UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Casa abierta al tiempo

UNIDAD IZTAPALAPA

C · B · I

UN ENFOQUE DE LA TEORIA ESPECTRAL MULTIVARIABLE

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

ANGEL MARTINEZ MELENDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ANTONI WAWRZYNCZYK

FEBRERO DE 2001.

A Maydé, por esos tiempos de amor, juego y ternura.

A Tania, por ser tan espontánea y ocurrente, y darle un "toque" de alegría a nuestro entorno.

A Ma. Cruz, por su deseo de ser y seguir luchando contra el tiempo y la desesperanza.

A las tres por que siempre estemos unidos.

A mis padres:

El Sr. Matias
y
La Sra. Hipólita.

Agradezco al Dr. Antoni Wawrzyńczyk, su excelente trabajo en la dirección, de esta tesis, su trato siempre abierto, respetuoso y sobre todo su paciencia conmigo.

Agradezco, al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por la ayuda económica otorgada durante todo este tiempo. Ayuda sin la cual todo hubiera sido más difícil.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

1 Antecedentes

Las primeras investigaciones de espectros combinados en álgebras de Banach no-conmutativas, aparecieron en los años 60's. Desde entonces se han publicado un buen número de reportes sobre este tema. Sin embargo, el propio concepto de espectro combinado no era del todo claro en un álgebra no-conmutativa. Varios investigadores adoptaron diferentes conceptos de espectro combinado, muchos de estos espectros basados en el hecho de unir un espectro izquierdo y un espectro derecho, como los propuestos por Donsall y Duncan, el de Harte, el de Dash, el de Taylor y otros. Ante esta variedad Żelazko propone, en 1979, una serie de axiomas que clasifican estos espectros ([31]). En esta Teoría axiomática el concepto fundamental es el de subespectro. Todos estos espectros se enfocaron mucho en familias de elementos, de elementos de un álgebra de Banach, que conmutan entre si, pues es aquí donde se presentan las situaciones más interesantes. Pero aun para un solo elemento la situación es complicada.

La Teoría axiomática de Żelazko no cubría, sin embargo, muchos espectros usualmente definidos para elementos solos de un álgebra de Banach. Kordula y Müller, desarrollan una teoría axiomática, basada en el concepto de regularidad que incluye estos casos.

Müller propone ([15]), el concepto de regularidad combinada, lo que le permite definir un espectro para k-uplas de elementos de un álgebra de Banach, es decir un espectro combinado.

2 Preliminares

En esta parte definiremos algúnos de los espectros, y mencionaremos algúnos resultados que utlizaremos en el desarrollo de este trabajo. Daremos también una perspectiva del mismo.

Como mencionamos, aun para un solo elemento el concepto de espectro no es tan sencillo. Efectivamente, si tenemos un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ compleja con identidad e y $\lambda \in \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es el conjunto de los números complejos, pertenece al espectro clásico $\sigma(a)$, con $a \in \mathcal{A}$, el elemento $a - \lambda e$ no tiene inverso en $\mathcal{A}$, esto significa que por lo menos uno de los ideales $\mathcal{A}(a - \lambda e)$ o $(a - \lambda e)\mathcal{A}$ es propio. Este hecho ya nos permite expresar el espectro $\sigma(a)$ en la forma $\sigma(a) = \sigma_l(a) \bigcup \sigma_r(a)$, donde σ_l y σ_r son los espectros izquierdo y derecho respectivamente y son dados como

$$\sigma_l(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} | \mathcal{A}(a - \lambda e) \neq \mathcal{A}\}$$

$$\sigma_r(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} | (a - \lambda e)\mathcal{A} \neq \mathcal{A}\}.$$

Dentro de cada uno de estos casos se pueden considerar situaciones más específicas, por ejemplo el ideal $\mathcal{A}(a - \lambda e)$ puede ser de codimensión finita o infinita, puede ser cerrado o no cerrado. Se puede distinguir también el caso cuando $a - \lambda e$ es un divisor de cero. Cada una de estas situaciones nos permite definir el espectro correspondiente, eligiendo la clase de elementos que consideramos "regulares". Así, en estos casos más específicos que recién mencionamos, la regularidad del elemento $a \in \mathcal{A}$ es, precisamente, cuando codim$\mathcal{A}a < \infty$, el ideal $\mathcal{A}a$ es cerrado y a no es divisor de cero. De esta manera definimos el espectro como el conjunto de los $\lambda's$ tales que $a - \lambda e$ no es regular.

Como dijimos, para el caso del espectro de un solo elemento Kordula y Müller desarrollan una teoría axiomática del espectro, basada en el concepto de regularidad, que abarca incluso casos excéntricos como un tipo de espectro τ, tal que el elemento 0 del álgebra resulta regular ($0 \notin \tau(0)$). Esta teoría está presente en la sección 6 de este trabajo, donde la comparamos con nuestro enfoque.

Hay varias opciones de definir un espectro combinado; la definición más natural de espectro combinado de una k-upla $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ de elementos de $\mathcal{A}$ es la siguiente

$$\sigma(a) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{C}^k | \sum_{j=1}^{k} \mathcal{A}(a_j - \lambda_j e) \neq \mathcal{A} \text{ o } \sum_{j=1}^{k} (a_j - \lambda_j e)\mathcal{A} \neq \mathcal{A}\}.$$

Observemos, que se puede evitar los dos casos de ideales, si escribimos

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{C}^k | \exists\, I \text{ ideal en } \mathcal{A},\ a_i - \lambda_i e \in I,\ 1 \leq i \leq k\}.$$

El espectro definido de esta manera se llama el espectro de Harte y tiene las siguientes propiedades
i) $\sigma(a)$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{C}^k$, para toda $a \in \mathcal{A}^k$.
ii) $\sigma(a) \subset \prod_{i=1}^{k} \sigma(a_i)$, para toda $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k$
iii) $p(\sigma(a)) = \sigma(p(a))$, para cada aplicación polinomial $p : \mathbf{C}^k \longrightarrow \mathbf{C}^m$ y los elementos a_j conmutan entre sí.

Existe, sin embargo, otra opción que parece no menos natural. Si tenemos una k-upla $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ de elementos de $\mathcal{A}$, que conmutan entre sí y $G(a)$ es la subálgebra de $\mathcal{A}$ generada por $a_1, a_2, \cdots, a_k$ y la identidad e, el espectro de generadores de a es el conjunto

$$\hat{\sigma}(a) = \{\lambda \in \mathbf{C}^k | \exists I, \text{ ideal en } G(a), a_i - \lambda_i e \in I,\ 1 \leq i \leq k\}.$$

Este espectro es el espectro de Harte en una subálgebra propia de $\mathcal{A}$. En este espectro no se cumple la propiedad ii) ni tampoco iii).

Otro espectro es el espectro puntual aproximativo: Si $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k$, el espectro puntual aproximativo izquierdo de a es el conjunto

$$\tau_l(a) = \{\lambda \in \mathbf{C}^k | \inf_{||b||=1} \sum_{j=1}^{k} ||(a_j - \lambda_j e)b|| = 0\}.$$

De manera análoga se define el espectro derecho correspondiente $\tau_r(a)$. El espectro puntual aproximativo de este elemento a, $\tau(a)$, es la unión de los espectros izquierdo y derecho $\tau(a) = \tau_l(a) \bigcup \tau_r(a)$ y se cumple que $\tau(a) \subset \sigma(a)$. También este espectro cumple las propiedades i), ii) y iii).

El espectro combinado racionalmente convexo, o espectro racional, $\sigma_{\mathcal{R}}$ de una k-upla $a \in \mathcal{A}^k$ es el conjunto

$$\sigma_{\mathcal{R}}(a) = \{\lambda \in \mathbf{C}^k | p(\lambda) \in \sigma(p(a))\},$$

para todo polinomio complejo p en k-variables. Se cumple que

$$\sigma(a) \subset \sigma_{\mathcal{R}}(a) \subset \hat{\sigma}(a),$$

para $a \in \mathcal{A}^k$ una k-upla de elementos que conmutan entre sí.
El espectro $\sigma_{\mathcal{R}}$ no cumple la propiedad iii).

Un último espectro del que hablaremos es el espectro de Taylor. Este espectro se define en un álgebra específica: Si X es un espacio de Banach complejo, $B(X)$ es el álgebra de Banach de todos los operadores de X en X acotados.
Sean los espacios lineales $X_0, X_1, \cdots, X_n$ de formas exteriores homogéneas de grados $0, 1, \cdots, n$, respectivamente, en indeterminadas $e_1, e_2, \cdots, e_n$ con coeficientes en X, esto es

$$X_k = \{\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1 i_2 \cdots i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} | x_{i_1 i_2 \cdots i_k} \in X\},$$

para $k = 1, 2, \cdots, n$ y $X_0 \cong X$.

Sea $T = (T_1, T_2, \cdots, T_k)$ una k-upla de operadores de $B(X)$ que conmutan entre sí. Definimos el mapeo $\delta_k : X_k \longrightarrow X_{k+1}$ $(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ dado por

$$\delta_k(x e_{i_1} \wedge e_{i_2} \cdots \wedge e_{i_k}) = \sum_{j=1}^{n} T_j(x) e_j \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k},$$

donde $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$.

Se cumple que $\delta_k \delta_{k-1} = 0$ para $k = 1, 2, \cdots, n-1$. De esta manera la cadena

$$0 \rightarrow X_0 \xrightarrow{\delta_0} X_1 \xrightarrow{\delta_1} \cdots \xrightarrow{\delta_{k-1}} X_k \xrightarrow{\delta_k} X_{k+1} \xrightarrow{\delta_{k+1}} \cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} X_n \rightarrow 0$$

es una cadena compleja llamada el complejo de Koszul de la n-upla T y se representa como $K(T)$ ([8]).

El espectro de Taylor $\sigma_T(T)$ de la n-upla T es el conjunto de $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ para el cual el complejo Koszul $K(T - \lambda I)$ no es exacto.

La axiomática de Żelazko clasifica los espectros combinados, en su investigación, como habíamos dicho, el concepto de subespectro es fundamental. En este trabajo hacemos uso de este concepto, por lo que es importante presentar su definición: Un subespectro, es un mapeo $\tilde{\sigma}$ que asigna a toda k-upla, $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ de elementos de $\mathcal{A}$, que conmutan entre sí, un subconjunto compacto, no vacío, $\tilde{\sigma}(a) \subset \mathbf{C}^k$, tal que cumple las condiciones ii) y iii), enunciadas en esta introducción. El espectro de Harte, el espectro puntual aproximativo y el espectro de Taylor, son ejemplos de subespectros.

En este trabajo se pretende encontrar la manera de describir una clase más amplia de espectros combinados, de tal manera que a cada espectro combinado de este tipo, se le asocie una familia de subespacios lineales, que llamaremos subespacios espectrales generalizados, de tal manera que las propiedades de estos espectros, son estudiadas analizando la estructura de estas familias de subespacios.

En la sección 1 se propone un nuevo concepto de espectro combinado, al cual llamamos α-espectro. Un α-espectro es una regla que asocia a una k-upla $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$, de elementos de $\mathcal{A}$ que conmutan entre sí, un subconjunto $\tau(a) \subset \mathbf{C}^k$, de tal manera que:
i) $\tau(a) \subset \sigma^{G(a)}$.
ii) $p(\tau(a)) \subset \tau(p(a))$.
Aquí $\sigma^{G(a)}$ es el espectro de Harte, de a, en la subálgebra $G(a)$ y p es cualquier mapeo polinomial $p : \mathbf{C}^k \longrightarrow \mathbf{C}^m$.

Con este concepto podremos abarcar varios espectros combinados, y conjuntamente con el concepto de subespacio espectral generalizado, que se presenta en la sección 2, generamos una variedad de α-espectros. Al final de la sección 2, se presentan varios ejemplos de subespacios espectrales generalizados.

En la sección 3 se establece como generar α-espectros a partir de subespacios espectrales generalizados, más precisamente vemos que toda familia de subespacios espectrales induce un α-espectro, y a partir, de un α-espectro es posible definir una familia de subespacios espectrales. Se hace hincapié en que diferentes familias de subespacios espectrales conducen a un mismo α-espectro, por lo que se propone lo que llamamos la completación de una familia de subespacios espectrales, y que es la familia más grande de espacios espectrales correspondiente a un α-espectro dado.

En la sección 4 construimos una topología sobre el espacio de todos los subespacios espectrales generalizados lo que nos permite relacionar la compacidad de un α-espectro con la compacidad de la familia de subespacios espectrales generalizados.

Los α-espectros cumplen la propiedad de ”mapeo espectral en un sentido”, y en la sección 5 establecemos la totalidad de la propiedad de mapeo espectral, demostrando justamente el teorema de mapeo espectral, a partir de la propiedad de proyección.

Como habíamos mencionado, en la sección 6 analizamos la relación entre un α-espectro y el espectro propuesto por Kordula-Müller. Kordula-Müller introducen el concepto de regularidad ([9]) y proponen el concepto de espectro asociado a este caso. Nosotros establecemos que a cada regularidad se puede asociar una familia de subespacios espectrales generalizados, lo que permite extender el espectro a un α-espectro (combinado).

V. Müller propuso el concepto de la regularidad combinada y del espectro combinado correspondiente ([15]). En la misma sección 6 describimos este espectro en términos de subespacios espectrales.

