiones binarias en el problema romboidal tiene dimensión tres.

Bibliografia

- [1] Arnold V. "Mathematical Methods of Classical Mechanics" Springer Verlag, New York, 1978.
- [2] Arnold V. "Geometrical Methods in the theory of Ordinary Differential Equations". Springer Verlag, New York, 1983.
- [3] Casasayas J., Llibre J. "Qualitative Analysis of the Anisotropic Kepler Problem". *Memoirs of Amer. Math. Soc.*, Vol 314, 1984.
- [4] Devaney R. "Triple Collision in the planar isosceles three body problem". *Inventiones Math.* 60, (1980), 249-267.
- [5] Devaney R. "Singularities in classical mechanical systems". *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, Vol. I (Ed. A. Katok), Birkhauser, Basel (1981), 211-333.
- [6] Forsyth A.R. "Theory of Differential Equations. Vol. III, Cambridge University Press, 1900.
- [7] Lacomba E., Simo C. "Boundary Manifolds for Energy Surfaces in Celestial Mechanics". *Cel. Mechanics* 28, (1982), 37-48.
- [8] Lacomba E., Simo C. "Analysis of some degenerate quadruple collisions". *Cel. Mechanics* 28 (1982), 49-62.
- [9] Lacomba E. "Infinity Manifolds for Positive Energy in Celestial Mechanics". *Contemporary Mathematics* 58 (1987), 193-201.
- [10] Lacomba E., Llibre J. "Transversal Ejection-Collision Orbits for the Restricted Problem and the Hill's Problem with Applications". *J. Differential Equations* 74 (1988), 69-85.
- [11] Llibre J., C. Simo. "Characterization of transversal homothetic solutions in the n -body problem". *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 77 No. 2, (1981), 189-198.
- [12] McGehee R. "A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics". *J. Differential Equations* 14, (1973), 70-88.
- [13] McGehee R. "Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem". *Inventiones Math.* 27, (1974), 191-227.
- [14] Moeckel R. "Heteroclinic Phenomena in the Isosceles Three-Body Problem". *Siam J. Math. Anal.* 15, (1984), 857-876.
- [15] Moser J. "Stable and Random Motions in Dynamical Systems". Princeton University Press. New Jersey 1973.

[16] Palis J., De Melo W. "Introdução aos sistemas dinâmicos". Projeto Euclides. IMPA, (1978), Brasil.

[17] Simo C. "Necessary and Sufficient Conditions for the Geometrical Regularization of Singularities". Proc. IV Congreso Ec. Dif. y Aplic., Sevilla, España, (1981), 193-202.

[18] Simo C., Martínez R. "Qualitative Study of the planar Isosceles Three-Body Problem". Celestial Mechanics 41, (1988), 179-251.