Recordemos que la envolvente polinomial convexa $\hat{K}$ de un subconjunto acotado $K \subset \mathbf{C}^k$ es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbf{C}^k$ tal que

$$|p(\lambda)| \leq \sup_{w \in K} |p(w)|,$$

para todo polinomio $p : \mathbf{C}^k \longrightarrow \mathbf{C}$.
Un subconjunto $K \subset \mathbf{C}^k$ se llama polinomialmente convexo si $\hat{K} = K$.

Los conjuntos polinomialmente convexos son cerrados y la envolvente polinomial de un subconjunto acotado de $\mathbf{C}^k$ es polinomialmente convexa.

La envolvente racional convexa de un subconjunto K de $\mathbf{C}^k$ es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbf{C}^k$ tal que

$$|f(\lambda)| \leq \sup_{w \in K} |f(w)|,$$

para todas las funciones racionales f, que son analíticas en K. Un subconjunto es racionalmente convexo si coincide con su envolvente racional. Así en la sección 7 estudiamos las envolventes polinomial y racional convexas, en este entorno de un α-espectro. Aquí demostramos que la envolvente racional de un subespectro y un α-espectro son α-espectros, establecemos la maximalidad de la envolvente racional de un α-espectro y finalmente estudiamos la envolvente polinomial convexa de un α-espectro. Se demuestra que la clase de α-espectros es cerrada con respecto a tomar envolventes polinomiales y racionales.

UN ENFOQUE DE LA TEORÍA ESPECTRAL MULTIVARIABLE

1 α-espectros.

En esta sección se distingue una nueva clase de espectros combinados que llamaremos α-espectros. Este hecho tiene su motivación en los conceptos de espectro combinado propuestos, en varios artículos, por Vladimir Müller y Martínez-Wawrzyńczyk ([9],[10],[11] y [15]). Las condiciones que definen este nuevo espectro son menos rígidas, y como veremos más adelante distinguen una una clase de espectros interesante.

En este trabajo con la letra $\mathcal{A}$ siempre representaremos un álgebra de Banach compleja con unidad e. Si $C \subset \mathcal{A}$, C^k es el producto cartesiano de C k-veces, C^k_{com} es el conjunto que consta de todas las k-uplas de elementos de C que conmutan entre si, $C_{com} = \bigcup_{k=1}^{\infty} C^k_{com}$ y $C^{\infty} = \bigcup_{k=1}^{\infty} C^k$.

$\mathcal{A}^k$ es un álgebra de Banach con la norma $||(a_1, a_2, \cdots, a_k)|| = \sup_{1 \leq i \leq k} ||a_i||$. Para $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k$, $\sigma(a)$ siempre denotará el espectro de Harte y si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{C}^k$, con $a - \lambda e$ representaremos la k-upla $(a_1 - \lambda_1 e, a_2 - \lambda_2 e, \cdots, a_k - \lambda_k e)$.

Por $\mathcal{P}_k = P(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, representaremos el álgebra de todos los polinomios sobre $\mathbf{C}$, con indeterminadas no-conmutativas $x_1, x_2, \cdots x_k$. Una k-upla de elementos $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k$ induce un homomorfismo $p \longrightarrow p(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ de $\mathcal{P}_k$ en $\mathcal{A}$ el cual preserva la identidad y manda cada x_j en el correspondiente a_j. Un sistema $(p_1, p_2, \cdots, p_m) \in (\mathcal{P}_k)^m$ es identificado con un mapeo polinomial $p : \mathcal{A}^k \longrightarrow \mathcal{A}^m$, tal que para la k-upla

$a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k$, $p(a) = (p_1(a), p_2(a), \cdots, p_m(a))$. La restricción de este mapeo a los múltiplos escalares de la unidad $\mathbf{C}^k \subset \mathcal{A}^k$ toma sus valores en $\mathbf{C}^m \subset \mathcal{A}^m$ y se reduce a un sistema de polinomios numéricos. Representaremos por $\mathcal{P}_k^0$ el subconjunto de $\mathcal{P}_k$, consistente de polinomios sin término constante.

Para $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k$, identificaremos por $\mathcal{P}^0(a)$, el conjunto de todos los elementos de la forma $p(a)$, con $p \in \mathcal{P}_k^0$. También denotaremos como $I_{\mathcal{A}}^l(a)$ (respectivamente $I_{\mathcal{A}}^r(a)$) el ideal izquierdo (respectivamente derecho) generado por los elementos $a_1, a_2, \cdots a_k$ en $\mathcal{A}$, y por $G(a)$ la subálgebra generada por los mismos elementos y la identidad e. Se verifica que $\mathcal{P}^0(a) = I_{G(a)}(a)$ (Ideal izquierdo o derecho).

1.1 Definición. Un α-espectro es un mapeo $\tilde{\sigma}$ que asigna a toda k-upla $a \in \mathcal{A}_{com}^k$ un subconjunto $\tilde{\sigma}(a)$ de $\mathbf{C}^k$ que cumple las siguientes dos condiciones:

$$(1) \qquad \tilde{\sigma}(a) \subset \sigma^{G(a)}(a)$$

$$(2) \qquad p(\tilde{\sigma}(a)) \subset \tilde{\sigma}(p(a)),$$

donde $\sigma^{G(a)}$ es el espectro de Harte en la subálgebra $G(a)$ y $p \in (\mathcal{P}_k)^m$.

La condición (2) es llamada la propiedad de "mapeo espectral en un sentido". Si se tiene la igualdad, esta se llama propiedad de mapeo espectral.

Observemos que la Definición 1.1 no contiene la compacidad del espectro.

Un caso particular de la propiedad de mapeo espectral es la propiedad de proyección :

$$(3) \qquad \pi(\tilde{\sigma}(a)) = \tilde{\sigma}(\pi(a)),$$

donde $\pi(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_s})$ y $s \leq k$.

Es importante mencionar en este punto que la condición (2) implica lo que se llama la propiedad de traslación

$$(4) \qquad \tilde{\sigma}(a + \lambda e) = \tilde{\sigma}(a) + \lambda,$$

para $a \in \mathcal{A}_{com}^k$ y $\lambda \in \mathbf{C}^k$.

Muchos espectros ya conocidos son α-espectros, por ejemplo, como apuntamos en la introducción, el espectro de Harte cumple la propiedad de mapeo espectral para toda $a \in \mathcal{A}^k_{com}$, y puesto que se cumple la contensión

$$\sigma(a) \subset \prod_{i=1}^{k} \sigma(a_i),$$

para $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k_{com}$, cumple las condiciones (1) y (2), y por ello es un α-espectro.

El espectro puntual aproximativo τ, cumple la propiedad de mapeo espectral para toda $a \in \mathcal{A}^k_{com}$ y cumple también que $\tau(a) \subset \sigma(a)$, para toda $a \in \mathcal{A}^k$. Este espectro es por lo tanto un α-espectro.

El espectro racional, $\sigma_{\mathcal{R}}(a)$, es un subconjunto del espectro de generadores $\hat{\sigma}(a)$, para $a \in \mathcal{A}^k_{com}$. Pero $\hat{\sigma}(a) = \sigma^{G(a)}(a)$, por lo que se cumple la condición (1). El espectro racional cumple la propiedad de "mapeo espectral en un sentido", por lo que es un α-espectro. Otros α-espectros son el espectro de Taylor σ_T y el espectro propuesto por Kordula-Müller, σ_R, asociado al concepto de regularidad R. De hecho, todo subespectro es un α-espectro. En efecto, la condición (1) es consecuencia de Żelazko ([31], T. 5.1), y la condición (2), es evidente de la definición misma de subespectro.

La propiedad que demostramos a continuación es fundamental para describir los α-espectros.

1.2 Teorema. Sea $\tilde{\sigma}$ un α-espectro y sea $a \in \mathcal{A}^k_{com}$, tal que $0 \in \tilde{\sigma}(a)$. Entonces $0 \in \tilde{\sigma}(b)$ para todo $b \in \mathcal{P}^0(a)^\infty$.

Demostración. Sea $b \in \mathcal{P}^0(a)^\infty$, entonces b es de la forma $b = p(a)$, con $p = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ y cada $p_i \in \mathcal{P}^0_k$. Por la propiedad de "mapeo espectral en un sentido" (condición 2), se tiene que

$$0 = p(0) \in p(\tilde{\sigma}(a)) \subset \tilde{\sigma}(p(a)) = \tilde{\sigma}(b),$$

por lo que la conclusión es obvia.□

La condición $0 \in \tilde{\sigma}(a) \subset \sigma^{G(a)}(a)$ implica obviamente que $a \neq e$, por el teorema anterior obtenemos que $\mathcal{P}^0(a)$ no contiene la identidad si $0 \in \tilde{\sigma}(a)$ con $a \in \mathcal{A}^k_{com}$.

2 El concepto de subespacio espectral generalizado.

Se propone el concepto de subespacio espectral generalizado. Como veremos este concepto induce a un α-espectro en el sentido de que a todo conjunto U de subespacios espectrales generalizados le corresponde un α-espectro, σ_U. El propósito fundamental de este trabajo es relacionar las propiedades de este espectro con la estructura de la familia U.

2.1 Definición. Un subespacio lineal $L \subset \mathcal{A}$ se llama subespacio espectral generalizado si no contiene la unidad e y $\mathcal{P}^0(a) \subset L$, para todo $a \in L_{com}$.

A continuación presentamos algunos ejemplos de subespacios espectrales generalizados.
1. Los ideales izquierdos, los ideales derechos y las subálgebras de $\mathcal{A}$ que no contienen la identidad e, son subespacios espectrales generalizados.
2. Consideremos el álgebra de Banach de todas las matrices complejas de tamaño 3×3 y sea $\mathcal{E}$ el subespacio de todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde α, β y $\gamma \in \mathbf{C}$.
Es evidente que $\mathcal{E}$ no contiene elemento identidad, También cualquier potencia de un elemento de $\mathcal{E}$, es elemento de $\mathcal{E}$. En efecto al multiplicar un elemento de $\mathcal{E}$ con si mismo se presenta la igualdad siguiente

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c & 0 \\ c & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $a = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $b = 2\alpha\beta$ y $c = 2\alpha\gamma$.
También notemos que

$$\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \gamma & 0 \\ \gamma & \alpha-\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 \\ \gamma & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que dos elementos de $\mathcal{E}$ conmutan si y sólo si, conmutan las correspondientes matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 \\ \gamma & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera si $A = \begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 \\ \gamma & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se cumple que $AB = BA$ si y sólo si $\beta y = x\gamma$, pero esto significa que una de ellas es múltiplo escalar de la otra. Por lo tanto concluimos que si dos elementos S y T de $\mathcal{E}$ conmutan entonces una de ellas es combinación lineal de la otra y de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $\mathcal{E}$ es un subespacio espectral generalizado.

Este ejemplo también nos muestra un subespacio espectral generalizado que no es subálgebra. En efecto las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pertenecen a $\mathcal{E}$ pero su producto no.

3. Consideremos el álgebra $\mathcal{A}$ de todas las funciones continuas en el anillo $\{z : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ y analíticas en el interior. Y sea S la subalgebra cerrada de series de potencias sin término constante. Evidentemente S no contiene elemento identidad (la función 1). A diferencia del ejemplo anterior la subalgebra S si contiene elementos invertibles en $\mathcal{A}$, por ejemplo $f(z) = z \in S$, aunque su inversa $\frac{1}{z}$ no pertenece a S.

4. Denotemos el anillo $A(r_1, r_2) = \{z \in \mathrm{C} | r_1 < |z| < r_2\}$ y consideremos el álgebra $\mathcal{A}$ de todas las funciones $f : \overline{A(r_1, r_2)} \longrightarrow M_{2\times 2}$, donde $M_{2\times 2}$ es el conjunto de todas las matrices 2×2, con entradas complejas y f es analítica en $A(r_1, r_2)$ y continua en $\overline{A(r_1, r_2)}$. Sea J el subespacio vectorial formado por el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} f(z) & g(z) \\ g(z) & -f(z) \end{pmatrix},$$

donde f y g son polinomios. Con los mismos argumentos del ejemplo 2, se verifica que este subespacio es un subespacio espectral generalizado. En este hay elementos invertibles, pero a diferencia del ejemplo 3, este subespacio espectral no es una subálgebra. En efecto, las matrices

$$\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix} \text{y} \begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix},$$

son elementos de J, sin embargo su producto es la matriz $\begin{pmatrix} 0 & z^2 \\ -z^2 & 0 \end{pmatrix}$, que no es elemento de J. Por otra parte estas matrices tienen inversa aunque esta no está en J.

Desde este momento con $V(\mathcal{A})$ representaremos el conjunto de todos los subespacios espectrales generalizados de $\mathcal{A}$.

3 Generación de α-espectros.

Para cada conjunto $U \subset V(\mathcal{A})$ y para cada $a \in \mathcal{A}^k$ definimos el siguiente conjunto

$$(5) \qquad \sigma_U(a) = \{\lambda \in \mathbf{C}^k : \exists E \in U,\, a - \lambda e \in E^k\}$$

La anterior expresión tiene sentido para $a \in \mathcal{A}^\infty$, pero propiedades como la de mapeo espectral o la de proyección pueden fallar para $a \notin \mathcal{A}_{com}$.
Sin embargo $\sigma_U(a)$, es un α-espectro.

3.1 Teorema. Para cualquier $U \subset V(\mathcal{A})$ se cumplen las siguientes condiciones
i) $\sigma_U(a) \subset \sigma^{G(a)}(a)$, para $a \in \mathcal{A}^k_{com}$
ii) La propiedad de traslación:

$$\sigma_U(a + \lambda e) = \sigma_U(a) + \lambda,$$

para $a \in \mathcal{A}^k$ y $\lambda \in \mathbf{C}^k$
iii) La propiedad de "proyección en un sentido": Si $a \in \mathcal{A}^k$, $\lambda \in \mathbf{C}^k$, $b \in \mathcal{A}^m$

y $(\lambda, \mu) \in \sigma_U(a, b)$, entonces $\lambda \in \sigma_U(a)$
iv) La propiedad de "mapeo espectral en un sentido",

$$p(\sigma_U(a)) \subset \sigma_U(p(a)),$$

para $a \in \mathcal{A}^k_{com}$ y p el mapeo polinomial en $(\mathcal{P}_k)^m$

Demostración.

i) Sea

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \in \sigma_U(a) \setminus \sigma^{G(a)}(a).$$

La condición $\lambda \notin \sigma^{G(a)}(a)$, significa que existen $b_1, b_2, \cdots, b_k \in G(a)$, tal que $\sum_{i=1}^{k} b_i(a_i - \lambda_i e) = e$

Por otro lado $\lambda \in \sigma_U(a)$, por lo que existe $E \in U$ tal que $a - \lambda e \in E^k$ y puesto que $\mathcal{P}^0(a - \lambda e) \subset E$ se sigue que $e = \sum_{i=1}^{k} b_i(a_i - \lambda_i e) \in E$, lo que contradice la definición de un subespacio espectral generalizado. Por lo tanto $\lambda \in \sigma^{G(a)}(a)$.
ii) $\alpha \in \sigma_U(a + \lambda e) \Longleftrightarrow \exists\, E \in U$, tal que $a + \lambda e - \alpha e \in E^k \Longleftrightarrow \alpha - \lambda \in \sigma_U(a) \Longleftrightarrow \alpha \in \sigma_U(a) + \lambda$.
iii) Sea $a \in \mathcal{A}^k$, $\lambda \in \mathrm{C}^k$, $\mu \in \mathrm{C}^m$ y $(\lambda, \mu) \in \sigma_U(a, b)$. Esto implica que existe $E \in U$ tal que $(a - \lambda e, b - \mu e) \in E^{k+m} \Longrightarrow a - \lambda e \in E^k \Longrightarrow \lambda \in \sigma_U(a)$.
iv) Demostremos la propiedad de "mapeo espectral en un sentido".
Sea $\lambda \in p(\sigma_U(a))$, $a \in \mathcal{A}^k_{com}$, $\Longrightarrow \lambda = p(\beta)$, con $\beta \in \sigma_U(a)$. Esto implica que existe $E \in U$ tal que $a - \beta e \in E^k$. Por el teorema del residuo ([6]), tenemos que

$$p(a) - p(\beta)e \in I_{G(a)}(a - \beta e)^m = I_{G(a-\beta e)}(a - \beta e)^m \subset \mathcal{P}^0(a - \beta e)^m \subset E^m,$$

esto es $\lambda \in \sigma_U(p(a))$. Por lo tanto $p(\sigma_U(a)) \subset \sigma_U(p(a))$.□

De este teorema se desprende que el conjunto definido en (5), es en efecto un α-espectro. Mas aun en el siguiente teorema establecemos que cualquier otro α-espectro es de la forma σ_U, para algún $U \subset V(\mathcal{A})$

3.2 Teorema. Si δ es un α-espectro, entonces existe un conjunto $U \subset V(\mathcal{A})$, tal que $\delta(a) = \sigma_U(a)$, para cualquier $a \in \mathcal{A}_{com}$.

Demostración. Si $\delta(a) = \emptyset$, para toda $a \in \mathcal{A}_{com}$, al tomar $U = \emptyset$, conseguimos que $\sigma_U(a) = \emptyset$. Ahora supongamos que $\delta(a) \neq \emptyset$ para algún $a \in \mathcal{A}_{com}$. Por el Teorema 1.2 sabemos que para todo $b \in \mathcal{P}^0(a)^\infty$, $0 \in \delta(b)$ y $\mathcal{P}^0(a) \in V(\mathcal{A})$. Por lo que la familia

$$U = \{E \in V(\mathcal{A}) | \forall b \in E^k_{com}, 0 \in \delta(b)\},$$

no es vacía. Demostremos que $\delta(a) = \sigma_U(a)$, para todo $a \in \mathcal{A}_{com}$. δ y σ_U son α-espectros por lo que, gracias a la propiedad de traslación, es suficiente probar que $0 \in \sigma_U(a) \Longleftrightarrow 0 \in \delta(a)$.
Si $0 \in \sigma_U(a)$, de la definición misma de la familia U, es obvio que $0 \in \delta(a)$. Si $0 \in \delta(a)$, entonces $\mathcal{P}^0(a) \in U$, como hemos observado arriba. Ya que $a \in \mathcal{P}^0(a)^\infty$, por lo que $0 \in \sigma_U(a)$. □

A continuación presentamos algunos ejemplos de α-espectros.

1. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach y U es la familia de todos los ideales de $\mathcal{A}$. Entonces $\sigma_U(a)$, coincide con el espectro de Harte, para toda $a \in \mathcal{A}^k$.

2. Un subconjunto S, del álgebra de Banach $\mathcal{A}$, consiste de divisores topológicos comúnes izquierdos de cero, si para todo subconjunto finito $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ de S, existe una sucesión u_l de elementos de $\mathcal{A}$, tal que $||u_l|| = 1$, para todo l y $\lim_l ||x_j u_l|| = 0$, para $j = 1, 2 \cdots, n$. De manera análoga se define un subconjunto consistente de divisores topológicos comúnes derechos de cero. Un subconjunto consiste de divisores topológicos comúnes de cero (DTCC) si está en uno de los dos casos anteriores.
Si tomamos como U el conjnto de todos los ideales de $\mathcal{A}$, consistentes de divisores topológicos comúnes de cero, entonces

$$\sigma_U(a) = \tau(a),$$

para $a \in \mathcal{A}^k$ y donde $\tau(a)$ es el espectro puntual aproximativo de a. En efecto, si $\lambda \in \sigma_U(a)$, existe $I \in U$, consistente de DTCC, tal que $a - \lambda e \in I^k$. Como $\{a_1 - \lambda_1 e, a_2 - \lambda_2 e, \cdots, a_k - \lambda_k e\}$ es un subconjunto finito de I, existe una sucesión u_l en $\mathcal{A}$, tal que $||u_l|| = 1$, para todo l y $\lim_l ||(a_j - \lambda_j e) u_l|| = 0$, para cada $j = 1, 2, \cdots, k$. Pero esto implica que $\lambda \in \tau(a)$. Por otra parte si $\lambda \in \tau(a)$, de la definición del espectro puntual aproximativo se sigue que el ideal generado por $a - \lambda e$, $I(a_1 - \lambda_1 e, a_2 - \lambda_2 e, \cdots, a_k - \lambda_k e)$ es consistente de DTCC. Por lo tanto $\lambda \in \sigma_U(a)$.

Como habíamos mencionado, las condiciones que definen este nuevo concepto de espectro combinado son menos rigurosas que las que definen el espectro estudiado por Martínez-Wawrzyńczyk([10]), donde en lugar de la condición (1) tenemos la propiedad

$$(6) \qquad \tilde{\sigma}(a_1, a_2, \cdots, a_k) \subset \prod_{i=1}^{k} \sigma(a_i),$$

para $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k_{com}$.
En particular para un solo elemento $a \in \mathcal{A}$ tenemos que $\tilde{\sigma}(a) \subset \sigma(a)$.

Resulta que poniendo en lugar de la condición (2), la propiedad de mapeo espectral completa, obtenemos justamente la condición (6), como lo demostramos en el siguiente teorema.

3.3 Teorema. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con unidad y sea $\tilde{\sigma}$ un α-espectro. Supongamos que para $a \in \mathcal{A}^k_{com}$ se cumple que $\tilde{\sigma}(a) \subset \sigma^{G(a)}(a)$ y $p(\tilde{\sigma}(a)) = \tilde{\sigma}(p(a))$, para todo mapeo polinomial $p \in (\mathcal{P}_k)^m$. Entonces es válida la condición (6).

Demostración. Sea $0 \in \tilde{\sigma}(a)$ y supongamos que a_j es invertible. Puesto que $\tilde{\sigma}$ cumple la propiedad de mapeo espectral se tiene que $\tilde{\sigma}(a) \subset \prod_{i=1}^{k} \tilde{\sigma}(a_i)$. Sea $p_1 : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ la proyección sobre la primer componente. Se sigue que $0 \in \tilde{\sigma}(a_j) = \tilde{\sigma}(p_1(a_j, a_j^{-1}))$. Esto implica que existe $\lambda \in \mathbf{C}$, tal que $(0, \lambda) \in \tilde{\sigma}(a_j, a_j^{-1})$. Por consiguiente existe $E \in U$ tal que $(a_j, a_j^{-1} - \lambda e) \in E^2$. Entonces $a_j(a_j^{-1} - \lambda e) = e - \lambda a_j \in E$, por lo que $e \in E$. Pero esto es imposible pues E no contiene la identidad. Se sigue que a_j no es invertible; por lo tanto $0 \in \sigma(a_j)$. Ya que este desarrollo es válido para cada $j = 1, 2, \cdots, k$ concluimos que $0 \in \prod_{i=1}^{k} \sigma(a_i)$, como queríamos demostrar.□

Recordemos que si E es un ideal (izquierdo o derecho) o una subálgebra, sin unidad, de $\mathcal{A}$, se cumple que $\mathcal{P}^0(a) \subset E$, para todo $a \in E_{com}$. Así repitiendo los mismos argumentos del Teorema 3.2 demostramos las siguientes dos proposiciones.

3.4 Proposición. Un α-espectro δ, definido en $\mathcal{A}^\infty$, satisface la propiedad de "mapeo espectral en un sentido" si y sólo si existe un subconjunto $U \subset V(\mathcal{A})$, consistente de subálgebras de $\mathcal{A}$ sin unidad, tal que $\delta(a) = \sigma_U(a)$, para todo $a \in \mathcal{A}^\infty$.

Demostración. Si tenemos la propiedad de "mapeo espectral en un sentido", para toda $a \in \mathcal{A}^\infty$, entonces se cumple la misma conclusión del Teorema 1.2. En efecto, si $a \in \mathcal{A}^\infty$ es tal que $0 \in \delta(a)$, entonces

$$0 = p(0) \in p(\delta(a)) \subset \delta(p(a)),$$

con $p \in (\mathcal{P}_k^0)^m$. Por lo tanto $0 \in \delta(b)$ para toda $b \in \mathcal{P}^0(a)^\infty$, por lo tanto el conjunto U que consta de todas las subálgebras E de $V(\mathcal{A})$, tal que $0 \in \delta(a)$, para toda $a \in E^\infty$ es distinto del vacío. De esta forma siguiendo exactamente el mismo camino que en la demostración del Teorema 3.2, llegamos a que $\delta(a) = \sigma_U(a)$, para toda $a \in \mathcal{A}^\infty$.
Recíprocamente si $U \subset V(\mathcal{A})$ y consiste de subálgebras de $\mathcal{A}$ tal que $\delta(a) = \sigma_U(a)$, para toda $a \in \mathcal{A}^\infty$, para $\lambda \in \sigma_U(a)$, $a \in \mathcal{A}^\infty$, existe $k \in \mathrm{N}$ y $E \in U$, tal que $a - \lambda e \in E^k$. Sea $p \in (\mathcal{P}_k)^m$, $p = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$. Aplicando el teorema del residuo, tenemos que para cada p_j, $j = 1, 2, \cdots, m$

$$p_j(a) - p_j(\lambda) \in \sum\nolimits_{i=1}^k G(a)(a_i - \lambda_i e) \bigcap \sum\nolimits_{i=1}^k (a_i - \lambda_i e)G(a) \subset \mathcal{P}^0(a - \lambda) \subset E.$$

Esto es $p(a) - p(\lambda)e \in E^m$ con $E \in U$, por lo tanto $p(\lambda) \in \sigma_U(p(a))$, lo que termina la demostración. □

En particular para cada α-espectro τ, podemos considerar su restricción a $\mathcal{A}_{com}$ y en seguida extenderlo sobre $\mathcal{A}^\infty$, poniendo $\tau(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \emptyset$, cuando $a_1, a_2, \cdots, a_k$ no conmutan entre sí. La aplicación así obtenida es un α-espectro que se puede representar como σ_U, donde $U = \{\mathcal{P}^0(a) | a \in \mathcal{A}_{com}, 0 \in \tau(a)\}$.

3.5 Proposición. Un α-espectro δ puede ser representado como $\sigma_{\mathcal{I}}$, donde $\mathcal{I}$ es una familia de ideales izquierdos (podrían considerarse ideales derechos), en $\mathcal{A}$, si y sólo si δ cumple la condición: Para toda $a \in \mathcal{A}^k$ tal que $0 \in \delta(a)$ y para todo $c \in I_{\mathcal{A}}^l(a)^m$, se tiene que $0 \in \delta(c)$.

Demostración. Si δ es de la forma $\sigma_{\mathcal{I}}$, entonces $\mathcal{I}$ cumple (ver Teorema 3.2) que para todo $I \in \mathcal{I}$ tal que para todo $a \in I^k$, $0 \in \delta(a)$. De esto es evidente que se cumple la condición enunciada.
Por otra parte si inicialmente tenemos como válida la condición enunciada, definimos $\mathcal{I}$ como la familia

$$\mathcal{I} = \{I_{\mathcal{A}}^l(a) | 0 \in \delta(a)\}.$$

Obviamente $0 \in \delta(a)$ si y sólo si $0 \in \sigma_{\mathcal{I}}(a)$, entonces $\sigma_{\mathcal{I}} = \delta$. $\square$

Es de notar que diferentes familias de subespacios espectrales generalizados pueden generar un mismo α-espectro. De esta manera si U_α, es una familia de subespacios espectrales generalizados, tales que generan un mismo α-espectro y $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ entonces $\sigma_U = \sigma_{U_\alpha}$, para todo α. Por lo tanto $U_c = \bigcup_\alpha U_\alpha$ es un elemento maximal, en consecuencia para un α-espectro $\delta = \sigma_U$ existe una única familia maximal U_c, tal que $\delta(a) = \sigma_{U_c}(a)$. para $a \in \mathcal{A}_{com}$. U_c, la llamaremos la completación de la familia U y diremos que U es completa si es igual a su completación. Notemos que se cumple que $E \in U_c$ si y sólo si $\forall a \in E_{com} \exists F \in U$ tal que $a \in F_{com}$. Por lo tanto U_c puede ser expresado, como aparece en el siguiente teorema.

3.6 Teorema.

$$U_c = \{E \in V(\mathcal{A}) | \forall a \in E_{com} \exists\, F \in U,\, a \in F_{com}\}$$

$$= \{E \in V(\mathcal{A}) |\, 0 \in \sigma_U(a),\ \forall\, a \in E_{com}\}.$$

La familia de subespacios espectrales generalizados que aparece en el Teorema 3.2 es la familia maximal correspondiente a un α-espectro dado δ.

Una familia completa U de subespacios espectrales esta únicamente determinada por sus elementos maximales. Si $E_\alpha \in U$, es una familia linealmente ordenada de subespacios espectrales generalizados entonces $\bigcup_\alpha E_\alpha \in U_c$; por el lema de Kuratowski-Zorn, U contiene elementos maximales. Si U es completo, $E \in U$ y $F \subset E$, para $a \in F_{com}$, a, también pertenece a E_{com}, entonces por el Teorema 3.6, $0 \in \sigma_U(a)$, pero esto es equivalente a decir que $F \in U_c$, por lo que $F \in U_c = U$. Por lo tanto si representamos como $\mathcal{M}(U)$ el conjunto de todos los elementos maximales de U entonces fácilmente se sigue que

$$U = \{E \in V(\mathcal{A}) | \exists F \in \mathcal{M}(U),\, E \subset F\}.$$

El siguiente teorema es un "acercamiento" a la compacidad del espectro σ_U.

3.7 Teorema. Sea τ un α-espectro y para toda $a \in \mathcal{A}_{com}$ sea $\delta(a) = \overline{\tau(a)}$, donde la barra significa la cerradura del subconjunto $\tau(a) \subset \mathbf{C}^k$. Entonces existe una familia $V \subset V(\mathcal{A})$, tal que $\delta(a) = \sigma_V(a)$.

Demostración. Gracias al Teorema 3.2, basta demostrar que δ es un α-espectro.

Puesto que $\tau(a)$ es un α-espectro y $\sigma^{G(a)}(a)$ es un conjunto cerrado, por ser espectro de Harte, se cumple que $\delta(a) = \overline{\tau(a)} \subset \overline{\sigma^{G(a)}(a)} = \sigma^{G(a)}(a)$. Por lo tanto δ cumple la condición (1).

Sea $a \in \mathcal{A}^k_{com}$ y sea $p \in (\mathcal{P}_k)^m$ entonces

$$p(\delta(a)) = p(\overline{\tau(a)}) = \overline{p(\tau(a))} \subset \overline{\tau(p(a))} = \delta(p(a)),$$

por lo que δ cumple la condición (2).
□

4 La topología del espacio $V(\mathcal{A})$

Del Teorema 3.7 podemos concluir que $\overline{\sigma_U}$ es un espectro compacto, sin embargo, nos gustaría saber cuándo el mismo espectro σ_U, es compacto. Para conseguir esto, definiremos una topología en $V(\mathcal{A})$, tal que conjuntos cerrados U en esta topología, nos llevan a espectros cerrados σ_U.

Sea $F \in V(\mathcal{A})$ y $a \in (F + \mathbf{C}e)^k$. Representemos por $\lambda_a(F)$, el único vector en $\mathbf{C}^k$ tal que $a - \lambda_a(F)e \in F^k$. Tenemos el siguiente teorema.

4.1 Teorema. Para $E \in V(\mathcal{A})$, la familia de conjuntos de la forma

$$O_{(a,\epsilon)}(E) = \{F \in V(\mathcal{A}) \,|\, |\lambda_a(F)| < \epsilon\},$$

donde $a \in E^k$ y $\epsilon > 0$, es una base de una topología del conjunto $V(\mathcal{A})$, la cual representaremos como $\mathcal{T}$.

Demostración. i). Sean $O_{(a,\epsilon_1)}(E)$ y $O_{(b,\epsilon_2)}(E)$, con $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in E^k$ y $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m) \in E^m$ dos vecindades de E. Tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$,

tenemos que $O_{((a,b),\epsilon)}(E)$ es una vecindad de E y se cumple que $O_{((a,b),\epsilon)}(E) \subset O_{(a,\epsilon_1)}(E) \bigcap O_{(b,\epsilon_2)}(E)$, pues claramente se cumple que $|\lambda_a(F)| < |\lambda_{(a,b)}(F)|$ y $|\lambda_b(F)| < |\lambda_{(a,b)}(F)|$.
ii). Sea $L \in O_{(a,\epsilon)}(E)$. Necesitamos encontrar una vecindad de L, $O_{(b,\rho)}(L)$, tal que $O_{(b,\rho)}(L) \subset O_{(a,\epsilon)}(E)$. Como $L \in O_{(a,\epsilon)}(E)$ se cumple $|\lambda_a(L)| < \epsilon$. Tomando $b = a - \lambda_a(L)\epsilon$, y $\rho = \epsilon - |\lambda_a(L)|$, obtenemos $b \in L^k$, por lo que $O_{(b,\rho)}(L)$ es una vecindad de L.
Si $F \in O_{(b,\rho)}(L)$, entonces existe un escalar $\lambda_b(F)$ tal que $b - \lambda_b(F)e \in F^k$ y $|\lambda_b(F)| < \epsilon - |\lambda_a(L)|$, pero esto implica que $a - (\lambda_a(L) + \lambda_b(F))e \in F^k$ y que $|\lambda_b(F) + \lambda_a(L)| < \epsilon$ (esto último por la desigualdad del triángulo). Por lo tanto $F \in O_{(a,\epsilon)}(E)$. Es decir $O_{(b,\rho)}(L) \subset O_{(a,\epsilon)}(E)$. $\square$.

La topología $\mathcal{T}$, no es Hausdorff. En efecto, si consideramos dos elementos E y F en $V(\mathcal{A})$ tales que $E \subset F$, para $a \in E^k$ tenemos que $\lambda_a(F) = 0$, por lo que F siempre será elemento de cualquier vecindad de E. Por lo tanto el espacio no es T_1 y no es Hausdorff. Sin embargo, si el álgebra es conmutativa, esta topología restringida al conjunto $M(\mathcal{A})$ de ideales maximales de $\mathcal{A}$, coincide con la topología de Gelfand.

El siguiente teorema de hecho nos proporciona un criterio para la compacidad del espectro σ_U. Por supuesto que los conjuntos cerrados en $V(\mathcal{A})$ y la cerradura $\overline{U}$ del conjunto U, son respecto a la topología $\mathcal{T}$.

4.2 Proposición. Si $\sigma_U(a)$ es cerrado para toda $a \in \mathcal{A}_{com}$, entonces existe un conjunto cerrado $V \subset V(\mathcal{A})$ tal que $\sigma_U(a) = \sigma_V(a)$, $a \in \mathcal{A}_{com}$.

Demostración. Puesto que $\overline{U} \subset V(\mathcal{A})$, es suficiente probar que

$$\overline{\sigma_U(a)} = \sigma_{\overline{U}}(a).$$

$\overline{\sigma_U(a)}$ es un α-espectro, por lo tanto demostremos la doble implicación $0 \in \overline{\sigma_U(a)} \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_{\overline{U}}(a)$. Si $0 \in \overline{\sigma_U(a)}$ entonces existen $\vec{\lambda_n} \in \sigma_U(a)$ y existe una sucesión $E_n \in U$ tal que $a - \vec{\lambda_n}e = (a_1 - \lambda_n^1 e, a_2 - \lambda_n^2 e, \cdots, a_k - \lambda_n^k e) \in E_n^k$ donde $\vec{\lambda_n} = (\lambda_n^1, \lambda_n^2, \cdots, \lambda_n^k) \longrightarrow (0, 0, \cdots, 0)$. Sea

$$E = \mathcal{P}^0(a_1, a_2, \cdots, a_k) = I_{G(a_1, a_2 \cdots, a_k)}(a_1, a_2, \cdots, a_k).$$

para todo $b \in E^k$ y $\epsilon > 0$, $b = (p_1(a), p_2(a), \cdots, p_k(a))$, con $p_j \in \mathcal{P}_k^0$.

$$b - \vec{\lambda_n} = (p_1(a), p_2(a), \cdots, p_k(a)) - (\lambda_n^1, \lambda_n^2, \cdots, \lambda_n^k).$$

Por el teorema del residuo tenemos que para cada $j = 1, 2, \cdots, k$ se cumple

$$p_j(a) - p_j(\vec{\lambda_n}) \in I_{G(a)}(a - \vec{\lambda_n}e) \subset \mathcal{P}^0(a - \vec{\lambda_n}e) \subset E_n.$$

Por lo tanto si $\vec{\beta_n} = (p_1(\lambda_n^1), p_2(\lambda_n^2), \cdots, p_k(\lambda_n^k))$ se tiene que $b - \vec{\beta_n}e \in E_n^k$ y $\beta_n \longrightarrow 0$. A partir de cierto n tenemos que $|\lambda_b(E_n)| < \epsilon$. Pero $E_n \in U$ y $b \in E^k$, por lo que $O_{(b,\epsilon)}(E) \bigcap U \neq \emptyset$, así que $E \in \overline{U}$. Como $a \in E^k$ obtenemos $0 \in \sigma_{\overline{U}}(a)$.
Sea ahora $0 \in \sigma_{\overline{U}}(a)$, para algún $a \in \mathcal{A}_{com}^k$. Existe $E \in \overline{U}$ tal que $a \in E^k$. Por lo tanto para todo $\epsilon > 0$ existe $F_\epsilon \in U$ tal que $|\lambda_a(F_\epsilon)| < \epsilon$. Pero $\lambda_a(F_\epsilon)$ es el único escalar tal que $a - \lambda_a(F_\epsilon) \in F^k$, $F_\epsilon \in U$, entonces $\lambda_a(F_\epsilon) \in \sigma_U(a)$. Tomando $\epsilon \longrightarrow 0$ obtenemos $\lambda_a(F_\epsilon) \longrightarrow 0$. Por lo cual $0 \in \overline{\sigma_U(a)}$. □

4.3 Corolario. Si $U \subset V(\mathcal{A})$ es cerrado entonces $\sigma_U(a)$ es cerrado para toda $a \in \mathcal{A}_{com}$

Demostración. Con ayuda de la Proposición 4.2, se sigue que

$$\overline{\sigma_U(a)} = \sigma_{\overline{U}}(a) = \sigma_U(a)$$

□

Un conjunto importante compacto en la topología $\mathcal{T}$ se establece en el siguiente teorema.

4.4 Teorema. Para todo $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}_{com}^k$ y $z = (z_1, z_2, \cdots, z_m) \in \mathcal{A}^m$, el conjunto

$$C_{z,a} = \{E \in V(\mathcal{A}) | z \in E^m, \text{ y } a \in (E + \mathbf{C}e)^k\},$$

es compacto.

Demostración. Notemos que se cumple que $C_{z_j,0} \bigcap C_{0,a_i} = C_{z_j,a_i}$, por lo que

$$C_{z,a} = \bigcap_{i,j} (C_{z_j,0} \cap C_{0,a_i}).$$

De esta manera es suficiente demostrar la compacidad de $C_{0,a}$ y $C_{z,0}$ para $a, z \in \mathcal{A}$.
Sea pues $\{U_\alpha\}$ una familia de subconjuntos de $C_{0,a}$, cerrados en $C_{0,a}$, con $a \in \mathcal{A}$, tal que esta familia tenga la propiedad de intersección finita. Obviamente la familia $\{\overline{U}_\alpha\}$, (la cerradura es respecto a la topología $\mathcal{T}$), también tiene la propiedad de intesección finita. Los conjuntos $\sigma_{U_\alpha}(a) \subset \mathbf{C}^k$, son no vacíos y tienen la propiedad de intersección finita, por consiguiente los conjuntos $\sigma_{\overline{U}_\alpha}(a) = \overline{\sigma_{U_\alpha}(a)}$, los cuales son cerrados y acotados tienen intersección no-trivial. Existe $\mu \in \sigma_{\overline{U}_\alpha}(a)$ para todo α, pero de esto se sigue que existe $E_\alpha \in \overline{U}_\alpha$, tal que $a - \mu e \in E_\alpha$, para toda α. Si ponemos $x = a - \mu e$, tenemos que $\mathcal{P}^0(x) \subset E_\alpha$ para toda α. Pero esto nos dice que E_α es elemento de cualquier vecindad de $\mathcal{P}^0(x)$ y como $E_\alpha \in \overline{U}_\alpha$, se sigue que $\mathcal{P}^0(x) \in \overline{U}_\alpha$ para toda α, pues $\overline{U}_\alpha$ es una familia de cerrados en $V(\mathcal{A})$. Es evidente que $\mathcal{P}^0(x) \in C_{0,a}$ y como los conjuntos U_α son cerrados en $C_{0,a}$ tenemos que $\mathcal{P}^0(x) \in U_\alpha$, para toda α, esto es $\mathcal{P}^0(x) \in \bigcap_\alpha U_\alpha$, por lo tanto $C_{0,a}$ es compacto.

En el caso de $C_{z,0}$ la demostración es análoga a la demostración anterior.□

5 El teorema de mapeo espectral.

En esta sección establecemos condiciones bajo las cuales un α-espectro τ cumple la propiedad de mapeo espectral. Recordemos que, por la definición τ cumple la propiedad de "mapeo espectral en un sentido", también que la propiedad de mapeo espectral es la igualdad

$$p(\tau(a)) = \tau(p(a)),$$

para $a \in \mathcal{A}^k_{com}$ y $p \in (\mathcal{P}_k)^m$. Como dijimos, un caso especial de la propiedad de mapeo espectral es la propiedad de proyección.

$$\pi(\tau(a_1, a_2, \cdots, a_k)) = \tau(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}),$$

donde $m \leq k$ y $\pi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_m})$. La propiedad de proyección es equivalente a la siguiente condición marcada con el número I .

I. Para todo $a \in \mathcal{A}^k_{com}$, $\lambda \in \tau(a)$, *y para* $b \in \mathcal{A}^s$, *tal que* $(a, b) \in \mathcal{A}_{com}$, $\exists \mu \in \mathbf{C}^s$ *tal que* $(\lambda, \mu) \in \tau((a, b))$.

En efecto si tomamos $\pi : \mathbf{C}^{k+s} \longrightarrow \mathbf{C}^k$, como $\pi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_{k+s}) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ y $b \in \mathcal{A}^s$ tal que $(a, b) \in \mathcal{A}_{com}$, se sigue que

$$\lambda \in \tau(a) = \tau(\pi(a, b)) = \pi(\tau(a, b)).$$

Por lo tanto existe $(\alpha, \mu) \in \tau(a, b)$, tal que $\pi(\alpha, \mu) = \lambda \Longrightarrow \alpha = \lambda$. Obtenemos así que existe $\mu \in \mathbf{C}^s$, tal que $(\lambda, \mu) \in \tau(a, b)$. Se cumple la condición I.
Recíprocamente si tenemos como válida la condición I, al tomar $\lambda \in \tau(a)$, existe $\mu \in \mathbf{C}^s$, tal que $(\lambda, \mu) \in \tau(a, b) \Longrightarrow \lambda \in \pi(\tau(a, b))$. Esto es $\tau(a) \subset \pi(\tau(a, b))$. La otra contensión ya esta demostrada pues, por hipotesis, τ es un α-espectro.

Si representamos τ, como σ_U, la propiedad de proyección es equivalente a la siguiente propiedad de U, marcada con el número II .

II. Para todo $E \in U$, $a \in E^k_{com}$ *y* $b \in \mathcal{A}^m$ *tal que* $(a, b) \in \mathcal{A}_{com}$, *existe* $E_1 \in U$ *y* $\mu \in \mathbf{C}^m$ *tal que* $(a, b - \mu e) \in {E_1}^{k+m}$.

En efecto supongamos que $E \in U$, $a \in E^k_{com}$ y $b \in \mathcal{A}^m$ tal que $(a, b) \in \mathcal{A}_{com}$. Como $a \in E^k_{com}$ obtenemos que $0 \in \sigma_U(a)$. Por la propiedad de proyección existe $\mu \in \mathbf{C}^m$ tal que $(0, \mu) \in \tau((a, b)) = \sigma_U((a, b))$. Por lo tanto existe $E_1 \in U$ tal que $(a, b - \mu e) \in E_1^{k+m}$. Se cumple la condición II.
Ahora bien, si consideramos válida la condición II y tomamos $a \in \mathcal{A}^m_k$ y $\lambda \in \tau(a) = \sigma_U(a)$, existe $E \in U$ tal que $a - \lambda e \in E^k$. Si $b \in \mathcal{A}^m$ tal que $(a - \lambda e, b) \in \mathcal{A}_{com}$, existe $E_1 \in U$ y $\mu \in \mathbf{C}^m$ tal que $(a - \lambda e, b - \mu e) \in E_1^{k+m}$, pero esto significa que $(\lambda, \mu) \in \sigma_U(a, b)$. Por lo tanto se tiene la condición I (propiedad de proyección.).

El siguiente teorema establece, que para α-espectros, la propiedad de proyección implica la propiedad de mapeo espectral

5.1 Teorema. Sea $U \subset V(\mathcal{A})$. Si σ_U tiene la propiedad de proyección, entonces también tiene la propiedad de mapeo espectral.

Demostración. En vista de que σ_U tiene la propiedad de "mapeo espectral en un sentido" demostremos sólo la contensión contraria. Sea $\lambda \in \sigma_U(p(a))$, para $a \in \mathcal{A}_{com}$. Por la propiedad de proyección de U existe $\mu_0 \in \mathbf{C}^k$ tal que $(\lambda, \mu_0) \in \sigma_U(p(a), a)$. Proyectando sobre la segunda componente se sigue que $\mu_0 \in \sigma_U(a)$. Puesto que σ_U cumple la propiedad (2) y $\sigma^{G(a)}(a)$ cumple la propiedad de mapeo espectral en $G(a)$ se tiene que

$$\sigma_U(p(a), a) \subset \sigma^{G(p(a),a)}(p(a), a) = \sigma^{G(a)}(p(a), a) = \{(p(\mu), \mu) | \mu \in \sigma^{G(a)}(a)\}.$$

Como $(\lambda, \mu_0) \in \sigma^{G(a)}(p(a), a)$, entonces $(\lambda, \mu_0) = (p(\mu), \mu)$, con $\mu \in \sigma^{G(a)}(a)$. Esto es, se tiene que $\lambda = p(\mu)$, $\mu_0 = \mu$, pero esto implica que $\lambda = p(\mu_0)$, es decir $\lambda \in p(\sigma_U(a))$, como queríamos demostrar. □

El siguiente teorema establece la propiedad de mapeo espectral, para la cerradura, de un α-espectro.

5.2 Teorema. Si τ es un α-espectro que tiene la propiedad de proyección, entonces $\bar{\tau}(a) = \overline{\tau(a)}$, tiene la propiedad de mapeo espectral.

Demostración. Ya hemos probado que $\overline{\tau(a)}$ es un α-espectro, por lo que sólo resta demostrar que tiene la propiedad de proyección. Sea $\lambda \in \overline{\tau(a)}$, para algún $a \in \mathcal{A}^k_{com}$ y sea $(a, b) \in \mathcal{A}^{k+m}_{com}$. Existe una sucesión $\lambda(n) \in \tau(a)$ que converge a λ. Por la propiedad de proyección de τ, existe $\mu(n) \in \mathbf{C}^m$ tal que $(\lambda(n), \mu(n)) \in \tau(a, b) \subset \overline{\tau(a, b)}$. Por lo tanto, por la compacidad del espectro, la sucesión $(\lambda(n), \mu(n))$ tiene una subsucesión convergente cuyo límite $(\lambda, \mu) \in \overline{\tau(a, b)}$. Por lo tanto $\bar{\tau}$, tiene la propiedad de proyección, y, por el Teorema 5.1, la de mapeo espectral.□

6 Regularidad y α-espectros.

Como mencionamos en la introducción V. Kordula y V. Müller (K-M) describen una amplia variedad de espectros usando el concepto de regularidad. En esta sección estudiamos la relación entre ese concepto y el de α-espectro. De acuerdo a K-M una regularidad en $\mathcal{A}$ es un subconjunto R de $\mathcal{A}$, que cumple las siguientes condiciones

i) Si $a \in \mathcal{A}$ y $n \in \mathrm{N}$, entonces se cumple la bicondicional $a \in R \Longleftrightarrow a^n \in R$.
ii) Si $a, b, c, d \in \mathcal{A}$ conmutan entre si y $ac + bd = e$, entonces se cumple la doble implicación $ab \in R \Longleftrightarrow a \in R$ y $b \in R$.

Si R es una regularidad se define el conjunto

$$\sigma_R(a) = \{\lambda \in \mathrm{C} | a - \lambda e \notin R\},$$

para toda $a \in \mathcal{A}$. $\sigma_R(a)$ es llamado el espectro asociado a la regularidad R.

Se cumplen diferentes propiedades, por ejemplo:

a) $\sigma_R(a)$ es un subconjunto de $\sigma(a)$.

b) Si representamos $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ como el conjunto de todos los elementos invertibles de $\mathcal{A}$, entonces $\mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \subset R$.

c) $R = \mathcal{A}$ es una regularidad y en este caso $\sigma_R(a) = \emptyset$, para todo $a \in \mathcal{A}$

d) $R = \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ es una regularidad y en este caso $\sigma_R(a) = \sigma(a)$.

e) Si R es el conjunto de todos los elementos que tienen inversa por la izquierda(respectivamente por la derecha), entonces el espectro asociado a R es el espectro izquierdo σ_l (respect. el espectro derecho,σ_r).

Desde luego la propiedad más importante que establecen K-M es la propiedad de mapeo espectral.(Demostrado en [9])

6.1 Teorema. Sea R una regularidad en $\mathcal{A}$. Entonces para todo $a \in \mathcal{A}$ y para toda función f analítica en una vecindad de $\sigma(a)$, no constante en toda componente conexa de su dominio, se tiene que

$$\sigma_R(f(a)) = f(\sigma_R(a)).$$

Si tenemos una regularidad R, podemos definir una familia de subespacios espectrales generalizados, tal que los correspondientes espectros coinciden, tal como lo demostramos en el siguiente teorema.

6.2 Teorema. Sea R es una regularidad en $\mathcal{A}$ tal que $0 \notin R$. Si $\widehat{U}$ es la familia de todas las subálgebras de $\mathcal{A}$ de la forma $\mathcal{P}^0(a)$, $a \in \mathcal{A} \setminus R$, entonces

$$\sigma_R(a) = \sigma_{\widehat{U}}(a),$$

para $a \in \mathcal{A}$. Y

$$p(\sigma_{\widehat{U}}(a)) \subset \sigma_{\widehat{U}}(p(a)),$$

para $a \in \mathcal{A}^\infty$ y todo mapeo polinomial p.

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$, tal que $a \notin R$. Entonces $0 \in \sigma_R(a)$; de esta manera, por la propiedad de mapeo espectral se sigue que para $p \in \mathcal{P}_1^0$

$$0 = p(0) \in p(\sigma_R(a)) = \sigma_R(p(a)),$$

por lo que $p(a) \notin R$. De esta forma la familia $\widehat{U}$ es, en efecto, una familia de subespacios espectrales generalizados. De la definición de $\sigma_R(a)$, es evidente que es invariante bajo traslaciones por lo que es suficiente demostrar que $0 \in \sigma_R(a)$ si y sólo si $0 \in \sigma_{\widehat{U}}(a)$, para la primera parte.
Si $0 \in \sigma_R(a)$, entonces $a \in \mathcal{P}^0(a) \in \widehat{U}$, es decir $0 \in \sigma_{\widehat{U}}(a)$. Recíprocamente si $0 \in \sigma_{\widehat{U}}(a)$ entonces $a \in E = \mathcal{P}^0(b)$, $b \notin R$, esto es $a = p(b)$, p un polinomio sin término constante. Por la propiedad de mapeo espectral la siguiente secuencia esta justificada $0 \in \sigma_R(b) \Longrightarrow 0 = p(0) \in p(\sigma_R(b)) = \sigma_R(p(b)) = \sigma_R(a) \Longrightarrow 0 \in \sigma_R(a)$.
La segunda parte del teorema es la propiedad de "mapeo espectral en un sentido" por lo que se sigue inmediatamente usando la Proposición 3.4, ya que $\widehat{U}$ consiste de familias de subálgebras, por lo que $\sigma_{\widehat{U}}$ cumple la propiedad de "mapeo espectral en un sentido", para todas las k-uplas en $\mathcal{A}$. □

Ejemplo

Si tomamos $R = \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, entonces $0 \notin R$ y tomando como la familia $\widehat{U}$, la misma del Teorema 6.2, concluimos que

$$\sigma_{\widehat{U}}(a) = \sigma(a).$$

En efecto ya que $\sigma_R(a) = \sigma(a)$ y por el Teorema 6.2 se sigue la conclusión. (Resulta que cada regularidad que satisface la condición $0 \notin R$, se puede extender a un α-espectro en forma trivial).

V. Müller, propuso el concepto de regularidad combinada, lo que le permite definir un espectro para una k-upla de elementos, de un álgebra de Banach.

6.3 Definición. Una Regularidad Combinada es un subconjunto $R \subset \mathcal{A}_{com}$, de la forma $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, donde $R_n \subset \mathcal{A}_{com}^n$, $n \in \mathrm{N}$, que cumple las siguientes condiciones:
i) Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathcal{A}_{com}$ y $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = e$, entonces $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R_n$.
ii) Si $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{A}_{com}$ y $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R_n$, entonces $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in R_{n+1}$.
iii) Si $(x_0 - \lambda, x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R_{n+1}$ para toda $\lambda \in \mathrm{C}$, entonces $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R_n$.

El espectro combinado asociado a una regularidad R, es definido como

$$\sigma_R(x) = \{\lambda \in \mathrm{C}^n | \, x - \lambda e \notin R\}, \tag{7}$$

donde $x \in \mathcal{A}_{com}^n$.

Este espectro cumple la propiedad de mapeo espectral. En efecto, Müller demuestra en [15] el siguiente teorema

6.4 Teorema. Sea σ_R el espectro determinado por una regularidad combinado R en $\mathcal{A}$. Sea $x \in \mathcal{A}_{com}^k$ y sea $f = (f_1, f_2, \cdots, f_k)$ una k-upla de funciones analíticas en una vecindad de $\sigma^{G(x)}(x)$. Entonces

$$\sigma_R(f(x)) = f(\sigma_R(x)).$$

En el caso en que $R = \mathcal{A}_{com}$, $\sigma_R(x) = \emptyset$ para toda x. Excluyendo este caso podemos relacionar el espectro asociado a una regularidad con subespacios espectrales generalizados, como lo vemos en los siguientes resultados. En especial, en el siguiente teorema, se incluye una demostración de la propiedad de mapeo espectral, para σ_R, basada en el Teorema 5.1.

6.5 Teorema. Sea R una regularidad combinada, entonces para toda $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}_{com}^k$, $\sigma_R(a)$ satisface la contensión $\sigma_R(a) \subset \prod_{i=1}^{k} \sigma(a_i)$ y la propiedad de mapeo espectral.

225997

Demostración. Demostremos primero que $\sigma_R(a) \subset \sigma^{G(a)}(a)$, para $a \in \mathcal{A}^k_{com}$. Si $0 \in \sigma_R(a)$, entonces $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \notin R_k$. Si $0 \notin \sigma^{G(a)}(a)$, existen $b_1, b_2, \cdots, b_k \in G(a)$ tal que $\sum_{i=1}^k a_i b_i = e$. Por el inciso i) de la definición 6.3 se obtiene que $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \in R_k$, contradiciendo nuestra suposicióm inicial. Por lo tanto $0 \in \sigma^{G(a)}(a)$. Por la propiedad de traslación se sigue la contensión.

Demostremos ahora que σ_R cumple la propiedad de proyección. Sea $\pi : \mathbf{C}^k \longrightarrow \mathbf{C}^s$ el mapeo $\pi(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_s})$, demostremos que $\pi(\sigma_R(a_1, a_2, \cdots, a_k)) = \sigma_R(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_s})$. Sea $\lambda_s = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_s}) \in \sigma_R(a_s)$ donde $a_s = (a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_s})$. Por definición tenemos que $a_s - \lambda_s e \notin R_s$. En virtud de la Definición 6.3 (inciso iii)), podemos afirmar que existen $\lambda_{i_{s+1}}, \lambda_{i_{s+2}}, \cdots, \lambda_{i_k} \in \mathbf{C}$ tal que

$$(a_{i_{s+1}} - \lambda_{i_{s+1}} e, a_{i_{s+2}} - \lambda_{i_{s+2}} e, \cdots, a_{i_k} - \lambda_{i_k} e, a_s - \lambda_s e) \notin R_k.$$

Pero esto es equivalente a que $(a_1 - \lambda_1 e, a_2 - \lambda_2 e, \cdots, a_k - \lambda_k e) \notin R_k$. Es decir tenemos que $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \in \sigma_R(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ y $\pi(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) = (\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_s})$. Hemos demostrado que $\lambda_s \in \pi(\sigma_R(a_1, a_2, \cdots, a_k))$ y por ende que $\sigma_R(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_s}) \subset \pi(\sigma_R(a_1, a_2, \cdots, a_k))$.

Por otra parte si $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s) = \pi(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k))$, donde $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k) \in \sigma_R(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, entonces tenemos que $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s) = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \cdots, \beta_{i_s})$ y $(a_1 - \beta_1 e, a_2 - \beta_2 e, \cdots, a_k - \beta_k e) \notin R_k$. Por lo que, por la Definición 6.3 (inciso ii)) se tiene $(a_{i_1} - \beta_{i_1} e, a_{i_2} - \beta_{i_2} e, \cdots, a_{i_s} - \beta_{i_s} e) \notin R_s$, $s \leq k$. Esto es $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s) \in \sigma_R(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_s})$. Por lo tanto $\pi(\sigma_R(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \subset \sigma_R(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k})$, por lo que σ_R tiene la propiedad de proyección.

Así pues, se tiene que para todo $p \in (\mathcal{P}_k)^m$ y $a \in \mathcal{A}^k_{com}$,

$$\sigma_R(p(a), a)) \subset \sigma^{G(p(a),a)}(p(a), a) = \{(p(\mu), \mu) | \mu \in \sigma^{G(a)}(a)\}.$$

Si $0 \in \sigma_R(a)$, por la propiedad de proyección, existe $\lambda \in \mathbf{C}^m$, tal que $(\lambda, 0) \in \sigma_R(p(a), a)$, con $p \in (\mathcal{P}_k)^m$, sin término constante. Esto implica que $\lambda \in \sigma_R(p(a))$ y que $(\lambda, 0) = (p(\mu), \mu)$, con $\mu \in \sigma^{G(a)}(a)$. Por lo tanto $0 = p(0) = p(\mu) = \lambda \in \sigma_R(p(a))$. Hemos demostrado la implicación

$$0 \in \sigma_R(a) \Longrightarrow 0 \in \sigma_R(p(a)),$$

con p, mapeo polinomial sin término constante. Por lo tanto, la familia $\widehat{U}$ de todas las subalgebras de $\mathcal{A}$ de la forma $\mathcal{P}^0(a)$, con $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \notin R_k$, es una familia de subespacios espectrales generalizados. Se cumple que

$$\sigma_R(a) = \sigma_{\widehat{U}}(a),$$

con $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k_{com}$. En efecto, si $0 \in \sigma_R(a)$, entonces $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \notin R_k$, por lo que $a \in E^k$, con $E = \mathcal{P}^0(a)$, que es elemento de $\widehat{U}$, por lo que $0 \in \sigma_{\widehat{U}}(a)$. Recíprocamente, si $0 \in \sigma_{\widehat{U}}(a)$, existe $E = \mathcal{P}^0(b) \in \widehat{U}$, tal que $a \in E^k$. Esto es $a = p(b)$ con p un mapeo polinomial sin término constante y $b = (b_1, b_2, \cdots, b_k) \notin R_k$, por lo que $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \notin R_k$, esto es $0 \in \sigma_R(a)$. Por lo tanto el Teorema 5.1 implica que σ_R tiene la propiedad de mapeo espectral, y de esta manera se completan las condiciones del Teorema 3.3 por lo que $\sigma_R(a) \subset \prod_{i=1}^k \sigma(a_i)$, lo que completa la demostración.□

Un "recíproco" del Teorema 6.5 es el siguiente teorema.

6.6 Teorema. Sea τ un α-espectro que cumple la propiedad de mapeo espectral, entonces

$$R_k = \{a \in \mathcal{A}^k_{com} \,|\, 0 \notin \tau(a)\},$$

define una regularidad combinada.

Demostración. Verifiquemos las condiciones i), ii) y iii) de la Definición 6.3.
Sea $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k_{com}$ tal que $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \notin R_k$, entonces $0 \in \tau(a)$, puesto que τ es un α-espectro, se tiene que $0 \in \sigma^{G(a)}(a)$, por lo que $I_{G(a)}(a)$ es un ideal propio en $G(a)$. Por lo tanto para $b_1, b_2, \cdots b_k \in G(a)$, se tiene que $\sum_{i=1}^k a_i b_i \neq e$. De esta forma se cumple la condición i).
Sean ahora $(a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}) \in \mathcal{A}_{com}$ y tal que $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \in R_k$. Entonces $0 \notin \tau(a_1, a_2, \cdots, a_k)$. Si suponemos que $(a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}) \notin R_{k+1}$, entonces $0 \in \tau(a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1})$, por lo que al usar la propiedad de mapeo espectral y proyectar sobre las primeras k-componentes se tiene que $0 \in \tau(a_1, a_2, \cdots, a_k)$. Esto es $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \notin R_k$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $(a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}) \in R_{k+1}$ y la condición ii) se ha verificado.
Finalmente supongamos que para toda k-upla $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}_{com}$, se cumple que $(a_1, a_2, \cdots, a_k) \notin R_k$, es decir, tenemos que $0 \in \tau(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, usando de nuevo la propiedad de mapeo espectral con el mapeo de $\mathbb{C}^k$ en $\mathbb{C}^{k+1}$, $p(x_1, x_2, \cdots, x_k) = (0, x_1, x_2, \cdots, x_k)$, se tiene que

$$0 = p(0) \in p(\tau(a_1, a_2, \cdots, a_k)) = \tau(p(a_1, a_2, \cdots, a_k)) = \tau(0, a_1, a_2, \cdots, a_k),$$

es decir $(0, a_1, a_2, \cdots, a_k) \notin R_{k+1}$. Podemos decir entonces que existe $\lambda = 0 \in C$, tal que para $a_0 = 0$, se cumple que $(0, a_1, a_2, \cdots, a_k) \notin R_{k+1}$, por lo tanto la condición iii) esta demostrada.□

6.7 Teorema. Si R es una regularidad combinada, entonces R_1 es una regularidad en el sentido de la definición de Kordula-Müller.

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}$ tal que a es invertible, puesto que $aa^{-1} = e$, por el inciso i) de la Definición 6.3, se sigue que $a \in R_1$. Esto es se tiene que Inv$\mathcal{A} \subset R_1$. De acuerdo a (K-M) resta probar que

$$ab \in R_1 \Longleftrightarrow a \in R_1 \text{ y } b \in R_1,$$

para todo $(a, b) \in \mathcal{A}_{com}$.
Sea $ab \in R_1$. Si $a \notin R_1$, entonces $0 \in \sigma_{R_1}(a)$. Por la propiedad de proyección existe $\lambda \in C$, tal que $(0, \lambda) \in \sigma_R(a, b)$. Tomando el mapeo polinomial $p \in (\mathcal{P}_2)^1$, como $p(x_1, x_2,) = x_1 x_2$ se sigue que

$$0 = p(0, \lambda) \in p(\sigma_R(a, b)) = \sigma_R(p(ab)) = \sigma_{R_1}(ab).$$

Pero esto significa que $ab \notin R_1$, lo que contradice nuestra hipotesis inicial, por lo que $a \in R_1$. Por simple analogía concluimos que $b \in R_1$.
Supongamos ahora que $a \in R_1$ y $b \in R_1$. Si $ab \notin R_1$, $0 \in \sigma_{R_1}(ab)$, por lo que $0 = \lambda\mu$ donde $(\lambda, \mu) \in \sigma_R(a, b)$, por lo tanto $(0, \mu) \in \sigma_R(a, b)$ o $(\lambda, 0) \in \sigma_R(a, b)$. Por lo que al proyectar en la primera o en la segunda coordenada, se tiene que $0 \in \sigma_{R_1}(a)$ ó $0 \in \sigma_{R_1}(b)$. Esto es $a \notin R_1$ o $b \notin R_1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $ab \in R_1$. □

6.8 Teorema. Sea $\sigma_R = \tilde{\sigma}$ el espectro asociado a la regularidad R, tal que $R \neq \mathcal{A}_{com}$ y sea la familia

$$U = \{E \in V(\mathcal{A}) | \forall k \in \mathrm{N}, x \in E^k_{com}, 0 \in \tilde{\sigma}(x)\}.$$

Entonces la familia U tiene la propiedad de proyección, $\sigma_U(x) = \tilde{\sigma}(x)$ y

$$R_n = \mathcal{A}_{com} \setminus \bigcup\nolimits_{E \in U} E^n \tag{8}$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{A}^k_{com}$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ y $0 \in \tilde{\sigma}(x)$. Supongamos que x_i es invertible, para alguna i y sea x_i^{-1} su inversa. La $k+1$-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_i^{-1})$ son de elementos que conmutan entre sí. De esta manera aplicando la propiedad de proyección, existe $\mu \in \mathbf{C}$ tal que $(0,\mu) \in \tilde{\sigma}(x, x_i^{-1}) \subset \sigma^{G(x,x_i^{-1})}(x, x_i^{-1})$. Pero esto implica que el ideal $I(x, x_i{}^{-1} - \mu e)$ es propio en el álgebra $G(x, x_i{}^{-1})$. Pero esto es una contradicción puesto que obviamente $e \in I_{G(x,x_i^{-1})}(x, x_i{}^{-1} - \mu e)$. Esta contradicción muestra que $e \notin \mathcal{P}^0(x)$, por lo que $\mathcal{P}^0(x) \in U$, es decir la familia U es distinta del conjunto vacío. De esta manera la igualdad $\tilde{\sigma} = \sigma_U$ es consecuencia del Teorema 3.2. Ahora $\tilde{\sigma}$, tiene la propiedad de mapeo espectral, por lo que la propiedad de proyección de U es obvia, también la relación (8) es evidente al comparar la definición de regularidad asociada a $\tilde{\sigma}$ y la definición de σ_U. □

7 α-espectros y sus envolventes.

En esta sección establecemos la relación entre α-espectro y la convexidad polinomial y racional. Como veremos la envolvente racional de un α-espectro y de un subespectro es un α-espectro.

Como mencionamos en la introducción la envolvente polinomial convexa $\hat{K}$ de un subconjunto $K \subset \mathbf{C}^k$, es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbf{C}^k$, tal que

$$|p(\lambda)| \leq \sup_{w \in K} |p(w)|,$$

para todo $p \in \mathcal{P}_k$. Un subconjunto $K \subset \mathbf{C}^k$, se llama polinomialmente convexo si $\hat{K} = K$.

La envolvente racional convexa de un subconjunto $K \subset \mathbf{C}^k$, es el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbf{C}^k$, tal que

$$|f(\lambda)| \leq \sup_{w \in K} |f(w)|,$$

para todas las funciones racionales analíticas en K. Un subconjunto $K \subset \mathbf{C}^k$, es racionalmente convexo, si coincide con su envolvente racional.

Recordemos también que los conjuntos polinomialmente convexos son cerrados y todo subconjunto compacto de $\mathbf{C}$, es racionalmente convexo.

Otra propiedad importante es que si $\mathcal{A}$, es un álgebra finitamente generada por los elementos $a_1, a_2, \cdots, a_k$, entonces el espectro de Harte $\sigma(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, es polinomialmente convexo.

El criterio que relaciona la convexidad polinomial y la convexidad racional esta dado por el siguiente teorema, demostrado en [4].

7.1 Teorema. Sea K un subconjunto compacto de $\mathbf{C}^k$. Un elemento $\lambda \in \mathbf{C}^k$, pertenece a la envolvente racional convexa de K, si y sólo si $p(\lambda) \in p(K)$, para todo $p \in \mathcal{P}_k$.

El criterio propuesto en el teorema anterior será usado en los dos teoremas subsecuentes.

7.2 Teorema. Si σ es un α-espectro, entonces el mapeo $\tilde{\sigma}$ que asocia a cada $a \in \mathcal{A}^k_{com}$, la envolvente racional $\tilde{\sigma}(a)$, de $\sigma(a)$, es un α-espectro.

Demostración. Demostremos la condición (2) para $\tilde{\sigma}$. Sea $\lambda \in \mathbf{C}^m$ elemento de $p(\tilde{\sigma}(a))$ con $p \in (\mathcal{P}_k)^m$, esto es $\lambda \in p(\beta)$, con $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k) \in \tilde{\sigma}(a)$.
Sea el mapeo polinomial $q \in \mathcal{P}_m$, entonces $q \circ p$ es un polinomio en $\mathcal{P}_k$, por lo tanto $q(\lambda) = (q \circ p)(\beta) \in (q \circ p)(\sigma(a))$. Esto implica que $q(p(\beta)) \in q(p(\sigma(a)))$, pero por la propiedad de "mapeo espectral en un sentido" se tiene que $q(p(\beta)) \in q(\sigma(p(a)))$, por lo que $q(\lambda) \in q(\sigma(p(a)))$, pero esto implica que $\lambda \in \tilde{\sigma}(p(a))$. Por lo tanto $p(\tilde{\sigma}(a)) \subset \tilde{\sigma}(p(a))$.
Sea Ahora $0 \in \tilde{\sigma}(a)$, con $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k_{com}$ y sea $p \in \mathcal{P}_k$ la proyección sobre una coordenada. Entonces se tiene que $0 = p(0) \in p(\sigma(a)) \subset p(\sigma^{G(a)}(a))$. Por lo tanto $0 = p(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k)$, con $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k) \in \sigma^{G(a)}(a)$. De esta manera al proyectar sobre cada componente obtenemos que $0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k$, por lo que $0 \in \sigma^{G(a)}$, y la condición (1) está demostrada. □

7.3 Teorema. Sea σ_* un subespectro y $\tilde{\sigma_*}(a)$ la envolvente racional de $\sigma_*(a)$, para $a \in \mathcal{A}^k_{com}$, entonces $\tilde{\sigma_*}$ es un α-espectro.

Demostración. Puesto que $\tilde{\sigma_*}(a)$ es la envolvente racional de $\sigma_*(a)$, y este último es un subconjunto compacto, por ser subespectro, se cumple la doble implicación

$$\lambda \in \tilde{\sigma_*}(a) \Longleftrightarrow p(\lambda) \in p(\sigma_*(a)),$$

para todo $a \in \mathcal{A}^k$, $\lambda \in \mathbf{C}^k$ y $p \in \mathcal{P}_k$.
Como σ_* es un subespectro cumple las siguientes condiciones.

$$\sigma_*(a) \subset \prod_{i=1}^k \sigma(a_i).$$

$$p(\sigma_*(a)) = \sigma_*(p(a)).$$

Donde $a \in \mathcal{A}^k_{com}$ y $p \in (\mathcal{P}_k)^m$.
Demostremos que $\tilde{\sigma_*}$ cumple las condiciones (1) y (2) que definen un α-espectro. Demostraremos primero la condición (2). Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in p(\tilde{\sigma_*}(a))$, entonces $\lambda = p(\beta)$, con $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k) \in \tilde{\sigma_*}(a)$.
Debemos probar que para todo polinomio $q \in \mathcal{P}_m$, se cumple $q(\lambda) \in q(\tilde{\sigma_*}(p(a)))$. Sea $q \in \mathcal{P}_m$, entonces $q \circ p \in \mathcal{P}_k$. Por lo tanto $q(\lambda) = (q \circ p)(\beta) \in (q \circ p)(\sigma_*(a))$, por lo que $q(p(\beta)) \in q(p(\sigma_*(a))) = q(\sigma_*(p(a)))$, pero esto implica que $p(\beta) \in \tilde{\sigma_*}(p(a))$. Es decir $q(\lambda) \in \tilde{\sigma_*}(p(a))$. Por lo tanto $\lambda \in \tilde{\sigma_*}(p(a))$. Hemos demostrado la condición (2). En particular $\tilde{\sigma_*}$ es invariante bajo traslaciones, por lo cual para demostrar la condición (1) basta demostrar la implicación

$$0 \in \tilde{\sigma_*}(a) \Longrightarrow 0 \in \sigma^{G(a)}(a).$$

Tomemos $0 \in \tilde{\sigma_*}(a)$ y $p \in \mathcal{P}_k$, entonces $p(0) \in p(\sigma_*(a)) = \sigma_*(p(a)) \subset \sigma(p(a))$, puesto que $p : \mathbf{C}^k \longrightarrow \mathbf{C}$. Es decir tenemos que $p(0) \in \sigma(p(a))$, para todo $p \in \mathcal{P}_k$. Por lo tanto el ideal
$\{p(a_1, a_2, \cdots, a_k) | p(0) = 0,\ p \in \mathcal{P}_k\}$, no contiene elementos invertibles en $\mathcal{A}$, es decir es un ideal propio. Por lo que

$$I = \{p((a_1, a_2, \cdots, a_k)) | p(0) = 0,\ p \in \mathcal{P}_k\}^-$$

no tiene elementos invertibles en $\mathcal{A}$ y por lo tanto no tiene elementos invertibles en $G(a_1, a_2, \cdots, a_k)$. Pero I es el ideal generado por $a_1, a_2, \cdots, a_k$ por lo que es un ideal propio en $G(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, esto implica que $I \neq G(a) \Longrightarrow 0 \in \sigma^{G(a)}(a)$. Por lo tanto $\tilde{\sigma}(a) \subset \sigma^{G(a)}(a)$.$\square$

A continuación mostraremos que la envolvente racional de un subespectro es maximal, de acuerdo al siguiente teorema.

7.4 Teorema. Sea σ_* un subespectro, entonces su envolvente racional $\tilde{\sigma_*}$ es el α-espectro maximal tal que para un elemento $a \in \mathcal{A}$ se cumple $\tilde{\sigma_*}(a) = \sigma_*(a)$.

Demostración. En el Teorema 7.3 hemos demostrado que la envolvente racional de un subespectro es un α-espectro. Puesto que todo subconjunto compacto de C es racionalmente convexo, $\sigma_*(a)$ para $a \in \mathcal{A}$ es racionalmente convexo. Por lo tanto se tiene que $\sigma_*(a) = \tilde{\sigma_*}(a)$, para cada elemento $a \in \mathcal{A}$. Resta probar que $\tilde{\sigma_*}$ es maximal. Sea τ cualquier α-espectro tal que $\tau(a) = \sigma_*(a)$, con $a \in \mathcal{A}$.
Sean $a \in \mathcal{A}^k_{com}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \in \tau(a)$, y cualquier mapeo polinomial $p \in \mathcal{P}_k$. Entonces $p(\lambda) \in p(\tau(a))$, por la propiedad de "mapeo espectral en un sentido" se tiene que $p(\lambda) \in \tau(p(a)) = \sigma_*(p(a))$ y por la propiedad de mapeo espectral $p(\lambda) \in p(\sigma_*(a))$. Hemos demostrado que para cada $\lambda \in \tau(a)$ y para cada polinomio $p \in \mathcal{P}_k$, $p(\lambda) \in p(\sigma_*(a))$. Es decir $\lambda \in \tilde{\sigma_*}(a)$. Por lo tanto $\tilde{\sigma_*}$ es maximal.□

Podemos, ahora obtener la familia $U_{\tilde{\sigma_*}}$, asociada al espectro $\tilde{\sigma_*}$. Sea U la familia que define σ_*, de la serie de igualdades

$$\begin{aligned} U_{\tilde{\sigma_*}} &= \{E \in V(\mathcal{A}) | \forall a \in E^k_{com}, 0 \in \tilde{\sigma_*}(a)\} \\ &= \{E \in V(\mathcal{A}) | \forall a \in E^k_{com}, \forall p \in \mathcal{P}_k, p(0) \in \sigma_*(p(a))\} \\ &= \{E \in V(\mathcal{A}) | \forall a \in E^k_{com}, 0 \in \sigma_*(p(a) - p(0))\} \\ &= \{E \in V(\mathcal{A}) | \forall a \in E^k_{com}, 0 \in \sigma_*(p(a)), \forall p \in \mathcal{P}^0(a)\} \\ &= \{E \in V(\mathcal{A}) | \forall a \in E^k_{com}, \exists F \in U, p(a) \in F\} \end{aligned}$$

Se sigue que

$$U_{\tilde{\sigma_*}} = \{E \in V(\mathcal{A}) | \, E \subset \bigcup\nolimits_{F \in U} F\}.$$

Se cumple tambien que la envolvente polinomialmente convexa de un α-espectro es un α-espectro. En efecto, tenemos el siguiente teorema.

7.5 Teorema. Si $\sigma(a)$ para $a \in \mathcal{A}^k_{com}$ es un α-espectro, entonces la envolvente polinomialmente convexa $\hat{\sigma}(a)$ es un α-espectro.

Demostración. Sea $a \in \mathcal{A}^k_{com}$, puesto que $\sigma^{G(a)}(a)$ es polinomialmente convexo, es válida la implicación $\sigma(a) \subset \sigma^{G(a)}(a) \implies \hat{\sigma}(a) \subset \widehat{\sigma^{G(a)}}(a) =$

$\sigma^{G(a)}(a)$. Por lo tanto se cumple la condición (1). Ahora sean los mapeos polinomiales $p \in (\mathcal{P}_k)^m$, $q \in \mathcal{P}_m$ y sea $\lambda \in p(\hat{\sigma}(a))$, entonces $\lambda = p(\beta)\,,\beta \in \hat{\sigma}(a)$. Por lo que $|q(\lambda)| = |q \circ p(\beta)| \leq \sup_{w \in \sigma(a)}|q \circ p(w)| \leq \sup_{z \in p(\sigma(a))}|q(z)| \leq \sup_{z \in \sigma(p(a))}|q(z)|$. Por lo tanto $\lambda \in \hat{\sigma}(p(a))$. Es decir se cumple la condición (2), como queríamos demostrar. □

En contraste con la envolvente racional, en este caso se tiene que para un sólo elemento $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a) \neq \hat{\sigma}(a)$.

Otro tipo de envolvente de un espectro se estudia en el caso de un álgebra conmutativa $\mathcal{A}$. Denotemos por $M(\mathcal{A})$ el espacio de todos los ideales maximales de $\mathcal{A}$ en la topología de Gelfand. W. Żelazko demuestra en [31], el siguiente teorema donde describe los subespectros de $\mathcal{A}$.

7.6 Teorema. σ es un subespectro en un álgebra conmutativa $\mathcal{A}$, si y sólo si existe un conjunto compacto $K \subset M(\mathcal{A})$ tal que para $a = (a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \mathcal{A}^k$,

$$\sigma(a) = \sigma_K(a) = \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \in \mathcal{A}^k | \exists I \in K,\ a_i - \lambda_i e \in I,\ 1 \leq i \leq k\}.$$

Denotemos por $S(K) = \bigcup_{I \in K} I$. El siguiente resultado es demostrado por A. Wawrzyńczyk en [28].

7.7 Teorema. Si $J \subset S(K)$, es un ideal en $\mathcal{A}$, entonces existe $I \in M(\mathcal{A})$, tal que $J \subset I \subset S(K)$.

Denotemos por $\tilde{K} = \{I \in M(\mathcal{A}) |\, I \subset S(K)\}$, entonces tenemos el teorema

7.8 Teorema. El conjunto $\tilde{K}$ es compacto.

Demostración. Consideremos los elementos de $M(\mathcal{A})$ como funcionales multiplicativos en $\mathcal{A}$. Sea ϕ funcional lineal multiplicativo tal que $\phi \notin \tilde{K}$. Por la definición de $\tilde{K}$ se sigue que existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $a \in \mathrm{Ker}\phi$ pero $a \notin \mathrm{Ker}\psi$, para toda $\psi \in K$. Esto es, tenemos que existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\phi(a) = 0$ y $\psi(a) \neq 0$, para toda $\psi \in K$. Como K es compacto existe $\epsilon > 0$

tal que $|\psi(a)| > \epsilon$ para toda $\psi \in K$. Sea el conjunto

$$O_{(a,\epsilon)} = \{\varphi \in M(\mathcal{A}) | \, |\varphi(a)| < \epsilon\}.$$

$O_{(a,\epsilon)}$ es una vecindad de ϕ en la topología de Gelfand. Este abierto claramente no intersecta a K. Demostremos que tampoco intersecta a $\tilde{K}$. En efecto, supongamos que existe un elemento $\varphi \in O_{(a,\epsilon)} \cap \tilde{K}$, y tal que $\varphi(a) = \lambda$. Entonces $a - \lambda e$ pertenece a Kerφ, lo que implica que existe un elemento $\psi \in K$, tal que $a - \lambda e \in$ Kerψ, esto es, tal que $\psi(a) = \lambda$, y consecuentemente $|\psi(a)| = |\varphi(a)| < \epsilon$. Pero esto contradice el hecho de que $O_{(a,\epsilon)}$ no intersecta a K. Por lo tanto $O_{(a,\epsilon)}$ no intersecta a $\tilde{K}$, por lo que $\tilde{K}$, es cerrado y por consiguiente es un conjunto compacto.□

Para cada $K \subset M(\mathcal{A})$ compacto podemos definir el conjunto

$$\tilde{\sigma}_K(a_1, \cdots, a_k) = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{C}^k | \, I(a_1 - \lambda_1 e, \cdots, a_k - \lambda_k e) \subset S(K)\}$$

Gracias al Teorema 7.7 obtenemos el siguiente

7.9 Teorema. $\tilde{\sigma}_K$ es el subespectro más grande tal que $\tilde{\sigma}_K(a) = \sigma_K(a)$, para $a \in \mathcal{A}$.

Demostración. Demostremos que en efecto $\tilde{\sigma}_K(a) = \sigma_K(a)$ para $a \in \mathcal{A}$. Sea $\lambda \in \tilde{\sigma}_K(a)$, entonces el ideal $I(a - \lambda) \subset S(K)$, por lo que existe $I \in K$ tal que $a - \lambda e \in I$, por lo tanto $\lambda \in \sigma_K(a)$. Por otro lado si $\lambda \in \sigma_K(a)$ entonces existe $I \in K$ tal que $a - \lambda e \in I$, esto es $a - \lambda e \in \bigcup_{I \in K} I$ por lo que $I(a - \lambda e) \subset \bigcup_{I \in K} I = S(K)$. Por lo tanto $\lambda \in \tilde{\sigma}_K(a)$.

Demostremos ahora que $\tilde{\sigma}_K(a) = \sigma_{\tilde{K}}(a)$. Sea $\lambda \in \tilde{\sigma}_K(a)$, entonces el ideal $I(a - \lambda e) \subset S(K)$. Por el Teorema 7.7 existe $I \in M(\mathcal{A})$ tal que $I(a - \lambda e) \subset I \subset S(K)$, por lo que $I \in \tilde{K}$. Así $a - \lambda e \in I$, con $I \in \tilde{K}$, por lo tanto $\lambda \in \sigma_{\tilde{K}}(a)$. Recíprocamente si $\lambda \in \sigma_{\tilde{K}}(a)$, existe $I \in \tilde{K}$ tal que $a - \lambda e \in I$. Esto es $a - \lambda e \in I \subset S(K)$. Entonces existe $I_0 \in K$ tal que $a - \lambda e \in I_0$, por lo que $\lambda \in \sigma_K(a) = \tilde{\sigma}_K(a)$. De esta manera por la compacidad de $\tilde{K}$ y con el Teorema 7.6 concluimos que $\tilde{\sigma}_K$ es un subespectro.

Finalmente demostremos la maximalidad. Sea τ cualquier subespectro que cumple que $\tau(a) = \sigma_K(a)$, para $a \in \mathcal{A}$. Gracias al Teorema 7.6 podemos expresar $\tau(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \sigma_C(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, para algún $C \subset M(\mathcal{A})$. Se cumple que $S(C) = S(K)$. En efecto, si $a \in S(C)$, existe $I \in C$ tal que $a \in I$, por lo que $0 \in \sigma_C(a) = \tau(a) = \sigma_K(a)$. Entonces existe $J \in K$ tal que $a \in J$, por lo tanto $a \in S(K)$. Al contrario Si $a \in S(K)$, $a \in J \in K$ entonces $0 \in \sigma_K(a) = \tau(a) = \sigma_C(a)$, por lo que de manera inmediata se sigue que $a \in S(C)$. Así, si $I \in C$, entonces $I \subset S(K)$ y por el Teorema 7.7 existe $J \in \tilde{K}$ tal que $I \subset J$, pero ambos ideales son maximales por lo tanto $I = J$. Hemos demostrado que $C \subset \tilde{K}$ y por lo tanto podemos concluir que

$$\tau(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \sigma_C(a_1, a_2, \cdots, a_k) \subset \sigma_{\tilde{K}}(a_1, a_2, \cdots, a_k).$$

□

El concepto fundamental en este trabajo es el de subespacio espectral generalizado. Este concepto nos permitió expresar los α-espectros en términos de una familia de subespacios espectrales. Esto es lo esencial, pues este hecho, ha permitido establecer y demostrar practicamente todos los teoremas aquí presentados, estudiando las propiedades de esas familias de subespacios espectrales. Esto nos ha permitido, también, establecer que varios de los espectros combinados queden dentro de este nuevo enfoque. Pero finalmente debemos considerar la cuestión si realmente el enfoque de la teoría de los espectros combinados, en términos de subespacios espectrales generalizados enriquecen a la misma.

Como se ha demostrado en el Teorema 3.4, los espacios espectrales generalizados, que son subálgebras sin unidad, son suficientes para describir los valores de cualquier subespectro sobre $\mathcal{A}_{com}$. Esta descripción, si es muy importante, como herramienta, aunque, en casos concretos resulta muy complicada.

Consideremos un solo subespacio espectral $E \subset \mathcal{A}$, y sea $\tau = \sigma_{\{E\}}$. El espectro $\tau(a)$, consta de un solo punto, y su descripción en términos de subespacios espectrales también es muy sencilla; mientras que la familia de subálgebras U, necesaria para describir τ como σ_U, consta de todas las subálgebras conmutativas contenidas en E, y puede ser muy numerosa.

Hemos introducido el concepto de subespacio espectral generalizado, como "paquete" de subálgebras conmutativas facilitando la descripción de familias de subálgebras.

Siguiendo las ideas de Gelfand definimos la topología en el espacio $V(\mathcal{A})$, de tal manera que a los conjuntos compactos en $V(\mathcal{A})$, le corresponden α-espectros compactos.

Hemos expresado en términos de subespacios espectrales, la propiedad de proyección de un α-espectro, para demostrar luego que la propiedad de proyección implica la propiedad de mapeo espectral, (para α-espectros).

Hemos mostrado finalmente, que los α-espectros forman una familia que es cerrada con respecto a las operaciones de tomar envolventes racionales y polinomiales de conjuntos $\tau(a)$, $a \in \mathcal{A}_{com}$.

Podemos mencionar muchos problemas abiertos relacionados con esta teoría. Los más importantes se relacionan con la topología del espacio $V(\mathcal{A})$. En particular no se sabe si los elementos maximales de $\mathcal{A}$ forman un conjunto compacto. En forma más general se podría esperar que el conjunto de elementos maximales de un subconjunto cerrado $U \subset V(\mathcal{A})$, es un conjunto cerrado. No es mas interesante el problema de describir, en algunos casos concretos, el espacio $V(\mathcal{A})$, o por lo menos, construir otros ejemplos, no triviales, de subespacios espectrales generalizados.

Referencias

[1] Arens, R., *The analytic functional calculus in commutative topological algebras*, Pacific J. Math. 11 (1961), 405-429.

[2] ——, Calderón, A. P., *Analytic functions of several Banach algebra elements*, Annals of Math. 62 (1955), 204-216.

[3] Bonsall, F., Duncan J., *Numerical ranges of operators on normed spaces and elements of normed algebras*, London Math. Soc. Lect. Notes Series 2 (1971), Cambridge.

[4] Gamelin, T. W., *Uniform Algebras*, Prentice Hall, 1969.

[5] Curto, R. E., *Applications of several complex variables to multiparameter spectral theory, in: Surveys of Some Recent Results in Operator Theory.* Vol. II, Y.B. Conway and B.B. Morell (Editors), Pitman Research Notes in Mathematics Series 192, Longman, Harlow, Essex, New York 1988, 25-90.

[6] Harte, R. E., *Spectral mapping theorems*, Proc. Ray Irish Acad. Sect. A 72 (1972), 89-107.

[7] Kahane, J. P., Żelazko, W., *A characterization of maximal ideals in conmutative Banach algebras*, Studia Math. 29 (1968), 339-343.

[8] Kordula, V., Müller, V. *Vasilescu-Martinelli formula for operators in Banach spaces.* Preprint.

[9] —— *On the axiomatic theory of spectrum*, Studia Math. 119(1996), 109-128.

[10] Martínez, A., Wawrzyńczyk, A., *An approach to joint spectra*, Ann. Pol. Math. 72,2, 1999. 131-144.

[11] —— *Families of ideals in Banach algebras and joint spectra*, Aportaciones Matematicas, Serie de Comunicaciones 22 (1998), 113-118. Sociedad Matemática Mexicana.

[12] Mbekhta M., Müller, V., *On the axiomatic theory of spectrum II*, Studia Math. 119,2(1996), 129-147.

[13] Müller, V., *The Słodkowski spectra and higher Shilov boundaries*, Studia Math. 105(1) (1993), 69-75.

[14] —— *On the regular spectrum*, J. Operator Theory. 31 (1994), 363-380.

[15] —— *Spectral systems*, Unpublished notes, 1997

[16] Müller V., Soltysiak A., *Spectrum of generators of a nonconmutative Banach algebra*, Studia Math. T. 93(1989), 87-95

[17] —— *On the Largest Generalized joint spectrum*, Commen. Math. Universitatis Carolinae. 29,2 (1988). 255-259.

[18] Rickart, C. E., *Banach Algebras*, D. Van Nostrand Company Inc. (1960).

[19] Shilov, G., *On the descomposition of a normed ring into a direct sum of ideals*, Amer. Math. Soc. Transl. 1 (1955), 37-48.

[20] Słodkowski, Z., *An infinite family of joint spectra*, Studia Math. 61 (1977), 239-255.

[21] Słodkowski, Z., Żelazko, W., *A note on semicharacters*, Spectral Theory Banach Center Publications, PWN, Warsaw 1982, 397-402.

[22] —— *On joint spectra of commuting families of operators*, Studia Math. 50 (1974), 127-148.

[23] Sołtysiak, A., *Some Recent Results in Multivariable Spectral Theory*, Publicación de la UAM-Iztapalapa. (1993).

[24] —— *Joint Spectra and Multiplicative Linear Functionals in Noncommutative Banach algebras*, Poznań 1988, Adam Mickiewicz University press, 62 pp., Seria Matematyka nr 10.

[25] Taylor, J. L., *A joint spectrum for several commuting operators*, J. Funct. Anal. 6 (1970), 172-191.

[26] —— *The Analytic-functional calculus for several commuting operators*, Acta Math. 125 (1970), 1-38.

[27] Waelbroeck, L., *Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives*, J. Math. Pures et Appl. (9) 33 (1954), 147-186.

[28] Wawrzyńczyk, A., *On ideals consisting of topological zero divisors*, Studia Math., to appear.

[29] Żelazko, W., *Banach algebras*, PWN-Polish Scientific Publishers (1973).

[30] —— *On ideal theory in Banach and topological algebras*, Monografías del Instituto de Matemáticas (UNAM). 15 (1984).

[31] —— *An axiomatic approach to joint spectra I*, Studia Math. 64(1979), 249-261.